



**HAL**  
open science

## Classes logarithmiques et capitulation

Jean-François Jaulent

► **To cite this version:**

| Jean-François Jaulent. Classes logarithmiques et capitulation. 2012. hal-00687289v1

**HAL Id: hal-00687289**

**<https://hal.science/hal-00687289v1>**

Preprint submitted on 12 Apr 2012 (v1), last revised 9 Sep 2015 (v6)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Classes logarithmiques et capitulation

par

Jean-François JAULENT

**Résumé.** Nous établissons un analogue logarithmique du Théorème d'Artin-Furtwängler sur la capitulation en transposant dans le cadre des classes logarithmiques les arguments mis en œuvre dans la preuve algébrique classique du Théorème de l'idéal principal.

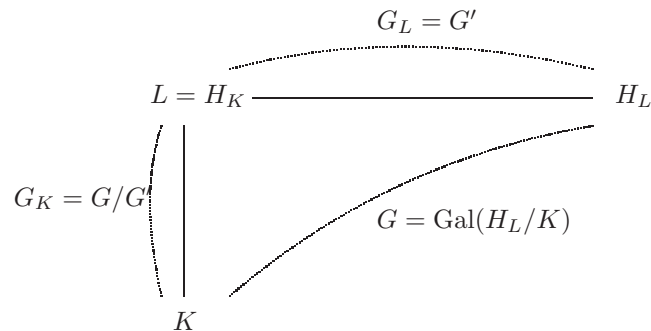
**Abstract.** We prove a logarithmic version of the classical result of Artin-Furtwängler on principalization of ideal classes in the Hilbert class-field by applying the group theoretic description of the transfert map to logarithmic class-groups of degree 0.

## 1. Introduction

Le célèbre Théorème d'Artin-Furtwängler (*cf.* [1, 3, 2]) affirme que le groupe des classes d'idéaux  $Cl_K$  d'un corps de nombres  $K$  capitule dans son corps des classes de Hilbert  $L = H_K$ ; en d'autres termes que les idéaux de  $K$  se principalisent dans son extension abélienne non ramifiée maximale  $L$ .

Et, comme l'extension des classes d'idéaux est injective pour les  $\ell$ -parties dans une extension de degré étranger à  $\ell$ , cela revient à dire que, pour tout nombre premier  $\ell$ , le  $\ell$ -sous-groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux d'un corps de nombres capitule dans le  $\ell$ -corps des classes de Hilbert de ce corps *i.e.* dans sa  $\ell$ -extension abélienne non ramifiée maximale.

La preuve du Théorème d'Artin-Furtwängler repose sur deux éléments, le premier de nature arithmétique, le second purement algébrique : d'une part, la Théorie du corps de classes interprète le groupe des classes d'idéaux  $Cl_K$  comme groupe de Galois  $G_K$  de l'extension abélienne  $H_K/K$ , l'homomorphisme d'extension  $j_{L/K} : Cl_K \rightarrow Cl_L$  correspondant dans cette description au morphisme de transfert  $Ver_{L/K} : G_K \rightarrow G_L$ ; d'autre part, des considérations de théorie des groupes montrent alors que le transfert est nul dans la situation étudiée :

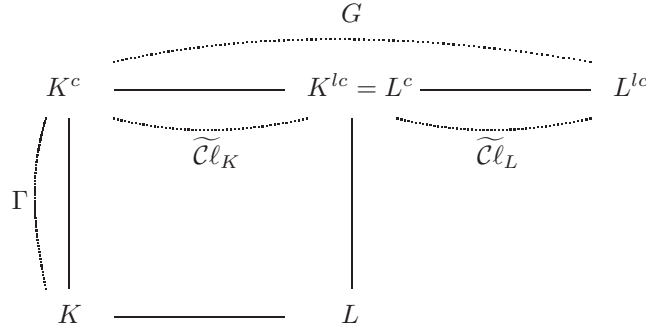


Comme noté dans [5], ce résultat s'étend à diverses situations arithmétiques, notamment aux groupes de classes de rayons, qui conduisent à des situations formellement comparables. Il était donc tentant d'essayer de le transposer à des groupes de classes présentant des analogies remarquables avec les objets précédents.

Il est ainsi défini dans [7], pour chaque nombre premier  $\ell$  et tout corps de nombres  $K$ , un groupe de classes logarithmiques noté  $\mathcal{C}\ell_K$ , obtenu en remplaçant les valuations ordinaires  $\nu_{\mathfrak{p}}$  attachées à chaque place finie  $\mathfrak{p}$  de  $K$  par leurs analogues formels  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$  définis à partir du logarithme  $\ell$ -adique de la valeur absolue  $\ell$ -adique attachée à la place  $\mathfrak{p}$ . La Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes (cf. [8, 4]) interprète alors le groupe de classes  $\mathcal{C}\ell_K$  comme groupe de Galois de la pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale  $K^{lc}$  du corps  $K$ .

Mais une première difficulté apparaît alors : la pro- $\ell$ -extension abélienne  $K^{lc}$  contient évidemment la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique  $K^c$  de  $K$ , de sorte que le groupe  $\mathcal{C}\ell_K \simeq \text{Gal}(K^{lc}/K)$  n'est jamais fini. Pour obtenir un groupe fini, il est ainsi nécessaire de se restreindre au sous-groupe des classes logarithmiques de degré nul  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq \text{Gal}(K^{lc}/K^c)$ . Et la conjecture de Gross généralisée (cf. [6, 7, 8]), affirme que cette restriction nécessaire est aussi suffisante, *i.e.* que le groupe obtenu  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$  est effectivement un  $\ell$ -groupe fini.

Lorsqu'elle est satisfaite, l'extension localement cyclotomique  $K^{lc}$  provient alors, par composition avec  $K^c$ , d'une extension abélienne  $L$  de  $K$  (que l'on peut supposer linéairement disjointe de  $K^c$ ) et il est naturel d'introduire la pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale  $L^{lc}$  du corps  $L$  et de considérer le morphisme d'extension  $\tilde{j}_{L/K} : \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \rightarrow \mathcal{C}\ell_L$ . Dans le schéma obtenu cependant arrive une deuxième difficulté :



le sous-corps  $K^{lc} = L^c$  de  $L^{lc}$  n'est plus alors le sous-corps maximal de  $L^{lc}$  qui est abélien sur  $K^c$ , mais celui qui est abélien sur  $K$  ; de sorte qu'on ne peut plus écrire comme plus haut  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L \simeq G'$  et  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \simeq G/G'$  avec  $G = \text{Gal}(L^{lc}/K^c)$ , mais qu'il nous faut prendre en compte aussi l'action du groupe procyclique  $\Gamma = \text{Gal}(K^c/K)$ .

Le but de cette note est de transposer dans ce contexte logarithmique le théorème d'Artin-Furwängler pour établir le résultat suivant :

**Théorème principal.** *Soient  $\ell$  un nombre premier fixé et  $K$  un corps de nombres dont le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques de degré nul  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$  est fini (autrement dit qui satisfait la conjecture de Gross généralisée pour le premier*

$\ell$ ). Alors pour toute extension abélienne  $L$  de  $K$  telle qu'on ait  $K^{lc} = L^c$ , les classes logarithmiques de degré nul dans  $K$  capitulent dans  $L$ .

## 2. Bref rappel sur les classes logarithmiques

Classiquement, le groupe des classes d'idéaux d'un corps de nombres  $K$  est défini comme conoyau  $Cl_K$  du morphisme naturel partant du groupe multiplicatif  $K^\times$  à valeurs dans le groupe des idéaux  $Id_K$  donné par la famille des valuations  $\nu = (\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in Pl_K}$  attachées aux places finies de  $K$ .

$$1 \rightarrow E_K \rightarrow K^\times \xrightarrow{\nu} Id_K \rightarrow Cl_K \rightarrow 1.$$

Par produit tensoriel avec  $\mathbb{Z}_\ell$ , son  $\ell$ -sous-groupe de Sylow apparaît comme conoyau du morphisme  $\nu$  étendu au tensorisé  $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$  et à valeurs dans le  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre construit sur ces mêmes places :  $\mathcal{D}_\ell = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$ .

Le groupe des classes logarithmiques est le groupe analogue  $\mathcal{C}l_K$  obtenu en remplaçant les valuations classiques  $\nu_{\mathfrak{p}}$  par leurs homologues logarithmiques  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$  définis à partir des logarithmes des valeurs absolues  $\ell$ -adiques (cf. [7]) :

$$1 \rightarrow \mathcal{E}_K \rightarrow \mathcal{R}_K \xrightarrow{\tilde{\nu}} \mathcal{D}_\ell \rightarrow \mathcal{C}l_K \rightarrow 1.$$

Pour chaque place finie  $\mathfrak{p}$  de  $K$ , soit  $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$  le compactifié  $\ell$ -adique du groupe  $K_{\mathfrak{p}}^\times$  et  $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$  le  $\ell$ -adifié du groupe des idèles de  $K$ .

Du point de vue local, le noyau  $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$  de  $\nu_{\mathfrak{p}}$  dans  $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$  (autrement dit le sous-groupe des unités de  $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ ) est le groupe de normes associé à la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension non ramifiée de  $K_{\mathfrak{p}}$ ; tandis que le noyau  $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}}$  de  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$  (i.e. le sous-groupe des unités logarithmiques) correspond, lui, à sa  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique. Par la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes (cf. [4, 7, 8]), le  $\ell$ -groupe des classes d'idéaux s'interprète comme groupe de Galois de la  $\ell$ -extension abélienne non ramifiée maximale  $K^{nr}$  de  $K$ ; et le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\mathcal{C}l_K \simeq \mathcal{J}_K / \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K$  comme groupe de Galois de sa pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale  $K^{lc}$ . Le corps  $K^{lc}$  est ainsi la plus grande pro- $\ell$ -extension abélienne de  $K$  qui est complètement décomposée (en toutes ses places) au-dessus de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $K^c$ . En particulier  $K^{lc}$  contient  $K^c$  et le groupe  $\mathcal{C}l_K$  n'est jamais fini.

La surjection canonique du  $\ell$ -adifié  $\mathcal{J}_K$  du groupe des idèles de  $K$  dans le groupe procyclique  $\text{Gal}(K^c/K) \simeq \mathbb{Z}_\ell$  fournit cependant un morphisme *degré* :

$$\text{deg} : \mathcal{J}_K \rightarrow \mathbb{Z}_\ell;$$

dont le noyau  $\tilde{\mathcal{J}}_K$  est, par construction, le sous-groupe normique de  $\mathcal{J}_K$  attaché à  $K^c$ . Le noyau

$$\tilde{\mathcal{C}}l_K \simeq \tilde{\mathcal{J}}_K / \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_K \simeq \text{Gal}(K^{lc}/K^c)$$

de l'application induite sur  $\mathcal{C}l_K$  est ainsi le *groupe des classes logarithmiques de degré nul*, qui est l'objet de cette note.

La *Conjecture de Gross généralisée* (pour le corps  $K$  et le premier  $\ell$ ) postule précisément la finitude de ce groupe. Comme expliqué dans [6], c'est une conséquence d'une conjecture plus générale d'indépendance  $\ell$ -adique de nombres algébriques, qui résulte elle-même de la conjecture de Schanuel  $\ell$ -adique.

Les résultats de transcendance de Baker-Brumer (cf. e.g. [4, 6]) assurent que la conjecture de Gross généralisée vaut en particulier dès que le corps considéré  $K$  est abélien sur  $\mathbb{Q}$ . La même conclusion vaut encore sous des hypothèses plus

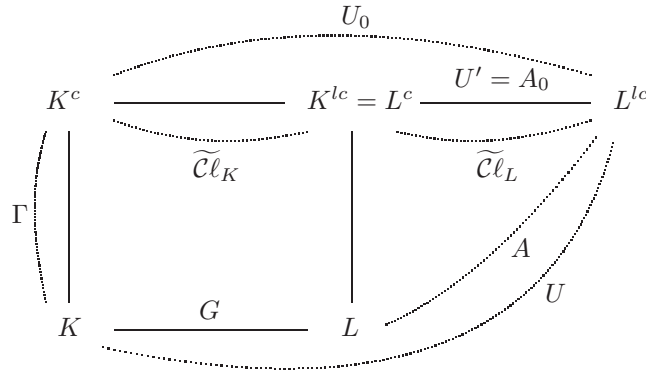
larges, lorsque  $K$  est totalement réel, en vertu d'un raffinement du théorème de Baker-Brumer dû à M. Waldschmidt et précisé par M. Laurent puis D. Roy (*cf.* [9]). Le cas général reste actuellement ouvert.

### 23. Preuve du Théorème principal

Partons donc d'un corps de nombre arbitraire, vérifiant la conjecture de Gross généralisée pour un premier donné  $\ell$ . Notons  $K^c$  sa  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de  $K$  et  $K^{lc}$  la pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique de  $K$ . Comme expliqué plus haut, le groupe  $\text{Gal}(K^{lc}/K)$  s'identifie alors au pro- $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\mathcal{C}\ell_K$  de  $K$  et le sous-groupe  $\text{Gal}(K^{lc}/K^c)$  au  $\ell$ -groupe  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$  des classes logarithmiques de degré nul.

Soit maintenant  $L$  une  $\ell$ -extension abélienne de  $K$  telle qu'on ait  $LK^c = K^{lc}$  et  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$  son (pro)- $\ell$ -groupe des classes logarithmiques de degré nul. Il s'agit de voir que  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$  capitule dans  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ . Quitte à remplacer  $L$  par un sous-corps convenable  $L'$ , nous pouvons supposer  $L/K$  linéairement disjointe de  $K^c/K$  sans restreindre aucunement la généralité de notre preuve, puisque la capitulation dans  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_{L'}$  entraînera la capitulation dans  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ .

Cela fait, introduisons la pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale  $L^{lc}$  de  $L$  et notons  $G$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(L/K)$ . Le corps  $L^{lc}$  est lui-même une pro- $\ell$ -extension de  $K$ ; soit donc  $U = \text{Gal}(L^{lc}/K)$  son groupe de Galois et  $A$  le sous-groupe  $\text{Gal}(L^{lc}/L)$ , qui s'identifie au pro- $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\mathcal{C}\ell_L$ . Les sous-groupes de degré nul respectifs de  $U$  et de  $A$  (*i.e.* les noyaux des morphismes de restriction à  $K^c$ ) sont respectivement  $U_0 = \text{Gal}(L^{lc}/K^c)$  et  $A_0 = \text{Gal}(L^{lc}/L^c) \simeq \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ ; et  $A_0$  est aussi le sous-groupe dérivé de  $U$ , puisque  $L^c = LK^c$  est, par construction la sous-extension maximale de  $L^{lc}$  qui est abélienne sur  $K$ . L'ensemble de cette discussion peut donc se résumer par le schéma de corps :



Maintenant, dans le formalisme du corps de classes, l'extension des idéles correspond au transfert; de sorte que pour montrer que  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$  capitule dans  $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ , il s'agit de vérifier que le transfert  $\text{Ver}_{U/A} : U/U' \rightarrow A$  envoie le sous-groupe  $(U/U')_0 = U_0/U'$  de degré nul de  $U/U'$  sur le sous-groupe nul de  $A_0$ .

Partons pour cela de l'isomorphisme  $G = U/A \simeq U_0/A_0$  et faisons choix d'un système de représentants des classes de  $G$  formé d'éléments de  $A_0$ , disons  $(u_\tau)_{\tau \in G}$ ; notons  $a_{\sigma, \tau} = u_\sigma u_\tau u_{\sigma\tau}^{-1}$  le système de facteurs associé (dont la classe

dans  $H^2(G, A)$  définit la loi sur  $U$  à isomorphisme près); et observons que les  $a_{\sigma, \tau}$  sont dans le sous-groupe  $A_0$  des éléments de degré nul de  $A$ .

Introduisons le  $\mathbb{Z}_\ell$ -module résolvant :

$$B = A \oplus I_G = A \oplus \left( \bigoplus_{\tau \neq 1} \mathbb{Z}_\ell(\tau - 1) \right),$$

muni de l'action de  $G$  définie par :

$$\sigma.a = a^\sigma \quad \& \quad \sigma.(\tau - 1) = a_{\sigma, \tau} + \sigma(\tau - 1).$$

D'après Artin-Tate (cf. [2], Ch. 13, §4), nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U/U' & \xrightarrow{\sim} & B/I_G.B \\ \text{Ver}_{U/A} \downarrow & & \downarrow \text{Tr}_{B/A} \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

où l'isomorphisme en haut est donné par le *logarithme* :  $au_\tau U' \mapsto a + (\tau - 1) + I_G.B$  et où le transfert  $\text{Ver}_{U/A}$  à gauche correspond à la trace  $\text{Tr}_{B/A} = \sum_{\tau \in G} \tau$  à droite.

Définissons le degré d'un élément  $b = a + \sum \lambda_\tau(\tau - 1)$  de  $B$  par la formule :  $\deg b = \deg a$ . Le sous-module des éléments de degré nul est alors :

$$B_0 = A_0 \oplus I_G = A \oplus \left( \bigoplus_{\tau \neq 1} \mathbb{Z}_\ell(\tau - 1) \right).$$

Et tout revient à montrer que la trace  $\text{Tr}_{B/A}$  est nulle sur le sous-module de degré nul  $B_0 I_G.B / I_G.B \simeq B_0 / (B_0 \cap I_G.B)$ , image par le *logarithme* du sous-groupe de degré nul  $U_0/U'$  de  $U/U'$ .

Or, l'isomorphisme canonique de  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules  $B/A \simeq I_G$  nous donne l'inclusion  $I_G.B \subset A \oplus I_G^2$ ; puis :

$$|G| = (U : U') = (B : I_G.B) \geq (B : A \oplus I_G^2) = (A \oplus I_G : A \oplus I_G^2) = (I_G : I_G^2) = |G|,$$

d'où finalement :  $I_G.B = A \oplus I_G^2$ ; et donc :  $B_0 \cap I_G.B = A_0 \oplus I_G^2 = I_G.B_0$ .

En fin de compte, il suffit de vérifier que pour  $B_0 = A_0 \oplus I_G$ , muni de l'action de  $G$  définie plus haut, l'opérateur trace  $\text{Tr}_{B_0/A_0} = \sum_{\tau \in G} \tau$  est nul sur le module  $B_0$ . Or cela résulte immédiatement d'un calcul classique d'algèbre linéaire :

**Lemme.** Avec les notations précédentes, on a :  $\text{Tr}_{B_0/A_0}(B_0) = 0$ .

*Preuve.* Écrivons le groupe  $G$  comme produit direct de sous-groupes cycliques  $\langle \tau_i \rangle$  d'ordres respectifs  $e_i$ ; et posons  $b_i = \tau_i - 1$  pour  $i = 1, \dots, s$ . L'identité :

$$B_0 / I_G.B_0 \simeq I_G / I_G^2 \simeq G$$

montre que les  $b_i$  engendrent  $B_0$  comme  $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module et nous permet d'écrire :

$$e_i b_i = \sum_{j=1}^s \theta_{ij} b_j$$

avec les  $\theta_{ij}$  dans  $I_G$ . Notant  $M$  la matrice de terme général  $m_{ij} = e_i \delta_{ij} - \theta_{ij}$ , nous obtenons alors  $\det M.b_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, s$ ; et finalement :

$$\det M.B_0 = 0.$$

L'isomorphisme  $B_0/A_0 \simeq I_G$  montre alors que  $\det M \in \mathbb{Z}_\ell[G]$  est un multiple de la trace :  $\det M = \lambda \text{Tr}_{B_0/A_0}$  pour un  $\lambda$  dans  $\mathbb{Z}_\ell$ . Et un calcul de degré dans l'algèbre de groupe donne ainsi directement :

$$\deg(\det M) = \det[\deg(m_{ij})]_{ij} = \det[e_i \delta_{ij}]_{ij} = \prod e_i = |G| = \deg \text{Tr}_{B_0/A_0};$$

d'où, comme attendu :  $\det M = \text{Tr}_{B_0/A_0}$  et  $\text{Tr}_{B_0/A_0}(B_0) = 0$ .

*Remarque.* Dans la démonstration ci-dessus, il n'est pas nécessaire de supposer que le groupe  $\widetilde{\mathcal{C}}\ell_L$  est fini (autrement dit que le corps  $L$  satisfait la conjecture de Gross généralisée) : la capitulation a lieu dès lors que  $\widetilde{\mathcal{C}}\ell_K$  est fini.

#### RÉFÉRENCES

- [1] E. ARTIN, *Idealklassen in Oberkörpern und allgemeine Reziprozitätsgesetz*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), 46–51.
- [2] E. ARTIN & J. TATE *Class Field Theory*, Addison-Wesley (1968).
- [3] P. FURTWÄNGLER, *Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930), 14–36.
- [4] G. GRAS, *Class Field Theory : From Theory To Practice*, Springer-Verlag, 2003.
- [5] J. HERBRAND, *Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), 84–92.
- [6] J.-F. JAULENT, *Sur l'indépendance  $\ell$ -adique de nombres algébriques*, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158 .
- [7] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1994), 301–325.
- [8] J.-F. JAULENT, *Théorie  $\ell$ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [9] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps totalement réels*, Acta Arithmetica **103** (2002), 1–7.

#### ADRESSES

Univ. Bordeaux, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex

CNRS, Institut de Mathématiques de Bordeaux, UMR 5251, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex

#### COURRIEL

`jean-francois.jaulent@math.u-bordeaux1.fr`