



**HAL**  
open science

# Une neutralisation explicite de l'algèbre de Weyl quantique complétée

Michel Gros, Bernard Le Stum

► **To cite this version:**

Michel Gros, Bernard Le Stum. Une neutralisation explicite de l'algèbre de Weyl quantique complétée. 2012. hal-00688078v1

**HAL Id: hal-00688078**

**<https://hal.science/hal-00688078v1>**

Preprint submitted on 16 Apr 2012 (v1), last revised 16 Apr 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une neutralisation explicite de l’algèbre de Weyl quantique complétée

Michel Gros\* et Bernard Le Stum†  
IRMAR, UMR CNRS 6625  
Université de Rennes I  
Campus de Beaulieu  
35042 Rennes cedex  
France

16 avril 2012

*Résumé.* Soit  $p$  un nombre premier. Nous établissons l’existence de neutralisations de divers complétés de l’algèbre de Weyl quantique spécialisée en une racine de l’unité primitive d’ordre  $p$  (qui est “génériquement” une algèbre d’Azumaya) et donnons en particulier un énoncé de neutralisation explicite relevant celui construit en caractéristique  $p$  dans [3].

## 0 Introduction

Si  $X$  désigne un schéma lisse sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p > 0$ , il est bien connu que le centre  $Z\mathcal{D}_X^{(0)}$  de l’algèbre des opérateurs de niveau 0 (c’est-à-dire ceux “sans puissances divisées”)  $\mathcal{D}_X^{(0)}$  sur  $X$  est “gros” et que  $\mathcal{D}_X^{(0)}$  est une algèbre d’Azumaya sur  $Z\mathcal{D}_X^{(0)}$  (cf. par exemple [5] pour un rappel). Cette propriété, raffinée par la donnée d’une neutralisation d’une complétion centrale de  $\mathcal{D}_X^{(0)}$ , donne lieu à diverses applications intéressantes (correspondance de Simpson en caractéristique positive [5], classification d’équations différentielles [7], étude des représentations d’algèbres de Lie modulaires [2]...). Des variantes de certaines de ces applications existent (e.g. [6]) dans un contexte “quantique” qui fournit donc un cadre possible pour rechercher des relèvements modulo  $p^n$  ( $n \geq 1$ ) de la correspondance de Simpson en caractéristique  $p$  décrite dans [3]. Dans cette note, nous donnons des neutralisations explicites de deux complétions de l’algèbre de Weyl quantique  $D_q$  (spécialisée en une racine primitive de l’unité  $q$  d’ordre  $p$ ), qui est “génériquement” (cf. par exemple [1], Prop. 2.3) une algèbre d’Azumaya. La plus intéressante d’entre elles (cf. 4.1.3) relève celle obtenue en caractéristique  $p > 0$  dans [3], Thm. 4.13 et est la clef de l’obtention des relèvements modulo  $p^n$  auxquels on vient de faire allusion. Dans un travail ultérieur, nous montrerons comment ce point de vue permet de reconsidérer certains développements de la théorie des équations aux  $q$ -différences.

## 1 Notations

Nous noterons  $q$  une racine primitive de l’unité (dans une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  fixée) d’ordre  $p$  premier. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1}$  et  $[n]! = [n].[n-1]...[2].[1]$ . Notons qu’on a  $[p] = 0$ .

---

\*michel.gros@univ-rennes1.fr

†bernard.le-stum@univ-rennes1.fr

## 2 Définitions et Préliminaires

On pose  $R := \mathbb{Z}[q]$  qu'on verra ci-dessous comme sous-anneau de  $\overline{\mathbb{Q}}$ . On notera  $J$  l'idéal (maximal) de  $R$  engendré par  $1 - q$  et l'on identifiera  $R/J$  à  $\mathbb{F}_p$ . La classe de  $[n]$  modulo  $J$  s'identifie alors simplement à la classe de  $n$  modulo  $p$  dans  $\mathbb{Z}/p \simeq \mathbb{F}_p$ .

**Lemme 2.1.** (i) L'élément  $q$  est inversible dans  $R$ .  
(ii) Les éléments  $[i]$  avec  $(i, p) = 1$  sont inversibles dans  $R$ .

*Démonstration.* (i) En effet, on a  $q^p = 1$ .

(ii) Si  $i$  est tel que  $(i, p) = 1$ , on peut, dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , écrire

$$(2.1.1) \quad \frac{1 - q^i}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{ij}}{1 - q^i} = 1 \text{ dès que } ij \equiv 1(p).$$

Cette égalité vaut en fait dans  $R$  et l'assertion en résulte immédiatement grâce au théorème de Bézout.  $\square$

**Définition 2.2.** On appelle *algèbre de Weyl quantique* (sous-entendu spécialisée en  $q$ ) le quotient  $D_q$  de l'anneau non commutatif  $R\langle x, \delta \rangle$  des polynômes en deux variables  $x$  et  $\delta$  par l'idéal engendré par  $\delta x - qx\delta - 1$ .

L'élément  $\sigma := [\delta, x] := \delta x - x\delta = 1 - (1 - q)x\delta \in D_q$  jouera un rôle important dans la suite.

On peut faire agir  $\delta \in D_q$  sur  $R[x]$  en posant  $\delta(x^n) = [n]x^{n-1}$ . Cette action s'étend en une action de  $D_q$  sur  $R[x]$  et l'on a  $\sigma(x) = qx$  qui est donc un automorphisme de  $R[x]$ . On dispose ainsi d'un morphisme d'algèbres  $D_q \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(R[x])$  (dont on prendra garde qu'il n'est pas injectif : l'élément  $\delta^p$  a pour image l'endomorphisme nul). On notera que  $\delta$  agit sur  $R[x]$  comme une  $\sigma$ -dérivation, au sens où  $\delta(fg) = \delta(f)g + \sigma(f)\delta(g)$  pour tous  $f, g \in R[x]$ . Plus bas interviendront diverses complétions de  $D_q$  et de  $R[x]$  et nous noterons de la même manière les actions de  $\delta$  et de  $\sigma$ .

Soit  $D = \mathbb{F}_p \langle x, \partial \rangle / (\partial x - x\partial - 1)$  l'algèbre de Weyl (ordinaire) sur  $\mathbb{F}_p$  qui n'est autre que l'algèbre  $\Gamma(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1}^{(0)})$  des sections globales du faisceau des opérateurs différentiels de "niveau 0" sur la droite affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1$ .

**Proposition 2.3.** L'application

$$(2.3.1) \quad D_q \otimes_R \mathbb{F}_p \rightarrow D \quad ; \quad x \otimes 1 \mapsto x, \delta \otimes 1 \mapsto \partial$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* En effet, le module  $D_q$  (resp.  $D$ ) est libre de base  $\delta^k$  (resp.  $\partial^k$ ) sur  $R[x]$  (resp.  $\mathbb{F}_p[x]$ ).  $\square$

*Remarque.* On pourrait (comme pour l'algèbre de Weyl ordinaire) introduire une théorie d'algèbre de Weyl quantique de niveau  $m \geq 0$  avec des puissances divisées partielles de  $\delta$  (cf. [3] pour le cas ordinaire) et développer pour ces algèbres une théorie analogue à celle qui va suivre.

## 3 Sur la propriété Azumaya

Notons  $Z_q$  le centre de l'algèbre  $D_q$  et  $Z(R[x])$  le centralisateur de  $R[x]$  dans  $D_q$ .

**Lemme 3.1.** On a  $[\delta, x^p] = [\delta^p, x] = [\delta^p, x^p] = 0$ .

*Démonstration.* C'est immédiat à partir d'une des deux relations

$$(3.1.1) \quad \delta^n x = [n]\delta^{n-1} + q^n x \delta^n$$

$$(3.1.2) \quad \delta x^n = [n]x^{n-1} + q^n x^n \delta$$

obtenues par des récurrences sur  $n$ .

Soit  $R[x^p, \delta^p]$  (resp.  $R[x, \delta^p]$ ) l'algèbre commutative des polynômes en les variables  $x^p$  et  $\delta^p$  (resp.  $x$  et  $\delta^p$ ).

**Proposition 3.2.** (i) L'application canonique  $R[x^p, \delta^p] \rightarrow D_q$  induit un isomorphisme

$$(3.2.1) \quad R[x^p, \delta^p] \xrightarrow{\cong} Z_q.$$

(ii) L'application canonique  $R[x, \delta^p] \rightarrow D_q$  induit un isomorphisme

$$(3.2.2) \quad R[x, \delta^p] \xrightarrow{\cong} Z(R[x]).$$

*Démonstration.* (i) Tout élément  $P \in D_q$  s'écrit de manière unique  $P = \sum_{i=0}^n a_i(x)\delta^i$  avec  $a_i(x) \in R[x]$ . Compte tenu de la relation (3.1.1), la relation de commutation  $Px = xP$  implique, en examinant l'égalité obtenue degré par degré en  $i$  dans l'écriture ci-dessus, que  $i$  doit être un multiple de  $p$ . Un argument analogue avec la commutation à  $\delta$  (utilisant cette fois (3.1.2)) donne l'appartenance de chaque  $a_i(x)$  à  $R[x^p]$ .

(ii) On procède de manière analogue.  $\square$

Dans la suite, pour tout  $R$ -module  $M$ , on notera  $\widetilde{M}$  son séparé-complété  $J$ -adique (ou  $p$ -adique : c'est la même chose car  $(p) \subset J$  et  $J^p \subset (p)$ ).

**Proposition 3.3.** L'algèbre  $\widetilde{D}_q$  est une  $\widetilde{Z}_q$ -algèbre d'Azumaya de rang  $p^2$  neutralisée par l'extension  $\widetilde{Z}_q \rightarrow Z(\widetilde{R[x]})$ .

*Démonstration.* Montrons en effet que l'application canonique

$$(3.3.1) \quad \widetilde{D}_q \otimes_{\widetilde{Z}_q} \widetilde{Z(R[x])} \rightarrow \text{End}_{\widetilde{Z(R[x])}}(\widetilde{D}_q) \quad ; \quad Q \otimes Q' \mapsto (P \mapsto QPQ')$$

est un isomorphisme. Les modules en présence étant de même rang  $p^2$ , il suffit d'établir la surjectivité de (3.3.1). De plus, comme ils sont  $J$ -adiquement complets (car de type fini sur  $\widetilde{Z(R[x])}$ ), il suffit donc, grâce au lemme de Nakayama, de vérifier la surjectivité de la réduction modulo  $J$  de (3.3.1). Comme cette dernière s'identifie (avec les notations évidentes calquées des précédentes) à

$$(3.3.2) \quad D \otimes_Z Z(\mathbb{F}_p[x]) \rightarrow \text{End}_{Z(\mathbb{F}_p[x])}(D) \quad ; \quad Q \otimes Q' \mapsto (P \mapsto QPQ')$$

la surjectivité découle immédiatement du résultat de M. Kaneda rappelé dans [3], thm. 3.7.  $\square$

*Remarques.* (i) Rappelons ([1], lemma 2.4) qu'on a  $\sigma^p = 1 - (1 - q)^p x^p \delta^p \in Z_q$ . On peut alors reformuler (une fois étendu ici les scalaires de  $R$  à  $\mathbb{Q}$ ) [1], Prop. 2.3 en disant que  $D_q$  est une  $Z_q$ -algèbre d'Azumaya au-dessus du lieu d'inversibilité  $\mathcal{U} \subset \text{Spec}(Z_q)$  de  $\sigma^p$ . Le lecteur observera que passer à la complétion  $J$ -adique rend automatiquement  $\sigma^p$  inversible (car  $(1 - q) = J$ ).

(ii) Nous ignorons si l'analogue évident de (3.3.1) avant  $J$ -complétion est un isomorphisme au-dessus de  $\mathcal{U}$  (ce qui raffinerait [1], Prop. 2.3). C'est, comme on va le voir tout de suite, par exemple le cas pour  $p = 2$  ( $q = -1$ ), exemple qui va aussi nous servir à montrer où intervient l'inversibilité de  $\sigma^p$  dans la théorie. En effet, si  $\sigma^2$  est inversible, alors, dans la base  $(1, \delta)$  de  $D_q$  sur  $Z(R[x])$ , les quatre matrices

$$(3.3.3) \quad E_1 := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de  $\text{End}_{Z(R[x])}(D_q)$  (au-dessus de  $\mathcal{U}$ ) et l'isomorphisme cherché s'obtient en vérifiant que

$$\begin{aligned}
(3.3.4) \quad u &:= (1 \otimes x - x \otimes 1) + 2[x \otimes x\delta - x^2 \otimes \delta] \mapsto E_1, \\
v &:= u \cdot \delta \mapsto E_2, \\
1 \otimes \sigma^2 - v &\mapsto E_3, \\
1 \otimes \sigma^2 \delta - 1 \otimes u \delta^2 &\mapsto E_4.
\end{aligned}$$

## 4 Neutralisation

Soit  $I$  l'idéal de  $Z_q$  engendré par  $\delta^p$ . Dans la suite, pour tout  $Z_q$ -module  $M$ , on notera  $\widehat{M}$  son séparé complété  $I$ -adique. Comme il résultera de la proposition 4.1 ci-dessous, le complété  $\widehat{Z}_q$  s'identifie bien au centre de  $\widehat{D}_q$ , ne créant ainsi aucune ambiguïté dans les notations. Par commodité, nous utiliserons librement dans la suite la base  $(1, x, \dots, x^{p-1})$  du  $\widehat{Z}_q$ -module  $\widehat{Z}(R[x])$ .

**Proposition 4.1.** Soient  $D = (d_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}, X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p} \in \text{End}_{\widehat{Z}_q}(\widehat{Z}(R[x]))$  les endomorphismes définis (dans la base ci-dessus) par les matrices dont les seuls coefficients non nuls sont les suivants :

$$(4.1.1) \quad d_{i,i+1} = [i] + q^i x^p \frac{\delta^p}{[p-1]!} \text{ pour } i \in [1, p-1] \text{ et } d_{p,1} = \frac{\delta^p}{[p-1]!};$$

$$(4.1.2) \quad x_{1,p} = x^p \text{ et } x_{i,i-1} = 1 \text{ pour } i \in [2, p].$$

Alors, l'application de  $R$ -algèbres  $R\langle x, \delta \rangle \rightarrow \text{End}_{\widehat{Z}_q}(\widehat{Z}(R[x]))$  définie par  $\delta \mapsto D; x \mapsto X$  induit, par passage au quotient, un isomorphisme de  $\widehat{Z}_q$ -algèbres

$$(4.1.3) \quad \widehat{D}_q \xrightarrow{\cong} \text{End}_{\widehat{Z}_q}(\widehat{Z}(R[x])).$$

De plus, la réduction modulo  $p$  de (4.1.3) s'identifie canoniquement à l'isomorphisme du thm. 4.13 de [3].

*Démonstration.* On a donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & [1] + qx^p \frac{\delta^p}{[p-1]!} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & [2] + q^2 x^p \frac{\delta^p}{[p-1]!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & & [p-1] + q^{p-1} x^p \frac{\delta^p}{[p-1]!} \\ \frac{\delta^p}{[p-1]!} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & x^p \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les seuls coefficients non nuls de  $DX$  (resp.  $XD$ ) sont situés sur la diagonale et le  $(j, j)$ -ième vaut

$$(4.1.4) \quad [j] + x^p q^j \frac{\delta^p}{[p-1]!} \quad (\text{resp. } [j-1] + x^p q^{j-1} \frac{\delta^p}{[p-1]!})$$

pour tout  $j \in [1, p]$  (avec ici l'abus d'écriture  $[0] = 0$ ). La matrice  $DX - qXD - 1$  a donc pour  $(j, j)$ -ième coefficient

$$(4.1.5) \quad [j] + x^p q^j \frac{\delta^p}{[p-1]!} - q([j-1] + x^p q^{j-1} \frac{\delta^p}{[p-1]!} - 1)$$

qui est effectivement nul car  $[j] = 1 + q[j-1]$  pour tout  $j \in [1, p]$ .

On dispose donc bien de l'application (4.1.3). On va ensuite utiliser un argument de réduction modulo  $I$ . Établissons tout d'abord le

**Lemme 4.2.** L'action naturelle de  $D_q$  sur  $R[x]$  est  $R[x^p]$ -linéaire et induit un isomorphisme

$$(4.2.1) \quad D_q/I \xrightarrow{\cong} \text{End}_{R[x^p]}(R[x]).$$

*Démonstration.* La  $R[x^p]$ -linéarité résulte du lemme 3.1. Comme les deux modules ont même rang  $p$  sur  $R[x^p]$ , il suffit de prouver l'injectivité. Or, si l'on choisit un représentant  $P = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(x)\delta^i \in D_q$  de  $\bar{P} \in D_q/I$  et si celui-ci vérifie  $P(x^j) = 0$  pour tout  $j \in [0, p-1]$ , on a clairement  $P = 0$ .

Revenons à la démonstration de la proposition : les deux membres de (4.1.3) étant de même rang  $p^2$  sur  $\widehat{Z}_q$ , il suffit de vérifier la surjectivité. Comme ils sont de plus complets, grâce au lemme de Nakayama, on est ramené à prouver la surjectivité de la réduction modulo  $I$  de (4.1.3). Cette réduction s'identifie canoniquement à l'isomorphisme (4.2.1) : d'où la proposition.  $\square$

*Remarque.* Comme dans [3], (p.19 warning) on notera que l'application  $\Phi : Z_q \rightarrow Z_q \simeq Z(\text{End}_{Z_q}(Z(R[x])))$  ( $Z$  désignant le centre dans le second membre);  $\delta^p \rightarrow D^p$ ,  $x^p \rightarrow X^p$  n'est pas l'identité (mais induit un automorphisme de  $\widehat{Z}_q$ ). Nous ignorons si l'extension  $\Phi : Z_q \rightarrow Z_q$  permet de neutraliser  $D_q$  au-dessus de  $\mathcal{U}$ .

**Corollaire 4.3.** La catégorie des  $\widehat{D}_q$ -modules est équivalente à celle des  $\widehat{Z}_q$ -modules.

*Démonstration.* C'est simplement l'équivalence de Morita qui à un  $\widehat{D}_q$ -module  $E$  associe le  $\widehat{Z}_q$ -module  $\text{Hom}_{\widehat{D}_q}(Z(\widehat{R[x]}), E)$  et à un  $\widehat{Z}_q$ -module  $F$  associe le  $\widehat{D}_q$ -module  $Z(\widehat{R[x]}) \otimes_{\widehat{Z}_q} F$ .  $\square$

Notons maintenant, pour la suite, qu'on dispose d'un isomorphisme  $\widehat{Z}_q \simeq R[x][[\xi]]$ ;  $x^p \mapsto x$ ,  $\delta^p \mapsto \xi$ .

**Définition 4.4.** Un  $R[x]$ -module de Higgs est un module  $H$  muni d'un endomorphisme  $R[x]$ -linéaire  $\xi_H$ . On dit qu'il est *quasi-nilpotent* si pour tout  $h \in H$ , il existe  $d \geq 0$  tel que  $\xi_H^d(h) = 0$ .

**Définition 4.5.** Une  $\sigma$ -dérivation sur un  $R[x]$ -module  $M$  est une application  $R$ -linéaire  $D_M : M \rightarrow M$  telle que  $D_M(fm) = \delta(f)m + \sigma(f)D_M(m)$  pour tous  $f \in R[x]$ ,  $m \in M$ . On dit que celle-ci est *quasi-nilpotente* si pour tout  $m \in M$ , il existe un entier naturel  $d$  tel que  $D_M^d(m) = 0$ .

On a alors le résultat suivant, qui ne fait que paraphraser le précédent lorsqu'on se limite aux objets quasi-nilpotents (voir définition 5.4 et la remarque suivant la proposition 5.5. dans [3]) :

**Corollaire 4.6.** La catégorie des  $R[x]$  modules  $M$  munis d'une  $\sigma$ -dérivation quasi-nilpotente est

équivalente à celle des  $R[x]$ -modules de Higgs  $H$  quasi-nilpotents.

Les corollaires 4.3 et 4.6 restent évidemment vrais lorsque l'on étend les scalaires, par exemple de  $R$  à  $\overline{\mathbb{Q}}$  (ou tout autre anneau intermédiaire), ou avec des anneaux de séries formelles en  $x$  (avec conditions de convergence éventuelle) à la place de  $R[x]$ .

*Remarque.* L'application  $\Phi : Z_q \rightarrow Z_q$  ci-dessus est naturellement la restriction de l'application  $\Phi : \widehat{D}_q \rightarrow \widehat{D}_q$  définie par  $\Phi(\delta^i) = D^i(1)$  (e.g.  $\Phi(\delta) = \frac{x^{p-1}\delta^p}{[p-1]!}$ ). On peut alors reformuler, dans le corollaire 4.6, le passage de  $M$  à  $H$  comme la considération des points fixes de  $M$  par  $\Phi$  (cf. [3], Def. 4.9, prop. 5.7 pour le cas analogue en caractéristique  $p > 0$ ).

Signalons pour terminer qu'il n'y a aucune difficulté à étendre, pour  $n \geq 1$ , ces résultats au cas où  $q$  est une racine primitive  $p^n$ -ième de l'unité.

## Références

- [1] Backelin, E. : *Endomorphisms of quantized Weyl algebras*. arXiv :1007.2620v1.
- [2] Bezrukavnikov, R. ; Mirkovic, I. ; Rumynin, D. : *Localization of modules for a semi-simple Lie algebra in prime characteristic (with an appendix by R. Bezrukavnikov and S. Riche)*. Ann. of Math. (2) 167 (2008), 945-991. MR 2415389.
- [3] Gros, M. ; Le Stum, B. ; Quiros, A. : *A Simpson correspondence in positive characteristic*. Publ. RIMS Kyoto Univ. 46 (2010) 1-35. MR 2662614.
- [4] Grothendieck, A. ; Dieudonné, J.A. : *Éléments de Géométrie Algébrique I (seconde édition)*. Springer-Verlag (1971).
- [5] Ogus, A. ; Vologodsky, V. : *Nonabelian Hodge theory in characteristic  $p$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 106 (2007), 1-138. MR 2373230.
- [6] Tanisaki, T. : *Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity II*. arXiv :1101.5848v1.
- [7] van der Put, M. : *Differential equations in characteristic  $p$* , Compos. Math. 97 (1995), 227-251. MR 1355126.