



**HAL**  
open science

## Commandabilité d'un modèle de Boltzmann sur réseau en eaux peu profondes

Diemer Anda Ondo, Laurent Lefèvre, Bastien Chopard

► **To cite this version:**

Diemer Anda Ondo, Laurent Lefèvre, Bastien Chopard. Commandabilité d'un modèle de Boltzmann sur réseau en eaux peu profondes. JDJNMACS 2011, Jun 2011, Marseille, France. pp.335-340. hal-00688647

**HAL Id: hal-00688647**

**<https://hal.science/hal-00688647>**

Submitted on 18 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Commandabilité d'un modèle de Boltzmann sur réseau d'écoulements en eau peu profondes

Diemer ANDA ONDO<sup>1</sup>, Laurent LEFÈVRE<sup>2</sup>, Bastien CHOPARD<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LCIS/Grenoble-INP, 50 rue Barthélémy de Laffemas, 26000 Valence, France

<sup>2</sup> LAGEP, Université Claude Bernard Lyon 1, bât 308G ESPCE-Lyon, 43 bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France

<sup>3</sup> Université de Genève, Batelle Building A, 7 route de Drize, 1227 Carouge, Suisse

Diemer.Anda-Ondo@lcis.grenoble-inp.fr

*Résumé*— Le Modèle de Boltzmann sur Réseau (automate cellulaire) équivalent aux équations de Saint-Venant 1D est rappelé. Ensuite sa représentation en formalisme espace d'état est introduit. Puis, le problème de commandabilité du modèle (discret) est investigué. Quelques méthodes de calcul des grammien de systèmes discret à grande échelle sont présentées. Enfin, des arguments sur l'analyse de la commandabilité sont présentés.

*Mots-clés*— commandabilité, Systèmes à paramètres répartis, la méthode de Boltzmann sur réseau, canaux d'irrigation, grammien de commandabilité, équation de Lyapunov, écoulement en eaux peu profondes.

## I. INTRODUCTION

Les modèles discrets sont exclusivement utilisés pour décrire de manière simple les systèmes à paramètres distribués complexes. Ces modèles discrets sont souvent obtenus à partir de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles. Cependant, des modèles permettant de représenter des systèmes dynamiques directement à partir de formulations discrètes ont été établis. Les modèles d'automates cellulaires en sont un exemple. Historiquement, ils ont été introduits par von Neuman et Ulam, [1]. Cependant, plus récemment, leur utilisation a été étendue aux modèles des systèmes à paramètres répartis ([2], [3], [4], [5], [6], [7]) pour divers type d'application. Dans ces applications, les exemples avec espace d'état discret sont adaptés. De plus, dans plusieurs systèmes à paramètres répartis basés sur la loi de conservation des variables macroscopiques (en Thermodynamique), des espaces d'état continus semblent plus appropriés. Pour cette raison, la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM pour Lattice Boltzmann Method) est une bonne extension des automates cellulaires. Les modèles LBM sont reconnus comme une manière efficace de résoudre les équations de Navier-Stokes. dans ce papier, nous allons d'abord les introduire de manière générale, puis nous les utiliserons dans un cas particulier pour la modélisation et le commande d'un écoulement de fluide.

La LBM a été développée récemment en 1D et 2D pour les écoulements en eaux peu profondes ([8], [9], [10]). Il a été prouvé que cette méthode était une solution alternative efficace aux discrétisations classiques des écoulements en eaux peu profondes ([8]). Cependant, très peu de choses sont connues au sujet du comportement en ce qui concerne la qualité des propriétés dynamiques. Ce papier est une

tentative de présentation de la LBM sous formalisme adéquat d'espace d'état pour une analyse de ces propriétés. Il est organisé comme suit.

Dans la partie II, les modèles LBM sont définis et le modèle pour les écoulements en eaux peu profondes est établi. Il est d'abord présenté sous sa forme classique (partie II-A), puis dans une forme espace d'état équivalente (partie II-B). Dans la partie II-C, des variables de commande et de sorties sont introduites de manière spécifique pour ce modèle.

Dans la partie III, le problème de calcul du grammien est développé. Les systèmes dynamiques discrets de grande échelle obtenue exigent des méthodes de calcul spécifiques pour avoir les grammien. Les décompositions et boîtes à outils LMI classiques sont examinées et il s'est avéré qu'avec ces outils le problème n'était pas résolu de manière satisfaisante. Finalement, une méthode itérative de point fixe est préférée pour déterminer le grammien en résolvant une équation de Lyapunov (Stein).

Enfin, dans la partie IV, les résultats obtenus sont analysés de deux points de vue. D'abord l'influence de la commandabilité en fonction du nombre de points de discrétisation, puis la convergence de l'énergie d'entrée pour atteindre un état est analysée.

Le papier se termine par un rappel des résultats et des remarques.

## II. DE L'ÉQUATION LB LOCALE AU MODÈLE SOUS FORME ESPACE D'ÉTAT

Nous allons considérer pour la suite un exemple d'écoulement d'eau dans un canal régulier ayant une pente  $I$  et une largeur  $B$ , comme présenté sur la figure 1. Sous les hypothèses d'écoulement en eaux peu profondes, [8], le niveau de l'eau et la vitesse dans un tel canal doivent vérifier :

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x(hu) &= 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(\frac{1}{2}gh^2 + hu^2) &= F\end{aligned}\quad (1)$$

où  $h$  représente le niveau d'eau,  $u$  la vitesse horizontale moyenne de l'écoulement et  $g$  l'accélération gravitationnelle. Le terme de force  $F = gh(I - J)$ , dépend de la pente de fond  $I$ , et de la pente de frottement,  $J$ , qui est donnée par la formule classique de Manning  $J = n^2 u^2 / \left(\frac{Bh}{B+2h}\right)^{4/3}$ , avec  $n$  le coefficient de Manning.

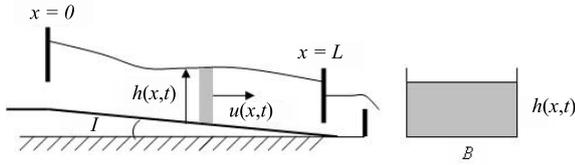


Fig. 1. Vues longitudinale (gauche) et latérale (droite) d'un canal rectangulaire ouvert

### A. Le modèle de Boltzmann sur réseau

La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) s'est montrée être un outil numérique puissant pour simuler les écoulements de fluides et beaucoup d'autres phénomènes physiques dans un domaine entièrement discret (en temps et en espace), [11]. Les dynamiques dans la LBM consistent à alterner des phases de collision et de propagation :

$$\begin{aligned} f_i^{out}(x, t) &= f_i^{in}(x, t) + \Omega_i(f(x, t)) && \text{Collision} \\ f_i^{in}(x + v_i \Delta t, t + \Delta t) &= f_i^{out}(x, t) && \text{Propagation} \end{aligned} \quad (2)$$

où  $f^{in}$  représente le vecteur de toutes les distributions de densité,  $f_i^{in}$ , de particules entrant en un site,  $f_i^{out}$  représente les densité de distributions qui en résultent,  $\Delta x$  est le pas en espace et  $\Delta t$  le pas en temps du réseau.  $\Omega_i$  est l'opérateur de collision, qui est communément défini par le modèle de Bhatnagar-Gross-Krook, [12],  $\Omega_i = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i)$ , où  $\tau$  est un temps de relaxation et  $f_i^{eq}$  sont des fonctions de distribution à l'équilibre qui dépendent du processus physique à décrire. En combinant les équations en (2), nous obtenons l'équation d'évolution

$$f_i(x + v_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (3)$$

où  $f$  est noté pour  $f^{in}$  et les arguments temporel et spatial du terme  $f_i^{eq} - f_i$  sont les mêmes que ceux du terme de droite. Nous considérons ici un réseau 1D noté  $D1Q3$  (un domaine spatial 1D avec 3 vitesses ou densités en chaque point, voir la figure 2) avec un pas spatial  $\Delta x$  et un pas temporel  $\Delta t$ . Cela conduit à une vitesse numérique du ré-

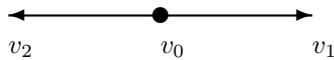


Fig. 2. Réseau  $D1Q3$

seau  $v = \Delta x / \Delta t$ . On attribue aux trois vitesses sur la figure (2) les valeurs  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = v$  et  $v_2 = -v$ . Dans l'exemple d'écoulement en eaux peu profondes, des forces externes doivent être considérées dans les équations d'évolution. Pour une force constante, cela peut être fait en ajoutant le terme de force  $F$  dans les équations (3) de la manière suivante, [11] :

$$f_i(x + v_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) + w_i \frac{\Delta t}{c_s^2} v_i F \quad (4)$$

Plusieurs paramètres et fonctions de distributions à l'équilibre inconnus apparaissent dans un tel modèle. Habituellement, ils sont tous déterminés par les hypothèses physiques exigées par le modèle. Par exemple, dans le cas  $D1Q3$ , des

raisons de symétrie conduisent à un choix de paramètres  $\omega_i$  et  $c_s^2$  satisfaisant, [9] :

$$\begin{aligned} \sum_i w_i &= 1, & \sum_i v_i w_i &= 0, & \sum_i v_i^2 w_i &= c_s^2, \\ \sum_i v_i^3 w_i &= 0, & \sum_i v_i^4 w_i &= 3c_s^4 \end{aligned} \quad (5)$$

Ce qui conduit à  $w_0 = \frac{2}{3}$ ,  $w_1 = w_2 = \frac{1}{6}$ ,  $c_s^2 = \frac{v^2}{3}$ . D'un autre côté, les distributions d'équilibre doivent être choisies de manière à donner un sens correct (physique) aux équations d'équilibre, [11]. Dans l'exemple d'écoulement en eaux peu profondes 1D, cela conduit aux relations entre les valeurs microscopiques (densités de distributions) et les variables macroscopiques, à savoir la masse, le moment et l'énergie. Dans ce cas, on a, [9] :

$$\begin{aligned} \sum_i f_i^{eq} &= h, & \sum_i v_i f_i^{eq} &= hu \\ \sum_i v_i^2 f_i^{eq} &= \frac{1}{2} g h^2 + hu^2 \end{aligned} \quad (6)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} f_0^{eq} &= h - \frac{1}{2v^2} g h^2 - \frac{1}{v^2} h u^2 \\ f_1^{eq} &= \frac{1}{4v^2} g h^2 + \frac{1}{2v} h u + \frac{1}{2v^2} h u^2 \\ f_2^{eq} &= \frac{1}{4v^2} g h^2 - \frac{1}{2v} h u + \frac{1}{2v^2} h u^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Il peut être noté qu'à chaque moment, les variables macroscopiques  $h$  et  $u$  vérifient les relations ci-dessous :

$$\begin{aligned} h &= \sum_i f_i = f_0 + f_1 + f_2 \\ hu &= \sum_i v_i f_i = v f_1 - v f_2 \end{aligned} \quad (8)$$

La hauteur d'eau  $h$  et la vitesse horizontale moyennisée en hauteur de l'eau sont les variables classiques utilisées pour décrire les écoulements en eaux peu profondes. Comme on peut le voir dans les équations précédentes, on peut les déterminer aisément à chaque point du réseau à partir des fonctions de distributions  $f_i$ .

### B. Équation d'espace d'état linéarisée

L'espace d'état dans le cas de la LBM est l'ensemble des valeurs des fonctions de distributions. Il dépend de la dimension et du type de réseau, [11], [9]. Dans un réseau ayant  $n$  sites et chaque site ayant  $|v|$  voisins (le site  $y$  étant inclus), l'espace d'état  $Z_{lbm} = ((\mathbf{R}^+)^{n|v|})$ .

#### B.1 Dynamique locale :

La dynamique locale est définie par les équations reliant les densités de distributions entrant en un site au temps  $t + 1$  et celles entrant aux sites voisins au temps précédent. Dans notre cas, réseau  $D1Q3$ , après normalisation du pas d'espace et de temps, on a :

$$f_i(x_k, t + 1) = f_i(x_{k+\bar{v}}, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (9)$$

avec  $i = 0, 1, 2$  et  $\bar{v} = \frac{v_i}{v}$ .

#### B.2 Dynamique globale

La dynamique globale est obtenue en rassemblant l'ensemble des équations dynamiques définies en (9) et en utilisant les relations (7) des fonctions d'équilibre et les conditions au bord. Dans le cas du réseau  $D1Q3$ , les dynamiques s'écrivent :

$$f_i(x_k, t + 1) = A_i [f_0 \quad f_1 \quad f_2]_{(x_{k+\bar{v}}, t)}^T \quad (10)$$

Si on définit le vecteur d'état comme suit :

$$x(t) = [f_0(x_1, t) \quad f_1(x_1, t) \quad f_2(x_1, t) \cdots \\ f_0(x_n, t) \quad f_1(x_n, t) \quad f_2(x_n, t)]^T \quad (11)$$

on obtient un modèle d'évolution classique de la forme

$$x(t+1) = A(Fr, \Psi)x(t) \quad (12)$$

avec les matrices  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A$  données en annexe. Il est à noter que ces matrices dépendent uniquement du nombre de Froude de l'écoulement,  $Fr^2 = u^2/(gh)$ , et du nombre de Froude du réseau,  $\Psi^2 = v^2/(gh)$ . Ces deux nombres caractérisent le type d'écoulement qui s'établit sur une région localisée (voir annexe). Il est important de noter également que, puisque  $Fr$  et  $\Psi$  sont des fonctions en  $h$  et  $u$  qui elles même dépendent des  $f_i$  (voir (4)), on a  $A = A(x)$  et l'équation globale (12) est non linéaire.

### B.3 Dynamique globale linéarisée

Nous allons considérer la linéarisation autour d'un point d'équilibre stationnaire de hauteur  $h_e$  et de débit proportionnel à  $h_e u_e$  au sens classique. En général, les profils d'équilibre de hauteur d'eau  $h_e$  ou de vitesse  $u_e$  dans l'équation de Saint-Venant (1) n'ont pas besoin de profils uniformes. Ces profils d'équilibre correspondent à des fonctions de distribution  $\bar{f}_i$  telles que  $\sum_i \bar{f}_i = h_e$  et  $\sum_i v_i \bar{f}_i = h_e u_e$ . À noter également que ces distributions stationnaires sont différentes des fonctions d'équilibre,  $f^{eq}$  dans le sens de la relaxation de Maxwell-Boltzmann et sont données en (7). En notant  $f_i = \bar{f}_i + \epsilon_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} h &= \sum_i f_i = h_e + \sum_i \epsilon_i \\ hu &= \sum_i v_i f_i = h_e u_e + v(\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ u &= u_e - \frac{u_e}{h_e} \sum_i \epsilon_i + \frac{v}{h_e} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ hu^2 &= h_e u_e^2 - u_e^2 \sum_i \epsilon_i + 2v u_e (\epsilon_1 - \epsilon_2) \end{aligned} \quad (13)$$

ce qui conduit à l'équation d'évolution en  $\epsilon_i$

$$\epsilon_i(x_k + v_i \Delta t, t + \Delta t) = \frac{(1 - \frac{1}{\tau}) \epsilon_i(x_k, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - \bar{f}_i)}{\tau} \quad (14)$$

En reliant les fonctions de distribution  $f_i^{eq}$  et  $\bar{f}_i$  comme suit

$$\begin{aligned} f_0^{eq} &= \bar{f}_0 + (1 - \frac{1}{v^2} gh_e + \frac{u_e^2}{v^2}) \sum_i \epsilon_i - 2 \frac{u_e}{v} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ f_1^{eq} &= \bar{f}_1 + (\frac{1}{2v^2} gh_e - \frac{u_e^2}{2v^2}) \sum_i \epsilon_i + (\frac{1}{2} + \frac{u_e}{v}) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ f_2^{eq} &= \bar{f}_2 + (\frac{1}{2v^2} gh_e - \frac{u_e^2}{2v^2}) \sum_i \epsilon_i - (\frac{1}{2} - \frac{u_e}{v}) (\epsilon_1 - \epsilon_2) \end{aligned} \quad (15)$$

on peut obtenir les équations d'évolution en variables linéarisées (variables  $\epsilon_i$ ) :

$$\epsilon_i(x_k, t+1) = T_i [\epsilon_0 \quad \epsilon_1 \quad \epsilon_2]_{(x_{k+\bar{v}}, t)}^T \quad (16)$$

Et en définissant, comme précédemment, le vecteur d'état linéarisé comme

$$z(t) = [\epsilon_0(x_1, t) \quad \epsilon_1(x_1, t) \quad \epsilon_2(x_1, t) \cdots \\ \epsilon_0(x_n, t) \quad \epsilon_1(x_n, t) \quad \epsilon_2(x_n, t)]^T \quad (17)$$

on obtient autour du profil  $(h_e, u_e)$  un système dynamique autonome linéarisé

$$z(t+1) = Tz(t) \quad (18)$$

avec les matrices  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T$  données en annexe.

### B.4 Ajout du terme de force

Le terme de force  $F$  peut être linéarisé autour de  $(h_e, u_e)$ , et en négligeant les termes en  $\epsilon_i$  d'ordre de puissance supérieur ou égaux à 2, on a

$$\epsilon_i(x_k, t+1) = (T_i + \bar{v}N) [\epsilon_0 \quad \epsilon_1 \quad \epsilon_2]_{(x_{k+\bar{v}}, t)}^T + \bar{v}gh_e(I - J_e) \quad (19)$$

où  $J_e = J(h_e, u_e)$  et  $N$  est donnée en annexe. Le modèle linéarisé avec terme de force de la LBM peut être écrit comme

$$z(t+1) = T_f z(t) \quad (20)$$

avec  $z(t)$  défini en (17) et  $T_f$  donnée en annexe.

### C. Entrées et sorties

Nous tenons à faire remarquer ici que le modèle obtenu est autonome, nous avons modélisé un écoulement. L'objectif étant soit de le commander(en y insérant par exemple des vanes), soit d'y faire des mesures, nous devons dans le cas d'une commande, définir des entrées et des sorties du système. Dans ce papier nous allons nous focaliser sur la variable d'entrées, qui sera notée  $\mathbf{u}$  (pour différencier de la vitesse macroscopique  $u$ ). Nous souhaitons définir ces variables de manière générale pour tous types de réseau, ce qui permettrait d'intégrer divers contrôles (tels que les contrôles distribués ou aux frontières) et de manière à ce que la solution forcée existe pour tout commande admissible. Pour cela, on considère :

- un réseau  $\mathcal{T}$ , qui couvre tout le domaine spatial d'étude ;
- une région  $\mathcal{T}^x \subset \mathcal{T}$  où les sites du réseau sont excitables ;
- un espace d'état  $Z_{l_{bm}}$  contenant  $x(k)$  ou  $z(k)$  définis précédemment ;
- un espace de commande  $\mathcal{U} = l_2(\mathcal{T}^x, \mathbf{R})$  avec

$$l_2(\mathcal{T}^x, \mathbf{R}) = \left\{ \mathbf{u} : \mathcal{T}^x \rightarrow \mathbf{R} / \sum_{\mathbf{x}_j \in \mathcal{T}^x} \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) * \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) < \infty \right\}$$

L'espace  $l_2(\mathcal{T}^x, \mathbf{R})$  peut être, dans un cas en dimension finie (nombre fini de sites excitables dans le réseau), identifié par l'espace  $\mathbf{R}^p$  où  $p = \text{card}(\mathcal{T}^x)$ . Nous considérons ce cas dans la suite ;

- un opérateur d'entrée

$$\begin{aligned} G : \mathcal{U} &\rightarrow Z_{l_{bm}} \\ \mathbf{u} &\rightarrow G\mathbf{u} \end{aligned} \quad (21)$$

Dans les modèles LB, un opérateur de commande local décrivant comment les sites  $x_j \in \mathcal{T}^x$  sont localement contrôlés. L'opérateur global d'entrée peut être défini comme suit :

$$G\mathbf{u} = \begin{cases} g_{x_j}(\mathbf{u}(x_j)) & \text{si } x_j \in \mathcal{T}^x \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (22)$$

Dans le cas général, ces définitions conduisent à la définition d'un système LBM commandé

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathcal{F}_{l_{bm}}(x_k, \mathbf{u}_k) \\ x_0 \in Z_{l_{bm}} \end{cases} \quad (23)$$

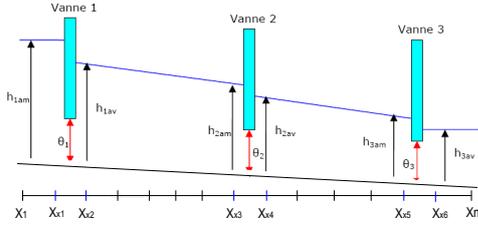


Fig. 3. Schéma d'interconnexion

Dans le cas linéaire, cela peut s'écrire sous la forme du système d'espace d'état suivant

$$\begin{cases} z_{k+1} = F_{lbm}z_k + G_{lbm}\mathbf{u}_k \\ z_0 \in Z_{lbm}^* \end{cases} \quad (24)$$

$Z_{lbm}^*$  est un espace d'état réduit dans lequel les états excitables ont été enlevés.  $F_{lbm}$  est la matrice obtenue lorsqu'on retire les lignes correspondant aux états excités (pris pour entrées) de la matrice de dynamique  $T_f$  :  $F_{lbm} = M^T T_f M$ , où  $M$  est la matrice de projection retirant les états utilisés comme entrées.  $G_{lbm}$  est la matrice de commande définie par :  $G_{lbm} = M^T T_f M_c$ , où  $M_c$  est la matrice de projection sélectionnant les colonnes correspondant aux états considérés comme entrées. Naturellement,  $G_{lbm}$  peut être vue comme l'opérateur de commande et  $F_{lbm}$  comme le générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $\{F_{lbm}^k\}_{k \geq 0}$ , [13], [14].

Dans l'exemple du canal décrit sur la figure (3), nous supposons avoir  $n$  sites et 3 vannes. Nous considérons l'ensemble du canal comme étant le domaine  $\mathcal{T}$ . Les 2 sites autour de chaque vanne comme ceux appartenant à  $\mathcal{T}^x$ . Quand nous introduisons une vanne dans le canal, nous pouvons imposer certaines fonctions de distributions du réseau, [8]. Nous pouvons par exemple définir un commande tel que :

- si  $x_j \in \mathcal{T}^x$  est avant la vanne,  $\mathbf{u}(x_j) = \varepsilon_2(x_j, k)$
- si  $x_j \in \mathcal{T}^x$  est après la vanne,  $\mathbf{u}(x_j) = \varepsilon_1(x_j, k)$

et ceci, pour chaque vanne. Si les sites avant les vannes sont par exemple  $x_2, x_8$  et  $x_{14}$ , nous aurons comme commande :

$$\mathbf{u} = [\varepsilon_2(x_2) \quad \varepsilon_1(x_3) \quad \varepsilon_2(x_8) \quad \varepsilon_1(x_9) \quad \varepsilon_2(x_{14}) \quad \varepsilon_1(x_{15})]^T \quad (25)$$

Les matrices  $F_{lbm}$  et  $G_{lbm}$ , pour cet exemple, peuvent être obtenues facilement en remarquant que les lignes à retirer de la matrice de dynamique  $T_f$  pour former les matrices  $F_{lbm}$  sont : 6, 8, 24, 26, 42 et 44, et la matrice  $M$  est obtenue en retirant les colonnes correspondantes dans la matrice identité.

### III. COMMANDABILITÉ DES SYSTÈME LB DE GRANDE TAILLE

#### A. Méthodes analytique et directe

Pour déterminer la commandabilité d'un système, on peut utiliser soit la matrice de commandabilité, soit le grammien de commandabilité. Pour le système LB en (24), la matrice de commandabilité est donnée par  $\mathcal{C} = [G_{lbm} \quad F_{lbm}G_{lbm} \quad \dots \quad F_{lbm}^{m-1}G_{lbm}]$ , où  $m$  est la dimension de  $F_{lbm}$ . Le système LB est donc commandable si la matrice de commandabilité est de plein rang ligne. Le

grammien de commandabilité défini par  $\mathcal{C}\mathcal{C}^T$  peut être défini comme  $W_c = \sum_{\tau=0}^{m-1} F_{lbm}^\tau G_{lbm} G_{lbm}^T (F_{lbm}^\tau)^T$ . De manière similaire, le système LB sera commandable si  $W_c$  est de plein rang (défini positif).

Du fait de la grande taille des systèmes LB considérés, qui sont par ailleurs creux, il est très difficile d'obtenir un quelconque résultat analytique du comportement structural de la matrice de commandabilité. Nous n'obtenons guère plus de l'expression analytique du grammien. Par conséquent nous nous intéresserons à la solution numérique du grammien de commandabilité qui sont les solutions (semi-)positives des équations de Lyapunov :

$$\begin{cases} F_{lbm}W_c F_{lbm}^T + G_{lbm}G_{lbm}^T = W_c \\ W_c \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

Divers outils LMI/LME ont été essayés pour calculer les grammien de commandabilité. Entre autres, la *toolbox Yalmip* de *Matlab*, voir [15]. Cependant cet outil n'est pas satisfaisant pour les systèmes dynamiques de grande taille creux et fournit des valeurs peu significatives pour le grammien de commandabilité (valeurs propres complexes ou négatives).

La boîte à outils *Lyapack* de *Matlab* a été utilisée pour calculer la solution de l'équation de Lyapunov pour les système de grande dimension creux, [16]. Bien que ce soit un outil pour les systèmes continus, il est fait remarquer qu'une utilisation de la transformée de Cayley permette de traiter le cas de systèmes discrets, [17]. On peut donc transformer l'équation (26) en une équation continue de la forme  $AW_c + W_c A^T = D$  avec

$$\begin{cases} A = (F_{lbm} - I)(F_{lbm} + I)^{-1} \\ D = -0.5 * (I - F_{lbm})G_{lbm}G_{lbm}^T(I - F_{lbm}^T) \end{cases} \quad (27)$$

Cependant, en utilisant cette approche (avec  $n = 200$  sites) on a la valeur propre maximale du résidu qui est 1.33 et  $1.59e+2$ , respectivement en discret et avec l'équation continue obtenue par transformation de Cayley. Par conséquent, nous avons du adopter une autre méthode. C'est une méthode de point fixe résolvant l'équation de Stein.

#### B. Une méthode itérative résolvant l'équation de Stein

Les équations de Stein sont de la forme

$$AXA' - X + C = 0 \quad (28)$$

L'équation de Lyapunov en est un cas particulier. Puisque ce sont des problèmes de point fixe, les schémas d'itération tels que les itérations de Smith, [18]

$$\begin{aligned} X_0 &= C \\ X_{k+1} &= C + AX_k A' \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

peuvent être utilisés pour résoudre le problème numériquement. Un des avantages d'une telle méthode itérative est qu'elle est bien adaptée aux problèmes de matrices creux. Cela réduit considérablement la complexité des problèmes creux de grande dimension. En plus, dans notre cas, l'erreur d'estimation en norme de Frobenius  $\|\cdot\|_F$

$$\rho_k = \|W_{c,k} - W_{c,k-1}\|_F \quad (30)$$

converge rapidement vers  $1.0e - 17$  (précision machine).

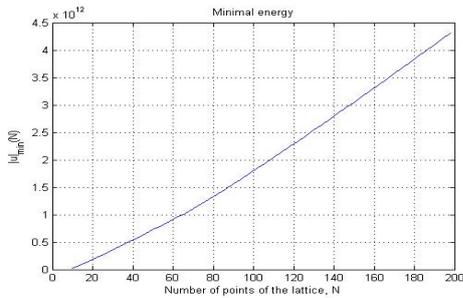


Fig. 4. Énergie du système

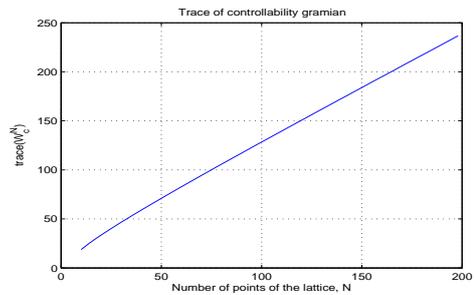


Fig. 5. Trace du Grammien

De [18], si  $\sigma(A) < 1$ , il existe des constantes réelles  $0 < L$  et  $0 < r < 1$  tels que

$$\|X - X_k\|_2 \leq L\|C\|_2(1 - r)^{-1}r^{2^k} \quad (31)$$

Cela montre que la méthode converge pour toute équation avec une matrice  $A$  stable. Et avec cette approche, nous avons essayé de voir comment variait la commandabilité, ou comment croît l'énergie à donner au système pour le faire atteindre l'état désiré. Les résultats sont présentés dans la partie suivante.

#### IV. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

##### A. Scénario de simulation

Nous considérons le canal de la figure 3 discrétisé avec un réseau  $D1Q3$  de  $n$  sites. Les valeurs numériques des paramètres du canal sont celles du micro-canal du laboratoire LCIS à Valence, France. Nous avons utilisé l'accélération gravitationnelle  $g = 9.81ms^{-2}$ , la largeur  $B = 0.1m$ , la longueur  $L = 8m$ , le coefficient de Manning  $n_m = 0.01s/m^{1/3}$  et le temps de relaxation  $\tau = 1.2s$ . Les paramètres du modèle sont définis tels que  $\Delta x = L/(n - 1)$  et  $\Delta t = \Delta x/2$ . Cela correspond à une vitesse numérique du réseau de  $2m.s^{-1}$  souhaitable pour une méthode en écoulement en eaux peu profondes en régime sous-critique.

##### B. Seuil de commandabilité

Pour déterminer la commandabilité, il semble naturel de regarder si la matrice de commandabilité est de plein rang ligne. Sous la configuration considérée, le système s'avère commandable (avec le critère de Kalman) jusqu'à un nombre de sites  $n = 30$ . Il est donc possible de définir un seuil de commandabilité qui correspondrait à un nombre maximum de sites. Dans le paragraphe suivant, l'effet de l'augmentation du nombre de sites sur l'énergie à fournir au système est présenté.

##### C. Convergence d'énergie

Nous considérons le système avec un état initial nul et nous calculons l'énergie minimale du signal d'entrée à fournir pour atteindre l'état donné par  $x_r = 0.033 * [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$  avec  $\dim(x_r) = m$  et  $m = 3 * n - 6$  la dimension de l'état d'espace  $Z_{lbm}^r$ . Nous considérons également pour simplifier, des conditions de bord périodique, voir [8]. Ces conditions périodiques permettent de compenser l'énergie dissipée dans le canal en l'injectant en amont.

Nous espérons que pour un système LB commandable, l'état  $x_r$  serait atteignable avec un signal de commande à

énergie finie, quelque soit le nombre de sites. En dépit du fait que le modèle est construit avec un système ayant des valeurs macroscopiques identiques (masse, moment, énergie), nous observons numériquement (figure 4) que l'énergie augmente rapidement avec le nombre de sites. La même remarque s'applique avec la trace du grammien représenté sur la figure (5). Ces deux figures sont obtenues avec les grammiens calculés par l'algorithme itératif de Smith avec une erreur résiduelle dans l'équation de Lyapunov (26) proche de la précision machine.

#### V. CONCLUSION

Dans ce papier nous avons considéré les modèles LB pour des systèmes à paramètres répartis. Nous avons présenté comment à partir de l'équation d'évolution locale de la LBM, en tenant compte au passage des relations des fonctions d'équilibre, on pouvait obtenir un modèle espace d'état global pour des fonctions de distributions.

Nous avons montré comment une linéarisation autour d'un profil d'équilibre macroscopique peut être tiré de la LBM dans l'exemple d'écoulements en eaux peu profondes pour avoir un système espace d'état linéarisé.

Nous avons également montré, sur l'exemple d'écoulement en eaux peu profondes, comment introduire des variables d'entrées pour avoir un système LB commandé similaire aux approximations classique en dimension finie de systèmes de commande aux frontières.

Dans la partie III, nous avons étudié diverses manières d'analyser la commandabilité des modèles obtenus. Après avoir montré que les méthodes analytique et directes ne s'appliquaient pas, nous avons rappelé une méthode itérative pour la résolution des équations de Stein et l'avons utilisé pour nos calculs.

Finalement, dans la partie IV, nous avons observé que le système LB commandé perdait numériquement ses propriétés de commandabilité avec l'augmentation du nombre de sites de discrétisation. Ni l'énergie minimum, ni la trace du grammien de commandabilité ne semblent être bornées quand le nombre de sites augmente.

Ces résultats numériques nous invitent clairement à une analyse et une compréhension plus approfondies de ce que la convergence numérique des modèles LB signifie en termes des propriétés de commandabilité et d'observabilité. Plus précisément, il apparaît que la signification de la commandabilité en elle même doit être définie de manière appropriée si nous espérons des résultats de convergence. D'un côté, on doit considérer l'énergie fournie en

entrée pour clairement identifier le scénario et d'un autre côté, il semble que les propriétés de commandabilité locale(régionale) doivent être considérées en respectant un seuil numérique.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. von NEUMAN : *The theory of self-reproducing automata*. University of Illinois Press, 1966.
- [2] R.S. OSTFELD, G.E. GLASS et F. KEESING : Spatial epidemiology : an emerging (or re-emerging) discipline. *Trends in Ecology and Evolution*, 20(6):328–336, 2005.
- [3] R. SLIMI, S. El YACOUBI, E. DUMONTEIL et S. GOURBIÈRE : A cellular automata model for chagas disease. *Applied mathematical modelling*, 33(2):1072–1085, 2009.
- [4] B. CHOPARD et D. LAGRAVA : A cellular automata model for species competition and evolution. In *Proc. of the Int. Conf. on Cellular Automata for Research and Industry ACRI'06*, Perpignan, France, 2006.
- [5] L. Hernandez HENCINAS, S. Hoya WHITE, A. Martin del REY et G. Rodriguez SANCHEZ : Modelling forest fire spread using hexagonal cellular automata. *Applied mathematical modelling*, 31(6):1213–1227, 2007.
- [6] R. OUARED, B. CHOPARD et D. RUFENACHT : A lattice boltzmann simulation of clotting in stented aneurysms and comparison with velocity or shear rate reductions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 72(2-6):108–112, 2006.
- [7] B. CHOPARD, R. OUARED, A. DEUTSCH, H. HATZIKIROU et D. WOLF-GLADROW : Lattice-gas cellular automaton models for biology : From fluids to cells. *Acta Biotheoretica*, pages 1–12, 2010. DOI 10.1007/s10441-010-9118-5.
- [8] Van Thang PHAM, B. CHOPARD, L. LEFÈVRE, D. ANDA-ONDO et E. MENDES : Study of the 1d lattice boltzmann shallow water equation and its coupling to build a canal network. *Journal of Computational Physics*, 229:7373–7400, 2010.
- [9] Jian Guo ZHOU : *Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows*. Springer, 2004.
- [10] R. SALMON : The lattice Boltzmann method as a basis for ocean circulation modeling. *J. Marine Research*, 57:503–535, 1999.
- [11] B. CHOPARD et M. DROZ : *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. Cambridge University Press, 2005.
- [12] P.L. BHATNAGAR, E.P. GROSS et M. KROOK : A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical Review*, 94(3): 511–525, 1954.
- [13] E. W. PACKEL : A simplification of gibson's theorem on discrete operator semigroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 39, 586-589, 1972.
- [14] A. G. GIBSON : A discrete hille-yosida-phillips theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 39, 761-770, 1972.
- [15] J. LOFBERG : Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. *Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium*, pages 284–289, 2004.
- [16] Thilo PENZL : A matlab toolbox for large lyapunov and riccati equations, model reductions problems, and linear-quadratic optimal control problems, August 2000.
- [17] Tyler HAYNES : Stable matrices, the cayley transform, and convergent matrices. *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 14:77–82, 1991.
- [18] Peter BENNER, Enrique S. QUINTANA-ORTI et Gregorio QUINTANA-ORTI : Solving stable stein equations on distributed memory computers. *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 1685/1999:1120–1123, January 1999.
- [19] Walter H. GRAF et M.S. ALTINAKAR : *Hydraulique fluviale Écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.

## APPENDIX

### I. TYPE D'ÉCOULEMENT

Dans le papier, nous avons utilisé les notations  $Fr^2 = \frac{u^2}{gh}$  et  $\Psi^2 = \frac{v^2}{gh}$  pour dénommer respectivement le nombre réel de Froude et une sorte de nombre de Froude du réseau. Le nombre réel de Froude est un paramètre a-dimensionnel caractérisant localement le type d'écoulement. Il exprime le

quotient entre les énergies cinétique et potentielle.  $Fr < 1$  correspond à un écoulement fluvial,  $Fr > 1$  à un écoulement torrentiel et  $Fr = 1$  à un écoulement critique, [19].

### II. MATRICES

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{\tau} \left[ \begin{array}{cccc} \tau - \frac{1}{2\Psi^2} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} - \frac{Fr}{\Psi} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} + \frac{Fr}{\Psi} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \\ \tau - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & \end{array} \right] \\
 A_1 &= \frac{1}{\tau} \left[ \begin{array}{cccc} \tau - \frac{1}{2\Psi^2} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} - \frac{Fr}{\Psi} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} + \frac{Fr}{\Psi} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \\ \tau - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & \end{array} \right] \\
 A_2 &= \frac{1}{\tau} \left[ \begin{array}{cccc} \tau - \frac{1}{2\Psi^2} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} - \frac{Fr}{\Psi} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} + \frac{Fr}{\Psi} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \\ \tau - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & \end{array} \right] \\
 T_0 &= \frac{1}{\tau} \left[ \begin{array}{cccc} \tau - \frac{1}{2\Psi^2} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} - \frac{Fr}{\Psi} & 1 - \frac{1}{2\Psi^2} + \frac{Fr}{\Psi} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{4\Psi^2} & \frac{1}{4\Psi^2} + \frac{Fr}{2\Psi} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4\Psi^2} - \frac{Fr}{2\Psi} + \tau - \frac{1}{2} & \\ \tau - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & 1 - \frac{1}{\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + 2\frac{Fr_e}{\Psi_e} & \end{array} \right] \\
 T_1 &= \frac{1}{\tau} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \\ \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \\ \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \\ \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \end{array} \right] \\
 T_2 &= \frac{1}{\tau} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \\ \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \\ \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{1}{2} - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \\ \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) - \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \tau - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Psi_e^2} (1 - Fr_e^2) + \frac{Fr_e}{\Psi_e} & \end{array} \right] \\
 N &= \frac{\delta t}{2v} g \left[ \begin{array}{ccc} (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e}) & (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} - \frac{2J_e v}{u_e}) & \\ (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e}) & (I + J_e + \frac{4J_e R_e}{3h_e} + \frac{2J_e v}{u_e}) & \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_1 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice  $T$  est obtenue en remplaçant dans la matrice  $A$  chaque élément  $A_i$  par l'élément  $T_i$  avec la direction  $i$  correspondante.

$$T_f = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_1 + N \\ 0 & T_2 - N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ T_1 + N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 - N & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_1 + N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_2 - N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_1 + N & 0 \\ T_2 - N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$