



**HAL**  
open science

## Algorithme exact pour le problème de l'indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum.

Fatiha Bendali, Jean Mailfert, Djelloul Mameri

### ► To cite this version:

Fatiha Bendali, Jean Mailfert, Djelloul Mameri. Algorithme exact pour le problème de l'indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum.. 14èmes Rencontres francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications (Algotel), 2012, La Grande Motte, France. pp.1-4. hal-00690486

**HAL Id: hal-00690486**

**<https://hal.science/hal-00690486>**

Submitted on 23 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Algorithme exact pour le problème de l'indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum<sup>†</sup>

Fatiha BENDALI, Jean MAILFERT, Djelloul MAMERI<sup>‡</sup>

LIMOS UMR CNRS 6158, Campus Scientifique des Cézéaux, 63171 Aubière, France

---

La gestion des communications radios entre des capteurs sans fil dépend de la topologie mise en place sur le réseau. Généralement, on utilise des architectures basées sur des objets combinatoires issus de la théorie des graphes comme les arbres, les ensembles dominants connexes ou faiblement connexes. Dans cet exposé, nous étudions la structure alternative d'indépendant faiblement connexe (*weakly connected independent set* ou *wcis*) et précisons ses propriétés. Nous décrivons une heuristique qui permet de trouver un *wcis* rapidement dans un graphe des communications  $G = (V, E)$  connexe, ainsi qu'un algorithme d'énumération pour la recherche d'un *wcis* de cardinalité minimum. Nous donnons enfin des résultats d'expérimentations numériques.

**Keywords:** réseau de capteurs, indépendant faiblement connexe, heuristique, algorithme d'énumération.

---

## 1 Introduction

L'étude des réseaux de capteurs sans fil remonte au début des années 90 [FSR09]. Un réseau de capteurs est une infrastructure constituée par des éléments, *les capteurs*, dotés de moyens de communication. Bien que leurs capacités de calcul et de stockage soient limitées, ceux-ci sont capables d'effectuer des mesures de phénomènes physiques (température, humidité,...) de manière autonome. A la différence des réseaux filaires ou cellulaires, un ensemble de capteurs sans fil ne dispose d'aucune infrastructure connexe prédéfinie. La question se pose alors de les organiser en réseau pour former un système collaboratif et intelligent. Généralement, on leur associe un graphe non orienté connexe  $G = (V, E)$ . Chaque capteur ainsi que la station centrale, est représenté par un sommet de  $V$ . Une arête  $e = (u, v) \in E$  rend compte de la communication possible entre deux sommets  $u$  et  $v$ . Cette liaison dépend de la puissance d'émission des deux capteurs et de leur distance euclidienne. La connexité dans le graphe de communications  $G$  est indispensable pour assurer l'acheminement de toutes les mesures rassemblées par les capteurs vers la station de base.

Lorsque le réseau de capteurs est de grande taille, la consommation énergétique de ses éléments devient un problème crucial pour la survie du système. Une topologie qui permet d'éviter les envois ou les réceptions multiples de messages entraîne une économie d'énergie globale qui concourt à la longévité du réseau. Les architectures classiques tendent à regrouper les capteurs en assurant les interconnexions entre les groupes formés [JMAX04].

Cette clusterisation de certains ensembles de capteurs a été modélisée à l'aide des notions de dominant connexes ou faiblement connexes appliquées au graphe des communications [JMAX04]. Un dominant  $D$  d'un graphe  $G$  est un ensemble de sommets de  $V$  tel que tout sommet de  $V \setminus D$  est adjacent à un sommet de  $D$ . Un dominant  $D$  de  $V$  est connexe si le sous-graphe  $G_D = (V, E(D))$  induit par  $D$  est connexe. Notons  $[D, V \setminus D]$  l'ensemble des arêtes de  $E$  ayant une extrémité dans  $D$  et l'autre dans  $V \setminus D$ . Un dominant  $D$  est dit *faiblement connexe* si le sous-graphe  $G_D = (V, E(D) \cup [D, V \setminus D])$  est connexe. La principale caractéristique de ces objets combinatoires est de sélectionner des sommets de  $V$  en préservant la connexité et donc la circulation des informations dans le graphe. L'intérêt est naturellement de sélectionner le plus petit nombre

---

<sup>†</sup>Travail partiellement financé par le projet TODO ANR 09-EMER-010.

<sup>‡</sup>bendali,mailfert,mameri@isima.fr

de tels sommets. Cependant déterminer un dominant connexe ou faiblement connexe minimum dans un graphe est NP-Difficile [GJ79, DGH<sup>+</sup>97].

Dans cet exposé, nous précisons la structure d'indépendant faiblement connexe (weakly connected independent set ou *wcis*) déjà utilisée dans [AWF03, SBM<sup>+</sup>09]. Nous décrivons un algorithme d'énumération exact des *wcis* de cardinalité minimum. Nous exposons aussi nos premiers résultats numériques obtenus par une heuristique et un algorithme exact.

## 2 Notations et définitions

Nous donnons maintenant quelques notations et définitions utilisées par la suite.

### 2.1 Notations

Étant donné un graphe non orienté connexe  $G = (V, E)$ , pour  $u$  et  $v \in V$ ,  $d_G(u, v)$  est la longueur minimum, en nombre d'arêtes, d'une chaîne entre  $u$  et  $v$ . Notons  $N(v)$  le voisinage d'un nœud  $v$ ;  $N(v) = \{w \in V : d_G(v, w) = 1\}$  et  $N^2(v) = \{w \in V : d_G(v, w) = 2\}$ .  $d(v)$  est la cardinalité de  $N(v)$  et  $\Delta(G)$ , (resp.  $\delta(G)$ ) est le degré maximum (resp. minimum) du graphe  $G$ .

### 2.2 Définitions

Soit  $S$  un sous-ensemble de  $V$ .

- $S$  est un *indépendant* ou *stable* de  $G$  si aucune arête de  $E$  ne relie deux sommets de  $S$ .
- Un *indépendant*  $S$  de  $G$  est maximal si aucun indépendant de  $G$  ne le contient strictement.
- Un indépendant  $S$  de  $G$  est *faiblement connexe* si le graphe  $G_S = (V, [S, V \setminus S])$  est connexe.

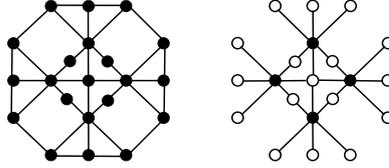


FIGURE 1: Le graphe  $G = (V, E)$  et un *wcis* de cardinalité 4.

Si  $S$  est un stable de  $G$ , le voisinage de  $S$  est  $N(S) = \{w \in V \setminus S; \exists v \in S : d_G(v, w) = 1\}$ . On appelle *mwcis*( $G$ ) l'indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum dans  $G$ .

## 3 Propriétés et complexité

### 3.1 Propriétés

Soit  $S$  un indépendant faiblement connexe de  $G = (V, E)$ . On a

- i)  $S$  est un *indépendant maximal*,
- ii)  $G_S = (V, [S, V \setminus S])$  est *biparti connexe*,
- iii) Pour tout sous-ensemble propre  $A$  de  $S$ , il existe un sommet  $u$  de  $A$  et un sommet  $v$  de  $S \setminus A$ , tel que  $d_G(u, v) = 2$ ,
- iv)  $\frac{|V(G)|-1}{\Delta(G)} \leq |S| \leq (\Delta(G) - 1)|mwcis(G)| + 1$ .

les points i) et ii) sont des conséquences directes de la définition. Le point iii) est présent dans [AWF03]. Le point iv) s'obtient en examinant la partition de  $V$  induite par un *wcis* de  $G$ .

### 3.2 Complexité de la recherche du *wcis* de cardinalité minimum

Le problème de décision associé au problème du *wcis* de cardinalité minimum (*MWCISP*) se définit par :

**Problème (WCISD) :**

**Instance :**  $G = (V, E)$  un graphe non orienté connexe et  $k$  un entier ;

**Question :**  $G$  contient-il un *wcis* de taille au plus  $k$  ?

## Algorithme exact pour le problème de l'indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum

En réduisant polynomialement le problème de décision associé à l'ensemble indépendant dominant au *WCISD*, on obtient le résultat :

**Théorème 1 :** *WCISD* est NP-Complet.

## 4 Heuristique et Algorithme d'énumération

Dans cette section, nous décrivons les principales idées de l'heuristique et de l'algorithme d'énumération implicite pour la recherche des *wcis* de cardinalité minimum dans  $G$ .

### 4.1 Principe de l'heuristique

L'heuristique utilisée est gloutonne. Soit  $M$  l'ensemble des sommets de l'indépendant courant et  $N(M)$  l'ensemble des voisins des sommets dans  $M$ . Nous procédons à la sélection d'un nouveau sommet à insérer dans  $M$  de deux façons :

- De manière déterministe en sélectionnant un nouveau candidat  $u_0 \in N^2(v) \setminus (M \cup N(M))$  pour un sommet  $v$  de  $M$ , selon le critère du plus grand nombre de voisins dans  $V \setminus (M \cup N(M))$ .
- De manière aléatoire par un tirage dans un  $N^2(v) \setminus (M \cup N(M))$ , avec  $v \in M$ .

### 4.2 Algorithme d'énumération implicite

L'algorithme d'énumération nous permet de déterminer tous les indépendants faiblement connexes de  $G$  de cardinalité minimum. Il utilise une structure d'arbre binaire. On choisit initialement un sommet  $u_0$  de degré  $\delta(G)$ , dont l'ensemble des voisins est  $N(u_0) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\delta(G)}\}$ . L'ordre d'exploration du graphe se fait sur un premier branchement où un sous arbre est associé aux *wcis* contenant  $u_0$  et l'autre sous arbre aux *wcis* ne contenant pas  $u_0$ . Dans ce dernier cas, un nouveau branchement est envisagé avec le même principe repris sur les  $|\delta(G)|$  voisins de  $u_0$ , de sorte qu'une linéarisation de l'arbre binaire soit de la forme :

$$u_0, \bar{u}_0 u_1, \bar{u}_0 \bar{u}_1 u_2, \dots, \bar{u}_0 \bar{u}_1 \bar{u}_2 \dots \bar{u}_{\delta(G)-1} u_{\delta(G)}$$

où  $\bar{u}$  indique que le sommet  $u$  n'est pas dans le sous arbre considéré.

Le branchement s'arrête dans les cas suivants :

1. Un *wcis* de cardinalité minimum est obtenu.
2. La cardinalité de l'ensemble indépendant courant dépasse celle du plus petit *wcis* obtenu jusque là.
3. La propriété de dominance n'est plus assurée.
4. La propriété de connexité n'est plus assurée.

Ces différentes configurations nous permettent d'établir le résultat suivant :

**Théorème 2 :** L'algorithme d'énumération implicite résout le problème d'indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum avec une complexité temps en  $O(2^{0.6959|V|})$ .

Le tableau ci-après résume les résultats numériques obtenus sur la TSPLIB avec une densité  $D = 10\%$  et en mesurant les performances suivantes :

- $Opt$  est la solution optimale obtenue par l'algorithme exact,  $Opt = |mwcis(G)|$ .
- $CPU(s)$  est le temps d'exécution en secondes de l'algorithme exact ou de l'heuristique.
- $\mu(G)$  est le nombre de solutions optimales obtenues par l'algorithme exact.
- $\phi$  est le nombre de nœuds (en millions) de l'arbre d'exploration binaire.
- $\phi_1$  est le nombre de nœuds (en millions) parcourus avant d'obtenir la première solution optimale.
- $H$  est la solution trouvée par l'heuristique gloutonne déterministe et  $H_{120s}$  est la solution obtenue par l'heuristique gloutonne aléatoire après deux minutes d'exécution.

Instances	$ V $	$Opt$	$\mu(G)$	CPU	$\phi$	$\phi_1$	$H$	CPU	$H_{120s}$	$\frac{H_{120s}-Opt}{Opt}$
kroA100	100	11	76596	789	261	43	13	0.01	12	9%
kroB100	100	11	1954	650	197	74	16	0.01	12	9%
kroC100	100	10	60	973	303	265	13	0.01	12	20%
kroD100	100	11	21074	885	268	5	15	0.00	12	9%
kroE100	100	11	14070	1086	375	342	14	0.00	12	9%

TABLE 1: Résultats numériques de l’algorithme exact et l’heuristique sur des instances de la TSPLIB

A titre d’exemple, la figure 2 représente le graphe de communications issu du graphe ”kroC100”<sup>§</sup> en fixant une puissance uniforme pour tous les capteurs réalisant une densité d’arête de 10%. La figure 3 représente l’une, parmi les 60 solutions (topologies) optimales, obtenue par l’algorithme exact.

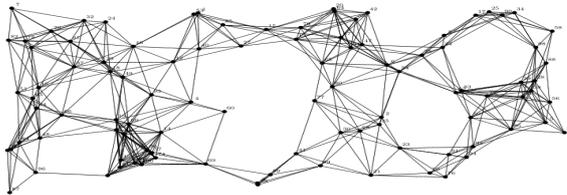


FIGURE 2: Graphe kroC100 avec une densité de 0.1.

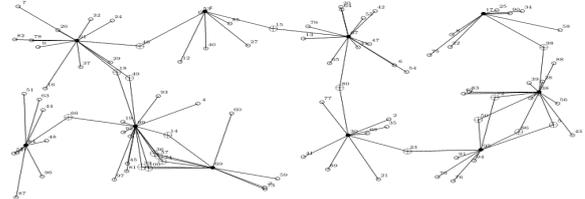


FIGURE 3:  $wcis$  minimum à 10 sommets

## 5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons proposé une heuristique et un algorithme d’énumération exact pour la recherche d’un indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum. La structure d’indépendant faiblement connexe assure à la fois l’indépendance, la dominance et la connexité dans le graphe résultant. Actuellement, nous complétons l’expérimentation de notre algorithme exact. Nous espérons améliorer son comportement sur les graphes de grande taille grâce à une analyse plus fine des configurations. Par ailleurs, nous étudions la recherche du  $wcis$  minimum dans des classes particulières de graphes.

## Références

- [AWF03] K. M. Alzoubi, P-J. Wan, and O. Frieder. Weakly connected dominating sets and spanners in wireless ad hoc networks. *Proceedings of the 23rd International Conference on Distributed Computing Systems (ICDS’03)*, 2003.
- [DGH<sup>+</sup>97] J. E. Dunbar, J. W. Grossman, J. H. Hattingh, S. T. Hedetniemi, and A. A. McRea. On weakly connected domination in graph. *Discrete Math*, (167/168) :261–269, 1997.
- [FSR09] E. Fleury and D. Simplot-Ryl. Réseaux de capteurs, théorie et modélisation. *Lavoisier*, 2009.
- [GJ79] M. R. Garey and D. S. Johnson. Computers ans intractibility : A guide to the theory of NP-completeness. *W. H. Freeman et Co., New York*, 1979.
- [Hal93] M. M. Halldórsson. Approximating the minimum maximal independence number. *Information Processing Letters, Elsevier*, 46(1993) :169–172, 1993.
- [JMAX04] B. Jeremy, D. Min, T. Andrew, and C. Xiuzhen. Connected dominating set in sensor networks and manets. *Handbook of Combinatorial, Springer, US*, 2004.
- [SBM<sup>+</sup>09] A. C. Santos, F. Bendali, J. Mailfert, C. Duhamel, and K. M. Hou. Heuristics for designing energy-efficient wireless sensor network topologies. *Journal of networks*, 4(6) :436–444, august 2009.

§. [www2.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/](http://www2.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/)