



**HAL**  
open science

# Structure interne des représentations modulo $p$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Ramla Abdellatif, Stefano Morra

► **To cite this version:**

Ramla Abdellatif, Stefano Morra. Structure interne des représentations modulo  $p$  de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ . 2012. hal-00686683v1

**HAL Id: hal-00686683**

**<https://hal.science/hal-00686683v1>**

Preprint submitted on 11 Apr 2012 (v1), last revised 6 Mar 2013 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Structure interne des représentations modulo $p$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Ramla Abdellatif · Stefano Morra

the date of receipt and acceptance should be inserted later

**Résumé** Soit  $p \geq 5$  un nombre premier. À partir de travaux antérieurs dus aux deux auteurs, nous déterminons la filtration par le  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ -socle des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ .

**Mots-clé** représentations supersingulières, programme de Langlands modulo  $p$ , poids de Serre, filtration par le socle

**Mathematics Subject Classification (2010)** 11F85, 22E50

## 1 Introduction

Soit  $p$  un nombre premier, que l'on choisit comme uniformisante de  $\mathbb{Z}_p$ , et soit  $\overline{\mathbb{F}}_p$  une clôture algébrique du corps résiduel  $\mathbb{F}_p$  de  $\mathbb{Z}_p$ . Dans [Ab], le premier auteur donne une classification des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  en quatre familles qui correspondent à celles apparaissant dans la classification obtenue par Barthel-Livné et Breuil pour  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . Lorsque  $p$  est impair, le second auteur détermine dans [Mo1] la filtration par le  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ -socle des représentations lisses irréductibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .

Nous nous proposons d'exploiter ces travaux pour expliciter la filtration par le  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ -socle des représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . Avant d'énoncer notre résultat, nous rappelons que pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\chi_n^s$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère du groupe  $B(\mathbb{F}_p)$  des matrices triangulaires supérieures de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  défini par

$$\chi_n^s \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := d^n, \quad (1.1)$$

---

R. Abdellatif  
Laboratoire de Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud XI, 91 405 Orsay  
E-mail: Ramla.Abdellatif@math.u-psud.fr

S. Morra  
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, place Eugène Bataillon, case  
courrier 051, 34095 Montpellier  
E-mail: stefano.morra@math.univ-montp2.fr

que l'on désigne par  $\mathfrak{a}$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère de  $B(\mathbb{F}_p)$  défini par  $\mathfrak{a} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := ad^{-1}$ , par  $\omega$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère lisse de  $\mathbb{Q}_p^\times$  trivial en  $p$  dont la restriction à  $\mathbb{Z}_p^\times$  est donnée par l'application de réduction modulo  $p$ , et que pour tout coefficient  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  non nul, on note  $\mu_\lambda$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère lisse non ramifié de  $\mathbb{Q}_p^\times$  envoyant  $p$  sur  $\lambda$ .

**Théorème 1.1** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et soit  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ . Notons  $I_S$  le sous-groupe d'Iwahori standard de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ ,  $K_S := SL_2(\mathbb{Z}_p)$  et  $B_S$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ .*

1. *La filtration par le  $K_S$ -socle de l'induite parabolique  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$  est donnée par*

$$\text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_r^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-2}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-4}^s)) \text{---} \dots$$

2. *La filtration par le  $K_S$ -socle de la représentation de Steinberg  $St_S$  est donnée par*

$$\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^2)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^3)) \text{---} \dots$$

3. *La filtration par le  $K_S$ -socle de la représentation supersingulière  $\pi_r$  est donnée par*

$$\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-2}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-4}^s)) \text{---} \dots$$

Cet article est organisé de la façon suivante : on commence par rappeler les résultats de [Ab] et [Mo1] ayant inspiré l'étude menée ici, et qui traitent respectivement des représentations modulo  $p$  de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  et de la structure interne des représentations modulo  $p$  de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . On démontre ensuite deux résultats techniques concernant le comportement des  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ -extensions après restriction à  $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ , dont nous déduisons une preuve simple du Théorème 1.1.

## 2 Préliminaires

### 2.1 Notations

On fixe un nombre premier  $p$ . On note  $G := GL_2(\mathbb{Q}_p)$  de sous-groupe ouvert compact maximal  $K := GL_2(\mathbb{Z}_p)$  et de centre  $Z \simeq \mathbb{Q}_p^\times$  dont le pro- $p$ -sous-groupe maximal est noté  $Z_1$ . On désigne par  $B$  le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de  $G$  et par  $U$  son radical unipotent. L'application de réduction modulo  $p$  induit naturellement une surjection de  $K$  sur  $GL_2(\mathbb{F}_p)$  qui nous permet de définir le sous-groupe d'Iwahori standard  $I$  (resp. : son pro- $p$ -radical  $I(1)$ ) comme l'image réciproque par cette surjection du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. : et unipotentes) de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$ . Plus généralement, pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit  $K_0(p^n)$  comme le sous-groupe des éléments de  $K$  s'écrivant sous la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ p^n c & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p$ .

De même, on note  $G_S := SL_2(\mathbb{Q}_p)$  de sous-groupe ouvert compact maximal standard  $K_S = SL_2(\mathbb{Z}_p)$ , de sous-groupe de Borel  $B_S := G_S \cap B$ , de sous-groupe d'Iwahori standard  $I_S = G_S \cap I$  et de pro- $p$ -Iwahori standard  $I_S(1) = G_S \cap I(1)$ .

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, on désigne par  $\omega$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère lisse de  $\mathbb{Q}_p^\times$  qui est trivial sur  $p$  et dont l'action sur  $\mathbb{Z}_p^\times$  est définie par l'application de réduction modulo  $p$ . Pour tout coefficient  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$  non nul, on note  $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère lisse non ramifié qui envoie  $p$  sur  $\lambda$ , et pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on désigne par  $\chi_n^s$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère du groupe fini  $B(\mathbb{F}_p)$  défini par  $\chi_n^s \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := d^n$ . On note enfin  $\mathbf{a}$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractère de  $B(\mathbb{F}_p)$  défini par  $\mathbf{a} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) := ad^{-1}$ .

*Remarque 2.1* Les caractères  $\chi_n^s$  et  $\mathbf{a}$  définissent par restriction des caractères du groupe fini  $B_S(\mathbb{F}_p) = B(\mathbb{F}_p) \cap SL_2(\mathbb{F}_p)$ , qui définissent par inflation des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractères lisses de  $I_S$  que l'on note encore  $\chi_n^s$  et  $\mathbf{a}$ . Notons qu'ils satisfont notamment aux relations suivantes :

$$\forall M \in B_S(\mathbb{F}_p), \forall n \in \mathbb{Z}, \chi_n^s(M) = \chi_{-n}^s(M^{-1}),$$

et que l'on a par ailleurs  $\chi_2^s \mathbf{a} = \det$ .

Pour tout sous-groupe ouvert  $H$  de  $G$ , on dispose d'un foncteur d'induction compacte  $\text{ind}_H^G$  qui coïncide avec le foncteur d'induction lisse  $\text{Ind}_H^G$  lorsque  $H$  est d'indice fini dans  $G$ . Pour toute  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse  $\sigma$  de  $H$  et tout vecteur  $v \in \sigma$ , on note  $[1, v]$  l'élément de  $\text{ind}_H^G(\sigma)$  de support égal à  $H$  et qui envoie  $I_2$  sur  $v$ . Ceci reste vrai si l'on remplace  $G$  par  $K$  et que l'on considère le sous-groupe d'indice fini  $H = K_0(p)$  de  $K$ . Dans ce cas, si  $\sigma$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation lisse de  $K_0(p)$  et si  $v$  est un élément de  $\sigma$ , on pose alors, pour tout  $\ell \in \{0, \dots, p-1\}$ ,

$$F_\ell(v) := \sum_{\lambda_0 \in \overline{\mathbb{F}}_p} \lambda_0^\ell \begin{pmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, v] \in \text{Ind}_{K_0(p)}^K \sigma. \quad (2.1)$$

Rappelons enfin que toute représentation lisse irréductible de  $K_S$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  provient par inflation d'une représentation irréductible  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$  de  $SL_2(\mathbb{F}_p)$ , et que toute représentation lisse irréductible de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  provient par inflation d'une représentation irréductible  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^m$  de  $GL_2(\mathbb{F}_p)$ , avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $m \in \{0, \dots, p-2\}$  uniques. Par abus de notation, nous noterons encore  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$  (resp.  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det$ ) la représentation de  $K_S$  (resp. de  $K$ ) correspondante.

## 2.2 Représentations modulo $p$ de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Les travaux présentés dans [Ab] fournissent une classification exhaustive des classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  ainsi qu'une description de la restriction à  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  des représentations lisses irréductibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . Ils mènent notamment à l'énoncé suivant [Ab, Théorèmes 0.1, 2.16 et Proposition 4.5].

**Théorème 2.1** *Soit  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ .*

1. *La restriction à  $G_S$  définit un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules :*

$$\text{Res}_{G_S}^G(\text{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}} \omega^r)) \simeq \text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^2} \omega^{p-1-r}).$$

2. Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -module  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_{\lambda^2}\omega^{p-1-r})$  est réductible si et seulement si le caractère  $\mu_{\lambda^2}\omega^{p-1-r}$  est trivial. L'induite parabolique  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mathbf{1})$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -module indécomposable de longueur 2 admettant le caractère trivial comme sous-objet et la représentation de Steinberg  $St_S$  comme quotient.
3. La restriction à  $G_S$  établit un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules de la représentation de Steinberg  $St$  de  $G$  vers la représentation de Steinberg  $St_S$ .
4. La restriction à  $G_S$  induit un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules :

$$\text{Res}_{G_S}^G(\pi(r, 0, 1)) \simeq \pi_r \oplus \pi_{p-1-r} . \quad (2.2)$$

Dans cet énoncé,  $\pi(r, 0, 1) := \text{Coker}(T_r : \text{ind}_{KZ}^G(\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2) \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G(\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2))$  est la représentation supersingulière de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  de paramètre  $r$  [Br, Section 2.7]. On désigne par  $\bar{f}$  l'image dans  $\pi(r, 0, 1)$  d'un élément  $f \in \text{ind}_{KZ}^G(\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2)$ . Les représentations  $\pi_0, \dots, \pi_{p-1}$  forment quant à elles un système explicite de représentants des classes d'isomorphisme des représentations supersingulières de  $G_S$  [Ab, Section 4.1] qui vérifient en particulier les assertions suivantes [Ab, Propositions 4.7 et 4.11].

**Théorème 2.2** Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ .

1. L'espace  $\pi_r^{I_S(1)}$  des vecteurs  $I_S(1)$ -invariants de la représentation supersingulière  $\pi_r$  est de dimension 1 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et engendré par  $v_r := [I_2, x^r]$ .
2. Le sous-groupe d'Iwahori standard  $I_S$  agit sur  $\pi_r^{I_S(1)}$  par le caractère  $\omega^r$ .

### 2.3 Structure interne des représentations modulo $p$ de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$

On suppose désormais que  $p \geq 5$ . Nous rappelons maintenant quelques résultats de [Mo1] concernant la structure interne des représentations lisses irréductibles de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ , qui décrivent notamment la filtration par le  $K$ -socle des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations lisses irréductibles de dimension infinie de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  [Mo1, Theorems 1.1 and 1.2].

**Théorème 2.3** Soit  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  une paire de paramètres.

1. La représentation  $\text{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}}\omega^r)$  admet la filtration par le  $K$ -socle suivante :

$$\text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^2)) \text{---} \dots$$

2. La représentation de Steinberg  $St$  de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  admet la filtration par le  $K$ -socle suivante :

$$\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\mathfrak{a})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\mathfrak{a}^2)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\mathfrak{a}^3)) \text{---} \dots$$

3. La restriction à  $KZ$  de la représentation supersingulière  $\pi(r, 0, 1)$  est scindée de longueur 2 :

$$\pi(r, 0, 1)|_{KZ} \simeq \Pi_r \oplus \Pi_{p-1-r} . \quad (2.3)$$

Les représentations  $\Pi_r$  et  $\Pi_{p-1-r}$  admettent respectivement les filtrations par le  $K$ -socle suivantes :

$$\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^{r+1})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^{r+2})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^{r+3})) \text{---} \dots$$

et

$$\text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^2)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\chi_r^s \mathfrak{a}^3)) \text{---} \dots$$

### 3 De $K$ à $K_S$

Cette section a pour but de combiner les résultats rappelés ci-avant afin d'obtenir deux énoncés techniques nous permettant de démontrer facilement le Théorème 1.1. Nous procédons comme suit : nous commençons par étudier plus en détail la nature des  $K$ -extensions entre poids de Serre contenus dans une représentation lisse irréductible donnée de  $G$ , ce qui fournit un raffinement de l'énoncé du Théorème 2.3. Nous prouvons ensuite que ces  $K$ -extensions restent non scindées lorsqu'on se limite à les considérer comme des  $K_S$ -extensions.

#### 3.1 Structure des $K$ -extensions entre poids de Serre

Traisons tout d'abord le cas d'une représentation de la forme  $\text{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}\omega^r})$  avec  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  fixés. Un calcul direct reposant sur la décomposition d'Iwahori  $G = KB = BK$  montre, par application de la décomposition de Mackey, que le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -module porté par  $\text{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}\omega^r})$  est isomorphe à  $\text{Ind}_{K \cap B}^K \chi_r^s$ . D'après [Mo1, §10], on dispose en outre d'un isomorphisme  $K$ -équivariant<sup>1</sup>

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \text{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \xrightarrow{\sim} \text{Ind}_{K \cap B}^K \chi_r^s .$$

Par continuité du foncteur d'induction  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K$ , on en déduit l'existence d'un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules

$$\text{Ind}_{K_0(p)}^K \left( \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \text{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s \right) \xrightarrow{\sim} \text{Ind}_{K \cap B}^K \chi_r^s . \quad (3.1)$$

Par ailleurs, on sait grâce à [Mo1, Proposition 5.10] que pour tout entier  $n \geq 1$ , la représentation  $\text{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  est unisérielle<sup>2</sup> de dimension  $p^n$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  et qu'elle admet la filtration par le  $K_0(p)$ -socle suivante :

$$\chi_r^s \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^2 \text{---} \dots \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{p^n-2} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{p^n-1} .$$

On obtient donc ainsi le premier résultat suivant.

**Lemme 3.1** *Soit  $(r, \lambda) \in \{0, \dots, p-1\} \times \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  une paire de paramètres. Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -module porté par  $\text{Ind}_B^G(\mu_\lambda \otimes \mu_{\lambda^{-1}\omega^r})$  est isomorphe à  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K R_\infty^-$ , où  $R_\infty^- := \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}} \text{Ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  est une représentation unisérielle de  $K_0(p)$  de longueur infinie admettant la filtration par le  $K_0(p)$ -socle suivante :*

$$\chi_r^s \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^2 \text{---} \dots .$$

<sup>1</sup> Donc en particulier  $I = K_0(p)$ -équivariant.

<sup>2</sup> Ce qui signifie que sa restriction au sous-groupe  $U(\mathbb{Z}_p)$  des matrices unipotentes de  $B \cap K$  est une suite d'extensions non scindées d'objets irréductibles.

La situation est analogue pour les  $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$ -modules  $\Pi_r$  et  $\Pi_{p-1-r}$  introduits dans l'énoncé du Théorème 2.3. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\sigma_r^n$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K_0(p^n)]$ -module d'espace sous-jacent  $\bigoplus_{i=0}^r \overline{\mathbb{F}}_p X^i Y^{r-i}$  sur lequel l'action de  $K_0(p^n)$  est donnée par la formule suivante [Mo1, §3.1] :

$$\sigma_r^n \left( \begin{pmatrix} a & b \\ p^n c & d \end{pmatrix} \right) \cdot X^i Y^{r-i} := (dX + cY)^i (p^n bX + aY)^{r-i} .$$

En posant  $R_n := \text{Ind}_{K_0(p^n)}^K(\sigma_r^n)$ , on dispose grâce à [Mo2, Lemma 3.4] d'une injection de systèmes inductifs

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_{n-2}^-} R_{n-1}^- \\ \downarrow \\ R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^- \\ \downarrow \\ \vdots \end{array} & \hookrightarrow & \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_{n-2}} R_{n-1} \\ \downarrow \\ R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \\ \downarrow \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

qui induit un isomorphisme  $K$ -équivariant [Mo1, Proposition 3.9]

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \text{ impair}}} R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \xrightarrow{\sim} \Pi_r .$$

Chaque  $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$  définit alors une représentation unisérielle de dimension finie sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  dont la filtration par le  $K_0(p)$ -socle est de la forme [Mo2, Theorem 5.18] :

$$\chi_r^s \mathfrak{a}^r \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+1} \text{---} \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+2} \text{---} \dots .$$

Le lemme suivant établit une relation importante entre  $R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-$  et  $R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1}$ .

**Lemme 3.2** *Pour tout entier impair  $n \geq -1$ , on dispose de la suite exacte courte suivante de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules :*

$$0 \rightarrow \text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \rightarrow \text{Ind}_{K_0(p)}^K (R_0^- \oplus_{R_1^-} \cdots \oplus_{R_n^-} R_{n+1}^-) \rightarrow R_0 \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

*Preuve* La démonstration s'effectue par récurrence sur l'entier impair  $n \geq -1$ , le cas  $n = -1$  s'obtenant par un calcul direct qui repose sur la définition de  $R_0 \simeq \text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$  et de  $R_0^- = \chi_r^s \mathfrak{a}^r$  [Mo2, §3].

Le cas général se traite à l'aide du diagramme commutatif suivant [Mo2, Proposition 3.5] :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R_n^- & \longrightarrow & R_{n+1}^- & \longrightarrow & R_{n+1}^-/R_n^- \longrightarrow 0 \\
& & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R_n & \longrightarrow & R_{n+1} & \longrightarrow & R_{n+1}/R_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_{n-2}} R_{n-1}^- & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1}^- & \longrightarrow & R_{n+1}^-/R_n^- \longrightarrow 0 \\
& & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & (\cdots \oplus_{R_{n-2}} R_{n-1})|_{K_0(p)} & \longrightarrow & (\cdots \oplus_{R_{n+1}} R_n)|_{K_0(p)} & \longrightarrow & R_{n+1}/R_n \longrightarrow 0
\end{array}$$

Par transitivité de l'induction compacte et [Mo2, §3], on sait qu'il existe un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K R_{n+1}^- \cong R_{n+1}$ . On déduit donc de l'exactitude du foncteur  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K$  et de la réciprocity de Frobenius compacte l'existence du diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_{n-1}} R_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1} & \longrightarrow & R_{n+1}/R_n \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\cdots \oplus_{R_{n-1}} R_{n-1}^-) & \longrightarrow & \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\cdots \oplus_{R_{n+1}} R_{n+1}^-) & \longrightarrow & R_{n+1}/R_n \longrightarrow 0
\end{array}$$

Ainsi, si la suite exacte courte (3.2) est vérifiée pour l'entier  $n-1 \geq -1$ , l'application du lemme du serpent au diagramme ci-dessus implique directement que la suite exacte (3.2) est vérifiée pour l'entier  $n+1$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

La continuité et l'exactitude du foncteur  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K$  nous permettent en particulier d'en déduire le résultat suivant.

**Corollaire 3.1** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et soit  $\Pi_r$  le facteur direct du  $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$ -module  $\pi(r, 0, 1)$  de  $K$ -socle égal à  $\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$ . On dispose alors d'une suite exacte courte de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules*

$$0 \longrightarrow \text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \longrightarrow \text{Ind}_{K_0(p)}^K(R_{\infty, r}^-) \longrightarrow \Pi_r \longrightarrow 0,$$

où  $R_{\infty, r}^- := \varinjlim_{n \text{ impair}} R_0^- \oplus_{R_1} \cdots \oplus_{R_n} R_{n+1}^-$  est une représentation unisérielle de dimension infinie sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  dont la filtration par le  $K_0(p)$ -socle est donnée par

$$\chi_r^s \mathfrak{a}^r \longrightarrow \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+1} \longrightarrow \chi_r^s \mathfrak{a}^{r+2} \longrightarrow \dots$$



### 3.2 Restriction à $K_S$

Nous allons maintenant étudier la restriction à  $K_S$  des extensions entre poids de Serre considérées dans la sous-section précédente. Commençons par rappeler un résultat dû à Paškūnas [P, Proposition 5.4], qui traite le cas des  $K_0(p)$ -extensions entre caractères.

**Proposition 3.1** *Soient  $\chi$  et  $\psi$  deux  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -caractères lisses de  $K_0(p)$ . L'espace d'extensions  $\text{Ext}_{K_0(p)/Z_1}^1(\psi, \chi)$  est non nul si et seulement si  $\psi = \chi\mathfrak{a}$ . Dans ce cas, c'est un espace de dimension 1 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ , et toute extension non triviale de  $\chi\mathfrak{a}$  par  $\chi$  admet une base  $(e_0, e_1)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  pour laquelle  $K_0(p)$  agit sur  $e_i$  par le caractère  $\chi\mathfrak{a}^i$  et telle que*

$$\begin{pmatrix} 1 + pa & b \\ pc & 1 + pd \end{pmatrix} \cdot e_1 = e_1 + ce_0 .$$

Fixons un paramètre  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . La structure de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -module portée par  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s$  est donnée par [BP, Lemma 2.3 & Theorem 2.4] et admet la description suivante :

$$\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{Sym}^{p-1-r} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \quad \text{si } r \not\equiv 0 \text{ modulo } (p-1) , \quad (3.3)$$

$$\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \oplus \text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 \quad \text{si } r \equiv 0 \text{ modulo } (p-1) . \quad (3.4)$$

Les fonctions  $F_\ell(v)$  définies par la formule (2.1) permettent en outre d'explicitier certains espaces de vecteurs invariants ou coinvariants sous  $K_0(p)$ . Plus précisément, en fixant un vecteur non nul  $e \in \chi_r^s$ , on dispose grâce à [BP, Lemma 2.5] des formules suivantes lorsque  $r \not\equiv 0$  modulo  $(p-1)$  :

$$(\text{soc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s))^{K_0(p)} = \langle F_0(e) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} ; \quad (3.5)$$

$$(\text{cosoc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s))_{K_0(p)} = \langle F_{p-1}(e) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} . \quad (3.6)$$

L'isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules  $\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \oplus \text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 \cong \text{Ind}_{K_0(p)}^K \mathbf{1}$  permet de plus de déduire de [BP, Lemma 2.6] les cas  $r = 0$  et  $r = p-1$  :

$$(\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2)^{K_0(p)} = \langle F_0(e) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} \quad (3.7)$$

$$(\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2)_{K_0(p)} = \langle F_{p-1}(e) + [1, e] \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} \quad (3.8)$$

$$\text{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 = \langle F_0(e) + [1, e] \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} \quad (3.9)$$

Nous allons à présent utiliser la Proposition 3.1 dans le cas  $\chi = \chi_r^s$  pour construire nos extensions entre poids de Serre. Par exactitude du foncteur  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K$ , l'extension non triviale  $E$  de  $\chi_r^s \mathfrak{a}$  par  $\chi_r^s$  décrite dans la Proposition 3.1 définit une  $K$ -extension de la forme

$$0 \longrightarrow \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s) \longrightarrow * \xrightarrow{pr} \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s \mathfrak{a}) \longrightarrow 0 .$$

Pour  $r \neq 2$ , on définit  $E_r$  comme l'image réciproque de  $\text{soc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s \mathfrak{a}))$  dans l'extension induite

$$0 \longrightarrow \text{cosoc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s)) \longrightarrow * \xrightarrow{pr} \text{Ind}_{K_0(p)}^K(\chi_r^s \mathfrak{a}) \longrightarrow 0 , \quad (3.10)$$

sous réserve de poser  $\text{cosoc}_K(\text{Ind}_{K_0(p)}^K(1)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2$ .

Pour  $r = 2$ , auquel cas on a  $\chi_2^s \mathfrak{a} = \det$ , on définit  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  comme les images

réciroques respectives de  $\mathrm{Sym}^0 \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det$  et de  $\mathrm{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det$  dans l'extension (3.10).

En particulier, on voit que  $E_r$  (pour  $r \neq 2$ ),  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  possèdent respectivement les filtrations  $K$ -équivariantes suivantes<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} (E_r) &: \mathrm{Sym}^{\lfloor p-1-r \rfloor} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \cdots \mathrm{Sym}^{\lfloor r-2 \rfloor} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det ; \\ (E_{2,0}) &: \mathrm{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2 \cdots \det ; \\ (E_{2,p-1}) &: \mathrm{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2 \cdots \mathrm{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det . \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que pour tous scalaires  $\lambda_0, \mu \in \mathbb{F}_p$ , on a l'égalité suivante dans  $\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p$  [AC, Chap. IX, §1, n°3] :

$$[\lambda_0] + [\mu] \equiv [\lambda_0 + \mu] + p[P(\lambda_0, \mu)] \pmod{p^2} \quad (3.11)$$

avec  $P(\lambda_0, \mu) \in \mathbb{F}_p[\lambda_0, \mu]$  polynôme de degré  $p-1$  en  $\lambda_0$  et de coefficient dominant égal à  $\pm\mu$ .

Nous pouvons alors démontrer le résultat technique suivant, sur lequel repose notre preuve du Théorème 1.1.

**Lemme 3.3** *Les représentations de  $U(\mathbb{Z}_p)$  portées par  $E_r$ ,  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  sont unisérielles.*

*Preuve* Notons  $\overline{E}_r$ ,  $\overline{E}_{2,0}$  et  $\overline{E}_{2,p-1}$  les quotients respectifs des  $\overline{\mathbb{F}}_p[U(\mathbb{Z}_p)]$ -modules  $E_r$ ,  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  par le noyau de la projection naturelle sur les  $U(\mathbb{Z}_p)$ -coinvariants

$$\mathrm{Sym}^{\lfloor p-1-r \rfloor} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r \rightarrow (\mathrm{Sym}^{p-1-\lfloor r \rfloor} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r)_{U(\mathbb{Z}_p)} .$$

Ce sont des représentations de  $U(\mathbb{Z}_p)$  qui satisfont par construction aux suites exactes courtes suivantes de  $\overline{\mathbb{F}}_p[U(\mathbb{Z}_p)]$ -modules :

$$0 \rightarrow (\mathrm{Sym}^{\lfloor p-1-r \rfloor} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^r)_{U(\mathbb{Z}_p)} \rightarrow \overline{E}_r \rightarrow \mathrm{Sym}^{\lfloor r-2 \rfloor} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \rightarrow 0 ; \quad (3.12)$$

$$0 \rightarrow (\mathrm{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2)_{U(\mathbb{Z}_p)} \rightarrow \overline{E}_{2,0} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow 0 ; \quad (3.13)$$

$$0 \rightarrow (\mathrm{Sym}^{p-3} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^2)_{U(\mathbb{Z}_p)} \rightarrow \overline{E}_{2,p-1} \rightarrow \mathrm{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \rightarrow 0 . \quad (3.14)$$

On peut donc définir  $\overline{E}'_r$  (resp.  $\overline{E}'_{2,0}$ ,  $\overline{E}'_{2,p-1}$ ) comme la sous-représentation de  $\overline{E}_r$  (resp.  $\overline{E}_{2,0}$ ,  $\overline{E}_{2,p-1}$ ) obtenue par image réciproque de  $(\mathrm{Sym}^{\lfloor r-2 \rfloor} \overline{\mathbb{F}}_p^2)^{U(\mathbb{Z}_p)}$  (resp.  $\mathbf{1}$ ,  $(\mathrm{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2)^{U(\mathbb{Z}_p)}$ ) à partir de la suite exacte (3.12) (resp. (3.13), (3.14)). La restriction à  $U(\mathbb{Z}_p)$  des poids de Serre de  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$  étant unisérielle, il nous suffit de prouver que les  $U(\mathbb{Z}_p)$ -extensions  $\overline{E}'_r$ ,  $\overline{E}'_{2,0}$  et  $\overline{E}'_{2,p-1}$  ne sont pas scindées pour conclure.

Pour ce faire, considérons une base  $(e_0, e_1)$  adaptée à l'extension non triviale  $E$  au sens de la Proposition 3.1. Les identités (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) et (3.9) permettent alors de voir que l'on a

$$\begin{aligned} \overline{E}'_r &= \langle F_{p-1}(e_0), F_0(e_1) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} , \\ \overline{E}'_{2,0} &= \langle F_{p-1}(e_0), F_0(e_1) + [1, e] \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} , \\ \overline{E}'_{2,p-1} &= \langle F_{p-1}(e_0), F_0(e_1) \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} , \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Les extensions sont notées en pointillé car à ce stade, nous ne savons pas encore que ces extensions sont non scindées : c'est l'objet du Corollaire 3.2.

les fonctions  $F_{p-1}(e_0)$  et  $F_0(e_1)$  étant ici des éléments de  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K(E)$ .

Étant donné que 1 est un générateur topologique de  $\mathbb{Z}_p$ , l'action de  $U(\mathbb{Z}_p)$  sur  $\overline{E}'_r, \overline{E}'_{2,0}$  et  $\overline{E}'_{2,p-1}$  est entièrement déterminée par l'action des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\mu \in \mathbb{F}_p$ . En remarquant que  $F_\ell(e_0)$  est nul dans  $\overline{E}'_r, \overline{E}'_{2,0}$  et  $\overline{E}'_{2,p-1}$  lorsque  $\ell \neq p-1$ , on obtient par un calcul direct reposant sur l'égalité modulaire (3.11) et sur la définition des vecteurs  $(e_0, e_1)$  que l'on a, pour tout scalaire non nul  $\mu \in \mathbb{F}_p$ ,

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I_2 \right) \cdot F_0(e_1) = \pm \mu F_{p-1}(e_0) \neq 0.$$

Ceci achève la démonstration une fois que l'on a remarqué que  $F_{p-1}(e_0)$  est fixe sous l'action de  $U(\mathbb{Z}_p)$ .  $\square$

**Corollaire 3.2** 1. Les  $K_S$ -extensions portées par  $E_r$  (pour  $r \neq 2$ ),  $E_{2,0}$  et  $E_{2,p-1}$  ne sont pas scindées.

2. La filtration par le  $K$ -socle de l'induite  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s$  est stable par restriction à  $K_S$ .

*Preuve* La première assertion est une conséquence directe du Lemme 3.2 puisque  $U(\mathbb{Z}_p)$  est un sous-groupe de  $K_S$ . La seconde assertion découle quant à elle du Lemme 3.2 et de la décomposition de Mackey qui assure que l'on a

$$\text{Ind}_I^K(\chi_r^s)|_{U(\mathbb{Z}_p)} \simeq \rho \oplus \mathbf{1}$$

avec  $\rho$  représentation unisérielle de  $U(\mathbb{Z}_p)$  de dimension  $p$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .  $\square$

#### 4 Preuve du Théorème 1.1

Nous démontrons maintenant le résultat principal de cette note, dont on rappelle l'énoncé ci-dessous.

**Théorème 4.1** Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et soit  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ .

1. La représentation  $\text{Ind}_{B_S}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$  admet la filtration par le  $K_S$ -socle suivante :

$$\text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_r^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-2}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{r-4}^s)) \text{---} \dots$$

2. La représentation de Steinberg  $St_S$  admet la filtration par le  $K_S$ -socle suivante :

$$\text{Sym}^{p-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a})) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\mathfrak{a}^2)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_I^K(\mathfrak{a}^3)) \text{---} \dots$$

3. La représentation supersingulière  $\pi_r$  admet la filtration par le  $K_S$ -socle suivante :

$$\text{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-2}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-4}^s)) \text{---} \text{SocFil}(\text{Ind}_{I_S}^{K_S}(\chi_{-r-6}^s)) \text{---} \dots$$

## 4.1 Cas des représentations non supersingulières

Fixons  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ . D'après le Lemme 3.1, les extensions entre poids de Serre apparaissant dans la filtration par le  $K$ -socle de  $\text{Ind}_B^G(\mu_{\sqrt{\lambda}} \otimes \mu_{\sqrt{\lambda^{-1}}}\omega^r)$  sont, à torsion par un caractère lisse près, des extensions non scindées de la forme  $E_i$ ,  $E_{2,0}$ ,  $E_{2,p-1}$  ou  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s \mathfrak{a}^j$  avec  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  différent de 2 et  $j \in \mathbb{N}$  vérifiant  $r-2j \not\equiv 0$  modulo  $(p-1)$ . Le Lemme 3.2 affirme alors que ces objets définissent des  $K_S$ -extensions non scindées, ce qui prouve le résultat voulu pour les représentations de la forme  $\text{Ind}_{B_S^s}^{G_S}(\mu_\lambda \omega^{p-1-r})$  grâce aux Théorèmes 2.1 et 2.3 et à l'égalité  $I_S = K_0(p) \cap K_S$ . On en déduit directement le cas de la représentation de Steinberg en rappelant que l'on dispose de la suite exacte courte non scindée de  $\overline{\mathbb{F}}_p[K]$ -modules

$$1 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \text{Ind}_{B_S^s}^{G_S}(\mathbf{1}) \longrightarrow St_S \longrightarrow 1 .$$

Puisque l'on sait que le  $K_S$ -socle de la représentation  $\text{Ind}_{B_S \cap K_S}^{K_S}(\mathbf{1})$  est somme directe du caractère trivial et du  $K_S$ -socle de la représentation obtenue par inflation de la représentation de Steinberg du groupe fini  $SL_2(\mathbb{F}_p)$ , celui-ci engendrant de plus le  $\overline{\mathbb{F}}_p[K_S]$ -module irréductible  $St_S$ , il suffit de remarquer qu'en restriction à  $I_S$ , on a  $\chi_2^s = \mathfrak{a}$  pour déduire le résultat voulu de la  $K_S$ -filtration de  $\text{Ind}_{B_S^s}^{G_S}(\mathbf{1})$ , qui correspond au cas  $(r, \lambda) = (p-1, 1)$ .

## 4.2 Cas des représentations supersingulières

Pour terminer la preuve du Théorème 1.1, nous allons relier les représentations supersingulières de  $G_S$  aux représentations  $\Pi_r$  de  $KZ$  définies dans le Théorème 2.3.

**Lemme 4.1** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Le  $\overline{\mathbb{F}}_p[KZ]$ -module  $\Pi_r$  est stable sous l'action de  $G_S$ , et la représentation de  $G_S$  qu'il définit est alors isomorphe à  $\pi_r$ .*

*Preuve* Un calcul direct basé sur la définition de  $\Pi_r$  donnée dans [Mo1, Proposition 3.9] montre que  $\Pi_r$  est stable sous l'action de  $\alpha_0 := \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ . Comme la décomposition de Cartan assure que  $G_S$  est engendré par  $K_S$  et par  $\alpha_0$ , cela suffit à prouver que  $\Pi_r$  est un sous- $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -module de  $\pi(r, 0, 1)$ . Il suffit ensuite de remarquer que  $v_r$  appartient à  $\Pi_r$  pour obtenir que  $\pi_r = \langle G_S \cdot v_r \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$  est contenu dans  $\Pi_r$ , puis de comparer les décompositions de  $\pi(r, 0, 1)$  données par les Théorèmes 2.1 et 2.3 pour en conclure que les  $\overline{\mathbb{F}}_p[G_S]$ -modules  $\pi_r$  et  $\Pi_r$  sont isomorphes.  $\square$

On démontre alors le cas supersingulier du Théorème 1.1 comme suit : d'après le Corollaire 3.1, les extensions entre poids de Serre qui apparaissent dans la filtration par le  $K$ -socle de  $\Pi_r$  sont, à torsion par un caractère lisse près, des extensions non scindées de la forme  $E_i$ ,  $E_{2,0}$ ,  $E_{2,p-1}$  ou  $\text{Ind}_{K_0(p)}^K \chi_r^s \mathfrak{a}^j$  avec  $i \in \{0, \dots, p-1\}$  différent de 2 et  $j \in \mathbb{N}$  vérifiant  $r-2j \not\equiv 0$  modulo  $p-1$ . Le Lemme 3.2 affirme que ces objets définissent des  $K_S$ -extensions non scindées, ce qui prouve le résultat voulu grâce au Lemme 4.1, au Théorème 2.3 et à l'égalité  $I_S = K_0(p) \cap K_S$ .

### 4.3 Deux remarques

- 1) Les résultats présentés dans cet article restent valables lorsque  $p = 3$ . La difficulté de ce cas réside essentiellement dans la complexité technique des calculs à mener pour obtenir la filtration par l'Iwahori-socle des représentations  $R_\infty$  introduites dans la Section 2.3.
- 2) Le groupe  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$  possède deux classes de sous-groupes ouverts compacts maximaux sous l'action par conjugaison, et l'on peut se demander quelle est l'influence du choix de cette classe dans les résultats obtenus ci-avant. Il suffit de remarquer que l'action de l'élément  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ , dont l'action par conjugaison échange les deux classes de sous-groupes ouverts compacts maximaux sus-mentionnées, échange aussi les composantes  $\Pi_r$  et  $\Pi_{p-1-r}$  introduites dans le Théorème 2.3. On vérifie alors immédiatement que l'on aura des énoncés parfaitement analogues si l'on s'intéresse aux filtrations par le  $K_S^\alpha := \alpha K_S \alpha^{-1}$ -socle des représentations lisses irréductibles de  $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ , de sorte que le choix de la classe de sous-groupes ouverts compacts maximaux n'a finalement pas d'influence sur nos résultats.

### Bibliographie

- [Ab] R. Abdellatif, *Classification des représentations modulo  $p$  de  $SL(2, F)$* , soumis (2012).
- [AC] N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques - Algèbre commutative*, Ed. Masson (1983).
- [Br] Ch. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , I, *Compositio Math.* 138 (2003), 165–188.
- [BP] Ch. Breuil, V. Paškūnas, *Towards a mod  $p$  Langlands correspondance*, *Memoirs of Amer. Math. Soc.* 216 (2012).
- [Mo1] S. Morra, *Explicit description of irreducible  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ -representations over  $\overline{\mathbb{F}}_p$* , *J. of Algebra* 339 (2011), 252–303.
- [Mo2] S. Morra, *On some representations of the Iwahori subgroup*, à paraître à *J. of Number Theory* (2011).
- [P] V. Paškūnas, *Extensions for supersingular representations of  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , *Astérisque* 331 (2010), 297–333.