



**HAL**  
open science

# Structure interne des représentations modulo $p$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Ramla Abdellatif, Stefano Morra

► **To cite this version:**

Ramla Abdellatif, Stefano Morra. Structure interne des représentations modulo  $p$  de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ . 2012. hal-00686683v2

**HAL Id: hal-00686683**

**<https://hal.science/hal-00686683v2>**

Preprint submitted on 6 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Structure interne des représentations modulo $p$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Ramla Abdellatif · Stefano Morra

the date of receipt and acceptance should be inserted later

**Résumé** Soit  $p \geq 5$  un nombre premier. À l'aide de travaux antérieurs des deux auteurs, nous déterminons la filtration par le  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ -socle des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ .

**Mots-clé** représentations supersingulières, programme de Langlands modulo  $p$ , filtration par le socle

**Mathematics Subject Classification (2010)** 11F85, 22E50

## Table des matières

1	Introduction . . . . .	1
2	Préliminaires . . . . .	3
3	De $K$ à $K_S$ . . . . .	6
4	Preuve du Théorème 1.1 . . . . .	12

## 1 Introduction

Soit  $p$  un nombre premier, que l'on prend pour uniformisante de  $\mathbb{Z}_p$ , soit  $F$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et soit  $\overline{\mathbb{F}}_p$  une clôture algébrique du corps résiduel  $\mathbb{F}_p$  de  $\mathbb{Z}_p$ . Les récents travaux de Breuil-Paškūnas [6] et Hu [8] ayant trait à la recherche d'une classification des représentations lisses irréductibles de  $GL_2(F)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  mettent en valeur

---

R. Abdellatif  
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées - ENS Lyon - UMR 5669 - 46, allée d'Italie -  
69364 Lyon Cedex 07  
E-mail: Ramla.Abdellatif@ens-lyon.fr

S. Morra  
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, place Eugène Bataillon, case  
courrier 051, 34095 Montpellier  
E-mail: stefano.morra@math.univ-montp2.fr

l'importance cruciale de la compréhension des extensions entre représentations lisses irréductibles d'un sous-groupe ouvert compact maximal hyperspecial<sup>1</sup> fixé  $K$  de  $GL_2(F)$  apparaissant comme sous-quotients d'une  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse irréductible donnée.

Dans cette optique, nous nous proposons d'étudier la filtration par le  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ -socle des représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . Pour ce faire, nous utilisons certains travaux antérieurs des deux auteurs. En effet, le premier auteur donne dans [2] une classification exhaustive des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  tandis que pour  $p$  impair, le second auteur détermine dans [10] la filtration par le  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ -socle des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations lisses irréductibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . Afin d'énoncer le résultat principal de cet article, nous rappelons quelques notations et définitions. Pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\chi_n^s$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère du groupe  $B(\mathbb{F}_p)$  des matrices triangulaires supérieures de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  défini par

$$\chi_n^s \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := d^n, \quad (1.1)$$

et l'on désigne par  $\mathfrak{a}$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère de  $B(\mathbb{F}_p)$  défini par  $\mathfrak{a} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := ad^{-1}$ . On

note  $\omega : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère lisse qui est trivial en  $p$  et dont la restriction à  $\mathbb{Z}_p^\times$  est donnée par l'application de réduction modulo  $p$ . Pour tout coefficient non nul  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , on note  $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère lisse non ramifié envoyant  $p$  sur  $\lambda$ . Notons ici que tout caractère lisse de  $\mathbb{Q}_p^\times$  peut être vu comme un caractère lisse du tore  $T_S \simeq \mathbb{Q}_p^\times$  des matrices diagonales de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ , puis comme un caractère lisse du sous-groupe de Borel  $B_S$  des matrices triangulaires supérieures de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ . Autrement dit, si  $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  est un caractère lisse, on note encore  $\chi : B_S \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère lisse qui envoie  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  sur  $\chi(a)$ . Enfin, si  $\tau$  est une représentation lisse de  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  munie d'une filtration croissante  $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , on notera

$$\text{SocFil}(\tau_0) \text{---} \text{SocFil}(\tau_1/\tau_0) \text{---} \dots \text{---} \text{SocFil}(\tau_{i+1}/\tau_i) \text{---} \dots$$

pour signifier que la filtration par le  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ -socle de  $\tau$  s'obtient par raffinement de la filtration par le socle de chacun des facteurs gradués  $\tau_{i+1}/\tau_i$  et que la suite des facteurs gradués s'obtient par juxtaposition des suites de facteurs gradués associées aux filtrations par le socle de chaque  $\tau_{i+1}/\tau_i$ .

**Théorème 1.1** *Soit  $p \geq 5$  un entier premier. Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ . On pose  $G_S := SL_2(\mathbb{Q}_p)$  et l'on note  $K_S := SL_2(\mathbb{Z}_p)$  le sous-groupe ouvert compact maximal standard de  $G_S$ ,  $I_S$  son sous-groupe d'Iwahori standard,  $B_S$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de  $G_S$ .*

1. *La filtration par le  $K_S$ -socle de l'induite parabolique  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$  est donnée par*

$$\text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_r^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-2}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-4}^s)) \text{---} \dots$$

2. *La filtration par le  $K_S$ -socle de la représentation de Steinberg  $St_S$  est donnée par*

$$\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^2)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^3)) \text{---} \dots$$

<sup>1</sup> De telles représentations sont parfois appelées *poids de Serre* dans la littérature.

3. La filtration par le  $K_S$ -socle de la représentation supersingulière  $\pi_r$  est donnée par

$$\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{--- SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-2}^s)) \text{--- SocFil}(\mathrm{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-4}^s)) \text{---} \dots$$

Cet article est organisé comme suit : on commence par rappeler les résultats de [2] et [10] qui ont inspiré l'étude menée ici et traitent respectivement des représentations modulo  $p$  de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  et de la structure interne des représentations modulo  $p$  de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . Nous prouvons ensuite deux résultats techniques concernant le comportement des  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ -extensions après restriction à  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ , dont nous déduisons finalement une preuve simple du Théorème 1.1.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Notations

Soit  $p$  un entier premier. On pose  $G := GL_2(\mathbb{Q}_p)$ , on note  $K := GL_2(\mathbb{Z}_p)$  son sous-groupe ouvert compact maximal standard et  $Z \simeq \mathbb{Q}_p^\times$  son centre, dont le pro- $p$ -sous-groupe maximal est noté  $Z_1$ . On désigne par  $B$  le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de  $G$  et par  $U$  son radical unipotent. L'application de réduction modulo  $p$  induit naturellement une surjection de  $K$  sur  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  qui nous permet de définir le sous-groupe d'Iwahori standard  $I$  (resp. : son pro- $p$ -radical  $I(1)$ ) comme l'image réciproque par cette surjection du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. : et unipotentes) de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$ . Plus généralement, pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit  $K_0(p^n)$  comme le sous-groupe des éléments de  $K$  s'écrivant sous la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ p^n c & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p$ .

De même, on pose  $G_S := SL_2(\mathbb{Q}_p)$  de sous-groupe ouvert compact maximal standard  $K_S = SL_2(\mathbb{Z}_p)$ , de sous-groupe de Borel  $B_S := G_S \cap B$ , de sous-groupe d'Iwahori standard  $I_S = G_S \cap I$  et de pro- $p$ -Iwahori standard  $I_S(1) = G_S \cap I(1)$ .

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, on note  $\omega : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère lisse qui est trivial sur  $p$  et dont l'action sur  $\mathbb{Z}_p^\times$  est définie par l'application de réduction modulo  $p$ . Pour tout coefficient non nul  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , on note  $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère lisse non ramifié envoyant  $p$  sur  $\lambda$  et, pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on désigne par  $\chi_n^s$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère du groupe fini  $B(\mathbb{F}_p)$  défini par  $\chi_n^s \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := d^n$ . On note enfin  $\mathfrak{a}$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère de  $B(\mathbb{F}_p)$  défini par  $\mathfrak{a} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := ad^{-1}$ .

*Remarque 2.1* Les caractères  $\chi_n^s$  et  $\mathfrak{a}$  définissent par restriction des caractères du groupe fini  $B_S(\mathbb{F}_p) = B(\mathbb{F}_p) \cap SL_2(\mathbb{F}_p)$ , qui définissent à leur tour par inflation des caractères lisses de  $I_S$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  que l'on note encore  $\chi_n^s$  et  $\mathfrak{a}$ . Notons qu'ils satisfont d'une part aux relations suivantes :

$$\forall M \in B_S(\mathbb{F}_p), \forall n \in \mathbb{Z}, \chi_n^s(M) = \chi_{-n}^s(M^{-1}),$$

et que l'on a d'autre part  $\chi_2^s \mathfrak{a} = \det$ .

Si  $H$  est un sous-groupe ouvert de  $G$ , on dispose d'un foncteur d'induction compacte  $\text{ind}_H^G$  qui coïncide avec le foncteur d'induction lisse  $\text{Ind}_H^G$  lorsque  $H$  est d'indice fini dans  $G$ . Pour toute  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse  $\sigma$  de  $H$  et tout vecteur  $v \in \sigma$ , on note  $[1, v]$  l'élément de  $\text{ind}_H^G(\sigma)$  de support égal à  $H$  et qui envoie  $I_2$  sur  $v$ . Tout ceci reste vrai si l'on remplace  $G$  par  $K$  et que l'on considère le sous-groupe d'indice fini  $H = K_0(p)$  de  $K$ . Dans ce cas, si  $\sigma$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse de  $K_0(p)$  et si  $v$  est un élément de  $\sigma$ , on posera, pour tout  $\ell \in \{0, \dots, p-1\}$ ,

$$F_\ell(v) := \sum_{\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}_p} \lambda_0^\ell \begin{pmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, v] \in \text{Ind}_{K_0(p)}^K \sigma. \quad (2.1)$$

Dans cette écriture,  $[\cdot]$  désigne l'application de relèvement de Teichmüller et l'on prend pour convention  $0^0 = 1$ . Rappelons par ailleurs que toute représentation lisse irréductible de  $K_S$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  provient par inflation d'une représentation irréductible  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$  de  $SL_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ , et que toute représentation lisse irréductible de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  provient par inflation d'une représentation irréductible  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^m$  de  $GL_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ , où  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $m \in \{0, \dots, p-2\}$  sont uniques. Par abus de notation, nous noterons encore  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$  (resp.  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^m$ ) la représentation de  $K_S$  (resp. de  $K$ ) correspondante.

Enfin, si  $\tau$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse de  $K_S$ , on note  $\{\text{soc}^i(\tau)\}_{i \in \mathbb{N}}$  sa filtration par le socle, qui est définie comme suit :  $\text{soc}^0(\tau)$  est le  $K_S$ -socle de  $\tau$ , i.e. le sous- $\overline{\mathbb{F}}_p[K_S]$ -module semi-simple maximal de  $\tau$ . En supposant avoir construit  $\text{soc}^i(\tau)$ , on définit  $\text{soc}^{i+1}(\tau)$  comme l'image réciproque de  $\text{soc}^0(\tau/(\text{soc}^i(\tau)))$  par la projection canonique  $\tau \twoheadrightarrow \tau/(\text{soc}^i(\tau))$ . On utilisera alors la notation

$$\text{soc}^0(\tau) \text{---} \text{soc}^1(\tau)/\text{soc}^0(\tau) \text{---} \dots \text{---} \text{soc}^{n+1}(\tau)/\text{soc}^n(\tau) \text{---} \dots$$

pour désigner la suite des facteurs gradués de la filtration par le socle de  $\tau$ . Plus généralement, si  $\tau$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse de  $K_S$  munie d'une filtration croissante  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , nous écrirons

$$\text{SocFil}(\tau_0) \text{---} \text{SocFil}(\tau_1/\tau_0) \text{---} \dots \text{---} \text{SocFil}(\tau_{i+1}/\tau_i) \text{---} \dots$$

pour signifier que :

- i) la filtration par le socle de  $\tau$  est induite par raffinement par la filtration par le socle de chaque facteur gradué  $\tau_{i+1}/\tau_i$  ;
- ii) la suite des facteurs gradués de la filtration par le socle de  $\tau$  s'obtient en juxtaposant les suites de facteurs gradués associées aux filtrations par le socle de chaque  $\tau_{i+1}/\tau_i$ .

## 2.2 Représentations modulo $p$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Dans [2] est fournie (sans hypothèse sur  $p$ ) une classification exhaustive des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  ainsi qu'une description de la structure de  $\overline{\mathbb{F}}_p[SL_2(\mathbb{Q}_p)]$ -module des représentations lisses irréductibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . On dispose notamment de l'énoncé suivant, issu de [2, Théorèmes 0.1, 2.16 et Proposition 4.5].

**Théorème 2.1** *Soit  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ .*

1. La restriction à  $G_S$  définit un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules :

$$\mathrm{Res}_{G_S}^G(\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}\omega^r})) \simeq \mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^2\omega^{p-1-r}}) .$$

2. Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -module  $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^2\omega^{p-1-r}})$  est réductible si et seulement si le caractère  $\mu_{\lambda^2\omega^{p-1-r}}$  est trivial. De plus, le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -module  $\mathrm{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$  est indécomposable de longueur 2, avec le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg  $St_S$  comme quotient.
3. La restriction à  $G_S$  établit un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules de la représentation de Steinberg  $St$  de  $G$  vers la représentation de Steinberg  $St_S$ .
4. La restriction à  $G_S$  induit un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules :

$$\mathrm{Res}_{G_S}^G(\pi(r, 0, 1)) \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r} . \quad (2.2)$$

Dans cet énoncé,  $\pi(r, 0, 1) := \mathrm{Coker}(T_r : \mathrm{ind}_{KZ}^G(\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2) \rightarrow \mathrm{ind}_{KZ}^G(\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2))$  est la représentation supersingulière de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  de paramètre  $r$  [5, Section 2.7]. On désigne par  $\bar{f}$  l'image dans  $\pi(r, 0, 1)$  d'un élément  $f \in \mathrm{ind}_{KZ}^G(\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2)$ . Les représentations  $\pi_0, \dots, \pi_{p-1}$  forment quant à elles un système explicite de représentants des classes d'isomorphisme des représentations supersingulières de  $G_S$  [2, Section 4.1], et sont caractérisées par les assertions suivantes [2, Propositions 4.7 et 4.11].

**Théorème 2.2** Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ .

1. L'espace  $\pi_r^{IS(1)}$  des vecteurs  $I_S(1)$ -invariants de la représentation supersingulière  $\pi_r$  est de dimension 1 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et engendré par  $v_r := [I_2, x^r]$ .
2. Le sous-groupe d'Iwahori standard  $I_S$  agit sur  $\pi_r^{IS(1)}$  par le caractère  $\omega^r$ .
3. On dispose d'une suite exacte courte non scindée de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules de la forme

$$0 \longrightarrow \pi_{p-1-r} \longrightarrow \pi_0(r, 0) \longrightarrow \pi_r \longrightarrow 0 ,$$

où  $\pi_0(r, 0)$  est la représentation conoyau de paramètre  $r$  pour  $G_S$  [2, Section 3.4.2].

### 2.3 Structure interne des représentations modulo $p$ de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$

Nous supposons désormais que  $p \geq 5$ . Nous rappelons ici quelques résultats de [10] concernant la structure interne des représentations lisses irréductibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  en décrivant notamment leur filtration par le  $K$ -socle. [10, Theorems 1.1 and 1.2].

**Théorème 2.3** Soit  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  une paire de paramètres.

1. La représentation  $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}\omega^r})$  admet la filtration par le  $K$ -socle suivante :

$$\mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s)) \longrightarrow \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a})) \longrightarrow \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^2)) \longrightarrow \dots .$$

2. La représentation de Steinberg  $St$  de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  admet la filtration par le  $K$ -socle suivante :

$$\mathrm{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \longrightarrow \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\mathfrak{a})) \longrightarrow \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\mathfrak{a}^2)) \longrightarrow \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\mathfrak{a}^3)) \longrightarrow \dots .$$

3. La restriction à  $KZ$  de la représentation supersingulière  $\pi(r, 0, 1)$  est scindée de longueur 2 :

$$\pi(r, 0, 1)|_{KZ} \simeq \Pi_r \oplus \Pi_{p-1-r} . \quad (2.3)$$

Les représentations  $\Pi_r$  et  $\Pi_{p-1-r}$  admettent respectivement les filtrations par le  $K$ -socle suivantes :

$$\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^{r+1})) \text{---} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^{r+2})) \text{---} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^{r+3})) \text{---} \dots$$

et

$$\mathrm{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a})) \text{---} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^2)) \text{---} \mathrm{SocFil}(\mathrm{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^3)) \text{---} \dots .$$

### 3 De $K$ à $K_S$

Cette section a pour but de combiner les résultats rappelés dans la section précédente afin d'obtenir deux énoncés techniques qui nous permettront de démontrer simplement le Théorème 1.1. Nous procédons comme suit : nous commençons par étudier plus en détail la nature des  $K$ -extensions entre poids de Serre contenus dans une représentation lisse irréductible donnée de  $G$  et fournissons ainsi un raffinement de l'énoncé du Théorème 2.3. Nous prouvons ensuite que ces  $K$ -extensions restent non scindées lorsqu'on se restreint à leur structure de  $K_S$ -extension.

#### 3.1 Nature des $K$ -extensions entre poids de Serre considérées

Traisons tout d'abord le cas d'une représentation de la forme  $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}\omega^r})$  avec  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  fixés. Un calcul direct reposant sur la décomposition d'Iwahori  $G = KB = BK$  montre, par application de la décomposition de Mackey, que le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -module porté par  $\mathrm{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}\omega^r})$  est isomorphe à  $\mathrm{Ind}_{K \cap B}^K \chi_r^s$ . D'après [10, Section 10], on dispose en outre d'un isomorphisme  $K$ -équivariant<sup>2</sup>

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \mathrm{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K \cap B}^K \chi_r^s .$$

Par continuité du foncteur d'induction  $\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K$ , on en déduit l'existence d'un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules

$$\mathrm{Ind}_{K_0(p)}^K \left( \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \mathrm{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K \cap B}^K \chi_r^s . \quad (3.1)$$

Par ailleurs, on sait grâce à [10, Proposition 5.10] que pour tout entier  $n \geq 1$ , la représentation  $\mathrm{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  est unisérielle<sup>3</sup> de dimension  $p^n$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et admet la filtration par le  $K_0(p)$ -socle suivante :

$$\chi_r^s \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^2 \text{---} \dots \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{p^n-2} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{p^n-1} .$$

On obtient ainsi le premier résultat suivant.

<sup>2</sup> Donc en particulier  $I = K_0(p)$ -équivariant.

<sup>3</sup> Ce qui signifie que sa restriction au sous-groupe des matrices unipotentes de  $\overline{B} \cap K_0(p)$  est une suite d'extensions non scindées d'objets irréductibles.

**Lemme 3.1** *Soit  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  une paire de paramètres. Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -module porté par  $\text{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}} \omega^r)$  est isomorphe à  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K R_\infty^-$ , où  $R_\infty^- := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  est une représentation unisérielle de  $K_0(p)$  de longueur infinie qui admet la filtration par le  $K_0(p)$ -socle suivante :*

$$\chi_r^s \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^2 \text{---} \dots .$$

La situation est analogue pour les  $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$ -modules  $\Pi_r$  et  $\Pi_{p-1-r}$  introduits dans l'énoncé du Théorème 2.3. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\sigma_r^n$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0(p^n)]$ -module d'espace sous-jacent  $\bigoplus_{i=0}^r \overline{\mathbb{F}}_p X^i Y^{r-i}$  sur lequel l'action de  $K_0(p^n)$  est donnée par la formule suivante [10, Section 3.1] :

$$\sigma_r^n \left( \begin{pmatrix} a & b \\ p^n & c \end{pmatrix} \right) \cdot X^i Y^{r-i} := (dX + p^n bY)^i (cX + aY)^{r-i} .$$

Si l'on pose  $R_n := \text{Ind}_{K_0(p^n)}^K(\sigma_r^n)$  et  $R_n^- := \text{Ind}_{K_0(p^n)}^{K_0(p)}(\sigma_r^n)$ , on dispose alors grâce à [11, Lemma 3.4] d'une injection de systèmes inductifs

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \vdots \\ \Downarrow \\ R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_{n-2}^-} R_{n-1}^- \\ \Downarrow \\ R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^- \\ \vdots \end{array} & \xrightarrow{\subset} & \begin{array}{c} \vdots \\ \Downarrow \\ R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_{n-2}} R_{n-1} \\ \Downarrow \\ R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

qui induit un isomorphisme  $K$ -équivariant [10, Proposition 3.9]

$$\varinjlim_{n \text{ impair}} R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \xrightarrow{\sim} \Pi_r .$$

Signalons ici que les représentations  $R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_{n-2}} R_{n-1}$  et  $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_{n-2}^-} R_{n-1}^-$  sont respectivement des quotients explicites de  $R_{n-1}$  et  $R_{n-1}^-$  [10, Section 3.2] dont nous n'utiliserons pas l'expression précise dans la suite. Rappelons par ailleurs que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $R_n^-$  est le sous- $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0(p)]$ -module de  $R_n$  engendré par les vecteurs  $[1, v]$  pour  $v \in \sigma_r^n$  et que la décomposition de Mackey en fait un facteur direct de  $R_n$  en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0(p)]$ -module [11, Lemma 2.6]. Ainsi, chaque  $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}$  définit une représentation unisérielle de dimension finie sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  dont la filtration par le  $K_0(p)$ -socle est de la forme suivante [11, Theorem 5.18] :

$$\chi_r^s \mathfrak{a}^r \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+1} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+2} \text{---} \dots . \quad (3.2)$$

Le prochain énoncé établit une relation importante entre  $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$  et  $R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1}$ .

**Lemme 3.2** *Pour tout entier impair  $n \geq -1$ , on dispose d'une suite exacte courte de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules de la forme*

$$0 \rightarrow \text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \rightarrow \text{Ind}_{K_0(p)}^K (R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-) \rightarrow R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

*Preuve* La démonstration s'effectue par récurrence sur l'entier impair  $n \geq -1$ , où le cas  $n = -1$  s'obtient immédiatement à partir de la définition de  $R_0 \simeq \text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$  et de  $R_0^- = \chi_r^s \mathfrak{a}$ . Le cas général se traite grâce au diagramme commutatif suivant [11, Proposition 3.5] :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R_n^- & \longrightarrow & R_{n+1}^- & \longrightarrow & R_{n+1}^-/R_n^- \longrightarrow 0 \\
& & \swarrow & & \swarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & R_{n+1} & \longrightarrow & R_{n+1}/R_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_{n-2}^-} R_{n-1}^- & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^- & \longrightarrow & R_{n+1}^-/R_n^- \longrightarrow 0 \\
& & \swarrow & & \swarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & (\cdots \oplus_{R_{n-2}} R_{n-1})|_{K_0(p)} & \longrightarrow & (\cdots \oplus_{R_n} R_{n+1})|_{K_0(p)} & \longrightarrow & (R_{n+1}/R_n)|_{K_0(p)} \longrightarrow 0
\end{array}$$

La transitivité de l'induction compacte et [11, Section 3] assurent l'existence d'un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K R_{n+1}^- \simeq R_{n+1}$  qui induit à son tour, par exactitude du foncteur  $\text{ind}_{K_0(p)}^K$ , un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules

$$\text{ind}_{K_0(p)}^K (R_{n+1}^-/R_n^-) \simeq \text{ind}_{K_0(p)}^K (R_{n+1}^-) / \text{ind}_{K_0(p)}^K (R_n^-) \simeq R_{n+1}/R_n.$$

La réciprocité de Frobenius compacte assure alors, à nouveau par exactitude du foncteur  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K$ , l'existence du diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_{n-1}^-} R_{n-1}^- & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^- & \longrightarrow & R_{n+1}^-/R_n^- \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \text{Ind}_{K_0(p)}^K (\cdots \oplus_{R_{n-1}^-} R_{n-1}^-) & \longrightarrow & \text{Ind}_{K_0(p)}^K (\cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-) & \longrightarrow & R_{n+1}/R_n \longrightarrow 0
\end{array}$$

Ainsi, si la suite exacte courte (3.3) est vérifiée pour l'entier  $n - 1 \geq -1$ , l'application du lemme du serpent au diagramme ci-dessus implique immédiatement que la suite exacte (3.3) est vérifiée pour l'entier  $n + 1$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

La continuité et l'exactitude du foncteur  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K$  nous permettent en particulier d'en déduire le résultat suivant.

**Corollaire 3.1** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et soit  $\Pi_r$  le facteur direct du  $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$ -module  $\pi(r, 0, 1)$  de  $K$ -socle égal à  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$ . On dispose alors d'une suite exacte courte de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules de la forme*

$$0 \longrightarrow \text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \longrightarrow \text{Ind}_{K_0(p)}^K(R_{\infty, r}^-) \longrightarrow \Pi_r \longrightarrow 0 ,$$

où  $R_{\infty, r}^- := \varinjlim_{n \text{ impair}} R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$  est une représentation unisérielle de dimension infinie sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  dont la filtration par le  $K_0(p)$ -socle est donnée par

$$\chi_r^s \mathbf{a}^r \longrightarrow \chi_r^s \mathbf{a}^{r+1} \longrightarrow \chi_r^s \mathbf{a}^{r+2} \longrightarrow \dots .$$

### 3.2 Restriction à $K_S$

Nous allons à présent étudier la restriction à  $K_S$  des extensions entre poids de Serre considérées dans la sous-section précédente. Commençons par rappeler un résultat contenu dans [12, Proposition 5.4] et traitant le cas des  $K_0(p)$ -extensions entre caractères.

**Proposition 3.1** *Soient  $\chi, \psi$  deux  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractères lisses de  $K_0(p)$ . L'espace d'extensions  $\text{Ext}_{K_0(p)/Z_1}^1(\psi, \chi)$  est non nul si et seulement si  $\psi = \chi \mathbf{a}^{-1}$  ou  $\psi = \chi \mathbf{a}$ , auquel cas cet espace est de dimension 1 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . En outre, toute extension non triviale de  $\chi \mathbf{a}$  par  $\chi$  admet une base  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -linéaire  $(e_0, e_1)$  pour laquelle  $K_0(p^2)$  agit sur  $e_i$  par le caractère  $\chi \mathbf{a}^i$  et telle que l'on ait, pour tous  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p$*

$$\begin{pmatrix} 1 + pa & b \\ pc & 1 + pd \end{pmatrix} \cdot e_1 = e_1 + ce_0 .$$

Fixons un paramètre  $r \in \{0, \dots, p-2\}$ . La structure de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -module portée par  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s$  admet la description suivante [6, Lemma 2.3 & Theorem 2.4] :

$$\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \longrightarrow \text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \quad \text{si } r \not\equiv 0 \text{ modulo } (p-1) , \quad (3.4)$$

$$\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \oplus \text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 \quad \text{si } r \equiv 0 \text{ modulo } (p-1) . \quad (3.5)$$

Les fonctions  $F_\ell(v)$  définies par la formule (2.1) permettent en outre d'expliciter certains espaces de vecteurs invariants ou coinvariants sous  $I(1)$ . Plus précisément, si l'on fixe un vecteur non nul  $e \in \chi_r^s$ , on dispose grâce à [6, Lemma 2.5] des formules suivantes lorsque  $r \not\equiv 0$  modulo  $(p-1)$  :

$$(\text{soc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s))^{I(1)} = \langle F_0(e) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} ; \quad (3.6)$$

$$(\text{cosoc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s))_{I(1)} = \langle F_{p-1}(e) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} . \quad (3.7)$$

L'isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules  $\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \oplus \text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 \cong \text{Ind}_{K_0(p)}^K \mathbf{1}$  permet en outre de déduire de [6, Lemma 2.6] les cas  $r = 0$  et  $r = p-1$  :

$$(\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2)^{I(1)} = \langle F_0(e) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} , \quad (3.8)$$

$$(\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2)_{I(1)} = \langle F_{p-1}(e) + [1, e] \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} , \quad (3.9)$$

$$\text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 = \langle F_0(e) + [1, e] \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} . \quad (3.10)$$

Nous allons à présent appliquer la Proposition 3.1 au cas  $\chi = \chi_r^s$  pour construire nos extensions entre poids de Serre. Par exactitude du foncteur  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K$ , l'extension non triviale  $E$  de  $\chi_r^s \mathfrak{a}$  par  $\chi_r^s$  décrite dans la Proposition 3.1 définit une  $K$ -extension de la forme

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s) \longrightarrow * \xrightarrow{pr} \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s \mathfrak{a}) \longrightarrow 0 .$$

Si  $r \neq 2$ , on définit  $E_r$  comme étant l'image réciproque de  $\text{soc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s \mathfrak{a}))$  dans l'extension induite

$$0 \longrightarrow \text{cosoc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s)) \longrightarrow * \xrightarrow{pr} \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s \mathfrak{a}) \longrightarrow 0 , \quad (3.11)$$

en prenant comme convention que  $\text{cosoc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K(1)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2$  pour  $r = 0$ . Si  $r = 2$ , on a  $\chi_2^s \mathfrak{a} = \det$  et l'on définit alors  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  comme les images réciproques respectives de  $\text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det$  et de  $\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det$  dans l'extension (3.11).

En particulier, on voit que  $E_r$  (pour  $r \neq 2$ ),  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  possèdent respectivement les filtrations  $K$ -équivariantes suivantes<sup>4</sup>, dans lesquelles on désigne par  $[i]$  l'unique entier de  $\{0, \dots, p-2\}$  qui soit congru à  $i$  modulo  $p-1$  :

$$\begin{aligned} (E_r) &: \text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \cdots \text{Sym}^{[r-2]} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det ; \\ (E_{2,0}) &: \text{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2 \cdots \det ; \\ (E_{2,p-1}) &: \text{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2 \cdots \text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det . \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que pour tous scalaires  $\lambda_0, \mu \in \mathbb{F}_p$ , on a l'égalité suivante dans  $\mathbb{Z}_p/p^2 \mathbb{Z}_p$  [4, Chap. IX, §1, n°3] :

$$[\lambda_0] + [\mu] \equiv [\lambda_0 + \mu] + p[P(\lambda_0, \mu)] \pmod{p^2} , \quad (3.12)$$

où  $P(\lambda_0, \mu) \in \mathbb{F}_p[\lambda_0, \mu]$  est un polynôme de degré  $p-1$  en  $\lambda_0$  et de coefficient dominant égal à  $\pm\mu$ . Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant, sur lequel reposera notre preuve du Théorème 1.1.

**Lemme 3.3** *Les représentations de  $U(\mathbb{Z}_p)$  portées par  $E_r$ ,  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  sont unisérielles.*

*Preuve* Notons  $\overline{E}_r$ ,  $\overline{E}_{2,0}$  et  $\overline{E}_{2,p-1}$  les quotients respectifs des  $\overline{\mathbb{F}}_p[U(\mathbb{Z}_p)]$ -modules  $E_r$ ,  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  par le noyau de la projection naturelle sur les  $U(\mathbb{Z}_p)$ -coinvariants

$$\text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \twoheadrightarrow (\text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r)_{U(\mathbb{Z}_p)} .$$

Ce sont des représentations de  $U(\mathbb{Z}_p)$  qui satisfont par construction aux suites exactes courtes suivantes de  $\overline{\mathbb{F}}_p[U(\mathbb{Z}_p)]$ -modules :

$$0 \longrightarrow (\text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r)_{U(\mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \overline{E}_r \longrightarrow \text{Sym}^{r-2} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \longrightarrow 0 ; \quad (3.13)$$

$$0 \longrightarrow (\text{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2)_{U(\mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \overline{E}_{2,0} \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 0 ; \quad (3.14)$$

$$0 \longrightarrow (\text{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2)_{U(\mathbb{Z}_p)} \longrightarrow \overline{E}_{2,p-1} \longrightarrow \text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \longrightarrow 0 . \quad (3.15)$$

<sup>4</sup> Les extensions sont ici notées en pointillé car nous ne savons pas à ce stade qu'elles sont en fait non scindées : c'est l'objet du Corollaire 3.2.

On peut donc définir  $\overline{E}'_r$  (resp.  $\overline{E}'_{2,0}$ ,  $\overline{E}'_{2,p-1}$ ) comme la sous-représentation de  $\overline{E}_r$  (resp.  $\overline{E}_{2,0}$ ,  $\overline{E}_{2,p-1}$ ) obtenue par image réciproque de  $(\text{Sym}^{r-2}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{U(\mathbb{Z}_p)}$  (resp.  $\mathbf{1}$ ,  $(\text{Sym}^{p-1}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{U(\mathbb{Z}_p)}$ ) à partir de la suite exacte (3.13) (resp. (3.14), (3.15)). La restriction à  $U(\mathbb{Z}_p)$  des poids de Serre de  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$  étant unisérielle, il nous suffit de prouver que les  $U(\mathbb{Z}_p)$ -extensions  $\overline{E}'_r$ ,  $\overline{E}'_{2,0}$  et  $\overline{E}'_{2,p-1}$  ne sont pas scindées pour conclure. Pour ce faire, considérons une base  $(e_0, e_1)$  adaptée à l'extension non triviale  $E$  au sens de la Proposition 3.1. Les identités (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) permettent alors de vérifier que l'on a

$$\begin{aligned}\overline{E}'_r &= \langle F_{p-1}(e_0), F_0(e_1) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \\ \overline{E}'_{2,0} &= \langle F_{p-1}(e_0), F_0(e_1) + [1, e_1] \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \\ \overline{E}'_{2,p-1} &= \langle F_{p-1}(e_0), F_0(e_1) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p},\end{aligned}$$

où les fonctions  $F_{p-1}(e_0)$  et  $F_0(e_1)$  sont ici vues comme les images dans  $\overline{E}'_r$ ,  $\overline{E}'_{2,0}$  ou  $\overline{E}'_{2,p-1}$  d'éléments de  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K(E)$ . Étant donné que 1 est un générateur topologique de  $\mathbb{Z}_p$ , l'action de  $U(\mathbb{Z}_p)$  sur  $\overline{E}'_r$ ,  $\overline{E}'_{2,0}$  et  $\overline{E}'_{2,p-1}$  est entièrement déterminée par l'action des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_p$ . Puisque  $F_\ell(e_0)$  est nul dans  $\overline{E}'_r$ ,  $\overline{E}'_{2,0}$  et  $\overline{E}'_{2,p-1}$  lorsque  $\ell \neq p-1$ , un calcul direct utilisant l'égalité modulaire (3.12) et les propriétés des vecteurs  $(e_0, e_1)$  montre que l'on a, pour tout scalaire  $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_p$  non nul,

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I_2 \right) \cdot F_0(e_1) = \pm \mu F_{p-1}(e_0) \neq 0. \quad (3.16)$$

Ceci achève la démonstration une fois que l'on a remarqué que  $F_{p-1}(e_0)$  est fixe sous l'action de  $U(\mathbb{Z}_p)$ , tout comme l'est  $[1, e_1]$  lorsque  $r = 2$ .  $\square$

**Corollaire 3.2** 1. Les  $K_S$ -extensions portées par  $E_r$  (avec  $r \neq 2$ ),  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  ne sont pas scindées.

2. La filtration par le  $K$ -socle de l'induite  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s$  est stable par restriction à  $K_S$ .

*Preuve* La première assertion est une conséquence directe du Lemme 3.3 puisque  $U(\mathbb{Z}_p)$  est un sous-groupe de  $K_S$ . La seconde assertion découle quant à elle du Lemme 3.3 et de la décomposition de Mackey qui assure que l'on a

$$\text{Ind}_I^K(\chi_r^s)|_{U(\mathbb{Z}_p)} \simeq \rho \oplus \mathbf{1}$$

avec  $\rho$  représentation unisérielle de  $U(\mathbb{Z}_p)$  de dimension  $p$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .  $\square$

*Remarque 3.1* On définit l'extension  $E_{p-1}$  de la même manière que l'extension  $E_0$  mais en prenant cette fois pour cosocle le poids trivial. Les arguments utilisés dans le cas  $r \leq p-2$  s'adaptent alors directement<sup>5</sup> pour prouver que la restriction à  $U(\mathbb{Z}_p)$  de l'extension non scindée  $\text{Sym}^0\overline{\mathbb{F}}_p^2 - \text{Sym}^{p-3}\overline{\mathbb{F}}_p^2$  reste unisérielle, puis que les énoncés du Lemme 3.3 et du Corollaire 3.2 restent valables pour  $r = p-1$ .

<sup>5</sup> Comme cela pourra être vérifié par le lecteur.

#### 4 Preuve du Théorème 1.1

Prouvons à présent le résultat principal de cette note, dont nous rappelons ici l'énoncé.

**Théorème 4.1** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et soit  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ .*

1. *La représentation  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$  admet la filtration par le  $K_S$ -socle suivante :*

$$\text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_r^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-2}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-4}^s)) \text{---} \dots$$

2. *La représentation de Steinberg  $St_S$  admet la filtration par le  $K_S$ -socle suivante :*

$$\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^2)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^3)) \text{---} \dots$$

3. *La représentation supersingulière  $\pi_r$  admet la filtration par le  $K_S$ -socle suivante :*

$$\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-2}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-4}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-6}^s)) \text{---} \dots$$

##### 4.1 Cas des représentations non supersingulières

Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ . D'après le Lemme 3.1, les extensions entre poids de Serre qui apparaissent dans la filtration par le  $K$ -socle de  $\text{Ind}_B^G(\mu_{\sqrt{\lambda}} \otimes \mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}}\omega^r)$  sont, à torsion par un caractère lisse près, des extensions non scindées de la forme  $E_i$ ,  $E_{2,0}$ ,  $E_{2,p-1}$  ou  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s \mathfrak{a}^j$  avec  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  différent de 2 et  $j \in \mathbb{N}$  vérifiant  $r - 2j \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ . Le Corollaire 3.2 affirmant que ces objets définissent des  $K_S$ -extensions non scindées, on obtient le résultat voulu pour les représentations de la forme  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$  grâce aux Théorèmes 2.1, 2.3 et à l'égalité  $I_S = K_0(p) \cap K_S$ . On en déduit directement le cas de la représentation de Steinberg en rappelant que l'on dispose de la suite exacte courte non scindée de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules

$$1 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1}) \longrightarrow St_S \longrightarrow 1 .$$

Comme le  $K_S$ -socle de la représentation  $\text{Ind}_{B_S \cap K_S}^{K_S}(\mathbf{1})$  est somme directe du caractère trivial et du  $K_S$ -socle de la représentation obtenue par inflation de la représentation de Steinberg du groupe fini  $SL_2(\mathbb{F}_p)$ , ce dernier socle engendrant de plus le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K_S]$ -module irréductible  $St_S$ , il suffit de remarquer que la restriction à  $I_S$  du caractère  $\chi_2^s$  est égale à  $\mathfrak{a}$  pour déduire le résultat annoncé de la  $K_S$ -filtration de  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$ , qui correspond au cas  $(r, \lambda) = (p-1, 1)$ .

##### 4.2 Cas des représentations supersingulières

Afin d'achever la preuve du Théorème 1.1, nous allons relier les représentations supersingulières de  $G_S$  aux représentations  $\Pi_r$  de  $KZ$  définies dans le Théorème 2.3.

**Lemme 4.1** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$ -module  $\Pi_r$  est stable sous l'action de  $G_S$  et le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -module qu'il définit est isomorphe à  $\pi_r$ .*

*Preuve* Un calcul direct utilisant la définition de  $\Pi_r$  donnée dans [10, Proposition 3.9] montre que  $\Pi_r$  est stable sous l'action de  $\alpha_0 := \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ . Puisque  $G_S$  est engendré par  $K_S$  et par  $\alpha_0$  (par décomposition de Cartan), on a ainsi prouvé que  $\Pi_r$  est un sous- $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -module de  $\pi(r, 0, 1)$ . Il suffit alors de remarquer que  $v_r$  appartient à  $\Pi_r$  pour obtenir l'inclusion de  $\pi_r = \langle G_S \cdot v_r \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$  dans  $\Pi_r$ , puis de comparer les décompositions de  $\pi(r, 0, 1)$  issues des Théorèmes 2.1 et 2.3 pour en conclure que les  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules  $\pi_r$  et  $\Pi_r$  sont isomorphes.  $\square$

Le cas supersingulier du Théorème 1.1 se prouve alors comme suit : d'après le Corollaire 3.1, les extensions entre poids de Serre qui apparaissent dans la filtration par le  $K$ -socle de  $\Pi_r$  sont, à torsion par un caractère lisse près, des extensions non scindées de la forme  $E_i, E_{2,0}, E_{2,p-1}, \text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 - \text{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2$  ou encore  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s \alpha^j$  avec  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  différent de 2 et  $j \in \mathbb{N}$  vérifiant  $r - 2j \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ . Grâce à la Remarque 3.1 et au Lemme 3.2, ces objets définissent des  $K_S$ -extensions non scindées, ce qui prouve le résultat voulu d'après le Lemme 4.1, le Théorème 2.3 et l'égalité  $I_S = K_0(p) \cap K_S$ .

#### 4.3 Quelques commentaires

1) On peut résumer comme suit la combinatoire des extensions entre poids de Serre qui apparaissent dans la représentation supersingulière  $\pi_r$ . On a toujours

$$\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 - \underbrace{\text{Sym}^{p-1-(r+2)} \overline{\mathbb{F}}_p^2 - \text{Sym}^{r+2} \overline{\mathbb{F}}_p^2}_{\text{position 1}} - \dots - \underbrace{\text{Sym}^{p-1-(r+2x)} \overline{\mathbb{F}}_p^2 - \text{Sym}^{r+2x} \overline{\mathbb{F}}_p^2}_{\text{position } x} - \dots, \quad (4.1)$$

de sorte que cette filtration reflète génériquement la structure de l'arbre de Brauer de  $SL_2(\mathbb{F}_p)$  [9, Section 9.9] pour des raisons qui nous sont encore mystérieuses. Deux situations sont toutefois à distinguer, à savoir celles où  $r + 2x$  est congru à 0 ou à 1 modulo  $p-1$ .

(a) Lorsque  $r + 2x \equiv 0 \pmod{p-1}$ , le voisinage de la position  $x$  est le suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \dots - \text{Sym}^{[r+2(x-1)]} \overline{\mathbb{F}}_p^2 & & & & \text{Sym}^{[p-1-(r+2(x+1))]} \overline{\mathbb{F}}_p^2 - \dots \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 & & \end{array}$$

position  $(x-1)$                       position  $x$                       position  $(x+1)$

(b) Lorsque  $r + 2x \equiv -1 \pmod{p-1}$ , on a plutôt la configuration suivante :

$$\dots - \underbrace{\text{Sym}^1 \overline{\mathbb{F}}_p^2 - \text{Sym}^{p-2} \overline{\mathbb{F}}_p^2}_{\text{position } x} - \underbrace{\text{Sym}^{p-2} \overline{\mathbb{F}}_p^2 - \text{Sym}^1 \overline{\mathbb{F}}_p^2}_{\text{position } (x+1)} - \dots$$

- 2) Le groupe  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  possède deux classes de sous-groupes ouverts compacts maximaux sous l'action par conjugaison, et l'on peut se demander quelle est l'influence du choix de cette classe dans les résultats obtenus ci-avant. Il suffit de remarquer que l'action de l'élément  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ , dont l'action par conjugaison échange les deux classes de sous-groupes ouverts compacts maximaux sus-mentionnées, échange aussi les composantes  $\Pi_r$  et  $\Pi_{p-1-r}$  introduites dans le Théorème 2.3. On vérifie alors immédiatement que l'on a des énoncés parfaitement analogues si l'on s'intéresse aux filtrations par le  $K_S^\alpha := \alpha K_S \alpha^{-1}$ -socle des représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ , de sorte que le choix de la classe de sous-groupes ouverts compacts maximaux n'a finalement pas d'influence sur nos résultats.
- 3) Les résultats présentés dans cet article restent valables lorsque  $p = 3$ . Dans ce cas, on peut en effet à nouveau vérifier que le  $K_0(p)$ -module lisse  $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$  est unisériel et que sa filtration par le socle est constituée de  $K_0(p)$ -extensions admettant une base linéaire qui vérifie la relation de cocycle décrite dans la Proposition 3.1. On peut ainsi reprendre les manipulations du Lemme 3.3 pour étudier le non-scindage des extensions qui apparaissent à l'intérieur de la représentation  $\Pi_r$ .
- 4) Grâce aux résultats présentés dans cet article, nous pouvons déduire des travaux de Koziol [7] la filtration par le socle des représentations lisses irréductibles du groupe unitaire non ramifié  $U(1,1)(\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p)$ . Le lecteur intéressé par les énoncés qui en résultent est invité à consulter [3].

**Remerciements** Nous remercions tout d'abord le rapporteur pour ces commentaires très précis et très utiles. Nous souhaitons aussi remercier Guy Henniart pour sa relecture détaillée d'une version préliminaire de cet article ainsi que pour son intérêt constant. Le second auteur remercie également le Fields Institute for Research in Mathematical Sciences pour son accueil durant une partie de la rédaction de cet article.

## Bibliographie

1. R. Abdellatif, *Autour des représentations modulo  $p$  des groupes réductifs de rang 1*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris-Sud (2011).
2. R. Abdellatif, *Classification des représentations modulo  $p$  de  $SL(2, F)$* , à paraître au Bull. Soc. Math. Fr.
3. R. Abdellatif, S. Morra, *Filtration par le socle pour les représentations modulo  $p$  de  $U(1,1)(\mathbb{Q}_p^2/\mathbb{Q}_p)$* , prépublication (2013).
4. N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques - Algèbre commutative*, Ed. Masson (1983).
5. Ch. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , I, Compositio Math. 138 (2003), 165–188.
6. Ch. Breuil, V. Paškūnas, *Towards a mod  $p$  Langlands correspondance*, Memoirs of Amer. Math. Soc. 216 (2012).
7. K. Koziol, *A classification of the irreducible mod  $p$  representations of  $U(1,1)(\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p)$* , prépublication (2013).
8. Y. Hu, *Diagrammes canoniques et représentations modulo  $p$  de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , J. Inst. Math. Jussieu 11 (2012), 67-118.
9. J.E. Humphreys, *Modular representations of finite groups of Lie type*, Lecture Notes Series LMS 326 (2005), Cambridge Univ. Press.
10. S. Morra, *Explicit description of irreducible  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ -representations over  $\overline{\mathbb{F}}_p$* , J. of Algebra 339 (2011), 252–303.
11. S. Morra, *On some representations of the Iwahori subgroup*, J. of Number Th. 132 (2012), 1074–1150.
12. V. Paškūnas, *Extensions for supersingular representations of  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , Astérisque 331 (2010), 297–333.