



**HAL**  
open science

## Probabilistic model of random uncertainties in structural dynamics for mistuned bladed disks

Evangéline Capiez-Lernout, Christian Soize

► **To cite this version:**

Evangéline Capiez-Lernout, Christian Soize. Probabilistic model of random uncertainties in structural dynamics for mistuned bladed disks. *Mechanics & Industry*, 2003, 4 (5), pp.585-594. hal-00687864

**HAL Id: hal-00687864**

**<https://hal.science/hal-00687864>**

Submitted on 15 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Modèle probabiliste des incertitudes en dynamique des structures pour le désaccordage des roues aubagées.**

**Probabilistic model of random uncertainties in structural dynamics for mistuned bladed disks.**

**Evangéline Capiez-Lernout**

Laboratoire de Mécanique, Université de Marne-La-Vallée

5, Boulevard Descartes,

77455 Marne-La-Vallée CEDEX 02, France

Fonction : Doctorat de mécanique

E-mail : [capiez@univ-mlv.fr](mailto:capiez@univ-mlv.fr)

Tél : 01 60 95 76 60

Fax : 01 60 95 76 67

**Christian Soize**

Laboratoire de Mécanique, Université de Marne-La-Vallée

5, Boulevard Descartes,

77455 Marne-La-Vallée CEDEX 02, France

Fonction : Professeur des universités

E-mail : [soize@univ-mlv.fr](mailto:soize@univ-mlv.fr)

Tél : 01 60 95 76 61

Fax : 01 60 95 76 67

Correspondance effectuée par :

**Evangéline Capiez-Lernout**

Laboratoire de Mécanique, Université de Marne-La-Vallée

5, Boulevard Descartes,

77455 Marne-La-Vallée CEDEX 02, France

Fonction : Doctorat de mécanique

E-mail : [capiez@univ-mlv.fr](mailto:capiez@univ-mlv.fr)

Tél : 01 60 95 76 60

Fax : 01 60 95 76 67

## **Modèle probabiliste des incertitudes en dynamique des structures pour le désaccordage des roues aubagées.**

**Résumé :** Le désaccordage des aubes de turbomachines engendre fréquemment des localisations spatiales des déformations dynamiques. Le caractère aléatoire de ce phénomène de désaccordage requiert la construction d'un modèle probabiliste des sources d'incertitudes. Une description paramétrique usuelle consiste à tenir compte des incertitudes sur les modules d'Young des matériaux, c'est à dire à perturber les fréquences propres des aubes en supposant les déformées modales inchangées. Récemment, une approche non paramétrique modélisant les incertitudes aléatoires en élastodynamique a été introduite. Cet article présente la construction d'un modèle non paramétrique cohérent avec l'ensemble des incertitudes liées au désaccordage. La structure est divisée en sous-domaines et le modèle matriciel réduit moyen requis est construit par sous-structuration dynamique. Une approche comparative est effectuée, afin d'étudier l'apport de la méthode non paramétrique proposée par rapport aux méthodes paramétriques usuelles. Un exemple numérique est présenté.

**Mots-clés :** **dynamique des structures / désaccordage / incertitudes / modèle probabiliste / symétrie cyclique / sous-structuration dynamique / matrices aléatoires.**

**Probabilistic model of random uncertainties in structural dynamics for mistuned bladed disks.**

**Summary :** The mistuning of blades is frequently the cause of spatial localizations for the dynamic forced response in turbomachinery industry. The random character of mistuning requires the construction of probabilistic models of random uncertainties. A usual parametric probabilistic description considers the mistuning through the Young modulus of each blade. This model consists in mistuning blade eigenfrequencies, assuming the blade modal shapes unchanged. Recently a new approach known as a non-parametric model of random uncertainties has been introduced for modelling random uncertainties in elastodynamics. This paper proposes the construction of a non-parametric model which is coherent with all the uncertainties which characterize mistuning. As mistuning is a phenomenon which is independent from one blade to another one, the structure is considered as an assemblage of substructures. The mean reduced matrix model required by the non-parametric approach is thus constructed by dynamic substructuring. A comparative approach is also needed to study the influence of the non-parametric approach for a usual parametric model adapted to mistuning. A numerical exemple is presented.

**Key Words :** structural dynamics / mistuning / random uncertainties / probabilistic model / cyclic symmetry / dynamic substructuring / random matrices.

## Nomenclature

$B^j(\omega)$	Facteur d'amplification dynamique de l'aube $j$
$B(\omega)$	Facteur d'amplification dynamique pour l'ensemble des aubes
$\mathbb{B}$	Bande d'analyse fréquentielle (Hz)
$\mathbb{C}^n$	Espace des vecteurs complexes de dimension $n$
$n_a$	Nombre de degrés de liberté d'une aube à interface de couplage libre
$n_i$	Nombre de degrés de liberté d'une aube à interface de couplage fixe
$n_\Sigma$	Nombre de degrés de liberté sur l'interface de couplage d'une aube
$N_d$	Nombre de degrés de liberté du disque à interface de couplage libre
$N_g$	Nombre de modes retenus de l'aube à interface de couplage fixe
$N_a$	Dimension de la matrice réduite d'une aube
$N_a^+$	Rang de la matrice réduite d'une aube
$N$	Nombre d'aubes
$\det([A])$	Déterminant de la matrice $[A]$
$\text{tr}([A])$	Trace de la matrice $[A]$
$[A]^T$	Transposée de la matrice $[A]$
$\ [A]\ _F^2$	Trace de la matrice $[A]^T[A]$
$\mathcal{E}\{.\}$	Espérance mathématique
$[I_n]$	Matrice identité de dimension $(n \times n)$
$\ \mathbf{U}\ $	Norme hermitienne du vecteur $\mathbf{U}$ tel que $\ \mathbf{U}\  = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{1/2}$
$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker tel que $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ , $\delta_{i,j} = 0$ sinon
$[0]$	Matrice nulle
$\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(b)$	Fonction indicatrice de $\mathbb{B}$ tel que $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(b) = 1$ si $b \in \mathbb{B}$ , $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}(b) = 0$ sinon.

## 1 Introduction

La conséquence majeure du désaccordage des aubages des fans de compresseurs ou des turbomachines est que la réponse forcée de la roue aubagée désaccordée peut engendrer des localisations spatiales et de fortes amplifications des déformations dynamiques d'aubes [1], [2], [3]. Etant donné le caractère aléatoire de ce phénomène, de nombreuses approches probabilistes ont été développées sur des modèles simples [4], [5], [6], [7], [8] afin de mieux comprendre l'origine des conséquences du désaccordage et de prédire avec précision le comportement vibratoire des roues aubagées. De nombreuses études numériques sur les réponses libre et forcée ont permis de montrer l'influence de plusieurs paramètres tels le couplage d'aube à aube [9], [10], l'amortissement [11] ou le taux de désaccordage [3], [10] sur les amplifications des aubes. Afin d'étudier ces phénomènes sur des structures réelles avec des temps de calculs raisonnables, de nombreuses recherches visant à construire des modèles réduits [12], [13], [14], [15] ont été effectuées. La construction de modèles probabilistes robustes modélisant le désaccordage continue à faire l'objet des recherches actuelles. En effet, les modèles probabilistes utilisés classiquement sont des modèles paramétriques modélisant les incertitudes sur les modules d'Young des matériaux de chaque aube, ce qui est équivalent à introduire des incertitudes sur les fréquences propres des aubes au niveau de leur raideur. Néanmoins, aucune incertitude n'est introduite au niveau des formes modales des aubes. Récemment, Mignolet [16], [17] a introduit une première modélisation probabiliste du désaccordage des modes en utilisant le principe du maximum de vraisemblance et montre qu'il existe des différences par rapport à la modélisation probabiliste classique. Le but de cet article est de construire un modèle probabiliste cohérent avec toutes les sources d'incertitudes induites par le désaccordage, c'est à dire les incertitudes de modèle de nature paramétrique sur la géométrie dues aux tolérances d'usinage, sur les conditions aux limites dues au montage, sur les propriétés des matériaux dues aux procédés de fabrication mais aussi les incertitudes de nature non paramétrique dues à la modélisation. Ce travail s'appuie sur des recherches récentes menées par Soize [18], [19], [20] concernant un nouveau modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes pour les problèmes d'élastodynamique. L'implémentation du modèle non paramétrique s'effectue à partir d'un modèle matriciel réduit moyen. L'hypothèse d'incertitudes statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre conduit à construire ce modèle

matriciel réduit moyen par la technique de sous-structuration dynamique de Craig & Bampton [21]. Le nouveau modèle non paramétrique et le modèle paramétrique usuel sont comparés sur un exemple numérique et une analyse du désaccordage est proposée. Dans une première partie, le modèle matriciel réduit moyen est construit pour la structure complète. Après de brefs rappels concernant le modèle probabiliste non paramétrique, le modèle matriciel réduit aléatoire est construit pour chaque sous-structure et est assemblé. Dans une troisième partie, le modèle matriciel réduit aléatoire relatif au modèle probabiliste paramétrique usuel est construit de manière à pouvoir comparer le nouveau modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes avec le modèle probabiliste paramétrique usuel. La stratégie de résolution des équations stochastiques est explicitée dans une quatrième partie. Enfin, un exemple numérique est présenté et une analyse du désaccordage est proposée.

## 2 Construction du modèle matriciel réduit moyen

La théorie viscoélastique sans mémoire linéarisée est utilisée. On s'intéresse aux vibrations linéaires d'une structure à géométrie cyclique faiblement amortie autour d'une configuration statique non précontrainte prise comme référence. La structure est soumise à des forces extérieures et est étudiée dans une bande basse fréquence  $\mathbb{B}$ . La structure est fixée, la méthodologie et les résultats peuvent être facilement étendus au cas des structures tournantes. La structure est décomposée en  $N$  sous-structures identiques, chacune modélisant une aube à frontière libre et en 1 disque fixé en une partie de sa frontière. Chaque aube  $j$  est couplée au disque via l'interface  $\Sigma_j$  avec  $\bigcup_{j \in \{0 \dots N-1\}} \Sigma_j = \Sigma$ . La symétrie cyclique d'ordre  $N$  est définie par l'invariance par rotation de  $2\pi/N$  autour de l'axe de rotation des conditions limites, de la densité volumique et du tenseur de viscoélasticité relatif au secteur générateur de la structure.

### 2.1 Modèle élément fini moyen du disque

Pour tout  $\omega$  dans  $\mathbb{B}$ , le modèle moyen élément fini du disque à interface de couplage libre s'écrit :

$$(-\omega^2 [\underline{M}^d] + i\omega [\underline{D}^d] + [\underline{K}^d]) \underline{\mathbf{v}}(\omega) = \underline{\mathbf{g}}(\omega) \quad (1)$$

avec  $\underline{\mathbf{v}}(\omega)$  et  $\underline{\mathbf{g}}(\omega)$ , les vecteurs des déplacements et des forces extérieures à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n_d}$  et  $[\underline{M}^d]$ ,  $[\underline{D}^d]$ ,  $[\underline{K}^d]$  les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité

définies positives. Introduisant la raideur dynamique  $[\underline{A}^d] = -\omega^2[\underline{M}^d] + i\omega[\underline{D}^d] + [\underline{K}^d]$ , la décomposition par blocs par rapport aux DDLs internes et de l'interface de couplage s'écrit :

$$[\underline{A}^d] = \begin{bmatrix} [\underline{A}_{ii}^d(\omega)] & [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)] \\ [\underline{A}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{A}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{\mathbf{v}}(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_i(\omega) \\ \underline{\mathbf{v}}_{\Sigma}(\omega) \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{g}}(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{g}}_i(\omega) \\ \underline{\mathbf{g}}_{\Sigma}(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\mathbf{g}}_{\Sigma,c}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3)$$

où les vecteurs  $\underline{\mathbf{g}}_i(\omega)$  et  $\underline{\mathbf{g}}_{\Sigma}(\omega)$  résultent de la discrétisation des forces volumiques et surfaciques appliquées et où le vecteur  $\underline{\mathbf{g}}_{\Sigma,c}(\omega)$  définit l'action des aubes sur le disque.

## 2.2 Modèle matriciel réduit moyen d'une aube

### 2.2.1 Modèle élément fini moyen d'une aube

Pout tout  $\omega$  dans  $\mathbb{B}$ , le modèle moyen élément fini de l'aube  $j$  à interface de couplage libre s'écrit :

$$(-\omega^2[\underline{M}^j] + i\omega[\underline{D}^j] + [\underline{K}^j])\underline{\mathbf{u}}^j(\omega) = \underline{\mathbf{f}}^j(\omega), \quad (4)$$

avec  $\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)$  et  $\underline{\mathbf{f}}^j(\omega)$  les vecteurs des déplacements et des forces extérieures à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n_a}$  et  $[\underline{M}^j]$ ,  $[\underline{D}^j]$ ,  $[\underline{K}^j]$  les matrices de masse et d'amortissement, de rigidité respectivement définie positive et positives. De manière analogue au disque, la décomposition par blocs par rapport aux  $n_i$  DDLs internes et  $n_{\Sigma}$  de l'interface de couplage s'écrit :

$$[\underline{E}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{E}_{ii}^j] & [\underline{E}_{i\Sigma}^j] \\ [\underline{E}_{i\Sigma}^j]^T & [\underline{E}_{\Sigma\Sigma}^j] \end{bmatrix}, \quad E = \{M, D, K\} \quad (5)$$

$$\underline{\mathbf{u}}^j(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^j(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_{\Sigma}^j(\omega) \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}^j(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}_i^j(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}_{\Sigma}^j(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\mathbf{f}}_{\Sigma,c}^j(\omega) \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 2.2.2 Modèle matriciel réduit moyen d'une aube

La méthode de Craig & Bampton [21] consiste à écrire le champ de déplacement admissible comme la somme directe du champ de déplacement admissible à interface  $\Sigma_j$  fixe et du relèvement statique associé à cette interface. La décomposition



de Craig & Bampton à  $N_g$  modes à interface de couplage fixe s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i^j(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{H}}^j] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^j(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j(\omega) \end{bmatrix}, \quad [\underline{\mathbf{H}}^j] = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}^j] & [\underline{\mathbf{S}}^j] \\ [0] & [I_{n_\Sigma}] \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec  $\underline{\mathbf{q}}^j(\omega)$  le vecteur des coordonnées généralisées à valeurs dans  $\mathbb{C}^{N_g}$ ;  $[\underline{\Phi}^j]$  la matrice  $(n_i \times N_g)$  dont les colonnes représentent les vecteurs propres  $\{\underline{\varphi}_1^j, \underline{\varphi}_2^j, \dots, \underline{\varphi}_{N_g}^j\}$  solutions du problème aux valeurs propres de la structure à interface fixe ( $[\underline{\mathbf{K}}_{ii}^j] - \lambda_\alpha [\underline{\mathbf{M}}_{ii}^j] \underline{\varphi}_\alpha^j = 0$  (les valeurs propres associées sont strictement positives et classées par ordre croissant);  $[\underline{\mathbf{S}}^j] = [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^j]^{-1} [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^j]$  la matrice  $(n_i \times n_\Sigma)$  des relèvements statiques déduite du problème statique de l'aube à interface de couplage libre et  $[I_{n_\Sigma}]$  la matrice identité  $(n_\Sigma \times n_\Sigma)$ . En utilisant les équations (4) et (7), l'équation de la dynamique relative au modèle matriciel réduit moyen s'écrit :

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}^j(\omega)] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^j(\omega) \\ \underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}^j]^T \underline{\mathbf{f}}_i^j(\omega) \\ [\underline{\mathbf{S}}^j]^T \underline{\mathbf{f}}_i^j(\omega) + \underline{\mathbf{f}}_\Sigma^j(\omega) + \underline{\mathbf{f}}_{\Sigma,c}^j(\omega) \end{bmatrix} \quad (8)$$

où  $[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j] + i\omega [\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j] + [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j]$  définit la raideur dynamique moyenne de l'aube avec

$$[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{H}}^j]^T [\underline{\mathbf{M}}^j] [\underline{\mathbf{H}}^j], \quad [\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{H}}^j]^T [\underline{\mathbf{D}}^j] [\underline{\mathbf{H}}^j], \quad [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{H}}^j]^T [\underline{\mathbf{K}}^j] [\underline{\mathbf{H}}^j] \quad (9)$$

### 2.3 Modèle matriciel réduit moyen de la structure complète

On effectue une décomposition par blocs de toutes les grandeurs par rapport aux aubes. On utilise l'exposant indiciel  $j$  pour les vecteurs,  $jk$  pour les blocs matriciels. En écrivant la continuité du champ de déplacement et l'équilibre des forces sur l'interface de couplage, on a

$$\underline{\mathbf{u}}_\Sigma^j(\omega) = \underline{\mathbf{v}}_\Sigma^j(\omega), \quad \underline{\mathbf{f}}_{\Sigma,c}^j(\omega) + \underline{\mathbf{g}}_{\Sigma,c}^j(\omega) = 0 \quad (10)$$

En introduisant la décomposition par blocs matriciels dérivée de l'équation (8),

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}^j(\omega)] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{A}}^j(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_c^j(\omega)] \\ [\underline{\mathbf{A}}_c^j(\omega)]^T & [\underline{\mathbf{A}}_\Sigma^j(\omega)] \end{bmatrix} \quad (11)$$

l'équation matricielle réduite moyenne relative à la structure complète et de rang  $\tilde{N} = NN_g + n_d$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{A}}(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_c(\omega)] & [0] \\ [\underline{\mathbf{A}}_c(\omega)]^T & [\underline{\mathbf{A}}_\Sigma(\omega)] + [\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)] \\ [0] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{\mathbf{A}}_{ii}^d(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}(\omega) \\ \underline{\mathbf{v}}_\Sigma(\omega) \\ \underline{\mathbf{v}}_i(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}_\Sigma(\omega) \\ \underline{\mathbf{g}}_i(\omega) \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec  $[\underline{\mathcal{A}}(\omega)^{jk}] = [\underline{\mathcal{A}}^j(\omega)]\delta_{jk}$ ,  $[\underline{\mathcal{A}}_c(\omega)^{jk}] = [\underline{\mathcal{A}}_c^j(\omega)]\delta_{jk}$ ,  $[\underline{\mathcal{A}}_\Sigma(\omega)^{jk}] = [\underline{\mathcal{A}}_\Sigma^j(\omega)]\delta_{jk}$ ,  
 $\underline{\mathcal{F}}^j(\omega) = [\underline{\Phi}^j]^T \underline{\mathbf{f}}_i^j(\omega)$ ,  $\underline{\mathbb{f}}_\Sigma^j(\omega) = \underline{\mathbf{f}}_\Sigma^j(\omega) + [\underline{S}^j]^T \underline{\mathbf{f}}_i^j(\omega)$ .

#### 2.4 Problème généralisé aux valeurs propres pour le modèle matriciel réduit moyen complet

Dans le but d'effectuer une seconde réduction modale sur le modèle matriciel réduit complet qui est décrit dans la section 3, le problème généralisé aux valeurs propres associé à (12) s'écrit :

$$([\underline{K}_{\text{red}}] - \mu_\alpha [\underline{M}_{\text{red}}]) \underline{\psi}_\alpha = 0 \quad (13)$$

où  $[\underline{K}_{\text{red}}]$ ,  $[\underline{M}_{\text{red}}]$  sont les matrices de raideur et de masse définies par la matrice du membre de gauche de l'équation (12). Les valeurs propres  $\mu_\alpha$ , strictement positives, sont classées par ordre croissant et associées aux vecteurs propres  $\underline{\psi}_\alpha$  vérifiant les conditions d'orthogonalité  $\underline{\psi}_\alpha^T [\underline{M}_{\text{red}}] \underline{\psi}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$  et  $\underline{\psi}_\alpha^T [\underline{K}_{\text{red}}] \underline{\psi}_\beta = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ . Il est noté que le modèle matriciel réduit moyen est associé à une structure à symétrie cyclique. Par conséquent, les calculs des modes propres peuvent être effectués en utilisant les propriétés de cyclicité afin de réduire les temps de calculs [22], [23], [24], [25].

### 3 Modèle non paramétrique des incertitudes aléatoires pour le désaccordage des aubes

Les principaux résultats concernant l'approche probabiliste non paramétrique [18], [19], [20], [26] sont utilisés et adaptés à la problématique du désaccordage sur chaque aube. L'implémentation d'une telle approche s'effectue à partir du modèle matriciel réduit de chaque aube. En effet, l'approche non paramétrique repose sur l'utilisation de l'information disponible constituée du modèle matriciel réduit moyen. Les valeurs moyennes des matrices aléatoires réduites de chaque aube coïncident avec les matrices moyennes réduites dont elles sont issues. Pour  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , la matrice aléatoire de raideur dynamique de l'aube  $j$  à interface libre s'écrit :

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\text{red}}^j(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j] + i\omega [\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j] + [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j], \quad (14)$$

avec  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j]$  et  $[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j]$ ,  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j]$  les matrices aléatoires réduites de masse et d'amortissement, de rigidité, qui définissent des variables aléatoires à valeurs dans l'espace des matrices symétriques réelles définie positive et positives respectivement. Les trois

paramètres scalaires  $\delta_M^j$ ,  $\delta_D^j$  et  $\delta_K^j$  contrôlent leur niveau de dispersion. Comme par hypothèse, les incertitudes sont statistiquement indépendantes d'une aube à l'autre, les matrices aléatoires  $[\mathbf{A}_{\text{red}}^0(\omega)]$ ,  $\dots$ ,  $[\mathbf{A}_{\text{red}}^{N-1}(\omega)]$  sont statistiquement indépendantes par construction.

### 3.1 Modèle matriciel aléatoire réduit pour la structure complète

Les résultats et notations de 2.3 sont transposés au cas aléatoire. En utilisant les équations similaires aux équations (10) à (12), on obtient

$$[\mathbf{A}_{\text{red}}^j(\omega)] = \begin{bmatrix} [\mathcal{A}^j(\omega)] & [\mathbf{A}_c^j(\omega)] \\ [\mathbf{A}_c^j(\omega)]^T & [\mathbf{A}_\Sigma^j(\omega)] \end{bmatrix} \quad (15)$$

l'équation matricielle aléatoire réduite pour la structure complète s'écrivant,

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{A}(\omega)] & [\mathbf{A}_c(\omega)] & [0] \\ [\mathbf{A}_c(\omega)]^T & [\mathbf{A}_\Sigma(\omega)] + [\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)] \\ [0] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{\mathbf{A}}_{ii}^d(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\omega) \\ \mathbf{V}_\Sigma(\omega) \\ \mathbf{V}_i(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}_\Sigma(\omega) \\ \underline{\mathbf{g}}_i(\omega) \end{bmatrix} \quad (16)$$

avec  $\mathbf{Q}(\omega)$ ,  $\mathbf{V}_\Sigma(\omega)$ ,  $\mathbf{V}_i(\omega)$  les vecteurs aléatoires des coordonnées généralisées d'aube, des déplacements relatifs aux DDLs de l'interface de couplage et aux DDLs internes du disque et avec  $[\mathcal{A}(\omega)^{jk}] = [\mathcal{A}^j(\omega)]\delta_{jk}$ ,  $[\mathbf{A}_c(\omega)^{jk}] = [\mathbf{A}_c^j(\omega)]\delta_{jk}$ ,  $[\mathbf{A}_\Sigma(\omega)^{jk}] = [\mathbf{A}_\Sigma^j(\omega)]\delta_{jk}$ .

### 3.2 Construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires pour une aube

Le modèle probabiliste considéré des matrices aléatoires introduit une normalisation. Comme  $[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j]$  est une matrice réelle symétrique ( $N_a \times N_a$ ) définie positive, la factorisation de Cholesky s'écrit :

$$[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{L}}_M^j]^T [\underline{\mathbf{L}}_M^j] \quad (17)$$

avec  $[\underline{\mathbf{L}}_M^j]$  matrice réelle ( $N_a \times N_a$ ) triangulaire supérieure. Comme  $[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j]$  and  $[\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j]$  sont des matrices réelles symétriques ( $N_a \times N_a$ ) positives dont le rang est supposé de même dimension  $N_a^+$ , la factorisation est effectuée par décomposition spectrale et s'écrit

$$[\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{L}}_K^j]^T [\underline{\mathbf{L}}_K^j] \quad , \quad [\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{L}}_D^j]^T [\underline{\mathbf{L}}_D^j] \quad (18)$$

où  $[\underline{\mathbf{L}}_K^j]$  et  $[\underline{\mathbf{L}}_D^j]$  sont des matrices réelles ( $N_a^+ \times N_a$ ). Chaque matrice aléatoire s'écrit

$$[\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{L}}_M^j]^T [\mathbf{G}_M^j] [\underline{\mathbf{L}}_M^j] \quad , \quad [\underline{\mathbf{D}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{L}}_D^j]^T [\mathbf{G}_D^j] [\underline{\mathbf{L}}_D^j] \quad , \quad [\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}^j] = [\underline{\mathbf{L}}_K^j]^T [\mathbf{G}_K^j] [\underline{\mathbf{L}}_K^j] \quad (19)$$

avec  $[\mathbf{G}_M^j], [\mathbf{G}_D^j], [\mathbf{G}_K^j]$  des variables aléatoires indépendantes dans l'espace des matrices réelles  $(N_a \times N_a), (N_a^+ \times N_a^+), (N_a^+ \times N_a^+)$  symétriques définies positives. Elles sont caractérisées par leur valeur moyenne

$$\mathcal{E} \{[\mathbf{G}_M^j]\} = [\underline{\mathbf{G}}_M^j] = [I_{N_a}], \quad \mathcal{E} \{[\mathbf{G}_D^j]\} = [\underline{\mathbf{G}}_D^j] = [I_{N_a^+}], \quad \mathcal{E} \{[\mathbf{G}_K^j]\} = [\underline{\mathbf{G}}_K^j] = [I_{N_a^+}] \quad (20)$$

et par le paramètre contrôlant leur dispersion, défini par  $\delta_M^j, \delta_D^j, \delta_K^j$  respectivement, réels strictement positifs tels que

$$\delta_E^j = \left\{ \frac{\mathcal{E} \{ \|\mathbf{G}_E^j - [\underline{\mathbf{G}}_E^j]\|_F^2 \}}{\|\underline{\mathbf{G}}_E^j\|_F^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad E = \{M, D, K\} \quad (21)$$

### 3.3 Construction du modèle probabiliste des matrices aléatoires normalisées

Soit  $[\mathbf{G}]$  la matrice aléatoire symétrique réelle définie positive représentant  $[\mathbf{G}_M^j], [\mathbf{G}_D^j]$  ou  $[\mathbf{G}_K^j]$ , de dimension  $(n \times n)$  où  $n$  représente  $N_a, N_a^+$  ou  $N_a^+$ , de paramètre  $\delta$  représentant  $\delta_M^j, \delta_D^j$  ou  $\delta_K^j$ .

La densité de probabilité par rapport à l'élément de volume

$$\tilde{d}G = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} d[G]_{ij} \quad (22)$$

s'écrit

$$p_{[\mathbf{G}]}([G]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G]) \times C_G \times (\det([G]))^{(1-\delta^2)(2\delta)^{-1}(n+1)} \times e^{-\frac{(n+1)}{2\delta} \text{tr}([G])} \quad (23)$$

où  $C_G$  est la constante positive de normalisation qui s'écrit

$$C_G = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left(\frac{n+1}{2\delta^2}\right)^{n(n+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)} \quad (24)$$

avec  $\Gamma(z)$  la fonction gamma définie pour tout  $z > 0$  par  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ . Le tenseur de covariance  $C_{jk, j'k'}^G = \mathcal{E} \left\{ ([\mathbf{G}]_{jk} - [\underline{\mathbf{G}}]_{jk})([\mathbf{G}]_{j'k'} - [\underline{\mathbf{G}}]_{j'k'}) \right\}$  s'écrit

$$C_{jk, j'k'}^G = \frac{\delta^2}{n+1} \{ \delta_{j'k} \delta_{jk'} + \delta_{jj'} \delta_{kk'} \} \quad (25)$$

La variance de la variable aléatoire  $[\mathbf{G}]_{jk}$  est alors donnée par

$$V_{jk}^G = \frac{\delta^2}{n+1} (1 + \delta_{jk}) \quad (26)$$

### 3.4 Représentation algébrique des matrices normalisées

Comme le problème de dynamique aléatoire est résolu par la méthode de simulation numérique de Monte Carlo, il est nécessaire d'avoir une procédure de construction de réalisations des matrices aléatoires. Cette procédure est la suivante : la matrice aléatoire  $[\mathbf{G}]$  est écrite  $[\mathbf{G}] = [\mathbf{L}_G]^T[\mathbf{L}_G]$  avec  $[\mathbf{L}_G]$  une matrice aléatoire  $(n \times n)$  réelle triangulaire supérieure telle que :

- (1) les variables aléatoires  $\{[\mathbf{L}_G]_{jj'}, j \leq j'\}$  sont des variables aléatoires réelles indépendantes ;
- (2) pour  $j < j'$ , la variable aléatoire réelle  $[\mathbf{L}_G]_{jj'}$  s'écrit  $[\mathbf{L}_G]_{jj'} = \sigma_n U_{jj'}$  avec  $\sigma_n = \delta(n+1)^{-1/2}$  et où  $U_{jj'}$  suit une loi normale centrée et de variance unité ;
- (3) pour  $j = j'$ , la variable aléatoire réelle positive  $[\mathbf{L}_G]_{jj}$  s'écrit  $[\mathbf{L}_G]_{jj} = \sigma_n \sqrt{2V_j}$  où  $V_j$  est une variable aléatoire positive de loi gamma dont la densité de probabilité  $p_{V_j}(v)$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $dv$  sur  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1+j}{2}\right)} v^{\frac{n+1}{2\delta^2} - \frac{1+j}{2}} e^{-v} \quad (27)$$

## 4 Modèle paramétrique des incertitudes aléatoires pour le désaccordage des aubes

Dans le but de positionner le nouveau modèle non paramétrique, on introduit le modèle paramétrique couramment utilisé dans la littérature spécialisée pour modéliser le désaccordage des aubes. Il consiste à considérer les incertitudes aléatoires des aubes en ne modélisant que les incertitudes du module d'Young de chaque aube par une variable aléatoire (voir par exemple [6],[14]), ce qui correspond à désaccorder les fréquences propres des aubes tout en laissant les déformées modales associées inchangées. Cette comparaison sera limitée aux incertitudes de raideur. Pour  $j$  fixé dans  $\{0, \dots, N-1\}$ , la matrice aléatoire de raideur à interface de couplage libre  $[\mathbf{K}^{j \text{ para}}]$  est écrite

$$[\mathbf{K}^{j \text{ para}}] = (1 + \Lambda^j)[\underline{K}^j] \quad (28)$$

avec  $\Lambda^j$  une variable aléatoire réelle uniforme centrée d'écart type  $\sigma_j$  telle que  $1 + \Lambda_j$  soit positive presque sûrement. Cette modélisation usuelle inclut le désaccordage des fréquences propres d'aubes mais exclut le désaccordage en modes. La matrice réduite  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j \text{ para}}]$  du modèle paramétrique de l'aube  $j$  est donnée par  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j \text{ para}}] =$

$[\underline{H}^j]^T [\mathbf{K}^{j \text{ para}}] [\underline{H}^j]$  et s'écrit donc en utilisant la première équation (18)

$$[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j \text{ para}}] = (1 + \Lambda^j) [\underline{H}^j]^T [\underline{L}_K^j]^T [\underline{L}_K^j] [\underline{H}^j] \quad (29)$$

avec

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j \text{ para}}]\} = [\underline{K}_{\text{red}}^j] \quad (30)$$

On déduit que le nombre  $W_K^{j \text{ para}}$  défini par  $W_K^{j \text{ para}} = \mathcal{E}\{\|[\mathbf{K}_{\text{red}}^{j \text{ para}}] - [\underline{K}_{\text{red}}^j]\|_F^2\}$  est donné par l'équation

$$W_K^{j \text{ para}} = \sigma_j^2 \text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j]^2) \quad (31)$$

Pour effectuer la comparaison des modèles paramétrique et non paramétrique pour chaque aube  $j$ , on fixe la valeur  $\delta_K^j$  du paramètre contrôlant la dispersion de la matrice aléatoire  $[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]$  et on calcule l'écart type  $\sigma_j$  de la variable aléatoire  $\Lambda_j$  du modèle paramétrique pour que l'on ait  $W_K^j = W_K^{j \text{ para}}$ , avec  $W_K^j = \mathcal{E}\{\|[\mathbf{K}_{\text{red}}^j] - [\underline{K}_{\text{red}}^j]\|_F^2\}$ . Comme pour le modèle non paramétrique on a, en utilisant (25) :

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{K}_{\text{red}}^j]\} = [\underline{K}_{\text{red}}^j] \quad , \quad W_K^j = \frac{(\delta_K^j)^2}{N_a^+ + 1} (\text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j])^2 + \text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j]^2)) \quad (32)$$

on déduit des équations (31) et (32) que

$$\sigma_j^2 = \frac{(\delta_K^j)^2}{N_a^+ + 1} \left( 1 + \frac{\text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j])^2}{\text{tr}([\underline{K}_{\text{red}}^j]^2)} \right) \quad (33)$$

## 5 Analyse du désaccordage

### 5.1 Seconde réduction modale

L'équation de la dynamique aléatoire est réduite une seconde fois par projection de l'équation aléatoire (16) sur les  $\tilde{n} < \tilde{N}$  premiers vecteurs propres  $\underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_{\tilde{n}}$  définis dans la section 2.4 par l'équation (13). On obtient

$$[\mathbb{A}(\omega)] \mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{F}(\omega), \quad (34)$$

avec

$$[\mathbb{A}(\omega)] = [\underline{\Psi}]^T \begin{bmatrix} [\mathbf{A}(\omega)] & [\mathbf{A}_c(\omega)] & [0] \\ [\mathbf{A}_c(\omega)]^T & [\mathbf{A}_\Sigma(\omega)] + [\underline{\mathbf{A}}_{\Sigma\Sigma}^d(\omega)] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)] \\ [0] & [\underline{\mathbf{A}}_{i\Sigma}^d(\omega)]^T & [\underline{\mathbf{A}}_{ii}^d(\omega)] \end{bmatrix} [\underline{\Psi}] \quad (35)$$

$$\underline{\mathbb{F}}(\omega) = [\underline{\Psi}]^T \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}(\omega) \\ \underline{\mathbb{f}}_{\Sigma}(\omega) \\ \underline{\mathbf{g}}_i(\omega) \end{bmatrix} \quad (36)$$

où  $[\underline{\Psi}]$  est la matrice dont les colonnes sont  $\underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_n$ . La réponse aléatoire dans les coordonnées physiques de l'aube  $j$  avec interface de couplage libre est reconstituée par

$$\mathbf{U}^j(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^j(\omega) \\ \mathbf{V}_{\Sigma}^j(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{H}^j] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^j(\omega) \\ \mathbf{V}_{\Sigma}^j(\omega) \end{bmatrix} \quad (37)$$

avec  $\mathbf{Q}^j(\omega)$  et  $\mathbf{V}_{\Sigma}^j(\omega)$  les vecteurs extraits du vecteur  $(\mathbf{Q}(\omega), \mathbf{V}_{\Sigma}(\omega), \mathbf{V}_i(\omega))$  défini par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\omega) \\ \mathbf{V}_{\Sigma}(\omega) \\ \mathbf{V}_i(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{\Psi}]\mathbf{Q}(\omega) \quad (38)$$

L'équation (34) avec matrice aléatoire est résolue par la méthode de simulation numérique de Monte Carlo.

## 5.2 Observables

En supposant une excitation de type cyclique, la réponse dynamique du système moyen (système accordé) est de même amplitude sur chaque aube à un déphasage constant près. Par conséquent les normes hermitiennes  $\|\underline{\mathbf{u}}^j(\omega)\|$  des réponses des aubes sont égales et notées  $\|\underline{\mathbf{u}}^a(\omega)\|$ . Afin de normaliser la réponse dynamique du système aléatoire (système désaccordé), on introduit la référence  $\|\underline{\mathbf{u}}^a\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{B}} \|\underline{\mathbf{u}}^a(\omega)\|$ . Lorsque le désaccordage est introduit, on obtient des amplitudes de réponse qui diffèrent pour chaque aube. Pour  $\omega$  fixé, le facteur d'amplification dynamique de l'aube  $j$  est une variable aléatoire  $B^j(\omega)$  et le facteur d'amplification dynamique pour toutes les aubes ns  $B(\omega)$  est une variable aléatoire tels que

$$B^j(\omega) = \frac{\|\mathbf{U}^j(\omega)\|}{\|\underline{\mathbf{u}}^a\|_{\infty}}, \quad B(\omega) = \sup_{j \in \{0, \dots, N-1\}} B^j(\omega) \quad (39)$$

Pour  $j \in \{0, \dots, N-1\}$ ,  $\{B^j(\omega), \omega \in \mathbb{B}\}$  et  $\{B(\omega), \omega \in \mathbb{B}\}$  sont des processus stochastiques à valeurs réelles positives et indexés sur la bande d'analyse fréquentielle  $\mathbb{B}$ .

## 6 Exemple numérique

Le modèle moyen est une roue aubagée plane. Les mouvements membranaires et transverses sont entièrement découplés et la flexion seule est étudiée. Le disque est une couronne en matériau homogène et isotrope de rayon interne  $3,5 \times 10^{-2}$  m, de rayon externe 0,1 m, d'épaisseur  $5 \times 10^{-3}$  m, de densité volumique massique  $7860 \text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $1,89 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , de coefficient de Poisson 0,25 et est encastré en sa frontière interne. L'aubage est en matériau homogène, isotrope et composé de 24 aubes rectangulaires, de longueur  $7 \times 10^{-2}$  m, de largeur  $8,5 \times 10^{-3}$  m, d'épaisseur linéairement décroissante de  $5 \times 10^{-3}$  à  $1 \times 10^{-3}$  m, de masse volumique  $7860 \text{ kg/m}^3$ , de module d'Young  $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  et de coefficient de Poisson 0,25. Le modèle éléments finis est constitué d'éléments à 4 nœuds. Il y a 48 divisions angulaires et 4 divisions radiales régulièrement distribuées sur le disque soit un total de 240 éléments annulaires. Chaque aube est divisée en 5 éléments rectangulaires identiques. La structure possède 1296 DDLs avec  $n_a = 36, n_d = 576$  et  $n_\Sigma = 6$ , désignant respectivement le nombre de DDLs d'une aube, du disque et d'une interface de couplage aube-disque. La matrice moyenne d'amortissement est construite par un modèle hystérétique avec un amortissement structural  $\eta = 0,0004$ . La figure 1 montre le maillage éléments finis de la structure. Les fréquences propres du système accordé en fonction du nombre d'onde circonférentiel sont données par la figure 2 qui montre une zone de veering [27] ce qui conduit à choisir la bande d'analyse  $\mathbb{B} = [7040, 7200] \text{ Hz}$  avec un pas fréquentiel de 0,15 Hz et une excitation cyclique d'ordre 4. Chaque aube  $j$  est soumise à un chargement unitaire  $\underline{\mathbf{f}}^j(\omega)$  tel que  $\underline{\mathbf{f}}^j(\omega)_k = \mathbb{1}_{\mathbb{B}}(\omega) \delta_{k,(2d+1)} \exp^{2i\pi h j/N}$  avec  $h = 4$  l'ordre d'excitation,  $k$  la composante du vecteur  $\underline{\mathbf{f}}^j(\omega)$  et  $d$  le nœud d'excitation de l'aube.

Le désaccordage est introduit en fixant les paramètres contrôlant la dispersion du modèle probabiliste non paramétrique par  $\delta_M^j = \delta_D^j = 0$  et  $\delta_K^j$ . On prendra les  $\delta_K^j$  égaux notés  $\delta_K$ . L'écart type  $\sigma_j$  est déduit de l'équation (33) et est noté par conséquent  $\sigma$ . La figure 3 montre le graphe d'une réalisation des réponses aléatoires des 24 aubes (traits fins) en fonction de la fréquence et de leur enveloppe supérieure (trait gras) obtenu par l'approche non paramétrique avec  $\delta_K = 0,01$ . Soit  $\nu = \omega/(2\pi)$ , la fréquence associée à la pulsation  $\omega$ . La figure 4 montre  $B^j(\omega_0, \theta_1)$  pour la fréquence  $\nu_0 = 7809 \text{ Hz}$  où l'amplification est maximale. On observe nettement un phénomène de localisation sur les aubes 11 et 12, les déformations dynamiques



de l'aubage étant concentrées sur ces aubes.

Les calculs numériques sont effectués avec les paramètres de réduction du modèle suivants  $N_g = 8$  et  $\tilde{n} = 120$ . Les valeurs extrêmes d'échantillons des processus stochastiques  $\{B(\omega), \omega \in \mathbb{B}\}$  et  $\{B^{\text{para}}(\omega), \omega \in \mathbb{B}\}$ , à valeurs réelles, sont estimées pour un nombre d'échantillons  $n_s = 4000$ . Les fréquences où ces valeurs extrêmes d'échantillons sont maximales sont  $\nu_0 = 7108,0$  Hz et  $\nu_0^{\text{para}} = 7108,2$  Hz. La convergence de la solution stochastique par rapport aux paramètres de la réduction du modèle est étudiée. On désire comparer les densités de probabilités  $p_{B(\omega_0)}(b, \omega_0)$  et  $p_{B(\omega_0^{\text{para}})}(b, \omega_0^{\text{para}})$ . Comme la convergence en loi est induite par la convergence en moyenne d'ordre deux, la convergence de la suite de variables aléatoires  $\{B(\omega_0, N_g, \tilde{n})\}_{N_g, \tilde{n}}$  est étudiée en introduisant la fonction  $(N_g, \tilde{n}) \mapsto |||B(\omega_0, N_g, \tilde{n})||| = \sqrt{\mathcal{E}\{B(\omega_0, N_g, \tilde{n})^2\}}$ . La norme  $|||B(\omega_0, N_g, \tilde{n})|||$  est estimée par  $\text{Conv}(n_s, N_g, \tilde{n})$  avec  $\text{Conv}(n_s, N_g, \tilde{n})^2 = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} B(\omega_0, N_g, \tilde{n}, \theta_i)^2$ .

La figure 5 montre le graphe  $n_s \mapsto \text{Conv}(n_s, N_g, \tilde{n})$  vis à vis du nombre d'échantillons utilisé. Une bonne convergence est obtenue pour  $n_s = 1500$ . La figure 6 montre le graphe  $N_g \mapsto \text{Conv}(1500, N_g, \tilde{n})$  pour plusieurs valeurs de  $\tilde{n}$ . On déduit de ces deux graphes qu'une bonne approximation est obtenue pour les valeurs  $n_s = 1500$ ,  $N_g = 8$ ,  $\tilde{n} = 120$ . La démarche est identique pour le modèle paramétrique. La figure 7 montre une estimation des densités de probabilités  $p_{B(\omega_0)}(b, \omega_0)$  et  $p_{B(\omega_0^{\text{para}})}(b, \omega_0^{\text{para}})$  pour  $n_s = 8\,500\,000$  tirages afin d'estimer les niveaux de probabilité de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-5}$ .

Un développement analogue est conduit pour le facteur d'amplification dynamique maximal, défini par  $B_\infty = |||B|||_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{B}} (B(\omega))$ , facteur qui est une variable aléatoire réelle positive. Les figures 8 et 9 montrent les graphes des fonctions  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > B^*)$  et  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} > B^*)$  où  $B^*$  est le niveau d'amplification, pour deux niveaux de désaccordage ( $\delta_K = 0,01$  et  $\delta_K = 0,02$  soit  $\sigma = 0,0055$  et  $\sigma = 0,011$ ).

Une étude paramétrique est effectuée sur le facteur d'amplification dynamique maximal en fonction de l'intensité du désaccordage introduit, pour chaque modèle probabiliste. On s'intéresse aux grandeurs  $\mathcal{P}(B_\infty \leq b_p) = p$  et  $\mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} \leq b_p) = p$  où  $b_p$  désigne le niveau d'amplification maximal atteint avec une probabilité  $p$ . Les principaux résultats sont montrés sur la figure 10. Les traits épais représentent  $\delta_K \mapsto b_p(\delta_K)$  (la courbe inférieure  $p = 0,05$ , la courbe du milieu  $p = 0,5$ , la

courbe supérieure  $p = 0,95$ ) pour le modèle non paramétrique. Les traits minces représentent  $\delta_K \mapsto b_p(\delta_K)$  (la courbe inférieure  $p = 0,05$ , la courbe du milieu  $p = 0,5$ , la courbe supérieure  $p = 0,95$ ) pour le modèle paramétrique. Pour les deux modèles, l'amplification de la réponse dynamique présente un maximum local pour un niveau faible de désaccordage. Par ailleurs, l'étude paramétrique montre que l'amplification la plus néfaste pour chaque modèle probabiliste s'effectue pour différents taux de désaccordage. De plus, tous ces graphes montrent que le modèle non paramétrique et le modèle paramétrique ne prédisent pas les mêmes niveaux de réponse forcée. Le modèle paramétrique usuel ne prend en compte que les incertitudes liées au module d'Young de chaque aube, c'est à dire les fréquences propres d'aubes. L'approche non paramétrique prend en compte la totalité des sources d'incertitudes induites par le désaccordage. Elle inclut à la fois des incertitudes sur les fréquences propres et sur les formes modales des aubes. Pour cet exemple, les prédictions des réponses forcées sont sous-estimées par l'approche probabiliste paramétrique. Ce résultat est conforté par les résultats de Mignolet et al. [16], [17] qui propose une première approche pour la modélisation probabiliste de désaccordage des modes.

## 7 Conclusion

Les incertitudes aléatoires induites par le désaccordage des aubes des turbomachines peuvent être modélisées efficacement par l'approche non paramétrique proposée. Cette nouvelle approche probabiliste non paramétrique est plus complète car elle prend en compte à priori toutes les sources d'incertitudes, en particulier elle prend en compte le désaccordage en formes modales des aubes généralement ignoré par les modèles probabilistes paramétriques utilisés classiquement. Le modèle non paramétrique améliore la modélisation probabiliste des incertitudes en l'occurrence, la première approche en désaccordage des modes de Mignolet. Les résultats présentés montrent clairement que la modélisation non paramétrique des incertitudes conduit à une solution différente de la modélisation usuelle paramétrique, toutes choses égales par ailleurs.

## Références

- [1] Whitehead,D.S., Effects of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes, *J. Mech. Engng. Sci.*, 8(1966) 15-21.
- [2] Dye,R.C.F. et Henry,T.A., Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies, *Trans. ASME J. Engng. Pwr*, 91(1969) 182-187.
- [3] Ewins,D.J., The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks, *J. Sound Vib.*, 9(1969) 65-69.
- [4] Griffin,J.H. et Hoosac,T.M., Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106(1984) 204-210.
- [5] Sinha,A. et Chen,S., A higher order technique to compute the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly, *J. Sound Vib.*, 130(1989) 207-221.
- [6] Mignolet,M.P., Lin,C.C., The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks, *ASME J. of Turbomachinery*, 115(1993) 771-780.
- [7] Lin,C.C. et Mignolet,M.P., An adaptative perturbation scheme for the analysis of mistuned bladed disks, *ASME J. of Engng for Gas Turb. and Pwr*, 119(1997) 153-160.
- [8] Mignolet,M.P., Lin,C.C., A novel limit distribution for the analysis of randomly mistuned bladed disks, *ASME J. of Engng for Engng for Gas Turb. and Pwr*, 123(2001) 388-394.
- [9] Wei,S.T., Pierre,C., Localization phenomena in mistuned assemblies for cyclic symmetry - part II : forced vibrations, *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 110(1988) 439-449.
- [10] Ottarson,G.S., Pierre,C., On the effects of interblade coupling on the statistics of maximum forced response amplitudes in mistuned bladed disks, *Proceedings 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, AIAA, New York ,1995, pp.3070-3078.
- [11] Lin,C.C., Mignolet,M.P., Effects of damping and damping mistuning on the forced vibration response of bladed disks, *J. Sound Vib.*, 193(1996) 525-543.
- [12] Castanier,M.P., Ottarson,G., Pierre, C., A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks, *ASME Journal of Vibration and Acoustics* , 119(1997)

439-447.

- [13] Yang, M.-T., Griffin, J.H., A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal modes, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(2001) 893-900.
- [14] Bladh, R., Castanier, M.P., Pierre, C., Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks-part 1 : theoretical models, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(2001) 89-99.
- [15] Seinturier, E., Dupont, C., Berthillier, M., Dumas, M., A new aeroelastic model for mistuned bladed disks, *AIAA Journal*, (2002) AIAA-2002 - 1533 (accepted for publication)
- [16] Mignolet, M.P., Rivas-Guerra, A.J., Delor, J.P., Identification of mistuning characteristics of bladed disks from free response data (part 1), *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(2001) 395-403.
- [17] Rivas-Guerra, A.J., Mignolet, M.P., Delor, J.P., Identification of mistuning characteristics of bladed disks from free response data (part 2), *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(2001) 404-411.
- [18] Soize, C., A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, *Probab. Eng. Mech.*, 15(2000) 277-294.
- [19] Soize, C., Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics, *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(2001) 1979-1996.
- [20] Soize, C., Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncertainties, *Uncertainties in Engineering Mechanics, E-Journal*, 1(2001) 1-38.
- [21] Craig, R.R.Jr., Bampton, M.C.C., Coupling of substructures for dynamic analyses, *AIAA Journal*, 6(1968) 1313-1319.
- [22] Thomas, D.L., Dynamics of rotationnaly periodic structures, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 14(1979) 81-102.
- [23] Valid, R., Ohayon, R., Théorie et Calcul Statique et Dynamique des Structures à Symétries Cycliques, *La Recherche Aérospatiale*, 4(1985) 251-263.
- [24] Irwanto, B., Hardtke, H.J., Pawandenat, D., Schmidt, R., "On substructuring technique : application of lagrange multiplier method on cyclic structures", *J. Sound Vib.* 247(2001) 939-945.
- [25] Ohayon, R. and Soize, C., *Structural dynamics and vibration*, London, Academic Press, (1998).

- [26] Soize,C., Chebli,H., Random uncertainties model in dynamic substructuring using a non-parametric probabilistic model, ASCE J. Eng. Mech., (2002) (accepted for publication)
- [27] Pierre,C.,Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures”, J. Sound Vib., 126(1988) 485-502.

## Figures

× Excitation

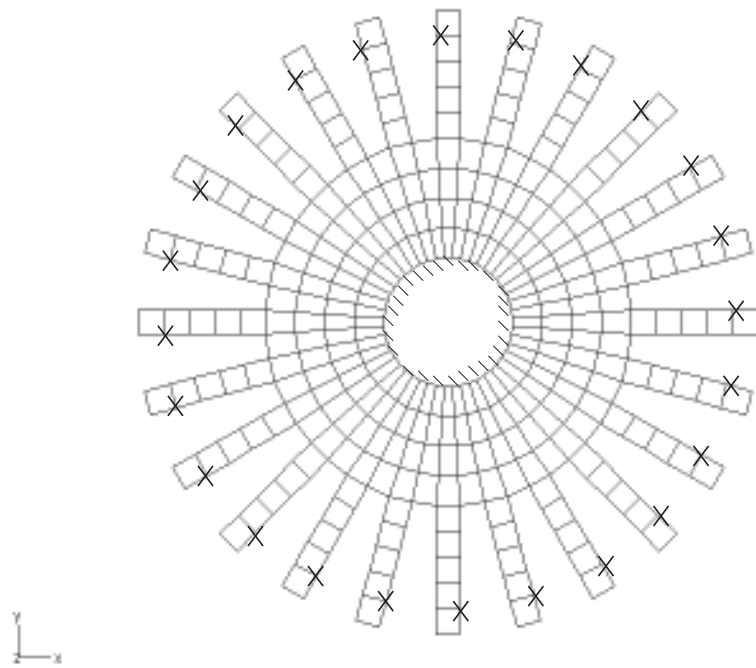


Figure 1

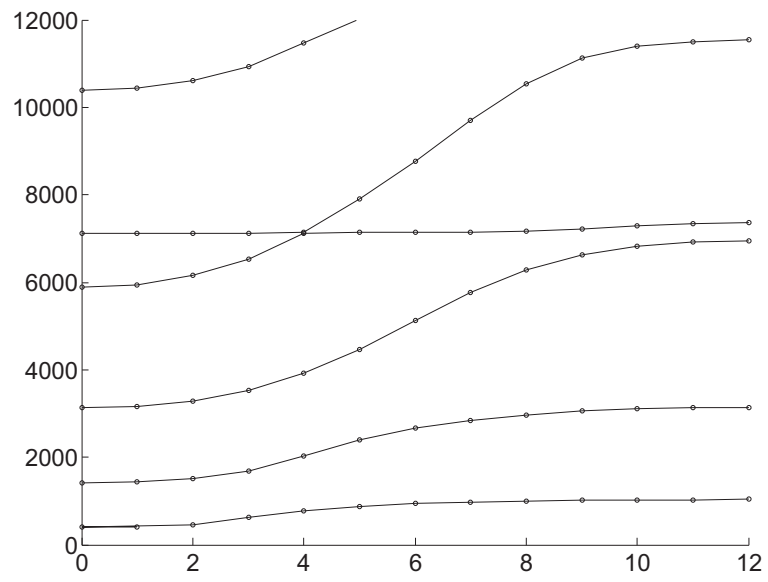


Figure 2

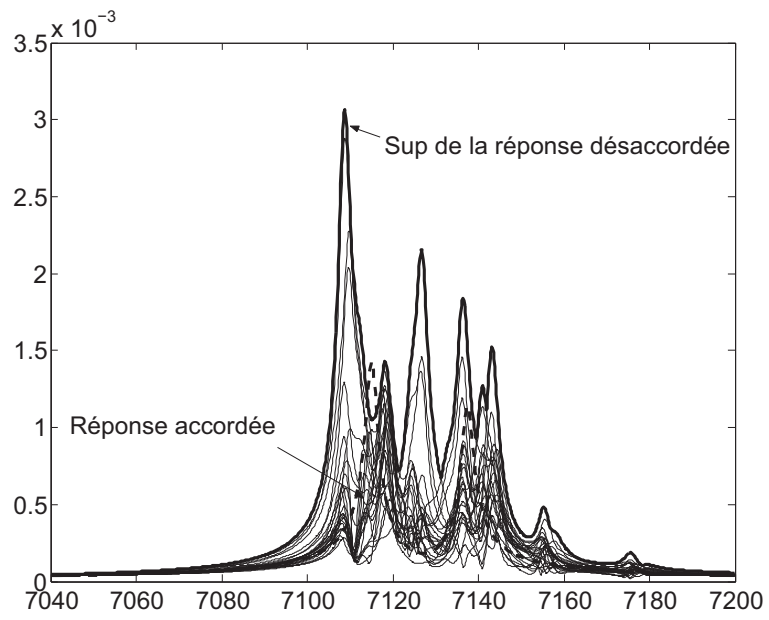


Figure 3



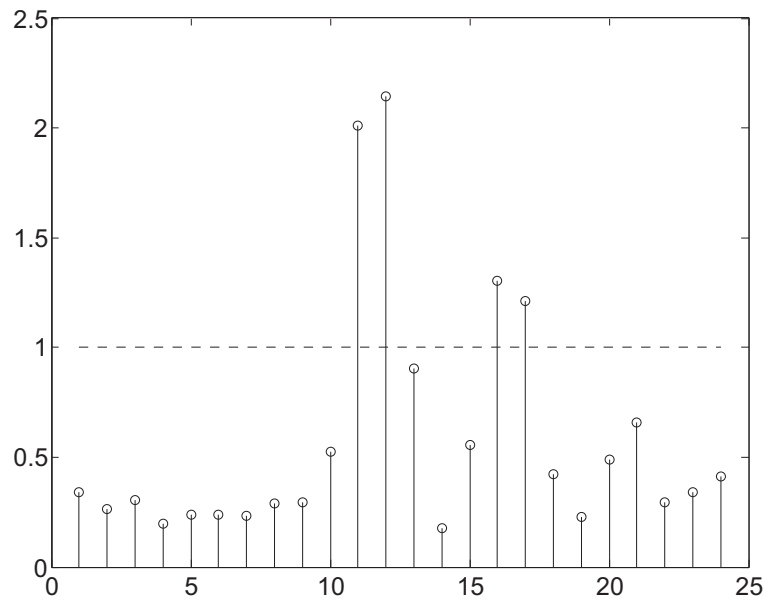


Figure 4

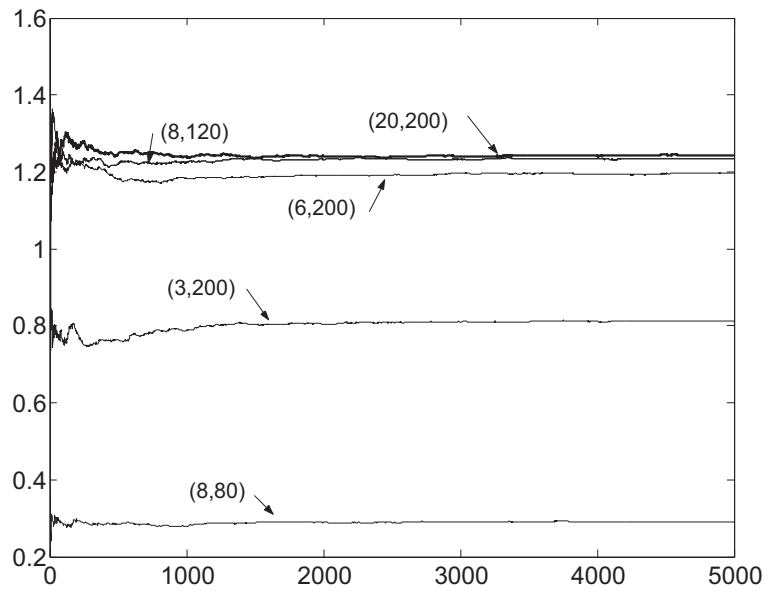


Figure 5

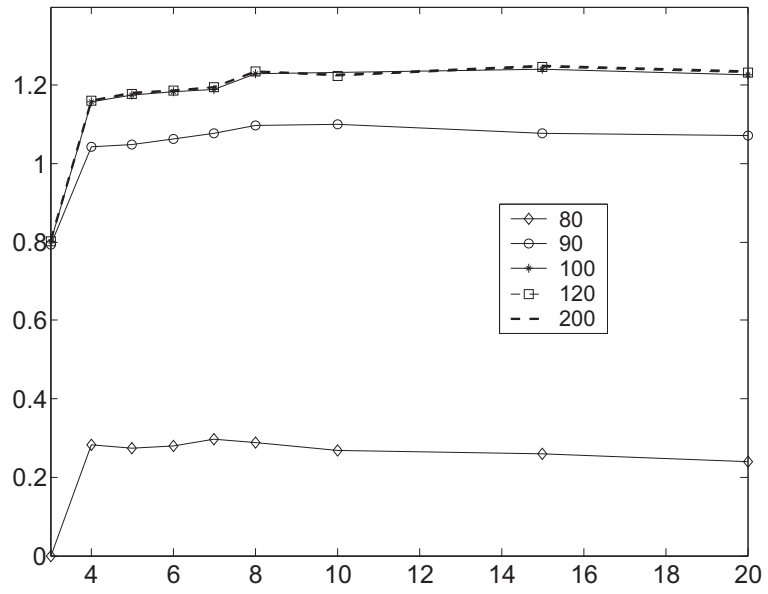


Figure 6

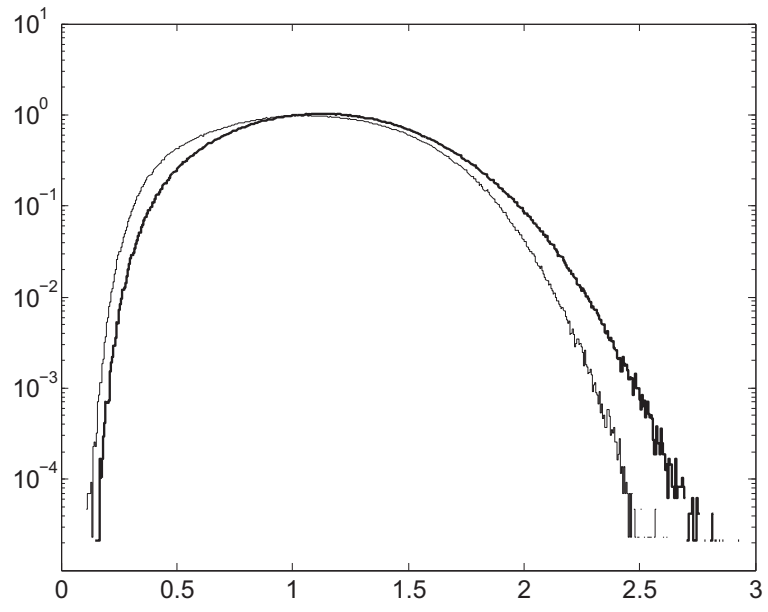


Figure 7

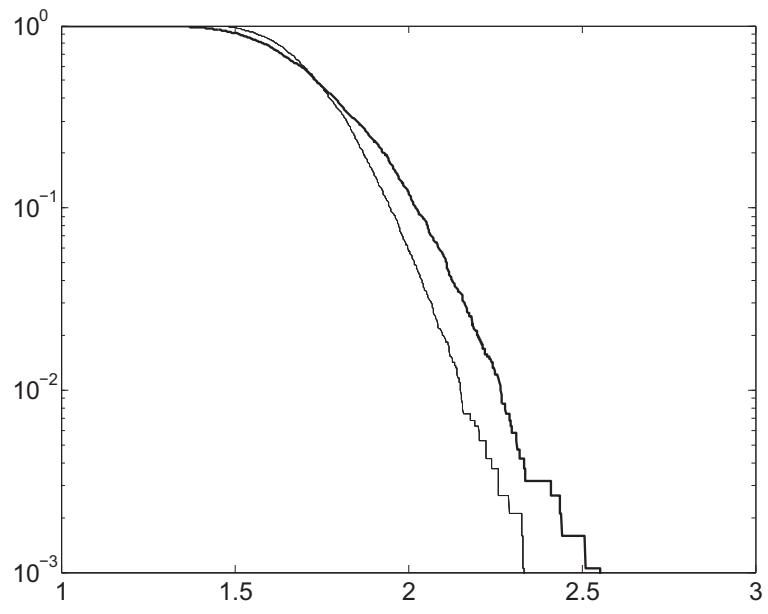


Figure 8

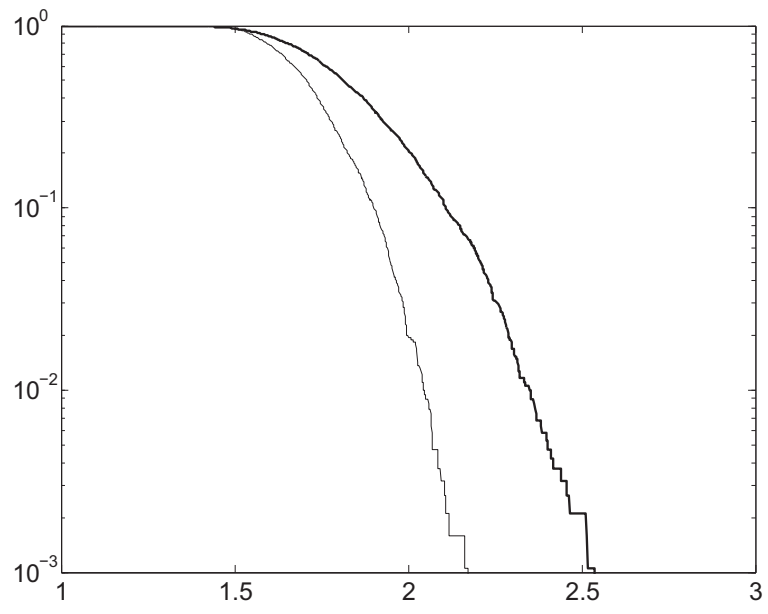


Figure 9

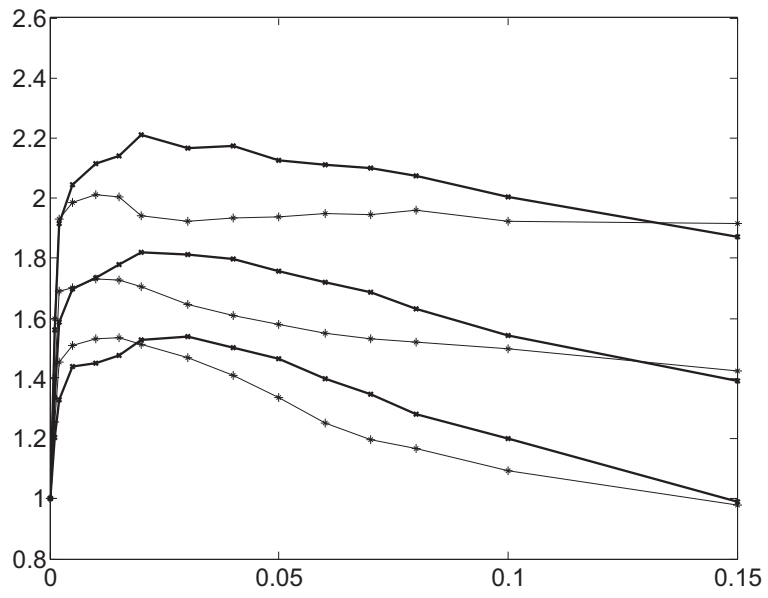


Figure 10

## Légendes

*Figure 1* : Maillage éléments finis de la roue aubagée.

*Figure 1* : Finite element mesh of the bladed disk.

*Figure 2* : Fréquences propres de la roue aubagée accordée en fonction du nombre d'onde circonférentiel.

*Figure 2* : Graph of the eigenfrequencies of the tuned bladed disk versus the circumferential wave number.

*Figure 3* : (1) Réponse forcée en déplacement (m) du système accordé en fonction de la fréquence propre d'excitation ; le trait pointillé épais montre  $\nu \mapsto \|\underline{\mathbf{u}}^a(\nu)\|$ . (2) Réalisation de la réponse forcée aléatoire en déplacement (m) en fonction de la fréquence propre d'excitation ; le trait épais montre  $\nu \mapsto \max_{j \in \{0, \dots, N-1\}} \|\mathbf{U}^j(\nu, \theta_1)\|$  et les traits minces  $\nu \mapsto \|\mathbf{U}^j(\nu, \theta_1)\|$  pour  $j \in \{0, \dots, N-1\}$ .

*Figure 3* : (1) Displacement forced response (m) with respect to the excitation frequency of the tuned system ; the thick dashed curve shows  $\nu \mapsto \|\underline{\mathbf{u}}^a(\nu)\|$ . (2) Graph of one sample of the random forced response (m) with respect to the excitation frequency ; the thick curve shows  $\nu \mapsto \max_{j \in \{0, \dots, N-1\}} \|\mathbf{U}^j(\nu, \theta_1)\|$  and the thin curves show  $\nu \mapsto \|\mathbf{U}^j(\nu, \theta_1)\|$  for  $j \in \{0, \dots, N-1\}$ .

*Figure 4* : Réalisation du facteur d'amplification dynamique aléatoire  $j \mapsto B^j(\nu_0, \theta_1)$  pour toutes les aubes  $j$ .

*Figure 4* : Graph of one sample of the random magnification factor  $j \mapsto B^j(\nu_0, \theta_1)$  for all blades  $j$ .

*Figure 5* : Graphes des fonctions  $n_s \mapsto \text{Conv}(n_s, N_g, \tilde{n})$  pour différentes valeurs du couple  $(N_g, \tilde{n})$

*Figure 5* : Graphs of the functions  $n_s \mapsto \text{Conv}(n_s, N_g, \tilde{n})$  for several values of the couple  $(N_g, \tilde{n})$

*Figure 6* : Graphes des fonctions  $N_g \mapsto \text{Conv}(1500, N_g, \tilde{n})$  pour différentes valeurs de  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{N} = 80$  (courbe inférieure),  $\tilde{N} = 90$  (courbe du milieu),  $\tilde{N} \geq 100$  (courbes supérieures)

*Figure 6* : Graphs of the functions  $N_g \mapsto \text{Conv}(1500, N_g, \tilde{n})$  for several values of  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{N} = 80$  (lower curve),  $\tilde{N} = 90$  (middle curve),  $\tilde{N} \geq 100$  (upper curves)

*Figure 7* : Densité de probabilité en échelle logarithmique du facteur d'amplification dynamique aléatoire  $B(\omega_0)$  et  $B(\omega_0^{\text{para}})$  :  $p_{B(\omega_0)}(b, \omega_0)$  (trait épais),  $p_{B(\omega_0^{\text{para}})}(b, \omega_0^{\text{para}})$  (trait mince).



*Figure 7* : Probability density function of the random magnification factor  $B(\omega_0)$  et  $B(\omega_0^{\text{para}})$  in a logarithmic scale :  $p_{B(\omega_0)}(b, \omega_0)$  (thick curve),  $p_{B(\omega_0^{\text{para}})}(b, \omega_0^{\text{para}})$  (thin curve).

*Figure 8* : Fonction de répartition de  $B_\infty$  en échelle logarithmique :  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > B^*)$  (trait épais),  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} > B^*)$  (trait mince) pour  $\delta_K = 0,01$ .

*Figure 8* : Cumulative density function of  $B_\infty$  in a logarithmic scale :  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > B^*)$  (thick curve),  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} > B^*)$  (thin curve) for  $\delta_K = 0,01$ .

*Figure 9* : Fonction de répartition de  $B_\infty$  en échelle logarithmique :  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > B^*)$  (trait épais),  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} > B^*)$  (trait mince) pour  $\delta_K = 0,02$ .

*Figure 9* : Cumulative density function of  $B_\infty$  in a logarithmic scale :  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty > B^*)$  (thick curve),  $B^* \mapsto \mathcal{P}(B_\infty^{\text{para}} > B^*)$  (thin curve) for  $\delta_K = 0,02$ .

*Figure 10* : Graphe de  $\delta_K \mapsto b_p(\delta_K)$ . Les traits épais (minces) sont relatifs au modèle non paramétrique (paramétrique) (les courbes inférieures, du milieu et supérieures correspondent à  $p = 0,05$ ,  $p = 0,5$  et  $p = 0,95$  respectivement).

*Figure 10* : Graph of  $\delta_K \mapsto b_p(\delta_K)$ . The thick (thin) curves are related to the non parametric (parametric) model (the lower, middle and upper curves, correspond respectively to  $p = 0,05$ ,  $p = 0,5$  and  $p = 0,95$ ).