



**HAL**  
open science

# Modélisation probabiliste des incertitudes de modélisation en dynamique des structures soumises aux séismes

Christian Soize

► **To cite this version:**

Christian Soize. Modélisation probabiliste des incertitudes de modélisation en dynamique des structures soumises aux séismes. (Keynote Lecture) Colloque International "Risque, Vulnérabilité et Fiabilité dans la Construction, Oct 2003, Alger, Algérie. pp.1-11. hal-00688110

**HAL Id: hal-00688110**

**<https://hal.science/hal-00688110>**

Submitted on 16 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## MODELISATION PROBABILISTE DES INCERTITUDES DE MODELISATION EN DYNAMIQUE DES STRUCTURES SOUMISES AUX SEISMES

C. SOIZE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique, Université de Marne-la-Vallée, France, e-mail : soize@univ-mlv.fr

*RESUME : Pour l'estimation des effets dynamiques des séismes sur une construction courante, on utilise souvent un modèle mécanique équivalent très simplifié de sa structure. On introduit alors des incertitudes importantes de modélisation et ces incertitudes de modélisation ne peuvent normalement pas être prises en compte par les méthodes paramétriques usuelles car les paramètres mécaniques du modèle équivalent ne sont pas ceux de la structure réelle. On propose ici une nouvelle approche probabiliste de prise en compte des incertitudes de modélisation par une approche non paramétrique. On présentera un résumé succinct de cette approche probabiliste non paramétrique basée sur une théorie de matrices aléatoires positives. Un exemple très simple sera présenté : le modèle équivalent est une poutre console 2D de Timoshenko, homogène, excitée à sa base par une accélération transversale. La distribution de probabilité du coefficient partiel de sécurité, s'appliquant au coefficient d'amplification dynamique et induit par les incertitudes de modélisation, sera présentée en fonction du niveau des incertitudes de modélisation et pour un accélérogramme donné.*

Mots-clés : Dynamique, Incertitudes, Séismes

### 1 - Introduction

En dynamique des systèmes mécaniques complexes, il est admis aujourd'hui que les incertitudes doivent être prises en compte dans les modèles, que les excitations soient déterministes ou aléatoires, pour améliorer la qualité et la robustesse des prévisions. La pertinence de ces prévisions est nécessaire pour étudier la fiabilité de ces systèmes et pour les optimiser vis-à-vis de finalités multiples. Deux types d'incertitudes doivent être considérées.

Le premier type d'incertitudes correspond aux *incertitudes sur les données* qui décrivent les paramètres du modèle mathématique du système dynamique. Dans ce cas, les paramètres du modèle sont des paramètres physiques qui peuvent être identifiés directement ou indirectement par des mesures. Par exemple en dynamique linéaire des structures, les paramètres incertains peuvent être des caractéristiques géométriques, des conditions aux limites, les composantes du tenseur d'élasticité telles qu'un module d'Young, etc. En général, ces paramètres incertains sont modélisés par des variables aléatoires et/ou des champs stochastiques à valeurs vectorielles. Comme ces incertitudes concernent les paramètres d'un modèle mathématique donné, nous appellerons cette approche : *modélisation probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données*. Une telle approche est développée et utilisée depuis plus de deux décennies (voir, par exemple, les Refs. [2,7,9,14,16,17,21-23,25,27,28,38,41,42] pour des développements généraux et des applications, voir les Refs. [4-6,13,18,28,40,41] pour les éléments finis stochastiques et voir les Refs. [8,15,17,19,25,29,30,38,39] pour les autres aspects développés dans le cadre de la dynamique stochastique linéaire et non linéaire, et pour les excitations stochastiques paramétriques).

Le second type d'incertitudes correspond aux *incertitudes de modélisation*, c'est-à-dire aux erreurs introduites lors de la construction du modèle et qui traduisent les écarts entre la structure réelle et le modèle construit. Ces erreurs sont le plus souvent dues à l'introduction de simplifications cinématiques et géométriques. Par exemple, si l'on considère la dynamique linéaire d'un portique 2D élané, multi-étagé, non homogène et excité à sa base par une accélération transversale modélisant les effets d'un séisme, et si le modèle construit est celui d'un modèle équivalent représenté par

une poutre console 2D de Timoshenko, homogène et excitée à sa base par la même accélération transversale, alors il n'existe aucun paramètre physique dans le modèle ainsi construit qui permette de prendre en compte, par exemple, le comportement des assemblages entre les éléments du portique, l'énergie mécanique des vibrations des flexions locales des poutres du portique, etc. Dans ce cas, les paramètres du modèle équivalent ne sont pas les paramètres physiques de la structure réelle et il n'existe pas dans ce modèle équivalent construit des paramètres qui permettent de prendre en compte les erreurs de modélisation ainsi introduites. Par définition, ces erreurs ne peuvent pas être prises en compte par l'approche probabiliste paramétrique des incertitudes sur les données. Ainsi, dans le cadre de la dynamique des structures, nous avons développé une *modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation* qui permet de prendre en compte les incertitudes de modélisation. Les bases de la théorie probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation homogènes et non homogènes, pour les cas des réponses forcées dans le domaine fréquentiel et des réponses transitoires, des systèmes dynamiques linéaires, sont développées dans les Refs. [31-33,35,37]. Le cas de la réponse transitoire des systèmes dynamiques non linéaires est développé dans la Ref. [34] et son extension à une méthode mixte non paramétrique - paramétrique, avec application aux prévisions des réponses sismiques d'un circuit primaire de centrale nucléaire, est présentée dans la Ref. [3].

Dans ce papier, nous montrons comment cette approche non paramétrique peut être utilisée pour tenir compte des incertitudes de modélisation dans les calculs de réponses dynamiques des structures soumises aux effets des séismes. Ainsi, nous allons introduire un coefficient de sécurité s'appliquant au coefficient d'amplification dynamique, induit par les incertitudes de modélisation et nous allons construire sa distribution de probabilité en fonction du niveau des incertitudes de modélisation

## 2 - Modèle moyen du système dynamique

Dans le repère absolu, la structure multi-supportée du système moyen à comportement linéaire est modélisée par la méthode des éléments finis. Soit  $m$  le nombre de degrés de liberté (ddl) libres et soit  $m_s$  le nombre des ddl imposés aux différents supports. On suppose que l'excitation est due uniquement aux effets d'un séisme et qui se traduit par la seule excitation des supports de la structure. A l'instant  $t$ , l'équation différentielle du second ordre du système moyen discrétisé s'écrit donc,

$$\begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{M}}] & [\underline{\mathbf{M}}_{\ell_s}] \\ [\underline{\mathbf{M}}_{\ell_s}]^T & [\underline{\mathbf{M}}_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\ddot{\mathbf{z}}}(t) \\ \underline{\ddot{\mathbf{z}}}_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{D}}] & [\underline{\mathbf{D}}_{\ell_s}] \\ [\underline{\mathbf{D}}_{\ell_s}]^T & [\underline{\mathbf{D}}_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{z}}}(t) \\ \underline{\dot{\mathbf{z}}}_s(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{K}}] & [\underline{\mathbf{K}}_{\ell_s}] \\ [\underline{\mathbf{K}}_{\ell_s}]^T & [\underline{\mathbf{K}}_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}(t) \\ \underline{\mathbf{z}}_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{g}}_s(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

avec  $\underline{\mathbf{z}}(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des déplacements dans le repère absolu des  $m$  ddl libres,  $\underline{\mathbf{z}}_s(t) \in \mathbb{R}^{m_s}$  le vecteur des  $m_s$  ddl imposés aux supports (déplacements dans le repère absolu) et où  $\underline{\mathbf{g}}_s(t) \in \mathbb{R}^{m_s}$  est le vecteur des réactions exercées par les supports sur la structure. A chaque instant  $t$ ,  $\underline{\mathbf{z}}(t)$  peut s'écrire  $\underline{\mathbf{z}}(t) = \underline{\mathbf{y}}(t) + [\underline{\mathbf{R}}] \underline{\mathbf{z}}_s(t)$  avec  $[\underline{\mathbf{R}}] = -[\underline{\mathbf{K}}]^{-1}[\underline{\mathbf{K}}_{\ell_s}]$ . Le vecteur  $\underline{\mathbf{y}}(t)$  représente les ddl libres lorsque les déplacements des ddl imposés aux supports sont nuls pour tout  $t$ . Ainsi,  $\underline{\mathbf{y}}(t)$  est appelé (par abus de langage), le vecteur des déplacements relatifs par rapport aux supports des ddl libres. Dans ces conditions, le modèle moyen pour les déplacements relatifs  $\underline{\mathbf{y}}(t)$  s'écrit,

$$[\underline{\mathbf{M}}] \underline{\ddot{\mathbf{y}}}(t) + [\underline{\mathbf{D}}] \underline{\dot{\mathbf{y}}}(t) + [\underline{\mathbf{K}}] \underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{f}}(t) \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \quad (2)$$

avec les conditions initiales  $\underline{\mathbf{y}}(0) = \underline{\dot{\mathbf{y}}}(0) = 0$  et où le second membre de l'Eq. (2) s'écrit

$$\underline{\mathbf{f}}(t) = -([\underline{\mathbf{M}}][\underline{\mathbf{R}}] + [\underline{\mathbf{M}}_{\ell_s}]) \underline{\ddot{\mathbf{z}}}_s(t) - ([\underline{\mathbf{D}}][\underline{\mathbf{R}}] + [\underline{\mathbf{D}}_{\ell_s}]) \underline{\dot{\mathbf{z}}}_s(t) \quad . \quad (3)$$

Soit  $[\Phi_n]$  la matrice  $(m \times n)$  des modes normaux associés aux  $n$  plus petites valeurs propres  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  telles que  $[\mathbb{K}][\Phi_n] = [\mathbb{M}][\Phi_n][\Delta_n]$  avec  $[\Delta]_{jk} = \lambda_j \delta_{jk}$ . Le modèle matriciel réduit moyen s'écrit donc  $\underline{\mathbf{y}}^n(t) = [\Phi_n] \underline{\mathbf{q}}^n(t)$  où  $\underline{\mathbf{q}}^n(t) \in \mathbb{R}^n$  est solution de

$$[\underline{\mathbf{M}}_n] \ddot{\underline{\mathbf{q}}}^n(t) + [\underline{\mathbf{D}}_n] \dot{\underline{\mathbf{q}}}^n(t) + [\underline{\mathbf{K}}_n] \underline{\mathbf{q}}^n(t) = \mathbf{F}^n(t) \quad , \quad (4)$$

avec les conditions initiales  $\underline{\mathbf{q}}^n(0) = 0$  et  $\dot{\underline{\mathbf{q}}}^n(0) = 0$  et où  $\mathbf{F}^n(t) = [\Phi_n]^T \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ . Les trois matrices réelles symétriques  $(n \times n)$  du système  $[\underline{\mathbf{M}}_n] = [\Phi_n]^T [\mathbb{M}] [\Phi_n] = [I_n]$ ,  $[\underline{\mathbf{D}}_n] = [\Phi_n]^T [\mathbb{D}] [\Phi_n]$  et  $[\underline{\mathbf{K}}_n] = [\Phi_n]^T [\mathbb{K}] [\Phi_n] = [\Lambda_n]$  sont définies positives.

### 3 - Modèle stochastique du système dynamique avec incertitudes

Soit  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les matrices  $(n \times n)$  réelles,  $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices symétriques et  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices définies positives.

#### 3.1- Modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes de modélisation

Le modèle probabiliste non paramétrique introduit dans la Ref. [31] consiste à remplacer les matrices généralisées du système réduit moyen par des matrices pleines aléatoires dont le modèle probabiliste est construit avec le principe du maximum d'entropie en n'utilisant que la seule information utilisable. Soit  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$  l'espace probabilisé du modèle et soit  $n \ll m$  fixé. Le processus stochastique  $\mathbf{Z}^n(t)$ , défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ , indexé sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , représentant les  $m$  ddl libres inconnus dans le repère absolu, est tel que  $\mathbf{Z}^n(t) = \mathbf{Y}^n(t) + [\underline{\mathbf{R}}] \underline{\mathbf{z}}_s(t)$ . Le processus stochastique  $\mathbf{Y}^n(t)$ , défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ , indexé sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , représentant les  $m$  ddl libres inconnus pour les déplacements relatifs, est tel que  $\mathbf{Y}^n(t) = [\Phi_n] \mathbf{Q}^n(t)$ . Le processus stochastique  $\mathbf{Q}^n(t)$ , défini sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ , indexé sur  $[0, T]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$[\mathbf{M}_n] \ddot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{D}_n] \dot{\mathbf{Q}}^n(t) + [\mathbf{K}_n] \mathbf{Q}^n(t) = \mathbf{F}^n(t) \quad , \quad (5)$$

avec les conditions initiales  $\mathbf{Q}^n(0) = 0$  et  $\dot{\mathbf{Q}}^n(0) = 0$  et où  $[\mathbf{M}_n]$ ,  $[\mathbf{D}_n]$  et  $[\mathbf{K}_n]$  sont des matrices aléatoires. L'information utilisable pour la construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_n]$ ,  $[\mathbf{D}_n]$  et  $[\mathbf{K}_n]$ , est la suivante :

(1) Les matrices  $[\mathbf{M}_n]$ ,  $[\mathbf{D}_n]$  et  $[\mathbf{K}_n]$  sont des matrices aléatoires définies sur l'espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ . On a donc

$$[\mathbf{M}_n] , [\mathbf{D}_n] , [\mathbf{K}_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{p.s.} \quad . \quad (6)$$

(2) Les matrices  $[\mathbf{M}_n]$ ,  $[\mathbf{D}_n]$  et  $[\mathbf{K}_n]$  sont des variables aléatoires du second ordre à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  et sont telles que

$$E\{[\mathbf{M}_n]\} = [\underline{\mathbf{M}}_n] \quad , \quad E\{[\mathbf{D}_n]\} = [\underline{\mathbf{D}}_n] \quad , \quad E\{[\mathbf{K}_n]\} = [\underline{\mathbf{K}}_n] \quad , \quad (7)$$

où  $E$  désigne l'espérance mathématique.

(3) Les matrices aléatoires  $[\mathbf{M}_n]$ ,  $[\mathbf{D}_n]$  et  $[\mathbf{K}_n]$  étant définies positives presque sûrement (p.s), les matrices inverses  $[\mathbf{M}_n]^{-1}$ ,  $[\mathbf{D}_n]^{-1}$  et  $[\mathbf{K}_n]^{-1}$  existent p.s, mais cela n'implique pas l'existence de leurs moments du second ordre. On introduit donc les contraintes suivantes,

$$E\{\|[\mathbf{M}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad E\{\|[\mathbf{D}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad E\{\|[\mathbf{K}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad , \quad (8)$$

avec  $\|[\mathbf{A}]\|_F = (\text{tr}\{[\mathbf{A}][\mathbf{A}]^T\})^{1/2}$  la norme de Frobenius (ou norme de Hilbert-Schmidt) de la matrice  $[\mathbf{A}]$ . Les conditions définies par l'Eq. (8) sont indispensables pour que la solution de l'Eq. (5) soit du second ordre (voir Ref. [32]). Le modèle probabiliste correspondant aux contraintes définies par les Eqs. (6)-(8) est résumé au paragraphe 3.2 suivant.

### 3.2- Modèle probabiliste pour les matrices aléatoires définies positives

Nous résumons dans ce paragraphe les résultats concernant l'ensemble de matrices aléatoires réelles symétriques définies positives qui a été construit dans les Refs. [31,32] en utilisant le principe du maximum d'entropie [26,10,12,36] avec les seules contraintes définies par les Eqs. (6) à (8) (information utilisable). Cette théorie diffère de la théorie classique des matrices aléatoires de l'ensemble gaussien orthogonal (GOE) (pour la définition de l'ensemble GOE, voir, par exemple, la Ref. [20]), ensemble GOE qui n'est pas adapté aux problèmes de dynamique dans les domaines des basses et des moyennes fréquences, comme nous l'avons démontré dans la Ref. [35].

On considère une matrice aléatoire  $[\mathbf{A}_n]$  (représentant  $[\mathbf{M}_n]$ ,  $[\mathbf{D}_n]$  ou  $[\mathbf{K}_n]$ ) définie sur l'espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, P)$ , pour laquelle l'information utilisable est : (1) la matrice aléatoire  $[\mathbf{A}_n]$  est à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ , (2) la valeur moyenne  $[\underline{\mathbf{A}}_n]$  de la matrice aléatoire  $[\mathbf{A}_n]$  est une matrice connue telle que  $[\underline{\mathbf{A}}_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire que  $E\{[\mathbf{A}_n]\} = [\underline{\mathbf{A}}_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ , (3) le moment d'ordre deux de la norme de Frobenius de la matrice inverse  $[\mathbf{A}_n]^{-1}$  existe, c'est-à-dire que  $E\{\|[\mathbf{A}_n]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$ . On introduit une normalisation. Comme  $[\underline{\mathbf{A}}_n]$  est définie positive, il existe une matrice triangulaire supérieure  $[\underline{\mathbf{L}}_{A_n}]$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  telle que (factorisation de Cholesky)  $[\underline{\mathbf{A}}_n] = [\underline{\mathbf{L}}_{A_n}]^T [\underline{\mathbf{L}}_{A_n}]$ . Dans ces conditions, on écrit

$$[\mathbf{A}_n] = [\underline{\mathbf{L}}_{A_n}]^T [\mathbf{G}_{A_n}] [\underline{\mathbf{L}}_{A_n}] \quad , \quad (9)$$

avec  $[\mathbf{G}_{A_n}]$  une matrice aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $[\underline{\mathbf{G}}_{A_n}] = E\{[\mathbf{G}_{A_n}]\} = [I_n]$  où  $[I_n]$  est la matrice  $(n \times n)$  unité. D'autre part, on introduit un paramètre de dispersion  $\delta_A > 0$  de la matrice aléatoire  $[\mathbf{A}_n]$  qui permet de contrôler le niveau de dispersion de la matrice aléatoire. Il est défini par la relation,

$$\delta_A = \left\{ \frac{E\{\|[\mathbf{G}_{A_n}] - [\underline{\mathbf{G}}_{A_n}]\|_F^2\}}{\|[\underline{\mathbf{G}}_{A_n}]\|_F^2} \right\}^{1/2} . \quad (10)$$

Le paramètre  $\delta_A$  est indépendant de  $n$  et doit être tel que  $0 < \delta_A < \sqrt{(n+1)/(n+5)}$ . La distribution de probabilité  $P_{[\mathbf{G}_{A_n}]} = p_{[\mathbf{G}_{A_n}]}([G_n]) \tilde{d}G_n$  de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_{A_n}]$  est définie par la densité de probabilité  $[G_n] \mapsto p_{[\mathbf{G}_{A_n}]}([G_n])$  de  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ , par rapport à la mesure  $\tilde{d}G_n$  sur  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ , telle que  $\tilde{d}G_n = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d[G_n]_{ij}$ . Cette densité s'écrit,

$$p_{[\mathbf{G}_{A_n}]}([G_n]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G_n]) \times C_{\mathbf{G}_{A_n}} (\det [G_n])^{(n+1)\frac{(1-\delta_A^2)}{2\delta_A^2}} \times \exp \left\{ -\frac{(n+1)}{2\delta_A^2} \text{tr} [G_n] \right\} \quad , \quad (11)$$

où  $\det$  est le déterminant,  $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G_n])$  est égal à 1 si  $[G_n] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  et est égal à 0 si  $[G_n] \notin \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  et où  $C_{\mathbf{G}_{A_n}}$  est la constante positive de normalisation telle que

$$C_{\mathbf{G}_{A_n}} = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left( \frac{n+1}{2\delta_A^2} \right)^{n(n+1)(2\delta_A^2)^{-1}}}{\left\{ \prod_{j=1}^n \Gamma \left( \frac{n+1}{2\delta_A^2} + \frac{1-j}{2} \right) \right\}} \quad , \quad (12)$$

avec  $\Gamma(z)$  la fonction gamma définie pour  $z > 0$  par  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ . Comme  $[\underline{\mathbf{G}}_{A_n}]_{jk} = \delta_{jk}$  où  $\delta_{jk} = 0$  si  $j \neq k$  et  $\delta_{jj} = 1$ , la covariance  $C_{jk,j'k'}^{G_n}$  des variables aléatoires  $[\mathbf{G}_{A_n}]_{jk}$  et  $[\mathbf{G}_{A_n}]_{j'k'}$ , définie par  $C_{jk,j'k'}^{G_n} = E\{([\mathbf{G}_{A_n}]_{jk} - \delta_{jk})([\mathbf{G}_{A_n}]_{j'k'} - \delta_{j'k'})\}$  s'écrit,  $C_{jk,j'k'}^{G_n} = \frac{\delta_A^2}{n+1} \{\delta_{j'k} \delta_{jk'} + \delta_{jj'} \delta_{kk'}\}$ . Le membre de droite de l'Eq. (11) montre que les variables aléatoires  $\{[\mathbf{G}_{A_n}]_{jk}, j \leq k\}$  ne sont pas indépendantes. La représentation algébrique suivante de la matrice

aléatoire  $[\mathbf{G}_{A_n}]$  fournit permet de construire simplement des réalisations de la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_{A_n}]$  pour la mise en oeuvre de la méthode de Monte Carlo. La matrice aléatoire  $[\mathbf{G}_{A_n}]$ , dont la densité de probabilité est donnée par l'Eq. (11), s'écrit  $[\mathbf{G}_{A_n}] = [\mathbf{L}_{A_n}]^T [\mathbf{L}_{A_n}]$  avec  $[\mathbf{L}_{A_n}]$  une matrice aléatoire triangulaire supérieure à valeurs dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , telle que : (1) les variables aléatoires  $\{[\mathbf{L}_{A_n}]_{jj'}, j \leq j'\}$  sont indépendantes, (2) pour  $j < j'$ , la variable aléatoire réelle  $[\mathbf{L}_{A_n}]_{jj'}$  s'écrit  $[\mathbf{L}_{A_n}]_{jj'} = \sigma_n U_{jj'}$  avec  $\sigma_n = \delta_A(n+1)^{-1/2}$  et où  $U_{jj'}$  est une variable aléatoire réelle Gaussienne, centrée et de variance 1, (3) pour  $j = j'$ , la variable aléatoire positive  $[\mathbf{L}_{A_n}]_{jj}$  s'écrit  $[\mathbf{L}_{A_n}]_{jj} = \sigma_n \sqrt{2V_j}$  avec  $V_j$  une variable aléatoire de loi gamma dont la densité de probabilité  $p_{V_j}(v)$  par rapport à  $dv$  s'écrit  $p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \{\Gamma(\frac{n+1}{2\delta_A^2} + \frac{1-j}{2})\}^{-1} v^{\frac{n+1}{2\delta_A^2} - \frac{1+j}{2}} e^{-v}$ . Si l'on considère  $\nu$  matrices aléatoires  $[\mathbf{A}_n^1], \dots, [\mathbf{A}_n^\nu]$  à valeurs dans  $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$  telle que pour chaque  $j$  dans  $\{1, \dots, \nu\}$ , la seule information utilisable est celle définie ci-avant, alors l'application du principe du maximum d'entropie montre que les matrices aléatoires  $[\mathbf{A}_n^1], \dots, [\mathbf{A}_n^\nu]$  sont indépendantes.

### 3.3- Coefficient partiel de sécurité s'appliquant au coefficient d'amplification dynamique, induit par les incertitudes de modélisation

Soit  $\underline{\mathbf{y}}_{qs}(t)$  le vecteur des déplacements relatifs quasistatiques du système moyen, solution, à chaque instant  $t$ , de l'équation statique  $[\mathbb{K}]\underline{\mathbf{y}}_{qs}(t) = \mathbf{f}(t)$ . Dans le cadre de l'approximation d'ordre  $n$  introduite au paragraphe 2, on définit le coefficient d'amplification dynamique  $\underline{b}$  du système moyen par rapport à l'énergie élastique :

$$\underline{b} = \max_{t \in [0, T]} \underline{r}(t) \quad , \quad \underline{r}(t) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \underline{\mathbf{y}}^n(t)^T [\mathbb{K}] \underline{\mathbf{y}}^n(t)}{\frac{1}{2} \underline{\mathbf{y}}_{qs}(t)^T [\mathbb{K}] \underline{\mathbf{y}}_{qs}(t)}} \quad , \quad (13)$$

avec  $\underline{\mathbf{y}}^n(t) = [\underline{\Phi}_n] \underline{\mathbf{q}}^n(t)$  où  $\underline{\mathbf{q}}^n(t)$  est solution de l'Eq. (4). De même, dans le cadre de l'approximation d'ordre  $n$  introduite au paragraphe 3.1, le coefficient d'amplification dynamique  $B$  du système stochastique par rapport à l'énergie élastique est alors la variable aléatoire définie par :

$$B = \max_{t \in [0, T]} R(t) \quad , \quad R(t) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \mathbf{Y}^n(t)^T [\mathbb{K}] \mathbf{Y}^n(t)}{\frac{1}{2} \underline{\mathbf{y}}_{qs}(t)^T [\mathbb{K}] \underline{\mathbf{y}}_{qs}(t)}} \quad , \quad (14)$$

avec  $\mathbf{Y}^n(t) = [\underline{\Phi}_n] \mathbf{Q}^n(t)$  où  $\mathbf{Q}^n(t)$  est solution de l'équation stochastique (5). Le coefficient partiel de sécurité  $\Gamma$  s'appliquant au coefficient d'amplification dynamique  $B$  induit par les incertitudes de modélisation, est la variable aléatoire  $\Gamma$  telle que

$$B = \Gamma \underline{b} \quad . \quad (15)$$

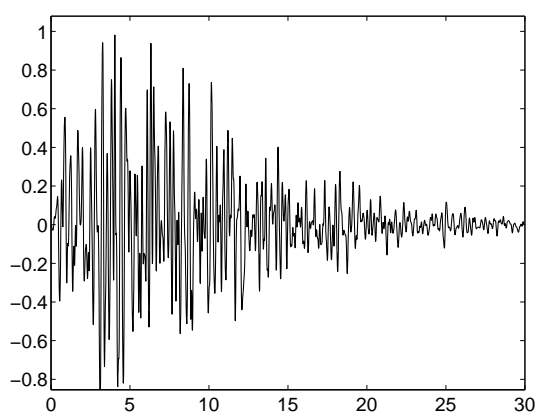
La convergence vis-à-vis de la dimension  $n$  de la réduction du modèle est analysée en étudiant la fonction  $n \mapsto \|\Gamma\| = \{E\{\Gamma^2\}\}^{1/2}$ . Pour une valeur de  $n$  fixée, telle que la solution stochastique soit convergée en moyenne d'ordre deux, ce qui implique la convergence en probabilité et la convergence en loi, on calcule, pour la variable aléatoire  $\Gamma$ , sa moyenne  $E\{\Gamma\}$ , son écart type  $\sigma_\Gamma$ , sa fonction de densité de probabilité  $p_\Gamma(\gamma)$  par rapport à  $d\gamma$ , sa fonction de répartition  $F_\Gamma(\gamma) = P\{\Gamma \leq \gamma\} = \int_0^\gamma p_\Gamma(g) dg$  et enfin la valeur  $\gamma^*$  telle que  $P\{\Gamma \leq \gamma^*\} = 0.95$ . On en déduit alors facilement, pour le coefficient d'amplification dynamique aléatoire  $B$ , la valeur  $b^*$  telle que  $P\{B \leq b^*\} = 0.95$ . Enfin, en introduisant le déplacement quasistatique maximum du système moyen, noté  $\underline{y}_{qs, max}$  =

$\max_{t \in [0, T]} \{ \max_{\ell=1, \dots, m} \{ \underline{y}_{qs}(t) \}_\ell \}$  et en introduisant le déplacement aléatoire maximum, noté  $\text{Max}_y$  et défini par  $\text{Max}_y = B \underline{y}_{qs, max}$ , on en déduit la valeur  $\text{max}_y^*$  telle que  $P\{\text{Max}_y \leq \text{max}_y^*\} = 0.95$ .

La méthode de résolution de l'équation stochastique (5) est la méthode de Monte Carlo et les grandeurs ci-dessus sont estimées en utilisant les statistiques mathématiques.

#### 4 - Application

On considère la situation de la modélisation équivalente d'un portique 2D multi-étagé et élané par une poutre 2D homogène de Timoshenko [1] repérée dans un repère cartésien  $Oxy$ , décrite dans le paragraphe 1. La fibre neutre de la poutre homogène est l'axe  $Ox$  dirigé dans le sens inverse de l'accélération de la pesanteur. On s'intéresse à la flexion de la poutre dans le plan  $Oxy$ , dans le repère relatif lié à la poutre, pour une excitation sismique à sa base située à l'origine  $O$  et correspondant à une accélération de translation suivant  $Oy$ . L'accélérogramme considéré dans tous les calculs est montré à la Fig. 1. Le pic d'énergie correspondant est situé à 3.23 Hertz.



**Figure 1 :** Accélérogramme en  $m/s^2$ , appliqué à la base, suivant la direction horizontale  $Oy$ .

Le modèle moyen de la poutre est défini comme suit. La longueur moyenne de la poutre est  $38 m$ , le module d'Young moyen est  $4.3 \times 10^{10} N/m^2$ , le moment d'inertie moyen en flexion est  $100 m^4$ , la masse linéique moyenne est  $20\,000 kg/m$ , l'aire moyenne de la section de la poutre est  $\underline{A} = 10 m^2$ , le coefficient de Poisson moyen est  $0.3$ , le module de cisaillement moyen est  $\underline{G} = 1.65 \times 10^{10} N/m^2$ . Enfin le facteur de correction moyen  $\underline{k}_s$  pour le cisaillement (qui est généralement pris égal à  $5/6$ ), est pris ici comme un paramètre pour générer un ensemble de modèles moyens. L'effet du cisaillement étant proportionnel à  $\underline{k}_s \underline{G} \underline{A}$ , la construction d'une classe de modèles équivalents moyens consiste à diminuer la valeur de  $\underline{k}_s$ . On considère 4 cas, correspondant aux valeurs  $0.006$ ,  $0.02$ ,  $0.04$  et  $0.07$  de  $\underline{k}_s$  et permettant de fixer la fréquence propre du système moyen par rapport à la fréquence de pic de l'accélérogramme qui est  $3.23$  Hertz. La discrétisation par la méthode des éléments finis est faite avec  $100$  éléments finis de poutre droite de Timoshenko, de même longueur. Pour chacun des 4 cas considérés, on note  $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$  et  $\underline{f}_4$  les quatre premières fréquences propres du système moyen,  $\underline{h}$  le coefficient d'amplification dynamique défini par l'Eq. (13) et  $\underline{y}_{qs, max} = \max_{t \in [0, T]} \{ \max_{\ell=1, \dots, m} \{ \underline{y}_{qs}(t) \}_\ell \}$  le déplacement quasistatique maximum du système moyen. Les valeurs numériques pour les 4 cas sont données dans le tableau 1.

**Tableau 1** : Valeurs numériques pour les 4 cas considérés

$\underline{k}_s$	$\underline{f}_1$ (Hz)	$\underline{f}_2$ (Hz)	$\underline{f}_3$ (Hz)	$\underline{f}_4$ (Hz)	$\underline{b}$	$\underline{y}_{qs,max}$ (m)
0.006	1.42	4.28	7.28	10.22	1.27	0.016
0.02	2.43	7.43	13.12	18.50	1.80	0.006
0.04	3.18	9.97	18.27	25.92	1.90	0.003
0.07	3.79	12.46	23.67	33.90	1.65	0.002

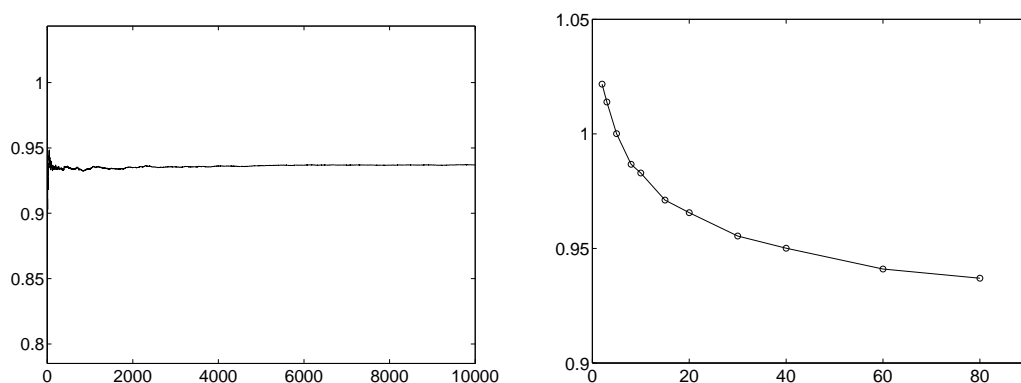
Dans toute l'application, on limite la présentation des résultats au cas pour lequel le niveau d'incertitudes sur la masse, l'amortissement et la raideur est identique, c'est-à-dire que l'on a

$$\delta_M = \delta_D = \delta_K = \delta \quad . \quad (16)$$

Le nombre de réalisations pour la méthode de Monte Carlo est noté  $n_s$ .

#### 4.1- Analyse du cas $\underline{f}_1 = 1.42$ Hz pour le niveau d'incertitudes $\delta = 0.3$

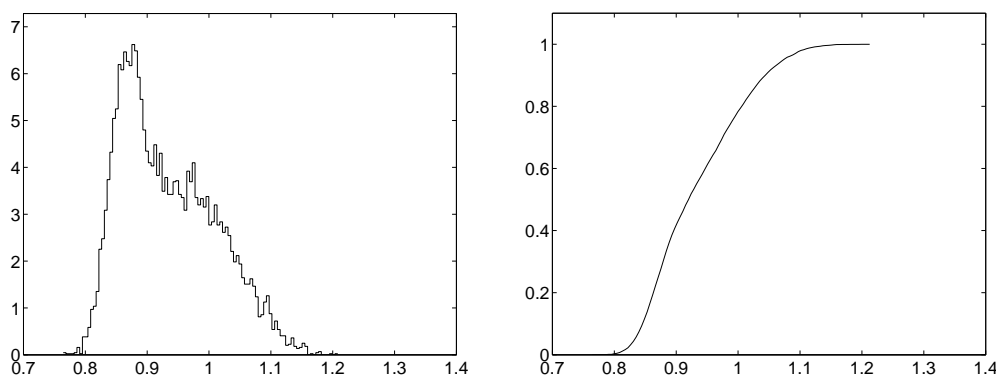
Dans tout ce paragraphe 4.1, on considère le cas  $\underline{f}_1 = 1.42$  Hz avec le niveau d'incertitudes  $\delta = 0.3$ . La convergence vis-à-vis du nombre de réalisations  $n_s$  de la méthode de Monte Carlo est analysée en étudiant la fonction  $n_s \mapsto \{E\{\Gamma^2}\}^{1/2}$ . Le graphe de cette fonction, pour  $n = 80$ , est montré à la Fig. 2-a. On note que la convergence est obtenue pour  $n_s > 4000$ . La convergence vis-à-vis de la dimension  $n$  de la réduction du modèle est analysée en étudiant la fonction  $n \mapsto \{E\{\Gamma^2}\}^{1/2}$ . Le graphe de cette fonction, pour  $n_s = 10000$ , est montré à la Fig. 2-b. On note que la convergence est obtenue pour  $n > 60$ .



**Figures 2** : Convergence en moyenne d'ordre deux de la suite de variables aléatoires  $\Gamma$  pour  $\delta=0.3$ . Figure 2-a (gauche) : Graphe  $n_s \mapsto \{E\{\Gamma^2}\}^{1/2}$  pour  $n=80$ . Figure 2-b (droite) : Graphe  $n \mapsto \{E\{\Gamma^2}\}^{1/2}$  pour  $n_s=10000$

Pour  $n = 80$  et  $n_s = 10000$ , la fonction de densité de probabilité  $\gamma \mapsto p_\Gamma(\gamma)$  par rapport à  $d\gamma$  de la variable aléatoire  $\Gamma$  est montrée à la Fig. 3-a et la fonction de répartition  $\gamma \mapsto F_\Gamma(\gamma) = P\{\Gamma \leq \gamma\} = \int_0^\gamma p_\Gamma(g) dg$  de la variable aléatoire  $\Gamma$  est montrée à la Fig. 3-b. Pour ce cas, on a  $E\{\Gamma\} = 0.934$ ,  $\sigma_\Gamma = 0.077$  et  $\gamma^* = 1.075$ .

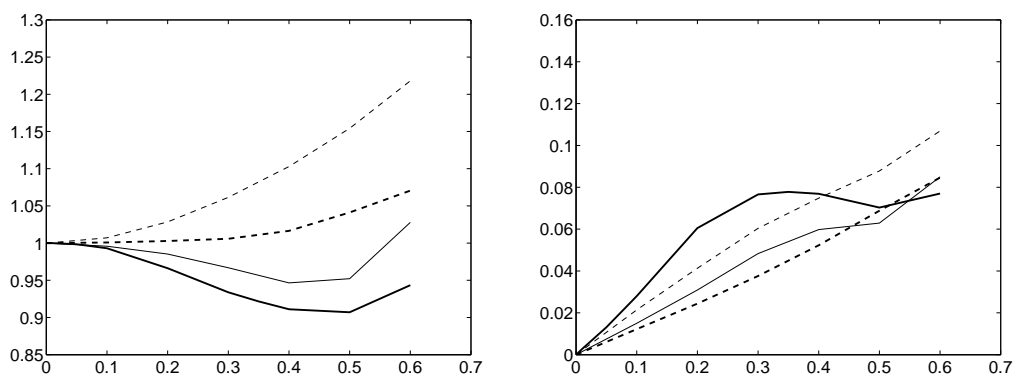




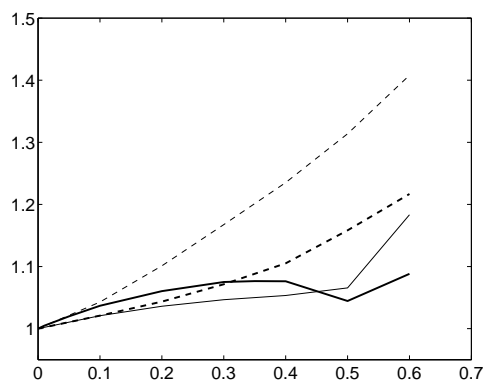
**Figures 3** : DSP et FR de la variable aléatoire  $\Gamma$  pour  $\delta=0.3$ ,  $n=80$  et  $n_s=10000$ . Figure 3-a (gauche) : Graphe de la densité de probabilité  $\gamma \mapsto p_{\Gamma}(\gamma)$ . Figure 3-b (droite) : Graphe de la fonction de répartition  $\gamma \mapsto F_{\Gamma}(\gamma) = P\{\Gamma \leq \gamma\}$ .

#### 4.2- Analyse des 4 cas en fonction du niveau d'incertitudes de modélisation

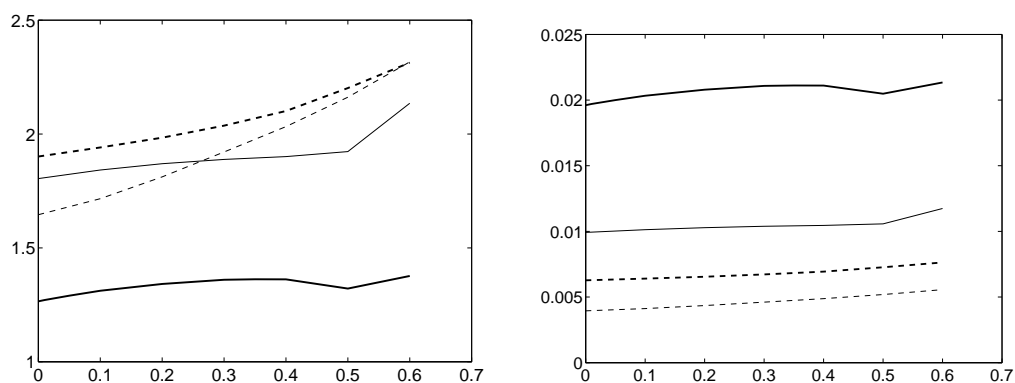
Dans tout ce paragraphe 4.2, on étudie l'influence du niveau d'incertitudes de modélisation pour les 4 cas décrits dans le tableau 1, tous les calculs étant réalisés pour  $n = 80$  et  $n_s = 10000$ . Chaque figure (Figures 4, 5 et 6) montre 4 graphes associés au 4 cas :  $\underline{f}_1 = 1.42(Hz)$  (trait continu épais),  $\underline{f}_1 = 2.43(Hz)$  (trait continu mince),  $\underline{f}_1 = 3.18(Hz)$  (trait tireté épais),  $\underline{f}_1 = 3.79(Hz)$  (trait tireté mince). Concernant le coefficient partiel de sécurité  $\Gamma$  s'appliquant au coefficient d'amplification dynamique  $B$ , induit par les incertitudes de modélisation et tel que  $B = \Gamma \underline{b}$ , la Fig. 4-a montre les graphes de la fonction  $\delta \mapsto E\{\Gamma\}$ , la Fig. 4-b les graphes de la fonction  $\delta \mapsto \sigma_{\Gamma}$  et la Fig. 5 les graphes de la fonction  $\delta \mapsto \gamma^*(\delta)$  avec  $P\{\Gamma \leq \gamma^*\} = 0.95$ . Concernant le coefficient d'amplification dynamique aléatoire  $B$  en fonction du niveau  $\delta$  des incertitudes de modélisation, la Fig. 6-a montre les graphes de la fonction  $\delta \mapsto b^*(\delta)$  avec  $P\{B \leq b^*\} = 0.95$ . Enfin, concernant le déplacement aléatoire maximum  $\text{Max}_y$  tel que  $\text{Max}_y = B \underline{y}_{qs,max}$ , la Fig. 6-b montre les graphes de la fonction  $\delta \mapsto \max_y^*(\delta)$  avec  $P\{\text{Max}_y \leq \max_y^*\} = 0.95$ .



**Figures 4** : Moyenne et écart type de la variable aléatoire  $\Gamma$  en fonction de  $\delta$  pour  $n=80$  et  $n_s=10000$  et pour les 4 cas :  $\underline{f}_1=1.42(Hz)$  (trait continu épais),  $\underline{f}_1=2.43(Hz)$  (trait continu mince),  $\underline{f}_1=3.18(Hz)$  (trait tireté épais),  $\underline{f}_1=3.79(Hz)$  (trait tireté mince). Figure 4-a (gauche) : Graphes de la moyenne  $\delta \mapsto E\{\Gamma\}$ . Figure 4-b (droite) : Graphes de l'écart type  $\delta \mapsto \sigma_{\Gamma}$ .



**Figure 5** : Valeur de  $\gamma^*$  en fonction de  $\delta$  pour  $n=80$  et  $n_s=10000$  et pour les 4 cas :  $f_1=1.42(Hz)$  (trait continu épais),  $f_1=2.43(Hz)$  (trait continu mince),  $f_1=3.18(Hz)$  (trait tireté épais),  $f_1=3.79(Hz)$  (trait tireté mince). Graphes de  $\delta \mapsto \gamma^*(\delta)$  tel que  $P\{\Gamma \leq \gamma^*\}=0.95$ .



**Figures 6** : Valeur de  $b^*$  et de  $\max_y^*$  en fonction de  $\delta$  pour  $n=80$  et  $n_s=10000$  et pour les 4 cas :  $f_1=1.42(Hz)$  (trait continu épais),  $f_1=2.43(Hz)$  (trait continu mince),  $f_1=3.18(Hz)$  (trait tireté épais),  $f_1=3.79(Hz)$  (trait tireté mince). Figure 6-a (gauche) : Graphes de  $\delta \mapsto b^*(\delta)$  tel que  $P\{B \leq b^*\}=0.95$ . Figure 6-b (droite) : Graphes de  $\delta \mapsto \max_y^*(\delta)$  tel que  $P\{\text{Max}_y \leq \max_y^*\}=0.95$ .

## Références

- [1] Clough, R.W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [2] de la Llera, J. C. and Chopra, A. K., Accidental torsion in buildings due to stiffness uncertainty, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **23**(2), 117-136, 1994.
- [3] Desceliers, C., Soize, C. and Cambier, S., Nonparametric-parametric model for random uncertainties in nonlinear structural dynamics - Application to earthquake engineering, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, (accepted for publication in June 2003).
- [4] Ditlevsen, O. and Tarp-Johansen, N. J., Choice of input fields in stochastic finite elements, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **14**(1-2), 63-72, 1998.
- [5] Ghanem, R., Ingredients for a general purpose stochastic finite element formulation, *Computer Methodes in Applied Mechanics and Engineering*, **168**, 19-34, 1999.

- [6] Ghanem, R. and Spanos, P. D., *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, San Diego, London, 1986.
- [8] Ibrahim, R. A., Structural dynamics with parameters uncertainties, *Applied Mechanics Reviews*, **40**(3), 309-328, 1987.
- [9] Iwan, D. and Jensen, H., On the dynamical response of continuous systems including model uncertainty, *Transactions of ASME*, **60**, 484-490, 1993.
- [10] Jaynes, E. T., Information theory and statistical mechanics, *Physical Review*, **106**(4), 620-630 and **108**(2), 171-190, 1957.
- [11] Kalos, M. H. and Whitlock, P. A., *Monte Carlo Methods, Volume 1: Basics.*, John Wiley and Sons, Chichester, 1986.
- [12] Kapur, J. N. and Kesavan, H. K., *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [13] Kleiber, M., Tran, D. H. and Hien, T. D., *The Stochastic Finite Element Method*, John Wiley and Sons, Chichester, 1992.
- [14] Kotulski, Z. and Sobczyk, K., Effects of parameter uncertainty on the response of vibratory systems to random excitation, *Journal of Sound and Vibration*, **119**(1), 159-171, 1987.
- [15] Krée, P. and Soize, C., *Mathematics of Random Phenomena*, Reidel, Dordrecht, 1986, (version Anglaise revue et augmentée de *Mécanique aléatoire*, Dunod, Paris, 1983).
- [16] Lee, C. and Singh, R., Analysis of discrete vibratory systems with parameter uncertainties. Part II: Impulse response, *Journal of Sound and Vibration*, **174**(3), 395-412, 1994.
- [17] Lin, Y. K. and Cai, G. Q., *Probabilistic Structural Dynamics*, New York, McGraw-Hill, 1995.
- [18] Liu, W. K., Belytschko, T. and Mani, A., Random field finite elements, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **23**, 1832-1845, 1986.
- [19] Ohayon R. and Soize C., *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, San Diego, London, 1998.
- [20] Mehta, M. L., *Random Matrices. Revised and Enlarged Second Edition*, Academic Press, New York, 1991.
- [21] Micaletti, R. C., Cakmak, A. S., Nielsen, S. R. K. and Koyluglu, H. U., A solution method for linear and geometrically nonlinear MDOF systems with random properties subject to random excitation, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **13**(2), 85-95, 1998.
- [22] Papadimitriou, C., Katafygiotis, L. S. and Beck, J. L., Approximate analysis of response variability of uncertain linear systems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **10**(4), 251-264, 1995.
- [23] Prasthofer, P. H. and Beadle, C. W., Dynamic response of structures with statistical uncertainties in their stiffness, *Journal of Sound and Vibration*, **42**(4), 477-493, 1975.
- [24] Rubinstein, R. Y., *Simulations and the Monte Carlo Methods*, John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [25] Sarkani, S. and Lutes, L. D., *Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations*, Prentice-Hall, New York, 1996.
- [26] Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.*, **27**, 379-423 and 623-659, 1948.
- [27] Shenton, H. W. and Holloway, E. S., Effect of stiffness variability on the response of isolated structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **29**, 19-36, 2000.
- [28] Shinozuka, M. and Deodatis, G., Response variability of stochastic finite element systems, *Journal of Engineering Mechanics*, **114**(3), 499-519, 1988.
- [29] Sobczyk, K., *Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

- [30] Soize, C., *The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and its Explicit Steady State Solutions*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [31] Soize, C., A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **15**(3), 277-294, 2000.
- [32] Soize, C., Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics, *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**(5), 1979-1996, 2001.
- [33] Soize, C., Transient responses of dynamical systems with random uncertainties, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **16**(4), 363-372, 2001.
- [34] Soize, C., Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncertainties, *Uncertainties in Engineering Mechanics*, <http://www.resonance-pub.com>, **1**(1), 1-38, 2001.
- [35] Soize, C., Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties, *Journal of Sound and Vibration*, **263**, 893-916, 2003.
- [36] Soize, C. *Modélisations probabilistes et incertitudes de modélisation en mécanique*, Séminaire de formation de l'école doctorale MODES, *Probabilité et Mécanique - I*, Université de Marne-la-Vallée, 2003.
- [37] Soize, C. and Chebli, H., Random uncertainties model in dynamic substructuring using a nonparametric probabilistic model, *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, **129**(4), 449-457, 2003
- [38] Soong, T. T., *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, New York, 1973.
- [39] Soong, T. T. and Grigoriu, M., *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, P T R Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- [40] Spanos, P. D. and Ghanem, R. G. ,Stochastic finite element expansion for random media, *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, **115**(5), 1035-1053, 1989.
- [41] Vanmarcke, E. and Grigoriu, M., Stochastic finite element analysis of simple beams, *Journal of Engineering Mechanics*, **109**(5), 1203-1214, 1983.
- [42] Zhao, Y. G., Ono, T. and Idota, H., Response uncertainty and time-variant reliability analysis for hysteretic MDF structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **28**, 1187-1213, 1999.
- [43] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, 4th edition, McGraw-Hill, New York, 1989 (vol. 1, 1989 and vol. 2, 1991).