HAL
open science

Paramétrisation des courbes multiples primitives

Jean-Marc Drézet

To cite this version:

Jean-Marc Drézet. Paramétrisation des courbes multiples primitives. Advances in Geometry, 2007, 7 (4), pp.559-612. 10.1515/ADVGEOM.2007.034 . hal-00686249

HAL Id: hal-00686249

https://hal.science/hal-00686249v1

Submitted on 9 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PARAMÉTRISATION DES COURBES MULTIPLES PRIMITIVES

JEAN–MARC DRÉZET

Résumé. The primitive curves are the multiple curves that can be locally embedded in smooth surfaces (we will always suppose that the associated reduced curves are smooth). These curves have been defined and studied by C. Bănică and O. Forster in 1984. In 1995, D. Bayer and D. Eisenbud gave a complete description of the double curves. We give here a parametrization of primitive curves of arbitrary multiplicity. Let $\mathbf{Z}_n = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$. The curves of multiplicity n are obtained by taking an open cover (U_i) of a smooth curve C and by glueing schemes of type $U_i \times \mathbf{Z}_n$ using automorphisms of $U_{ij} \times \mathbf{Z}_n$ that leave U_{ij} invariant. This leads to the study of the sheaf of nonabelian groups $\mathcal{G}_n$ of automorphisms of $C \times \mathbf{Z}_n$ that leave the reduced curve invariant, and to the study of its first cohomology set. We prove also that in most cases it is the same to extend a primitive curve C_n of multiplicity n to one of multiplicity $n+1$, and to extend the quasi locally free sheaf $\mathcal{D}_n$ of derivations of C_n to a rank 2 vector bundle on C_n.

Sommaire

1.	Introduction	1
2.	Préliminaires	9
3.	Faisceaux de groupes non abéliens	16
4.	Faisceaux de groupes d'automorphismes	20
5.	Courbes multiples primitives abstraites	32
6.	Faisceaux des dérivations et fibrés tangents restreints	42
7.	Automorphismes des courbes multiples primitives	48
8.	Courbes primitives de multiplicité 3	53
Références		56

1. Introduction

Une *courbe primitive* est une variété Y de Cohen-Macaulay telle que la sous-variété réduite associée $C = Y_{red}$ soit une courbe lisse irréductible, et que tout point fermé de Y possède un voisinage pouvant être plongé dans une surface lisse. Ces courbes ont été définies et étudiées par C. Bănică et O. Forster dans [1]. On s'intéresse plus particulièrement ici au cas où C, et donc Y, sont projectives.

Les courbes primitives les plus simples, c'est-à-dire les courbes de multiplicité 2, ont été précédemment utilisées par D. Ferrand dans [9]. Les courbes multiples apparaissent aussi

fréquemment dans l'étude des fibrés vectoriels (ou des faisceaux réflexifs) stables sur $\mathbb{P}_3$ (cf. [17], [18], [26]). Les courbes doubles abstraites (c'est-à-dire non plongées) ont été classifiées par D. Bayer et D. Eisenbud dans [2]. Le problème de leur déformation en courbes lisses a été abordé dans [14].

Soient P un point fermé de Y, et U un voisinage de P pouvant être plongé dans une surface lisse S. Soit z un élément de l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,P}$ de S en P engendrant l'idéal de C dans cet anneau. Il existe alors un unique entier n, indépendant de P, tel que l'idéal de Y dans $\mathcal{O}_{S,P}$ soit engendré par (z^n). Cet entier n s'appelle la *multiplicité* de Y. Si $n = 2$ on dit que Y est une *courbe double*. Soit $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de C dans Y. Alors le faisceau conormal de C, $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$ est un fibré en droites sur C, dit *associé* à Y. Il existe une filtration canonique

$$C = C_1 \subset \cdots \subset C_n = Y \ ,$$

où au voisinage de chaque point P l'idéal de C_i dans $\mathcal{O}_{S,P}$ est (z^i).

Soit $L \in \mathrm{Pic}(C)$. On plonge C dans le fibré dual L^* vu comme un surface lisse, au moyen de la section nulle. Alors le n-ième voisinage infinitésimal de C dans L^* est une courbe primitive de multiplicité n et de fibré en droites associé L. On l'appelle la *courbe primitive triviale* de fibré associé L. Les autres exemples simples de courbes primitives sont les courbes de Cohen-Macaulay qui sont plongées dans une surface lisse, et dont la courbe réduite associée est lisse. Mais il en existe beaucoup d'autres.

Dans le cas des courbes doubles, D. Bayer et D. Eisenbud ont obtenu dans [2] la classification suivante : si Y est de multiplicité 2, on a une suite exacte de fibrés vectoriels sur C

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \Omega_{Y|C} \longrightarrow \omega_C \longrightarrow 0 \tag{1}$$

qui est scindée si et seulement si Y est la courbe triviale. En particulier si C n'est pas projective, Y est toujours triviale. Dans le cas où C est projective et Y non triviale, cette courbe est entièrement déterminée par la droite de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\omega_C, L)$ induite par la suite exacte précédente. Les courbes primitives non triviales de multiplicité 2 et de fibré en droites associé L sont donc paramétrées par l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\omega_C, L))$.

Le but du présent article est de donner une description analogue des courbes primitives de multiplicité quelconque, et d'étendre certains résultats de [2]. On cherche à décrire les classes d'équivalence de courbes primitives de multiplicité n de courbe réduite associée C, deux telles courbes C_n, C'_n étant dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $C_n \simeq C'_n$ induisant l'identité sur C.

1.1. Construction des courbes primitives

1.1.1. *Courbes multiples primitives abstraites* – En général il n'existe pas de rétraction $Y \to C$ (voir cette question traitée dans un cadre plus général dans [19]). Mais c'est vrai *localement*. Pour tout ouvert U de C on note $Y(U)$ l'ouvert correspondant de Y. On montre (théorème

5.2.1) que pour tout point fermé P de C il existe un ouvert U de C contenant P tel qu'il existe une rétraction $Y(U) \to U$. On a alors

$$Y(U) \simeq U \times \mathbf{Z}_n,$$

avec $\mathbf{Z}_n = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$. La courbe Y est donc obtenue en recollant des variétés du type $U \times \mathbf{Z}_n$. Cela conduit à la notion de *courbe multiple primitive abstraite*. Soit (U_i) un recouvrement ouvert (U_i) de C, et pour tous i, j, σ_{ij} un automorphisme de $U_{ij} \times \mathbf{Z}_n$ laissant U_{ij} invariant. On suppose qu'on a la relation de cocycle : $\sigma_{jk} \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ik}$ sur U_{ijk}. Le schéma obtenu en recollant les $U_i \times \mathbf{Z}_n$ au moyen des σ_{ij} est une courbe multiple primitive abstraite.

On montre qu'un tel schéma peut être plongé dans $\mathbb{P}_3$ (théorème 5.3.2). Les courbes multiples primitives abstraites sont donc identiques aux courbes multiples primitives de [1].

1.1.2. *Faisceaux de groupes d'automorphismes* – Pour tout ouvert U de C soit $\mathcal{G}_n(U)$ le groupe des automorphismes de $U \times \mathbf{Z}_n$ laissant U invariant. On obtient ainsi un faisceau de groupes (non abéliens) $\mathcal{G}_n$ sur C. L'ensemble de cohomologie $H^1(C, \mathcal{G}_n)$ s'identifie à celui des classes d'isomorphisme de courbes multiples primitives de multiplicité n et de courbe réduite associée C. La construction et les propriétés de la cohomologie des faisceaux de groupes non nécessairement abéliens sont rappelées dans le chapitre 3.

Soient $g \in H^1(C, \mathcal{G}_n)$, et C_n la courbe de multiplicité n induite. De l'action de $\mathcal{G}_n$ sur lui-même par conjugaison on déduit un nouveau faisceau de groupes $(\mathcal{G}_n)^g$ (faisceau obtenu par *recollement*, cf. 3, [11]), qui s'identifie au faisceau de groupes $\mathcal{A}ut_C(C_n)$ des automorphismes de C_n laissant C invariante. Cette construction s'applique aussi à tous les sous-faisceaux de groupes distingués de $\mathcal{G}_n$ (cf. chapitre 3). On note $\mathrm{Aut}_C(C_n)$ le groupe des sections globales de $\mathcal{A}ut_C(C_n)$.

La structure de $\mathcal{G}_n$ est étudiée dans le chapitre 4. On commence par traiter le cas de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$. Soit $\rho : \mathbb{C}[[x,t]]/(t^n) \to \mathbb{C}[[x]]$ la projection. On s'intéresse aux automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres ϕ de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$ tels que $\rho \circ \phi = \rho$. On montre qu'ils sont du type $\phi_{\mu\nu}$, avec $\mu, \nu \in \mathbb{C}[[x,t]]/(t^{n-1})$, ν inversible,

$$\phi_{\mu\nu}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\mu t)^k \frac{d^k \alpha}{dx}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$, et $\phi_{\mu\nu}(t) = \nu t$ (théorème 4.1.3). Les automorphismes de $U \times \mathbf{Z}_n$ ont une description semblable pourvu que $\omega_{C|U}$ soit trivial.

Les éléments de $\mathcal{G}_n(U)$ laissent invariant l'idéal (t). On en déduit un morphisme de restriction

$$\rho_n : \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_{n-1}$$

qui est surjectif. L'application induite

$$H^1(\rho_n) : H^1(C, \mathcal{G}_n) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{G}_{n-1})$$

associe à une courbe de multiplicité n la courbe de multiplicité sous-jacente de multiplicité $n-1$.

En associant $\nu(x,0)$ à $\phi_{\mu\nu}(\alpha)$ on définit un morphisme surjectif $\xi_n : \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{O}_C^*$. Le morphisme induit

$$H^1(\xi_n) : H^1(C, \mathcal{G}_n) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C^*) = \mathrm{Pic}(C)$$

associe à la courbe multiple Y le fibré en droites associé L.

1.1.3. *Courbes doubles* – Soient $L \in \mathrm{Pic}(C)$, $g_0 \in H^1(C, \mathcal{G}_2)$ l'élément correspondant à la courbe double triviale C_2^0 de fibré en droites associé L. On a des suites exactes

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\xi_2} \mathcal{O}_C^* \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow (T_C)^{g_0} = T_C \otimes L \longrightarrow (\mathcal{G}_2)^{g_0} = \mathcal{A}ut_C(C_2^0) \xrightarrow{\xi_2^{g_0}} \mathcal{O}_C^* \longrightarrow 0,$$

Il en découle une application surjective

$$\lambda_{g_0} : H^1(C, T_C \otimes L) \longrightarrow H^1(\xi_2)^{-1}(L)$$

dont les fibres sont les orbites de l'action de $\mathbb{C}^*$ (par multiplication) sur $H^1(C, T_C \otimes L)$. L'ensemble $H^1(\xi_2)^{-1}(L)$ paramètre les courbes doubles de courbe réduite C et de fibré en droites associé L. On peut retrouver ainsi la classification des courbes doubles de [2]. Si $g \in H^1(\xi_2)^{-1}(L)$, on note $E(g)$ le fibré vectoriel de rang 2 figurant dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow E(g) \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

associée à un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(L^*, T_C) = H^1(C, T_C \otimes L)$ de $\lambda_{g_0}^{-1}(g)$. Si C_2 est la courbe double correspondant à g, on a $E(g) = (\Omega_{C_2|C})^*$.

1.1.4. *Courbes de multiplicité $n > 2$* – On montre qu'on a

$$\ker(\rho_n) \ \simeq \ T_C \oplus \mathcal{O}_C$$

(proposition 4.5.2). Soient $g \in H^1(C, \mathcal{G}_n)$, C_n la courbe multiple correspondante, de fibré en droites associé L. Soient $g_k \in H^1(C, \mathcal{G}_k)$ l'image de g, pour $2 \leq k < n$. La description précise de $\mathcal{G}_n$ permet de montrer qu'on a

$$(T_C \oplus \mathcal{O}_C)^g \ = \ E(g_2) \otimes L^{n-1}$$

(proposition 4.6.6). On a donc une suite exacte de faisceaux de groupes

$$0 \longrightarrow E(g_2) \otimes L^{n-1} \longrightarrow \mathcal{A}ut_C(C_n) \longrightarrow \mathcal{A}ut_C(C_{n-1}) \longrightarrow 0.$$

Cela permet de décrire l'ensemble $H^1(\xi_n)^{-1}(g_{n-1})$, qui paramètre les courbes de multiplicité n qui sont des prolongements de C_{n-1}. On a une application surjective

$$\lambda_g : H^1(C, E(g_2) \otimes L^{n-1}) \longrightarrow H^1(\xi_n)^{-1}(g_{n-1})$$

envoyant 0 sur g, et dont les fibres sont les orbites d'une action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$.

L'espace $H^1(C, E(g_2) \otimes L^{n-1})$ paramètre les classes d'équivalence de prolongements de C_{n-1} en courbe de multiplicité n si on considère que deux tels prolongements C_n, C'_n sont équivalents s'il existe un isomorphisme $C_n \simeq C'_n$ induisant l'identité sur C_{n-1}. L'action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ sur

$H^1(C, E(g_2) \otimes L^{n-1})$ est la suivante : si $\alpha \in \mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ et si $i : C_{n-1} \to C_n$ est un prolongement de C_{n-1}, alors $\alpha.C_n$ est le prolongement

$$C_{n-1} \xrightarrow{\alpha^{-1}} C_{n-1} \xhookrightarrow{i} C_n.$$

Le fait que $\ker(\rho_n)^g$ est un faisceau cohérent sur C entraine aussi que $H^1(\rho_n)$ est surjective. On en déduit que toute courbe de multiplicité $n-1$ peut être prolongée en courbe de multiplicité n (proposition 5.1.1).

En utilisant le fait que toute courbe non projective est affine on en déduit aussi que si C n'est pas projective les seules courbes multiples primitives dont la courbe réduite associée est C sont les courbes triviales (ce résultat est prouvé pour les courbes doubles dans [2]).

Soit C_{n-1} une courbe primitive de multiplicité $n-1$, de courbe réduite associée C projective. Les cas les plus simples où on peut décrire complètement les prolongements de C_{n-1} en courbe de multiplicité n sont énumérés en 5.6. Le cas où C_{n-1} est triviale est traité dans 7.3.2 : on obtient par exemple que si C est de genre positif, et si le degré du fibré en droites associé à C_{n-1} est négatif, alors les prolongements de C_{n-1} en courbes de multiplicité n non triviales sont paramétrés pas un *espace projectif tordu*. Les courbes triples sont complètement classifiées dans le chapitre 8.

1.1.5. *Éclatements* – On décrit en 5.4 la procédure d'éclatement d'un point P d'une courbe multiple primitive en terme de faisceaux de groupes. Elle se traduit par un morphisme surjectif $b^P_{n,1} : H^1(C, \mathcal{G}_n) \to H^1(C, \mathcal{G}_n)$. On en déduit une généralisation du cas des courbes doubles traité dans [2] (theorem 1.9).

1.1.6. *Courbes scindées* – Soient $n \geq 2$ un entier et C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n et de courbe réduite associée C. On dit que C_n est *scindée* s'il existe une rétraction $C_n \to C$. Les exemples les plus simples sont les courbes triviales. D'après [2] les seules courbes doubles scindées sont les courbes triviales. Ceci n'est plus vrai en multiplicité supérieure à 2. On peut classifier les courbes scindées en étudiant un autre faisceau de groupes non abéliens, qui est un sous-faisceau de groupes (non distingué) de $\mathcal{G}_n$, celui qui correspond aux automorphismes de la forme $\phi_{0\nu}$.

On peut décrire entièrement les courbes scindées de multiplicité 3. On considère une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

sur C, et soit $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(L^*, \mathcal{O}_C)$ l'élément associé. On considère le plongement $C \subset \mathbb{P}(E)$ défini par l'inclusion $\mathcal{O}_C \subset E$. Soit C_3 la courbe de multiplicité 3 correspondante dans la surface $\mathbb{P}(E)$. C'est une courbe scindée de fibré en droites associé L, et on montre qu'elles sont toutes de ce type. La classe d'isomorphisme de C_3 ne dépend que de $\mathbb{C}\sigma$. Les courbes scindées non triviales de multiplicité 3 et de fibré en droites associé L sont donc naturellement paramétrées par $\mathbb{P}(H^1(C, L))$ (proposition 8.4.1).

1.1.7. *Plongement des courbes multiples primitives dans des surfaces* – (ce sujet n'est abordé que dans l'Introduction). La surjectivité du morphisme $b^P_{n,1}$ de 1.1.5 (autrement dit le fait que le "blowing-down" est toujours possible) est à mettre en relation avec le fait qu'une courbe multiple primitive ne peut pas forcément être plongée dans une surface lisse. D'après [2], theorem 7.1, la seule courbe double non triviale de courbe réduite associée $\mathbb{P}_1$ pouvant être plongée dans une surface lisse est la courbe double déduite d'une conique plane. La démonstration utilise [16], theorem 4.1. Le même résultat permet aisément de prouver que si C_n est une courbe multiple primitive de multiplicité $n \geq 2$ de courbe réduite associée C et de fibré en droites associé L plongée dans une surface lisse, alors on a

$$\deg(L) \ \geq -4g-5,$$

g désignant le genre de C, ou alors C_n est la courbe de multiplicité n induite par un plongement de C dans un fibré en espaces projectifs comme indiqué dans 1.1.6. Mais si L est de degré très négatif la construction des courbes multiples primitives indique qu'il en existe beaucoup d'autres (les espaces $H^1(E(g_2) \otimes L^k)$ deviennent très grands lorsque le degré de L diminue).

1.2. Faisceaux des dérivations et fibrés tangents restreints

D'après [2] une courbe double C_2 de courbe réduite associée C est entièrement déterminée par le fibré $\Omega_{C_2|C}$ de rang 2 sur C et par la suite exacte (1). On va généraliser partiellement ce résultat aux courbes de multiplicité supérieure. Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité $n > 2$, de courbe réduite associée C projective et de fibré en droites associé L. On pose

$$\mathcal{D}_n \ = \ (\Omega_{C_n})^*,$$

qu'on appelle le *faisceau des dérivations de* C_n. C'est un faisceau *quasi localement libre* de rang généralisé 2 sur C_n (cf. [7]), de type $(0,\ldots,0,1,1)$ (c'est-à-dire qu'il est localement isomorphe à $\mathcal{O}_{C_n} \oplus \mathcal{O}_{C_{n-1}}$).

On pose

$$\mathbb{T}_{n-1} \ = \ \mathcal{D}_{n|C_{n-1}},$$

qui est un faisceau localement libre de rang 2 sur C_{n-1}. On a aussi $\mathbb{T}_{n-1} = (\Omega_{C_n|C_{n-1}})^*$. On l'appelle le *fibré tangent restreint* de C_n. Si C_n est plongée dans une surface lisse, on a en effet $\mathbb{T}_{n-1} = T_{S|C_{n-1}}$. Bien que ce soit un fibré sur C_{n-1} il dépend effectivement de C_n, et plus précisément de l'inclusion $C_{n-1} \subset C_n$. La classe d'isomorphisme de C_n seule détermine $\mathbb{T}_{n-1}$ à l'action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ près.

On a des inclusions canoniques

$$\mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C \ \subset \ \mathbb{T}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C \ \subset \ \mathcal{D}_n$$

donc $\mathbb{T}_{n-1}$ est un prolongement de $\mathcal{D}_{n-1}$ en fibré vectoriel de rang 2 sur C_{n-1}. On montre (corollaire 6.2.2) que si $\Omega_{C_2|C}$ est stable, si $\deg(L) \leq 0$, et si en cas d'égalité on a $L^k \not\simeq \mathcal{O}_C$ pour $1 \leq k < 2n$, alors le prolongement $\mathbb{T}_{n-1}$ de $\mathcal{D}_{n-1}$ détermine complètement la courbe C_n. De plus tout prolongement de $\mathcal{D}_{n-1}$ en fibré de rang 2 sur C_{n-1} correspond à un prolongement de C_{n-1} en courbe de multiplicité n.

Les hypothèses du corollaire 6.2.2 entrainent que $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ est trivial. La démonstration repose sur une analyse dans 2.2 des prolongements de faisceaux quasi localement libres en faisceaux localement libres. Cela conduit dans le cas de $\mathcal{D}_{n-1}$ sur C_{n-1} à une application linéaire

$$\theta : \mathrm{Hom}(T_C, E \otimes L^{n-1}) \longrightarrow H^1(C, E \otimes L^{n-1})$$

(où $E = \Omega^*_{C_2|C}$) telle que $\mathrm{coker}(\theta)$ s'identifie naturellement aux prolongements de $\mathcal{D}_{n-1}$ en fibré vectoriel de rang 2 sur C_{n-1}. Si $u \in H^1(E \otimes L^{n-1})$, on note $\mathbb{T}(u)$ le prolongement de $\mathcal{D}_{n-1}$ induit par u.

D'autre part $H^1(E \otimes L^{n-1})$ paramètre aussi les prolongements de C_{n-1} en courbe de multiplicité n (cf. 1.1.4). De u on déduit donc un prolongement C_n de multiplicité n, d'où un fibré de rang 2 $\mathbb{T}_{n-1}$ prolongement de $\mathcal{D}_{n-1}$. On note $\mathbb{T}_{n-1}(u)$ ce fibré $\mathbb{T}_{n-1}$. On montre que $\mathbb{T}_{n-1}(u) = \mathbb{T}(-(n-1)u)$ (théorème 6.2.1), d'où on déduit le corollaire 6.2.2.

1.3. Automorphismes des courbes multiples primitives

Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité $n \geq 2$, de courbe réduite associée C projective et de fibré en droites associé L. Il existe un morphisme canonique

$$\alpha : \mathrm{Aut}_C(C_n) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

associant à un automorphisme de C_n l'automorphisme induit de L, qui est une homothétie. On pose

$$\mathrm{Aut}^0_C(C_n) \;=\; \ker(\alpha).$$

On montre (théorème 7.2.2) que si C_n n'est pas triviale, alors $\mathrm{im}(\alpha)$ est fini. Mais $\mathrm{Aut}^0_C(C_n)$ peut être non trivial. Pour le décrire il faut introduire une autre description des automorphismes $\phi_{\mu\nu}$ de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$ tels que $\nu(x,0) = 1$. Soit D une dérivation de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$. On suppose que

$$D(\mathbb{C}[[x,t]]) \subset (t) \quad \text{et} \quad D((t)) \subset (t^2). \tag{2}$$

Les dérivations qui ont ces propriétés sont celles qui se mettent sous la forme

$$D \;=\; at\frac{\partial}{\partial x} + bt^2\frac{\partial}{\partial t},$$

avec $a, b \in \mathbb{C}[[x,t]]$. On pose

$$\chi_D \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} D^k \;:\; \mathbb{C}[[x,t]]/(t^n) \longrightarrow \mathbb{C}[[x,t]]/(t^n).$$

On définit ainsi un automorphisme de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$ tel que $\rho \circ \phi = \rho$. On montre (théorème 4.2.5) que pour tout automorphisme $\phi_{\mu\nu}$ de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$ tel que $\nu(x,0) = 1$ il existe une unique telle dérivation D telle que $\phi_{\mu\nu} = \chi_D$.

Cette représentation des automorphismes a l'avantage de se globaliser. Pour étudier $\mathrm{Aut}^0_C(C_n)$ il faut remplacer les dérivations précédentes par des sections de $\mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C$ (cf. 1.2), et on

définit de manière analogue les éléments χ_D de $\mathrm{Aut}^0_C(C_n)$ associés aux sections D de ce fibré. On montre (théorème 7.2.5) que les automorphismes χ_D sont les seuls éléments de $\mathrm{Aut}^0_C(C_n)$. Comme ensemble, on a donc

$$\mathrm{Aut}^0_C(C_n) \ = \ H^0(C_{n-1}, \mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C),$$

mais évidemment la structure de groupe de $\mathrm{Aut}^0_C(C_n)$ n'est pas l'addition (ce groupe n'est en général pas commutatif).

On donne dans le corollaire 7.2.3 de nombreux cas où $\mathrm{Aut}_C(C_n)$ est trivial.

Soit C_{n-1} une courbe primitive de multiplicité $n-1 \geq 2$ et de courbe réduite associée C projective. On étudie en 7.3 l'action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ sur $H^1(E \otimes L^{n-1})$ (où $E = \Omega^*_{C_2|C}$). On en déduit la classification des prolongements de C_{n-1} en courbes de multiplicité n lorsque C_{n-1} est triviale. On obtient aussi un résultat qui est utilisé dans la classification des courbes triples.

1.4. Plan des chapitres suivants

Le chapitre 2 rassemble des rappels ou des résultats techniques utilisés dans les autres chapitres. En particulier on décrit dans 2.2 les prolongements de faisceaux quasi localement libres en faisceaux localement libres (cf. [7]). Dans 2.3 on donne des résultats concernant la cohomologie de Čech qui permettront en particulier d'identifier certains faisceaux par la suite.

Le chapitre 3 est consacré à des rappels de résultats concernant la cohomologie des faisceaux de groupes non nécessairement abéliens. On s'inspire ici de [11].

Dans le chapitre 4 on étudie en détail les faisceaux de groupes $\mathcal{G}_n$ mentionnés dans l'Introduction.

Le chapitre 5 est consacré à la construction et la paramétrisation des courbes multiples primitives en utilisant les faisceaux de groupes $\mathcal{G}_n$.

Le chapitre 6 traite de la relation entre les prolongements d'une courbe primitive C_{n-1} de multiplicité $n-1$ en courbes de multiplicité n d'une part, et les prolongements du faisceau des dérivations de C_{n-1} en fibré de rang 2 d'autre part.

Dans le chapitre 7 on étudie les groupes d'automorphismes des courbes multiples primitives et les actions de ces groupes intervenant dans la paramétrisation des courbes.

Le chapitre 8 est consacré à la description des courbes primitives triples.

1.5. Notations

Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $A_n = \mathbb{C}[t]/(t^n)$, $\mathbf{Z}_n = \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$.

Si $\alpha \in \mathbb{C}[t]$, on note α_i le coefficient de t^i dans α. On emploie une notation analogue pour d'autres anneaux, par exemple un anneau du type $A[t]/(t^n)$, A étant un anneau commutatif unitaire.

Si X, Y sont des variétés algébriques, on note p_X, p_Y les projections $X \times Y \to X$, $X \times Y \to Y$.

Si Y est une sous-variété fermée de X, on notera $\mathcal{I}_{Y,X}$ ou plus simplement $\mathcal{I}_Y$ le faisceau d'idéaux de Y dans X.

2. Préliminaires

2.1. Courbes multiples primitives

(cf. [1], [27], [22], [4]).

Soient X une variété algébrique lisse connexe de dimension 3, et $C \subset X$ une courbe lisse connexe. On appelle *courbe multiple de support* C un sous-schéma de Cohen-Macaulay $Y \subset X$ tel que l'ensemble des points fermés de Y soit C. Autrement dit, $Y_{red} = C$.

Soit n le plus petit entier tel que $Y \subset C^{(n-1)}$, $C^{(k-1)}$ désignant le k-ième voisinage infinitésimal de C, c'est-à-dire $\mathcal{I}_{C^{(k-1)}} = \mathcal{I}_C^k$. On a une filtration $C = C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = Y$ où C_i est le plus grand sous-schéma de Cohen-Macaulay contenu dans $Y \cap C^{(i-1)}$. On appelle n la *multiplicité* de Y.

On dit que Y est *primitive* si pour tout point fermé x de C, il existe une surface S de X contenant un voisinage de x dans Y et lisse en x. Dans ce cas, $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2}$ est un fibré en droites sur C et on a $\mathcal{I}_{C_j}/\mathcal{I}_{C_{j+1}} = L^j$ pour $1 \leq j < n$. Soit $P \in C$. Alors il existe des éléments x, y, t de $m_{X,P}$ (l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$) dont les images dans $m_{X,P}/m_{X,P}^2$ forment une base, et que pour $1 \leq i < n$ on ait $\mathcal{I}_{C_i,P} = (x, y^i)$.

Le cas le plus simple est celui où Y est contenue dans une surface lisse S de X. Dans ce cas il est même inutile de mentionner la variété ambiente X. Supposons Y de multiplicité n. Soient $P \in C$ et $f \in \mathcal{O}_{S,P}$ une équation locale de C. Alors on a $\mathcal{I}_{C_i,P} = (f^i)$ pour $0 \leq j < n$, en particulier $I_{Y,P} = (f^n)$, et $L = \mathcal{O}_C(-C)$.

On notera $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{C_n}$ et on considèrera $\mathcal{O}_i$ comme un faisceau sur C_n de support C_i si $1 \leq i < n$.

2.2. Prolongements en faisceaux localement libres

On utilise ici les notations et les résultats de [7].

Soient C une courbe projective lisse irréductible, $Y = C_n$ une courbe multiple primitive de multiplicité $n \geq 2$ de courbe réduite associée C, et $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2}$, qui est un fibré en droites sur C.

Soient r, s des entiers positifs et $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de type $(0, \ldots, 0, r, s)$ sur C_n, c'est-à-dire que pour tout point fermé P de C_n il existe un voisinage U de P tel que $\mathcal{E}_{|U} \simeq r\mathcal{O}_{n-1|U} \oplus s\mathcal{O}_{n|U}$. Soient $E = \mathcal{E}^{(2)}$ (c'est-à-dire le sous-faisceau de $\mathcal{E}$ annulateur de $\mathcal{I}_C^{n-1}$) et $F = \mathcal{E}/E$. Alors E est un faisceau localement libre sur C_{n-1} de rang $R = r + s$ et F est localement libre sur C de rang s. Le morphisme canonique $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_C \to \mathcal{E}$ induit un morphisme injectif de fibrés vectoriels sur C

$$\tau_{\mathcal{E}} : F \otimes L \longrightarrow E_{|C} \ .$$

Réciproquement soient E un fibré vectoriel de rang $r + s$ sur C_{n-1} et F un fibré vectoriel de rang s sur C. On s'intéresse aux extensions

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

sur C_n.

2.2.1. Proposition : *On a une suite exacte canonique*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F, E_{|C} \otimes L^{n-2}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(F, E) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(F \otimes L, E_{|C}) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(F, E)$ et $0 \to E \to \mathcal{E} \to F \to 0$ l'extension correspondante. Alors $\mathcal{E}$ est quasi localement libre de type $(0, \ldots, 0, r, s)$ si et seulement si $\beta(\sigma)$ est injectif. On a dans ce cas $\beta(\sigma) = \tau_{\mathcal{E}}$ et $E = \mathcal{E}^{(2)}$.

Démonstration. D'après la suite spectrale des Ext (cf. [13], 7.3) on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}om(F, E)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(F, E) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(F, E)) \longrightarrow 0.$$

Soient $\mathbb{L}$ une extension de $\mathcal{I}_C$ en fibré en droites sur C_n et $\mathbb{F}$ une extension de F en fibré vectoriel sur C_n (ces fibrés existent d'après [7], théorème 3.1.1). On a alors une résolution localement libre de F sur C_n

$$\cdots \mathbb{F} \otimes \mathbb{L}^n \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{F} \otimes \mathbb{L} \xrightarrow{\alpha_1} \mathbb{F} \xrightarrow{\alpha_0} F \longrightarrow 0$$

(par exemple α_0 est la restriction $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{|C} = F$, $\ker(\alpha_0) = \mathbb{F} \otimes \mathcal{I}_C$ et α_1 est défini par la restriction $\mathbb{L} \to \mathcal{I}_C$, etc...) On calcule $\mathcal{H}om(F, E)$ et $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(F, E)$ au moyen de la résolution précédente, et on obtient $\mathcal{H}om(F, E) = \ker(A_1)$, $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(F, E) = \mathrm{coker}(A_1)$, A_1 étant le morphisme $\mathcal{H}om(\mathbb{F}, E) \to \mathcal{H}om(\mathbb{F} \otimes \mathbb{L}, E)$ déduit de α_1. On en déduit immédiatement que $\mathcal{H}om(F, E) \simeq \mathcal{H}om(F, E_{|C} \otimes L^{n-2})$, $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(F, E) \simeq \mathcal{H}om(F \otimes L, E_{|C})$, ces morphismes étant indépendants du choix de $\mathbb{L}$ et $\mathbb{F}$, d'où la suite exacte (3).

Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(F, E)$ et $0 \to E \to \mathcal{E} \to F \to 0$ l'extension associée. On a $\beta(\sigma) \in H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(F, E))$, et si $P \in C$, $\beta(\sigma)(P) \in \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{nP}}(F_P, E_P)$ correspond à l'extension de

$\mathcal{O}_{nP}$-modules $0 \to F_P \to \mathcal{E}_P \to E_P \to 0$. Pour démontrer la seconde partie de la proposition il suffit de prouver le résultat suivant : si

$$0 \longrightarrow (r+s)\mathcal{O}_{n-1,P} \longrightarrow M \longrightarrow s\mathcal{O}_{CP} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{O}_{nP}$-modules correspondant à

$$\alpha \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{nP}}(s\mathcal{O}_{CP}, (r+s)\mathcal{O}_{n-1,P}) \simeq \mathrm{Hom}(s\mathcal{O}_{CP}, (r+s)\mathcal{O}_{CP}),$$

alors M est quasi libre de type $(0,\dots,0,r,s)$ si et seulement si α est injectif. Soit $z \in \mathcal{O}_{nP}$ un générateur de $\mathcal{I}_{CP}$. La théorie classique des extensions montre que M est isomorphe au conoyau du morphisme

$$\overline{\alpha} \oplus (\times z) : s\mathcal{O}_{nP} \longrightarrow (r+s)\mathcal{O}_{n-1,P} \oplus s\mathcal{O}_{nP} \ ,$$

où $\overline{\alpha} : s\mathcal{O}_{nP} \to (r+s)\mathcal{O}_{n-1,P}$ induit α et $\times z$ est la multiplication par z. Le résultat en découle aisément. □

2.2.2. *Prolongement en faisceau localement libre* – On considère une extension $0 \to E \to \mathcal{E} \to F \to 0$, avec $\mathcal{E}$ quasi localement libre de type $(0,\dots,0,r,s)$. On cherche à construire des faisceaux localement libres $\mathcal{F}$ sur C_n tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{E}_2$. Pour un tel $\mathcal{F}$ on a alors

$$\mathcal{F}_C \ \simeq \ E_{|C} \otimes L^*,$$

et un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, hook] & F \arrow[r] \arrow[d, hook, "\tau_{\mathcal{E}} \otimes I_{L^*}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & E_{|C} \otimes L^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(F,E)$, $\sigma' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E)$ associés aux suites exactes précédentes. Alors, si

$$\pi : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(F,E)$$

est le morphisme induit par $\tau_{\mathcal{E}} \otimes I_{L^*}$, on a $\pi(\sigma') = \sigma$.

Réciproquement, si $\sigma' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E)$ est tel que $\pi(\sigma') = \sigma$ et que dans l'extension correspondante $0 \to E \to \mathcal{F} \to E_{|C} \otimes L^* \to 0$, $\mathcal{F}$ soit localement libre, alors on a une inclusion naturelle $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ telle $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{F}^{(2)}$. La construction de $\mathcal{F}$ se ramène donc à celle de σ'.

On a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E_{|C} \otimes L^*, E_{|C} \otimes L^{n-2}) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, two heads, "\psi"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E) \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{End}(E_{|C}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F, E_{|C} \otimes L^{n-2}) \arrow[r, "i"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(F,E) \arrow[r, "p"] & \mathrm{Hom}(F \otimes L, E_{|C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

les flèches verticales étant induites par $\tau_{\mathcal{E}}$.

Si $\sigma' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E)$ et si $0 \to E \to \mathcal{F} \to E_{|C} \otimes L^* \to 0$ est l'extension correspondante, alors $\mathcal{F}$ est localement libre si et seulement si $p'(\sigma')$ est un isomorphisme (cf. [7]), et dans

ce cas l'extension précédente est, à un automorphisme de $E_{|C}$ près, équivalente à l'extension canonique $0 \to \mathcal{F}^{(2)} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{|C} \to 0$. D'autre part, $p(\sigma)$ est l'inclusion $F \otimes L \subset E_{|C}$.

2.2.3. Lemme : *Il existe $\sigma' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E)$ tel que $\pi(\sigma') = \sigma$ et $p'(\sigma') = I_{E_{|C}}$.*

Démonstration. Soit $\sigma_0 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E)$ tel que $p'(\sigma_0) = I_{E_{|C}}$. Alors on a $p \circ \pi(\sigma_0) = p(\sigma)$. Donc il existe $\lambda \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F, E_{|C} \otimes L^{n-2})$ tel que $\sigma = \pi(\sigma_0) + i(\lambda)$. Puisque ψ est surjectif il existe $\mu \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E_{|C} \otimes L^*, E_{|C} \otimes L^{n-2})$ tel que $\lambda = \psi(\mu)$. On a alors

$$\sigma = \pi(\sigma_0) + i \circ \psi(\mu) = \pi(\sigma_0 + i'(\mu)),$$

et il suffit de prendre $\sigma' = \sigma_0 + i'(\mu)$. □

2.2.4. *Classification des prolongements* – Il existe donc bien des prolongements localement libres $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{F}^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)}$. On note $\mathbf{Pr}(\mathcal{E})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de prolongements de $\mathcal{E}$.

On s'intéresse maintenant aux choix possibles pour les $\mathcal{F}$ précédents. Soit $\Gamma = (E_{|C} \otimes L^*)/F$. On a une suite exacte

$$\mathrm{Hom}(F, E_{|C} \otimes L^{n-2}) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma, E_{|C} \otimes L^{n-2}) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E_{|C} \otimes L^*, E_{|C} \otimes L^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\psi} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(F, E_{|C} \otimes L^{n-2}) \longrightarrow 0\ .$$

déduite de la suite exacte $0 \to \Gamma \to E_{|C} \otimes L^* \to F \to 0$. Il découle de ce qui précède que les $\sigma'' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E)$ tels que $p'(\sigma'') = I_{E_{|C}}$ et $\pi(\sigma'') = \sigma$ sont de la forme $\sigma'' = \sigma' + i'(\mu)$, avec $\mu \in \mathrm{coker}(\theta) \subset \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E_{|C} \otimes L^*, E_{|C} \otimes L^{n-2})$. Les prolongements de possibles de $\mathcal{E}$ sont donc les fibrés définis pas ces σ''. On donc obtenu une application surjective

$$\mathrm{coker}(\theta) \longrightarrow \mathbf{Pr}(\mathcal{E}).$$

Le résultat suivant permet sous certaines hypothèses de conclure que les prolongements de $\mathcal{F}$ en fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang 2 tel que $\mathcal{F}^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)}$ sont classifiés par $\mathrm{coker}(\theta)$.

2.2.5. Proposition : *Soient $\mathcal{V}$ un faisceau localement libre de rang R sur C_n et $V = \mathcal{V}_{|C}$. On suppose que $\deg(L) \leq 0$, $L^{Rk} \not\simeq \mathcal{O}_C$ pour $1 \leq k < n$ et que V est stable. Alors $\mathcal{V}$ est simple.*

Démonstration. On fait une démonstration par récurrence sur n, le résultat étant trivial si $n = 1$. Supposons le vrai sur C_{n-1}. En considérant les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C^{k+1} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C^k \longrightarrow V \otimes L^k \longrightarrow 0$$

on voit aisément que les hypothèses entrainent que $\mathrm{Hom}(V, \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C) = \{0\}$. On voit aussi que $H^0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{C}$. Soit $\phi \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$. On en déduit un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C & \xrightarrow{i} & \mathcal{V} & \xrightarrow{p} & V & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C & \xrightarrow{i} & \mathcal{V} & \xrightarrow{p} & V & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D'après l'hypothèse de récurrence et la stabilité de V, il existe $\lambda_0, \lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\phi_0 = \lambda_0 I_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C}$, $f = \lambda I_V$. En utilisant l'inclusion $V \otimes L^{n-1} \subset \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C$ on voit que $\lambda = \lambda_0$. Il en découle qu'il existe un morphisme $\theta : V \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C$ tel que $\phi - \lambda I_{\mathcal{V}} = i \circ \theta \circ p$. Puisque $\mathrm{Hom}(V, \mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_C) = \{0\}$ on a $\phi = \lambda I_{\mathcal{V}}$. □

2.2.6. Corollaire : *On suppose que* $\deg(L) \leq 0$, $L^{Rk} \not\simeq \mathcal{O}_C$ *pour* $1 \leq k < n$ *et que* $E_{|C}$ *est stable. Alors l'application canonique*

$$\mathrm{coker}(\theta) \longrightarrow \mathbf{Pr}(\mathcal{E})$$

est bijective. Donc les prolongements de $\mathcal{F}$ *en fibré vectoriel* $\mathcal{E}$ *de rang* R *tel que* $\mathcal{F}^{(2)} = \mathcal{E}^{(2)}$ *sont classifiés par* $\mathrm{coker}(\theta)$.

Démonstration. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E_{|C} \otimes L^*, E)$ tels que les extensions correspondantes soient des prolongements localement libres $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ isomorphes de $\mathcal{F}$. Un isomorphisme $\phi : \mathcal{E} \simeq \mathcal{E}'$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & E_{|C} \otimes L^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi'} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi''} & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathcal{E}' & \longrightarrow & E_{|C} \otimes L^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où la suite exacte du haut correspond à σ et celle du bas à σ'. D'après la proposition 2.2.5, ϕ, ϕ' et ϕ'' sont des homothéties de même rapport, d'où $\sigma = \sigma'$. □

2.2.7. *Interprétation en termes de 1-cocycles* – Soit $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert de C_n tel que $\mathcal{F}$ soit représenté par un 1-cocycle (ϕ_{ij}) de $\mathcal{U}$, $\phi_{ij} : R.\mathcal{O}_{n|U_{ij}} \simeq R.\mathcal{O}_{n|U_{ij}}$. On a donc des isomorphismes $\phi_i : \mathcal{F}_{|U_i} \simeq R.\mathcal{O}_{n|U_{ij}}$ tels que $\phi_{ij} = \phi_i \phi_j^{-1}$. On suppose aussi que $L_{|U_i}$ est trivial : soit $\xi_i \in H^0(U_i, L)$ une section ne s'annulant en aucun point et $\nu_{ij} = \xi_i^{-1}\xi_j \in \mathcal{O}_n(U_{ij})^*$.

On suppose que E et F sont triviaux sur les U_i (en tant que fibrés vectoriels sur C_{n-1} et C respectivement). On peut dans ce cas mettre ϕ_{ij} sous la forme

$$\phi_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ \xi_i C_{ij} & D_{ij} \end{pmatrix} ,$$

avec $A_{ij} \in \mathcal{O}_n(U_{ij}) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$, $B_{ij} \in \mathcal{O}_n(U_{ij}) \otimes L(\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^r)$, $C_{ij} \in \mathcal{O}_{n-1}(U_{ij}) \otimes L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)$, $D_{ij} \in \mathcal{O}_n(U_{ij}) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^s)$, $\mathcal{E}$ étant représenté par (ψ_{ij}),

$$\psi_{ij} : r.\mathcal{O}_{n|U_{ij}} \oplus s.\mathcal{O}_{n-1|U_{ij}} \;\simeq\; r.\mathcal{O}_{n|U_{ij}} \oplus s.\mathcal{O}_{n-1|U_{ij}},$$

de la forme

$$\psi_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & \overline{D}_{ij} \end{pmatrix} \;,$$

où $\overline{D}_{ij} \in \mathcal{O}_{n-1}(U_{ij}) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^s)$ est induit par D_{ij}, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est obtenu en recollant au moyen des ϕ_{ij} les sous-faisceaux $r.\mathcal{O}_{n|U_{ij}} \oplus s.\mathcal{O}_{n-1|U_{ij}}$ de $R.\mathcal{O}_{n|U_{ij}}$. De même les éléments de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E_{|C} \otimes L^*, E_{|C} \otimes L^{n-2})$ sont représentés par des cocycles de la forme

$$\mu_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix} \;,$$

et ceux qui proviennent de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma, E_{|C} \otimes L^{n-2})$ sont représentés par des cocycles tels que $a_{ij} = 0$, $c_{ij} = 0$. Les autres fibrés vectoriels $\mathcal{E}$ sont obtenus en prenant des 1-cocycles (ϕ'_{ij}) de la forme

$$\phi'_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} A_{ij} & B_{ij} + \xi_i^{n-1} b_{ij} \\ \xi_i C_{ij} & D_{ij} + \xi_i^{n-1} d_{ij} \end{pmatrix} \;,$$

avec $b_{ij} \in \mathcal{O}_C(U_{ij}) \otimes L(\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^r)$, $b_{ij} \in \mathcal{O}_C(U_{ij}) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^s)$. Le fibré vectoriel correspondant est associé à l'image dans $\mathrm{coker}(\theta)$ de l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma, E_{|C} \otimes L^{n-2})$ défini par le cocycle $(\xi_i^{n-1} b_{ij}, \xi_i^{n-1} d_{ij})$.

2.3. Cohomologie de Čech et extensions

Soient X une variété projective lisse irréductible, et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. On emploie les notations habituelles : $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$, etc.

On sait qu'on peut utiliser $\mathcal{U}$ pour calculer la cohomologie des faisceaux cohérents sur X (cf. [15], chapter III, § 4). On peut définir des éléments de leurs groupes de cohomologie en utilisant des *cocycles* au sens habituel. Mais parfois apparaissent des familles qu'on apellera aussi cocycles bien que cela n'en soit pas toujours au sens strict. Par exemple étant donnés un fibré vectoriel E et un fibré en droites L sur X, on peut représenter des éléments de $H^1(E \otimes L)$ de plusieurs façons : la première consiste à considérer des familles $(e_{ij} \otimes \lambda_{ij})$, où $e_{ij} \in H^0(U_{ij}, E)$, $\lambda_{ij} \in H^0(U_{ij}, L)$. Les relations de cocycle sont dans ce cas

$$e_{ij} \otimes \lambda_{ij} + e_{jk} \otimes \lambda_{jk} = e_{ik} \otimes \lambda_{ik}$$

sur U_{ijk}. Mais on peut aussi partir d'un cocycle (γ_{ij}), $\gamma_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij})$ définissant L. Il existe donc des isomorphismes $\gamma_i : L_{|U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$ tels que $\gamma_{ij} = \gamma_i \gamma_j^{-1}$. Posons $e'_{ij} = \gamma_i(\lambda_{ij}) e_{ij} \in H^0(U_{ij}, E)$. Alors la famille (e'_{ij}) représente le même élément de $H^1(E \otimes L)$ que $(e_{ij} \otimes \lambda_{ij})$, mais avec des relations de cocycles différentes :

$$e'_{ij} + \gamma_{ij} e'_{jk} = e_{ik}$$

sur U_{ijk}.

2.3.1. *Torsion par un fibré en droites* – Soient E un fibré vectoriel de rang r et L un fibré en droites sur X, triviaux sur tout ouvert U_i. Donc on peut définir E (resp. L) par un cocycle

(ϕ_{ij}) (resp. (ν_{ij})), avec $\phi_{ij} : \mathcal{O}_{U_i} \otimes \mathbb{C}^r \simeq \mathcal{O}_{U_i} \otimes \mathbb{C}^r$, $\nu_{ij} : \mathcal{O}_{U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$. Alors il est aisé de voir que $(\nu_{ij}\phi_{ij})$ est un cocycle définissant le fibré vectoriel $E \otimes L$.

2.3.2. *Construction des extensions* - Soient E, F des fibrés vectoriels sur X, triviaux sur tous les ouverts U_i, de rangs r et s respectivement. Alors E, F sont définis par des familles de cocycles (ϵ_{ij}), (ϕ_{ij}), où $\epsilon_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, $\phi_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}(s, \mathbb{C})$, qui sont définis eux-mêmes à partir de trivialisations $\epsilon_i : E_{|U_i} \to \mathcal{O}_{U_i} \otimes \mathbb{C}^r$, $\phi_i : F_{|U_i} \to \mathcal{O}_{U_i} \otimes \mathbb{C}^s$ par $\epsilon_{ij} = \epsilon_i\epsilon_j^{-1}$, $\phi_{ij} = \phi_i\phi_j^{-1}$.

Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1(F, E)$, et

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \Gamma \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

l'extension correspondante. Soit (δ_{ij}) (où $\delta_{ij} : F_{|U_{ij}} \to E_{|U_{ij}}$) une famille représentant σ. On en déduit une famille de cocycles (γ_{ij}) représentant Γ, avec $\gamma_{ij} : U_{ij} \to \mathrm{GL}(r + s, \mathbb{C})$, représenté par la matrice $\begin{pmatrix} \epsilon_{ij} & \epsilon_i\delta_{ij}\phi_j^{-1} \\ 0 & \phi_{ij} \end{pmatrix}$. Il existe alors une famille (γ_i) d'isomorphismes, $\gamma_i : \Gamma_{|U_i} \to \mathcal{O}_{U_i} \otimes \mathbb{C}^{r+s}$, telle que $\gamma_{ij} = \gamma_i\gamma_j^{-1}$ pour tous i, j.

2.3.3. *Description des sections d'une extension* – Soient E', E'' des fibrés vectoriels sur X, L', D des fibrés en droites sur X. On suppose que leurs restrictions à tous les ouverts U_i sont triviales. On peut représenter L', D par des cocycles de $\mathcal{U}$, (λ'_{ij}), (δ_{ij}) respectivement. Soient

$$\lambda'_i : L'_{|U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}, \quad \delta_i : D_{|U_i} \simeq \mathcal{O}_{U_i}$$

des trivialisations telles que $\lambda'_{ij} = \lambda'_i\lambda'^{-1}_j$, $\delta_{ij} = \delta_i\delta_j^{-1}$ sur U_{ij}. Soit

$$\sigma \in \mathrm{Ext}^1(E'' \otimes D, E' \otimes L' \otimes D),$$

représenté par un cocycle (σ_{ij}), avec

$$\sigma_{ij} : (E'' \otimes D)_{|U_{ij}} \longrightarrow (E' \otimes L' \otimes D)_{|U_{ij}}.$$

Soit

$$0 \longrightarrow E' \otimes L' \otimes D \longrightarrow \Gamma \longrightarrow E'' \otimes D \longrightarrow 0$$

l'extension correspondant à σ. On peut construire Γ en recollant les fibrés $[(E'' \otimes D) \oplus (E' \otimes L' \otimes D)]_{|U_i}$ au moyen des automorphismes $\begin{pmatrix} I & \sigma_{ij} \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Une section de Γ peut donc être représentée par des sections ϵ''_i, ϵ'_i de $(E'' \otimes D)_{|U_i}$, $(E' \otimes L' \otimes D)_{|U_i}$ respectivement telles que sur U_{ij} on ait

$$\epsilon'_i = \epsilon'_j + \sigma_{ij}\epsilon''_j, \quad \epsilon''_i = \epsilon''_j.$$

Posons $\gamma_{ij} = \lambda'_i\sigma_{ij} : E''_{U_{ij}} \to E'_{U_{ij}}$, $e'_i = \lambda'_i\delta_i\epsilon'_i \in H^0(U_i, E'_i)$, $e''_i = \delta_i\epsilon''_i \in H^0(U_i, E''_i)$. Les relations précédentes s'écrivent

$$e'_i = \delta_{ij}(\lambda'_{ij}e'_j + \gamma_{ij}e''_j), \quad e''_i = \delta_{ij}e''_j.$$

Réciproquement, des familles (e'_i), (e''_i) vérifiant ces relations définissent une section de Γ. Cela peut être étendu aux sections locales de Γ. Ce résultat est utilisé dans la proposition 4.6.6 pour identifier un fibré vectoriel.

3. Faisceaux de groupes non abéliens

On rappelle ici quelques résultats de [11] qu'on adaptera à nos besoins.

Soient X un espace topologique et G un faisceau de groupes sur X.

3.1. Cohomologie de dimension 1

3.1.1. *Cochaines et cocycles* – Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. On appelle *0-cochaine de $\mathcal{U}$ à valeurs dans G* une famille $(g_i)_{i\in I}$, avec $g_i \in G(U_i)$. On appelle *1-cochaine de $\mathcal{U}$ à valeurs dans G* une famille $(g_{ij})_{i,j\in I, i\neq j}$, où $g_{ij} \in G(U_{ij})$ (avec $U_{ij} = U_i \cap U_j$). On dit que (g_{ij}) est un *1-cocycle* si pour tous i, j, k on a $g_{ij}g_{jk} = g_{jk}$ sur $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ (en convenant que pour tout i, g_{ii} est la section élément neutre). Deux 1-cochaines (g_{ij}), (g'_{ij}) sont dites *cohomologues* s'il existe une 0-cochaine (h_i) de $\mathcal{U}$ à valeurs dans G telle que pour tous i, j ont ait $g'_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}$. Si c'est le cas, (g_{ij}) est un 1-cocycle si et seulement si (g'_{ij}) en est un.

3.1.2. *Cohomologie de dimension 1* – La cohomologie est une relation d'équivalence dans l'ensemble de 1-cocycles de $\mathcal{U}$ à valeurs dans G. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $H^1(\mathcal{U}, G)$. En général, si G n'est pas un faisceau de groupes abéliens, il n'existe pas de structure naturelle de groupe sur cet ensemble, mais il contient un élément particulier, appelé *élément neutre* : la classe de la famille des éléments neutres des $G(U_{ij})$.

Si $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert de X plus fin que $\mathcal{U}$ il existe une application naturelle $H^1(\mathcal{U}, G) \to H^1(\mathcal{V}, G)$ qui est injective et envoie l'élément neutre de $H^1(\mathcal{U}, G)$ sur celui de $H^1(\mathcal{V}, G)$. Ces injections permettent de définir *l'ensemble de cohomologie $H^1(X, G)$ de X à valeurs dans F* comme limite inductive des $H^1(\mathcal{U}, G)$. Cet ensemble est lui aussi muni d'un *élément neutre* noté e. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X on a donc une application injective canonique $H^1(\mathcal{U}, G) \to H^1(X, G)$ qui envoie l'élément neutre de $H^1(\mathcal{U}, G)$ sur celui de $H^1(X, G)$.

Soit $f : G \to H$ un morphisme de faisceaux de groupes sur X. On en déduit un morphisme de groupes $H^0(f) : H^0(X, G) \to H^0(X, H)$ et une application $H^1(f) : H^1(X, G) \to H^1(X, H)$ (définie de manière évidente au niveau des 1-cocycles) qui envoie l'élément neutre de $H^1(X, G)$ sur celui de $H^1(X, H)$.

3.1.3. *Recouvrements acycliques* – Un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X est dit *acyclique pour G* si pour tout ouvert U de $\mathcal{U}$ on a $H^1(U, G) = \{e\}$. Si $\mathcal{U}$ est acyclique pour G, alors l'application canonique $H^1(\mathcal{U}, G) \to H^1(X, G)$ est bijective.

3.1.4. *Actions de faisceaux de groupes* – Soient G, H des faisceaux de groupes sur X, et supposons que H agisse sur G (l'action est supposée compatible avec les structures de groupe). Soit $z \in H^1(X, H)$, représenté par un 1-cocycle (z_{ij}) relativement à un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ de X. On définit un nouveau faisceau de groupes G^z sur X de la façon suivante : on recolle les faisceaux $G_{|U_i}$ au moyen des isomorphismes $z_{ij} : G_{|U_{ij}} \to G_{|U_{ij}}$. On a donc des isomorphismes $\theta_i : G^z_{|U_i} \to G_{|U_i}$ et des triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} & G^z_{|U_{ij}} \arrow[dl, "\theta_j"'] \arrow[dr, "\theta_i"] & \\ G_{|U_{ij}} \arrow[rr, "z_{ij}"] & & G_{|U_{ij}} \end{tikzcd}$$

Comme le suggère la notation employée, G^z ne dépend que du choix de z.

Les sections de G^z sont représentées par des familles (γ_i), où $\gamma_i \in G(U_i)$, telles que $\gamma_i = z_{ij}\gamma_j$ sur U_{ij}.

Les éléments de $H^1(X, G^z)$ sont représentés par des familles (ρ_{ij}), où $\rho_{ij} \in G(U_{ij})$, telles que $\rho_{ij}^{-1}\rho_{ik} = z_{ij}\rho_{jk}$ sur U_{ijk} (il peut être nécessaire de remplacer $\mathcal{U}$ par des recouvrements plus fins pour représenter ainsi tous les éléments de $H^1(X, G^z)$). Le 1-cocycle à valeurs dans G^z correspondant à (ρ_{ij}) est $\theta_i^{-1}(\rho_{ij})$.

Si G est un faisceau de groupes abéliens, il en est de même de G^z et les groupes de cohomologie $H^p(X, G^z)$ sont définis pour tout entier $p \geq 0$. On peut alors représenter dans ce cas les éléments de $H^p(X, G^z)$ de manière analogue. Par exemple les éléments de $H^2(X, G^z)$ sont représentés par des familles (ρ_{ijk}), où $\rho_{ijk} \in G(U_{ijk})$, telles que $\rho_{ijk}\rho_{ijl}^{-1}\rho_{ikl} = z_{ij}\rho_{jkl}$ sur U_{ijkl}.

3.2. Suite exacte de cohomologie

Dans toute la suite on suppose que X est *paracompact*. C'est le cas par exemple si c'est une variété algébrique munie de la topologie de Zariski. Soient G un faisceau de groupes sur X, $\Gamma \subset G$ un sous-faisceaux de groupes *distingué* (c'est-à-dire que pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U)$ est un sous-groupe distingué de $G(U)$. On peut donc définir le *faisceau de groupes quotient* G/Γ, et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/\Gamma \longrightarrow 0.$$

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles munis d'un élément privilégié e, et

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n$$

une suite d'applications. On dit que cette suite est *exacte* si pour $1 < i < n$ on a
$f_i^{-1}(e) = f_{i-1}(A_{i-1})$.

3.2.1. Proposition : *On a une suite exacte canonique d'ensembles*

$$0 \longrightarrow H^0(X,\Gamma) \xrightarrow{H^0(i)} H^0(X,G) \xrightarrow{H^0(p)} H^0(X,G/\Gamma) \xrightarrow{\delta}$$

$$H^1(X,\Gamma) \xrightarrow{H^1(i)} H^1(X,G) \xrightarrow{H^1(p)} H^1(X,G/\Gamma) \quad .$$

La sous-suite

$$0 \longrightarrow H^0(X,\Gamma) \xrightarrow{H^0(i)} H^0(X,G) \xrightarrow{H^0(p)} H^0(X,G/\Gamma)$$

de la précédente est une suite exacte de groupes. De plus, deux sections c, c' de G/Γ ont même image par δ si et seulement si cc'^{-1} est l'image par $H^0(p)$ d'une section de G.

Le groupe $H^0(X,G/\Gamma)$ agit sur $H^1(X,\Gamma)$ de la façon suivante : soient $a \in H^1(X,\Gamma)$, représenté par un 1-cocycle (γ_{ij}) d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ de X, et $c \in H^0(X,G/\Gamma)$. On peut prendre $\mathcal{U}$ suffisamment fin pour que pour tout i, $c_{|U_i}$ s'étende en $c_i \in G(U_i)$. On voit aisément que $(c_i\gamma_{ij}c_j^{-1})$ est un 1-cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans Γ et que l'élément correspondant de $H^1(X,\Gamma)$ ne dépend que de a et c. On notera $\sigma(c)a$ cet élément. On obtient ainsi une action de $H^0(X,G/\Gamma)$ sur $H^1(X,\Gamma)$, qui permet de décrire l'application δ : on a, pour tout $c \in H^0(X,G/\Gamma)$

$$\delta(c) = \sigma(c^{-1})e.$$

3.2.2. Proposition : *Soient $\gamma, \gamma' \in H^1(X,\Gamma)$. Alors on a $H^1(i)(\gamma) = H^1(i)(\gamma')$ si et seulement si γ et γ' sont dans la même $H^0(X,G/\Gamma)$-orbite.*

3.2.3. *Les fibres de $H^1(p)$* – On va utiliser l'action du faisceau de groupes G par conjugaison sur Γ, G et G/Γ. Soient $\omega \in H^1(X,G/\Gamma)$ et $g \in H^1(X,G)$ tel que $H^1(p)(g) = \omega$. Supposons que g soit représenté par un 1-cocycle (g_{ij}) d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ de X. En remplaçant au besoin $\mathcal{U}$ par un recouvrement ouvert plus fin, on voit qu'un autre élément de $H^1(p)^{-1}(\omega)$ est représenté par un 1-cocycle de la forme $(\gamma_{ij}g_{ij})$, avec $\gamma_{ij} \in \Gamma(U_{ij})$. Réciproquement, une 1-cochaine $(\gamma_{ij}g_{ij})$, avec $\gamma_{ij} \in \Gamma(U_{ij})$ est un 1-cocycle si et seulement si pour tous i,j,k on a

$$\gamma_{ij}^{-1}\gamma_{ik} = g_{ij}\gamma_{jk}g_{ij}^{-1},$$

c'est-à-dire si et seulement si (γ_{ij}) induit un 1-cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans Γ^g (cf. 3.1.4). On définit ainsi une application surjective

$$\lambda_g : H^1(X,\Gamma^g) \longrightarrow H^1(p)^{-1}(\omega)$$

qui envoie l'élément neutre de $H^1(X,\Gamma^g)$ sur g. Si on part d'un autre élément g' de $H^1(p)^{-1}(\omega)$, il existe une bijection $\alpha_{g,g'} : H^1(X,\Gamma^g) \to H^1(X,\Gamma^{g'})$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,\Gamma^g) \arrow[dr, "\lambda_g"] \arrow[dd, "\alpha_{g,g'}"'] & \\
& H^1(p)^{-1}(\omega) \\
H^1(X,\Gamma^{g'}) \arrow[ur, "\lambda_{g'}"'] &
\end{tikzcd}$$

3.2.4. *Le cas où Γ est commutatif* – Dans ce cas on a $\Gamma^g = \Gamma^{g'}$. En effet on peut supposer que g' est représenté par un 1-cocycle du type $(u_{ij}g_{ij})$ de $\mathcal{U}$, avec $u_{ij} \in \Gamma(U_{ij})$ (on a $g' = \lambda_g(u)$, u étant représenté par (u_{ij})) et l'action de $g_{ij} : \Gamma(U_{ij}) \to \Gamma(U_{ij})$ est la même que celle de $u_{ij}g_{ij}$. Soit $u \in H^1(X,\Gamma^g)$ l'élément induit par (u_{ij}). Alors $\alpha_{g,g'} : H^1(X,\Gamma^g) \to H^1(X,\Gamma^g)$ est la translation $w \to w - u$.

On suppose dans toute la suite que Γ est *commutatif*.

3.2.5. *L'image de $H^1(p)$* – On considère l'action par conjugaison de G/Γ sur Γ. Soit $\omega \in H^1(X, G/\Gamma)$. On en déduit un élément $\Delta(\omega)$ de $H^2(X,\Gamma^\omega)$, défini de la façon suivante : il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ de X tel que ω soit défini par un 1-cocycle (ω_{ij}) de $\mathcal{U}$ tel que pour tous i, j il existe un $g_{ij} \in G(U_{ij})$ au dessus de ω_{ij}. On suppose que $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$. Pour tous indices i, j, k on a $\gamma_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ki} \in \Gamma(U_{ijk})$, (γ_{ijk}) est un 2-cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans Γ^ω et $\Delta(\omega)$ est l'élément induit de $H^2(X,\Gamma^\omega)$.

3.2.6. Proposition : *On a $\Delta(\omega) = 0$ si et seulement si ω est dans l'image de $H^1(p)$.*

3.2.7. Corollaire : *Si X est une courbe algébrique et si Γ est un faisceau cohérent sur X, alors $H^1(p)$ est surjective.*

3.2.8. *Suites exactes induites* – Le faisceau de groupes G agit par conjugaison sur Γ, G et G/Γ. Pour tout $g \in H^1(X,G)$, Γ^g s'identifie naturellement à un sous-faisceau de groupes de G^g et on a un isomorphisme canonique $(G/\Gamma)^g \simeq G^g/\Gamma^g$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma^g \longrightarrow G^g \longrightarrow (G/\Gamma)^g \longrightarrow 0.$$

3.2.9. Proposition : *Soit $\omega = H^1(p)(g)$. Alors les fibres de $\lambda_g : H^1(X, \Gamma^g) \longrightarrow H^1(p)^{-1}(\omega)$ sont les orbites de l'action de $H^0(X, (G/\Gamma)^g)$ sur $H^1(X, \Gamma^g)$.*

Soit $g' \in H^1(p)^{-1}(\omega)$. Alors on a $(G/\Gamma)^g = (G/\Gamma)^{g'}$ et $\Gamma^g = \Gamma^{g'}$, mais les actions de $H^0(X, (G/\Gamma)^g)$ sur $H^1(X, \Gamma^g)$ et $H^1(X, \Gamma^{g'})$ ne sont pas les mêmes : si $(\gamma, v) \to \gamma v$ dénote l'action de $H^0(X, (G/\Gamma)^g)$ sur $H^1(X, \Gamma^g)$ et $(\gamma, v) \to \gamma * v$ celle sur $H^1(X, \Gamma^{g'})$, on a

$$\gamma * v \ = \ \gamma(v + u) - u$$

pour tous $g \in H^0(X, (G/\Gamma)^g)$, $v \in H^1(X, \Gamma^g)$, u désignant un élément de $H^1(X, \Gamma^g)$ tel que $\lambda_g(u) = g'$.

4. Faisceaux de groupes d'automorphismes

Soit C une courbe irréductible lisse. On étudie ici le faisceau $\mathcal{G}_n$ des automorphismes de $C \times \mathbf{Z}_n$ laissant invariants C, et sa cohomologie de dimension 1. On commence par étudier les automorphismes de l'anneau $\mathbb{C}[[x, t]]$ laissant invariante la projection $\mathbb{C}[[x, t]] \to \mathbb{C}[[x]]$.

4.1. Automorphismes de $\mathbb{C}[[x, t]]$

Soit $\rho : \mathbb{C}[[x, t]] \to \mathbb{C}[[x]]$ le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres défini par $\rho(\sum_{i \geq 0, j \geq 0} \alpha_{ij} x^i t^j) = \sum_{i \geq 0} \alpha_{i0} x^i$.

Soit ϕ un endomorphisme de la $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[[x, t]]$ tel que $\rho \circ \phi = \rho$. Alors on peut écrire

$$\phi(\alpha) = \alpha + \eta(\alpha)t \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{C}[[x]], \quad \phi(t) = \nu t, \tag{4}$$

avec $\nu \in \mathbb{C}[[x, t]]$, η étant une application linéaire $\mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x, t]]$ telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[[x]]$ on ait

$$\eta(\alpha\beta) = \alpha\eta(\beta) + \eta(\alpha)\beta + t\eta(\alpha)\eta(\beta). \tag{5}$$

Réciproquement, si η est une telle application et $\nu \in \mathbb{C}[[x, t]]$, il est aisé de voir qu'il existe un unique endomorphisme ϕ de $\mathbb{C}[[x, t]]$ tel que $\rho \circ \phi = \rho$ et que (4) soit vérifié.

4.1.1. Lemme : *L'endomorphisme ϕ est un automorphisme si et seulement si ν est inversible.*

Démonstration. Supposons que ϕ soit un automorphisme. Il existe alors $u \in \mathbb{C}[[x, t]]$ tel que $\phi(u) = t$. On peut écrire $u = u_0 + tu_1$, avec $u_0 \in \mathbb{C}[[x]]$. On a alors $t = u_0 + t(\eta(u_0) + \phi(u_1)\nu)$, donc $u_0 = 0$ et $t = \phi(u_1)\nu t$, d'où $\phi(u_1)\nu = 1$ et ν est inversible.

Réciproquement, supposons que ν soit inversible. Soit $u \in \mathbb{C}[[x,t]]$. Il suffit de montrer qu'il existe une suite unique $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$ il existe $w_n \in \mathbb{C}[[x,t]]$ tel que

$$\phi(v_0 + v_1 t + \cdots + v_n t^n) = u + t^{n+1} w_n.$$

On montre l'existence et l'unicité de v_n par récurrence sur n. On a nécessairement $v_0 = \rho(u)$. Supposons $v_0, \ldots, v_n$ construits. On doit donc avoir

$$\phi(v_0 + v_1 t + \cdots + v_n t^n + v_{n+1} t^{n+1}) = u + t^{n+1}(w_n + \nu^{n+1}\phi(v_{n+1})) = u + t^{n+2} w_{n+1}.$$

La seule solution est $v_{n+1} = -\rho(\nu^{-n-1} w_n)$. □

Soient $\mu, \in \mathbb{C}[[x,t]]$. On définit $\eta_\mu : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x,t]]$ par

$$\eta_\mu(\alpha) \;=\; \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i!}\frac{d^i\alpha}{dx^i}\mu^i t^i. \tag{6}$$

On vérifie aisément que (5) est vraie pour $\eta = \eta_\mu$. Il est facile de voir qu'on a

$$\alpha + \eta_\mu(\alpha)t \;=\; \alpha(x + \mu t). \tag{7}$$

Si $\nu \in \mathbb{C}[[x,t]]$, on note $\phi_{\mu\nu}$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[[x,t]]$ tel que $\phi_{\mu\nu}(\alpha) = \alpha + \eta_\mu(\alpha)t$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ et $\phi_{\mu\nu}(t) = \nu t$.

4.1.2. Proposition : *Si $\mu, \mu' \in \mathbb{C}[[x,t]]$ et $\nu, \nu' \in \mathbb{C}[[x,t]]$, on a*

$$\phi_{\mu'\nu'} \circ \phi_{\mu\nu} \;=\; \phi_{\mu"\nu"},$$

avec

$$\mu" = \mu' + \nu'\phi_{\mu',\nu'}(\mu), \qquad \nu" = \nu'\phi_{\mu',\nu'}(\nu).$$

Démonstration. Découle aisément de (6). □

Étant donné que $\phi_{0,1} = I_{\mathbb{C}[[x,t]]}$, on en déduit que si $\nu \in \mathbb{C}[[x,t]]$ est inversible, alors on a $\phi_{\mu\nu}^{-1} = \phi_{\mu',\nu'}$, avec

$$\mu' = -\phi_{\mu\nu}^{-1}(\frac{\mu}{\nu}), \qquad \nu' = \phi_{\mu\nu}^{-1}(\frac{1}{\nu}). \tag{8}$$

4.1.3. Théorème : *Pour tout endomorphisme ϕ de $\mathbb{C}[[x,t]]$ tel que $\rho \circ \phi = \rho$ il existe un unique $\mu \in \mathbb{C}[[x,t]]$ et un unique $\nu \in \mathbb{C}[[x,t]]$ tels que $\phi = \phi_{\mu\nu}$.*

Démonstration. La démonstration la plus simple consiste à dire que ϕ est entièrement déterminé par ses valeurs sur x et t, qui doivent être de la forme $\phi(x) = x + \mu t$, $\phi(t) = \nu t$. On donne ci dessous une autre démonstration qui peut s'étendre, contrairement à la précédente, à d'autres anneaux (cf. 4.3).

On sait déjà qu'il existe $\nu \in \mathbb{C}[[x,t]]$ tel que $\phi(t) = \nu t$. On montre d'abord qu'on peut supposer que ν est inversible. Dans le cas contraire on remplace ϕ par l'endomorphisme ϕ' égal à ϕ sur $\mathbb{C}[[x]]$ et tel que $\phi'(t) = (1+\nu)t$. S'il existe $\mu \in \mathbb{C}[[x,t]]$ tel que $\phi' = \phi_{\mu,\nu+1}$ alors on a $\phi = \phi_{\mu\nu}$. On cherche $\mu = \sum_{i\geq 0} \mu_i t^i$ (avec $\mu_i \in \mathbb{C}[[x]]$), et on va construire μ_n par récurrence sur n. Posons

$$\mu^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i t^i, \qquad \nu^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \nu_i t^i.$$

On va choisir les μ_i de telle sorte que pour tout $n \geq 0$ on ait

$$\mathrm{im}(\phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}} - I_{\mathbb{C}[[x,t]]}) \ \subset \ (t^{n+2}). \tag{9}$$

Remarquons que cette inclusion reste vraie si on ajoute à $\mu^{(n)}$ où à $\nu^{(n)}$ un multiple de t^{n+1}. En particulier on aura finalement $\phi \circ \phi^{-1}_{\mu\nu} = I_{\mathbb{C}[[x,t]]}$, c'est-à-dire $\phi = \phi_{\mu\nu}$.

Considérons la décomposition (4) de ϕ. On peut écrire $\eta = \eta_0 + t\eta_1$, avec $\eta_0 : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]]$. La relation (5) entraîne que η_0 est une dérivation, donc est de la forme $\eta_0 = \mu_0 \frac{d}{dx}$, avec $\mu_0 \in \mathbb{C}[[x]]$. On vérifie alors aisément l'inclusion (9) pour $n = 0$.

Supposons $\mu_0, \ldots, \mu_n$ trouvés, tels que (9) soit vraie. On peut donc écrire

$$\phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}} = I_{\mathbb{C}[[x,t]]} + t^{n+2}\theta,$$

avec $\theta : \mathbb{C}[[x,t]] \to \mathbb{C}[[x,t]]$, qu'on peut mettre sous la forme $\theta = \theta_0 + \theta_1 t$, avec $\theta_0 : \mathbb{C}[[x,t]] \to \mathbb{C}[[x]]$. Le fait que $\phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}$ est un morphisme d'anneaux implique que θ_0 est une dérivation. On peut donc écrire $\theta_0 = \mu_{n+1}\frac{d}{dx}$, avec $\mu_{n+1} \in \mathbb{C}[[x]]$. Il reste à vérifier (9) pour $n+1$. On a

$$\phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(t) = \phi(\phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\frac{1}{\nu^{(n)}}).t) = \phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}}(\frac{1}{\nu^{(n)}}).\nu t = (\frac{1}{\nu^{(n)}} + t^{n+2}\theta(\frac{1}{\nu^{(n)}})).\nu t$$
$$= (\frac{1}{\nu^{(n)}} + t^{n+2}\theta(\frac{1}{\nu^{(n)}}))(\nu^{(n)}t + \nu_{n+1}t^{n+2} + Kt^{n+3}) = t + \frac{\nu_{n+1}}{\nu_0}t^{n+2} + \epsilon t^{n+3}$$

pour des K et ϵ convenables. Posons

$$\phi' = \phi_{\mu_{n+1}t^{n+1}, 1+\frac{\nu_{n+1}}{\nu_0}t^{n+1}}.$$

On déduit de ce qui précède que

$$\mathrm{im}(\phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}} - \phi') \subset (t^{n+3}),$$

Donc

$$\mathrm{im}(\phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}} \circ \phi'^{-1} - I_{\mathbb{C}[[x,t]]}) \subset (t^{n+3}).$$

On a $\phi' \circ \phi_{\mu^{(n)}\nu^{(n)}} = \phi_{\mu'\nu'}$, avec

$$\mu' = \mu_{n+1}t^{n+1} + (1 + \frac{\nu_{n+1}}{\nu_0}t^{n+1})\phi'(\mu^{(n)}), \qquad \nu' = (1 + \frac{\nu_{n+1}}{\nu_0}t^{n+1})\phi'(\nu^{(n)})$$

d'après la proposition 4.1.2. Il est facile de voir que $\mu' - \mu^{(n+1)}, \nu' - \nu^{(n+1)} \in (t^{n+3})$, donc on a bien

$$\mathrm{im}(\phi \circ \phi^{-1}_{\mu^{(n+1)}\nu^{(n+1)}} - I_{\mathbb{C}[[x,t]]}) \ \subset \ (t^{n+3}).$$

□

4.1.4. *Notation :* Soit $\mathcal{G}(\mathbb{C}[[x,t]])$ l'ensemble des automorphismes ϕ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[[x,t]]$ tels que $\rho \circ \phi = \rho$. C'est un sous-groupe du groupe de tous les automorphismes de $\mathbb{C}[[x,t]]$.

4.1.5. Proposition : *Soient $\mu, \nu \in \mathbb{C}[[x,t]]$ et $\theta \in \mathbb{C}[[x,t]]$. Alors on a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\phi_{\mu\nu}(\theta) &= (1+t\frac{\partial \mu}{\partial x})\phi_{\mu\nu}(\frac{\partial \theta}{\partial x}) + t\frac{\partial \nu}{\partial x}\phi_{\mu\nu}(\frac{\partial \theta}{\partial t}), \\ \frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mu\nu}(\theta) &= (\mu+t\frac{\partial \mu}{\partial t})\phi_{\mu\nu}(\frac{\partial \theta}{\partial x}) + (\nu+t\frac{\partial \nu}{\partial t})\phi_{\mu\nu}(\frac{\partial \theta}{\partial t}). \end{aligned}$$

Démonstration. Vérification immédiate. □

4.2. Autres descriptions des isomorphismes

Soient $D : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]]$ une dérivation et $\mu, \nu \in \mathbb{C}[[x,t]]$. On note $\psi^D_{\mu\nu}$ l'endomorphisme de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[[x,t]]$ défini par

$$\psi^D_{\mu\nu}(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} D^n(\alpha)(\mu t)^n$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$, et $\psi^D_{\mu\nu}(t) = \nu t$. En particulier on a $\psi^{d/dx}_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu}$. D'après la proposition 4.1.3 il existe un unique $\gamma \in \mathbb{C}[[x,t]]$ tel que $\psi^D_{\mu\nu} = \phi_{\gamma\nu}$. Il existe $a \in \mathbb{C}[[x]]$ tel que $D = a\frac{d}{dx}$. On va donner une expression de γ en fonction de a et μ.

4.2.1. Proposition : *Soit $\gamma = \mu \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)!} D^k(a)(\mu t)^k$. Alors on a $\psi^D_{\mu\nu} = \phi_{\gamma,\nu}$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement de la formule $\phi_{\gamma,\nu}(x) = x + \gamma t$. □

4.2.2. *Utilisation de dérivations par rapport à x et t* – Soit $D : \mathbb{C}[[x,t]] \to \mathbb{C}[[x,t]]$ une dérivation. On suppose que

$$D(\mathbb{C}[[x,t]]) \subset (t) \quad \text{et} \quad D((t)) \subset (t^2). \tag{10}$$

Les dérivations qui ont ces propriétés sont celles qui se mettent sous la forme

$$D = at\frac{\partial}{\partial x} + bt^2\frac{\partial}{\partial t},$$

avec $a, b \in \mathbb{C}[[x,t]]$. On pose

$$\chi_D = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} D^k : \mathbb{C}[[x,t]] \longrightarrow \mathbb{C}[[x,t]].$$

Cette formule a un sens car on vérifie aisément que pour tout $k \geq 0$ on a $\mathrm{im}(D^k) \subset (t^{k+1})$. On note $\mathrm{Der}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$ l'espace vectoriel des dérivations possèdant les propriétés (10).

4.2.3. Proposition : *1 - Soient $D, D' \in \mathrm{Der}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$. Si D et D' commutent, alors on a $\chi_{D+D'} = \chi_D \circ \chi_{D'}$.*
2 - Pour tout $D \in \mathrm{Der}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$, on a $\chi_D \in \mathcal{G}(\mathbb{C}[[x,t]])$.

Démonstration. L'assertion 1- est immédiate, et 2- s'en déduit car χ_{-D} est l'inverse de χ_D d'après 1-. □

4.2.4. Proposition : *Soit $D \in \mathrm{Der}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$. Alors on a $\chi_D = \phi_{\mu\nu}$, avec*

$$\mu \;=\; \frac{1}{t}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}D^k(x), \qquad \nu \;=\; 1+\frac{1}{t}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}D^k(t). \tag{11}$$

Ces formules ont un sens puisque $\mathrm{im}(D) \subset (t)$.

Démonstration. Découle immédiatement du fait que $\chi_D(x) = x + \mu t$ et $\chi_D(t) = \nu t$. □

Soit $\mathbb{C}[[x]]^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{C}[[x]]$. On définit un morphisme surjectif de groupes

$$\xi_{\mathbb{C}[[x,t]]} : \mathcal{G}(\mathbb{C}[[x,t]]) \longrightarrow \mathbb{C}[[x]]^*$$

en associant à $\phi_{\mu\nu}$ le scalaire $\nu(x,0)$. On note $\mathcal{G}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$ le sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathbb{C}[[x,t]])$ noyau de ce morphisme. Il contient tous les automorphismes χ_D.

4.2.5. Théorème : *Pour tout $\phi \in \mathcal{G}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$ il existe un $D \in \mathrm{Der}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$, unique, tel que $\phi = \chi_D$.*

Démonstration. On cherche D sous la forme $D = at\frac{\partial}{\partial x} + bt^2\frac{\partial}{\partial t}$. Posons

$$a = \sum_{i\geq 0} a_i t^i, \quad b = \sum_{i\geq 0} b_i t^i,$$

avec $a_i, b_i \in \mathbb{C}[[x]]$, et

$$a^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i, \quad b^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i, \qquad D_n = a^{(n)} t\frac{\partial}{\partial x} + b^{(n-1)} t^2 \frac{\partial}{\partial t}.$$

Posons $\phi = \phi_{\mu\nu}$, avec $\nu(x,0) = 1$. On pose

$$\mu_n \;=\; \frac{1}{t}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}D_n^k(x), \qquad \nu_n \;=\; 1+\frac{1}{t}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}D_n^k(t).$$

Alors il existe un choix unique de a_0 de telle sorte que

$$\mu = \mu_0 \pmod{t} \quad \text{et} \quad \nu = \nu_0 \pmod{t}.$$

C'est $a_0 = \mu(x, 0)$. Il reste à prouver que si

$$\mu = \mu_{n-1} \pmod{t^n} \quad \text{et} \quad \nu = \nu_{n-1} \pmod{t^n},$$

alors il existe $a_n, b_{n-1} \in \mathbb{C}[[x]]$, uniques, tels que

$$\mu = \mu_n \pmod{t^{n+1}} \quad \text{et} \quad \nu = \nu_n \pmod{t^{n+1}}. \tag{12}$$

On a

$$D_n(x) = D_{n-1}(x) + a_n t^{n+1}, \qquad D_n^2(x) = D_{n-1}^2(x) + a_0 b_{n-1} t^{n+1} \pmod{t^{n+2}},$$

$D_n^k(x) = D_{n-1}^k(x) \pmod{t^{n+2}}$ si $k \geq 3$,

$$D_n(t) = D_{n-1}(t) + b_{n-1} t^{n+1} \pmod{t^{n+2}}, \qquad D_n^k(t) = D_{n-1}^k(t) \ \text{ si } \ k \geq 2.$$

Donc

$$\mu_n = \mu_{n-1} + (a_n + \frac{a_0 b_{n-1}}{2}) t^n \pmod{t^{n+1}} \quad \text{et} \quad \nu_n = \nu_{n-1} + b_{n-1} t^n \pmod{t^{n+1}}.$$

Il est donc clair qu'il existe un choix unique de a_n, b_{n-1} tel qu'on obtienne (12). □

On peut donc identifier comme ensembles $\mathcal{G}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$ et $\mathrm{Der}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$. Mais la structure de groupes sur ce dernier induite par celle de $\mathcal{G}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$ n'est évidemment pas l'addition (cf. 4.3.3) et n'est même pas commutative. On notera '*' la loi de groupe sur $\mathrm{Der}_0(\mathbb{C}[[x,t]])$, c'est-à-dire que $\chi_{D*D'} = \chi_D \circ \chi_{D'}$.

4.3. Extension des résultats à d'autres anneaux

Soient C une courbe projective irréductible lisse, $P \in C$ un point fermé et $U \subset C$ un ouvert non vide sur lequel le fibré canonique ω_C est trivial. On obtient des résultats analogues aux précédents, et on utilisera des notations analogues, si on remplace $\mathbb{C}[[x]]$ par une des $\mathbb{C}$-algèbres suivantes : $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{C}(x)$, $\mathbb{C}((x))$, $\mathcal{O}_{CP}$, $\mathcal{O}_C(U)$. Traitons par exemple le dernier cas.

Soit $\frac{d}{dx}$ une section de $T_{C|U}$ engendrant T_C sur U. Soit $\rho : \mathcal{O}_C(U)[t] \to \mathcal{O}_C(U)$ le morphisme canonique. Soient $\mu, \nu \in \mathcal{O}_C(U)[t]$. On définit un endomorphisme $\phi_{\mu\nu}$ de $\mathcal{O}_C(U)[t]$ par

$$\phi_{\mu\nu}(\alpha) \ = \ \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{d^i \alpha}{dx^i} \mu^i t^i$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_C(U)$, et $\phi_{\mu\nu}(t) = \nu t$. Il est facile de voir qu'on a

$$\phi_{\mu,\nu}(\alpha) \ = \ \alpha(x + \mu t)$$

et que $\phi_{\mu\nu}$ est inversible si et seulement si ν l'est. De plus, tout endomorphisme ϕ de $\mathcal{O}_C(U)[t]$ tel que $\rho \circ \phi = \rho$ est de la forme $\phi = \phi_{\mu,\nu}$, pour des μ, ν uniques.

4.3.1. *Quotients par* (t^n) – Soit $n \geq 2$ un entier. Une autre extension possible des résultats précédents consiste à quotienter par l'idéal (t^n), c'est-à-dire que si A est une des $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[[x]]$, $\mathcal{O}_{CP}$, $\mathcal{O}_C(U)$, on s'intéresse aux endomorphismes de $A[[t]]/(t^n)$ qui laissent invariante la projection $A[[t]]/(t^n) \to A$. La seule différence est qu'il faut prendre μ, ν dans $A[[t]]/(t^{n-1})$. Le morphisme $\xi_{\mathbb{C}[[x]]}$ de 4.2 se généralise en un morphisme surjectif

$$\xi_A^n : \mathcal{G}(A[[t]]/(t^n)) \to A^*$$

de noyau $\mathcal{G}_0(A[[t]]/(t^n))$ et le théorème 4.2.5 s'étend.

4.3.2. *Le cas* $n = 2$ – Les automorphismes $\phi_{\mu\nu}$ dépendent de paramètres $\mu, \nu \in A$. On a

$$\phi_{\mu\nu}^{-1} \;=\; \phi_{-\frac{\mu}{\nu},\frac{1}{\nu}}.$$

4.3.3. *Le cas* $n = 3$ – Les automorphismes $\phi_{\mu\nu}$ dépendent de paramètres $\mu, \nu \in A[[t]]/(t^2)$, n'ayant donc que deux coordonnées dans $A[[x]]$.

Produit : on a $\phi_{\mu',\nu'} \circ \phi_{\mu,\nu} = \phi_{\mu''\nu''}$, avec

$$\mu_0'' = \mu_0' + \mu_0\nu_0', \quad \mu_1'' = \mu_1' + \mu_1{\nu'}_0^2 + \frac{d\mu_0}{dx}\mu_0'\nu_0' + \mu_0\nu_1', \quad \nu_0'' = \nu_0\nu_0', \quad \nu_1'' = \nu_0\nu_1' + \nu_1{\nu'}_0^2 + \frac{d\nu_0}{dx}\mu_0'\nu_0'.$$

Inversion : on a $\phi_{\mu\nu}^{-1} = \phi_{\mu'\nu'}$, avec

$$\nu_0' = \frac{1}{\nu_0}, \quad \mu_0' = -\frac{\mu_0}{\nu_0}, \quad \nu_1' = \frac{1}{\nu_0^3}(\mu_0\frac{d\nu_0}{dx} - \nu_1), \quad \mu_1' = \frac{1}{\nu_0^3}\big(\mu_0(\nu_1 - \mu_0\frac{d\nu_0}{dx} + \nu_0\frac{d\mu_0}{dx}) - \mu_1\big).$$

Dérivations et automorphismes associés : Les éléments de $\mathrm{Der}_0(A[[x,t]]/(t^3))$ sont de la forme

$$D \;=\; at\frac{\partial}{\partial x} + bt^2\frac{\partial}{\partial t},$$

avec $a \in A[[t]]/(t^2)$, $b \in A$. On a $\chi_D = \phi_{\mu,\nu}$, avec

$$\mu = a_0 + \big(a_1 + \frac{a_0}{2}(\frac{da_0}{dx} + b)\big)t, \qquad \nu = 1 + bt.$$

La loi de groupe sur $\mathrm{Der}_0(A[[x,t]]/(t^3))$ induite par celle sur $\mathcal{G}_0(A[[x,t]]/(t^3))$ est donnée par : si $D = at\frac{\partial}{\partial x} + bt^2\frac{\partial}{\partial t}$, $D' = a't\frac{\partial}{\partial x} + b't^2\frac{\partial}{\partial t}$, alors on a $D' * D = a''t\frac{\partial}{\partial x} + b''t^2\frac{\partial}{\partial t}$, avec

$$a_0'' = a_0 + a_0', \qquad a_1'' = a_1 + a_1' + \frac{1}{2}(\frac{da_0}{dx}a_0' - a_0\frac{da_0'}{dx} + a_0b' - ba_0'), \qquad b'' = b + b'.$$

On a $D * D' + D' * D = 2(D + D')$ (cette relation n'est plus vraie si $n > 3$).

4.4. Un résultat de régularité

On travaille ici dans l'anneau $\mathbb{C}((x))[[t]]$. Le résultat suivant est utilisé dans 5.4 :

4.4.1. Proposition : *Soient $p > 0$ un entier, $\mu, \nu, \mu_0, \nu_0 \in \mathbb{C}[[x,t]]$ avec ν, ν_0 inversibles. Alors*

$$\chi \;=\; \phi_{\mu, x^p\nu} \circ \phi_{\mu_0\nu_0} \circ \phi^{-1}_{\mu, x^p\nu}$$

est un automorphisme de $\mathbb{C}[[x,t]]$, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\chi = \phi_{\mu_1\nu_1}$, avec $\mu_1, \nu_1 \in \mathbb{C}[[x,t]]$ et ν_1 inversible.

Démonstration. Soit $\nu' \in \mathbb{C}[[x,t]]$. Alors on a

$$\phi_{\mu,\nu'}(x^p) \;=\; \lambda x^p \ ,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}[[x,t]]$ inversible et indépendant de ν'. On a

$$\phi_{\mu,\nu'}(x^p t) \;=\; x^p \lambda \nu' t \ ,$$

donc si on prend $\nu' = \nu/\lambda$, on a

$$\phi_{\mu,\nu'} \circ \phi_{0,x^p} \;=\; \phi_{\mu, x^p\nu} \ , \tag{13}$$

et il suffit de montrer que

$$\chi_0 \;=\; \phi_{0,x^p} \circ \phi_{\mu_0\nu_0} \circ \phi^{-1}_{0,x^p}$$

est un automorphisme de $\mathbb{C}[[x,t]]$.

On a $\phi^{-1}_{0,x^p} = \phi_{0,x^{-p}}$, et d'après la proposition 4.1.2

$$\phi_{0,x^p} \circ \phi_{\mu_0\nu_0} \;=\; \phi_{\sigma,\tau} \ ,$$

avec $\sigma = x^p \phi_{0,x^p}(\mu_0)$, $\tau = x^p \phi_{0,x^p}(\nu_0)$. Si $\alpha \in \mathbb{C}[[x,t]]$, on a $\chi_0(\alpha) = \phi_{\sigma,\tau}(\alpha) \in \mathbb{C}[[x,t]]$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \chi_0(t) &= \phi_{\sigma,\tau}(x^{-p}t) \\ &= \tau \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \sigma^i \frac{d^i(x^{-p})}{dx^i} t^i \\ &= \nu_1 t \ , \end{aligned}$$

avec

$$\nu_1 \;=\; \phi_{0,x^p}(\nu_0). \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{p-1}{i} x^{(p-1)i} \phi_{0,x^p}(\mu_0)^i t^i \ ,$$

qui est inversible. Donc χ_0 est bien un automorphisme de $\mathbb{C}[[x,t]]$. $\square$

4.5. Faisceaux de groupes d'automorphismes - La suite exacte de base

Soient C une courbe algébrique projective irréductible lisse et $n > 0$ un entier. On note $\mathcal{A}_n = \mathcal{O}_{C\times \mathbf{Z}_n}$. Autrement dit le faisceau d'anneaux $\mathcal{A}_n$ sur C est défini par :

$$\mathcal{A}_n(U) \ = \ \mathcal{O}_C(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]/(t^n)$$

pour tout ouvert U de C. On défini aussi le faisceau $\mathcal{A}_\infty$ par

$$\mathcal{A}_\infty(U) \ = \mathcal{O}_C(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[t]].$$

On a des morphismes canoniques de faisceaux d'anneaux si $n \geq 1$,

$$r_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n-1}, \quad \text{et} \quad r_n^\infty : \mathcal{A}_\infty \to \mathcal{A}_{n-1}.$$

En particulier on a un morphisme canonique $\mathcal{A}_n \to \mathcal{O}_C$ (pour $n \in \mathbb{N}$ ou $n = \infty$).

On note $\mathcal{G}_n$ le faisceau de groupes des automorphismes de $C \times \mathbf{Z}_n$ laissant C invariante. Plus explicitement, pour tout n (fini ou non), le faisceau de groupes $\mathcal{G}_n$ sur C est défini par : pour tout ouvert propre $U \subset C$, $\mathcal{G}_n(U)$ est le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres $\theta : \mathcal{A}_n(U) \to \mathcal{A}_n(U)$ tels que le triangle ci-dessous soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_n(U) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr] & & \mathcal{A}_n(U) \arrow[dl] \\ & \mathcal{O}_C(U) & \end{tikzcd}$$

Si n est fini et $n \geq 2$, tout élément de $\mathcal{G}_n(U)$ laisse invariant $\ker(\rho_n(U))$, et induit donc un élément de $\mathcal{G}_{n-1}(U)$. On obtient donc des morphismes canoniques

$$\rho_n : \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_{n-1}, \quad \text{et} \quad \rho_n^\infty : \mathcal{G}_\infty \to \mathcal{G}_{n-1}.$$

Il découle de 4.3 que si $\omega_{C|U}$ est trivial, alors tous les éléments de $\mathcal{G}_n(U)$ sont de la forme $\phi_{\mu\nu}$, avec $\mu, \nu \in \mathcal{A}_{n-1}(U)$ et ν inversible (la définition de $\phi_{\mu\nu}$ dépend du choix d'une trivialisation de $\omega_{C|U}$).

4.5.1. *Le noyau de ρ_n* – On suppose $n \geq 3$ fini. Soient $\mu, \nu \in \mathcal{A}_{n-1}(U)$ avec ν inversible. Alors on a

$$\rho_n(\phi_{\mu\nu}) \ = \ \phi_{r_{n-1}(\mu) r_{n-1}(\nu)}.$$

De même, on a $\rho_n^\infty(\phi_{\mu\nu}) = \phi_{r_{n-1}^\infty(\mu) r_{n-1}^\infty(\nu)}$ si $\mu, \nu \in \mathcal{A}_\infty(U)$ avec ν inversible. On en déduit que les morphismes ρ_n et ρ_n^∞ sont surjectifs.

Si $\omega_{C|U}$ est trivial, alors, relativement à une section $\sigma = \frac{d}{dx}$ engendrant $T_{C|U}$, $\ker(\rho_n(U))$ est constitué des $\phi_{\mu\nu}$, avec μ, ν de la forme

$$\mu = \theta t^{n-2}, \quad \nu = 1 + \beta t^{n-2},$$

avec $\mu, \nu \in \mathcal{O}_C(U)$. On pose

$$\lambda_{\theta\beta}^\sigma = \phi_{\theta t^{n-2}, 1+\beta t^{n-2}}.$$

On utilisera aussi la notation $\lambda_{\theta\beta}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Si $P \in C$, on emploie la même notation pour les éléments de $\ker(\rho_{nP})$ (dans ce cas $\theta, \beta \in \mathcal{O}_{CP}$).

4.5.2. Proposition : *On a* $\ker(\rho_n) \simeq T_C \oplus \mathcal{O}_C$.

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de C tel que $\omega_{C|U}$ soit trivial. Soit $\sigma = \frac{d}{dx}$ une section engendrant $T_{C|U}$. On voit aisément en utilisant la proposition 4.1.2 ou directement que

$$\lambda^{\sigma}_{\theta'\beta'} \circ \lambda^{\sigma}_{\theta\beta} = \lambda^{\sigma}_{\theta'+\theta,\beta'+\beta}.$$

D'autre part, si on remplace σ par $a\sigma$, où a est une fonction régulière inversible sur U, on a d'après le lemme 4.2.1

$$\lambda^{a\sigma}_{\theta\beta} = \lambda^{\sigma}_{a\theta,\beta}.$$

Il en découle que $\ker(\rho_n)$ est isomorphe au produit du sous-groupe correspondant aux $\lambda^{\sigma}_{\theta 0}$ et du sous-groupe correspondant aux $\lambda^{\sigma}_{0\beta}$, et que le premier (resp. le second) sous-groupe est isomorphe à T_C (resp. $\mathcal{O}_C$). □

On a donc pour $n \geq 3$ une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_C \oplus \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{G}_n \xrightarrow{\rho_n} \mathcal{G}_{n-1} \longrightarrow 0. \tag{14}$$

4.5.3. *Le morphisme canonique* $\mathcal{G}_n \to \mathcal{O}_C^*$ – C'est la version globale du morphisme analogue local $\xi_{\mathbb{C}[[x]]}$ de 4.2 (cf. aussi 4.3). On suppose que $n \geq 2$. Pour tout ouvert non vide U de C et tout $\phi \in \mathcal{G}_n(U)$ il existe un unique $\nu \in \mathcal{A}_n(U)$ inversible tel que $\phi(t) = \nu t$. On pose $\xi_n(\phi) = \rho(\nu)$. On définit ainsi un morphisme de faisceaux de groupes surjectif $\xi_n : \mathcal{G}_n \to \mathcal{O}_C^*$. Si $n \geq 3$ on a

$$\xi_{n-1} \circ \rho_n = \xi_n.$$

L'application induite

$$H^1(\xi_n) : H^1(X, \mathcal{G}_n) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_C^*) = \mathrm{Pic}(C)$$

est surjective. Soit $L \in \mathrm{Pic}(C)$, représenté par un 1-cocycle (s_{ij}) d'un recouvrement ouvert (U_i) de C. On a donc $s_{ij} \in \mathbb{C}^*$. On en déduit le 1-cocycle $(\phi_{0,s_{ij}})$ à valeurs dans g_n, représentant un élément de $H^1(X, \mathcal{G}_n)$ qui ne dépend que de L, et qu'on notera donc $e_n(L)$. Alors on a

$$H^1(\xi_n)(e_n(L)) = L.$$

4.5.4. *Description de* $\mathcal{G}_2$ – Le noyau de ξ_2 s'identifie à T_C, compte tenu de la description des fibres de $\mathcal{G}_2$: soient $P \in C$ et $x \in \mathcal{O}_{CP}$ un générateur de l'idéal maximal. Alors $\mathcal{G}_{2P}$ est le groupe des matrices

$$\phi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu\frac{d}{dx} & \nu \end{pmatrix} \quad ,$$

avec $\mu, \nu \in \mathcal{O}_{CP}$, ν inversible. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\xi_2} \mathcal{O}_C^* \longrightarrow 0.$$

Notons qu'il existe une section canonique de ξ_2 : le morphisme

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{O}_C^* &\longrightarrow \mathcal{G}_2 \\ \nu &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

mais le sous-groupe $\mathcal{O}_C^*$ de $\mathcal{G}_2$ n'est pas distingué.

4.6. Suites exactes dérivées

Soit $g \in H^1(C, \mathcal{G}_n)$. Soit $L = H^1(\xi_n)(g) \in \mathrm{Pic}(C)$.

4.6.1. *Le cas $n = 2$* – D'après 3.2.8 on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_C^g \longrightarrow \mathcal{G}_2^g \longrightarrow (\mathcal{O}_C^*)^g \longrightarrow 0.$$

4.6.2. Lemme : *1 – On a $T_C^g = T_C \otimes L$ et $(\mathcal{O}_C^*)^g = \mathcal{O}_C^*$, donc on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow T_C \otimes L \longrightarrow \mathcal{G}_2^g \longrightarrow \mathcal{O}_C^* \longrightarrow 0.$$

2 – L'action de $\mathbb{C}^* = H^0(\mathcal{O}_C^*)$ sur $H^1(T_C \otimes L)$ est la multiplication.

Démonstration. Montrons d'abord que $T_C^g = T_C \otimes L$. Soient $P \in C$ et $x \in \mathcal{O}_{CP}$ un générateur de l'idéal maximal. Le résultat va découler de la formule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu \frac{d}{dx} & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu_0 \frac{d}{dx} & \nu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu \frac{d}{dx} & \nu \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\mu + \nu\mu_0 - \mu\nu_0)\frac{d}{dx} & \nu_0 \end{pmatrix} \quad ,$$

pour tous $\mu, \mu_0, \nu, \nu_0 \in \mathcal{O}_{CP}$ avec ν, ν_0 inversibles. Supposons g défini par un 1-cocycle $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu_{ij} & \nu_{ij} \end{pmatrix}\right)$ d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ de C tel que la restriction de T_C à chaque U_i soit triviale, avec $\mu_{ij} \in H^0(U_{ij}, T_C)$, $\nu_{ij} \in \mathcal{O}_C^*(U_{ij})$. Alors d'après la formule précédente, $(T_C)^g$ est obtenu en recollant les $T_{C|U_i}$ au moyen des multiplications par ν_{ij} sur U_{ij}. D'après 2.3.1 le résultat obtenu est $T_C \otimes L$.

La formule précédente montre aussi que $\mathcal{G}_2$ agit trivialement sur $\mathcal{O}_C^*$, d'où $(\mathcal{O}_C^*)^g = \mathcal{O}_C^*$. La partie 2- découle aussi immédiatement de la formule précédente. □

4.6.3. *Les fibres de $H^1(\xi_2)$* – Soit $g_0 = H^1(\tau)(L) \in H^1(C, \mathcal{G}_2)$. On a d'après le lemme 4.6.2 et 3.2.3 une application surjective

$$\lambda_{g_0} : H^1(T_C \otimes L) \longrightarrow H^1(\xi_2)^{-1}(L)$$

dont les fibres sont les orbites de l'action de $\mathbb{C}^*$ par multiplication. Avec les notations du lemme 4.6.2, L est défini par (ν_{ij}) et g_0 l'est par le 1-cocycle $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu_{ij} \end{pmatrix}\right)$. Compte tenu de l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu_{ij} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu_{ij} & \nu_{ij} \end{pmatrix} \quad ,$$

on voit que $\lambda_{g_0}^{-1}(g) = \mathbb{C}^* u$, où $u \in H^1(T_C \otimes L)$ est défini par (μ_{ij}) (les relations de cocycle étant ici bien sûr celles décrites dans 3.1.4). On notera

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow E(g) \longrightarrow L^* \longrightarrow 0 \tag{15}$$

l'extension associée à u (qui ne dépend que de g).

4.6.4. *Le cas $n > 2$* – On suppose maintenant que $n \geq 3$. D'après 3.2.8 on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (T_C \oplus \mathcal{O}_C)^g \longrightarrow \mathcal{G}_n^g \longrightarrow \mathcal{G}_{n-1}^g \longrightarrow 0.$$

Soit g_2 l'image de g dans $H^1(C, \mathcal{G}_2)$.

4.6.5. Lemme : *Soient $P \in C$, $\theta, \beta \in \mathcal{O}_{CP}$, $\mu, \nu \in \mathcal{A}_{n-1,P}$ avec ν inversible, et $\mu_0 = \rho(\mu)$, $\nu_0 = \rho(\nu)$. Alors on a*

$$\phi_{\mu\nu} \circ \lambda_{\theta\beta} \circ \phi_{\mu\nu}^{-1} = \lambda_{\theta'\beta'},$$

avec

$$\beta' = \nu_0^{n-2}\beta, \quad \theta' = \nu_0^{n-2}(\nu_0\theta - \mu_0\beta).$$

Démonstration. Cela découle aisément de la proposition 4.1.2. □

4.6.6. Proposition : *On a* $(T_C \oplus \mathcal{O}_C)^g \simeq E(g_2) \otimes L^{n-1}$.

Démonstration. Soit $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu_{ij} & \nu_{ij} \end{pmatrix}\right)$ un 1-cocycle de $\mathcal{U}$ représentant g_2. D'après le lemme précédent, $(T_C \oplus \mathcal{O}_C)^g$ s'obtient en recollant les faisceaux $(T_C \oplus \mathcal{O}_C)_{|U_i}$ au moyen des automorphismes sur U_{ij} correspondant aux matrices $\left(\begin{pmatrix} \nu_{ij}^{n-1} & -\nu_{ij}^{n-2}\mu_{ij} \\ 0 & \nu_{ij}^{n-2} \end{pmatrix}\right)$. Le résultat découle donc de 2.3.3. □

4.6.7. *Les fibres de $H^1(\rho_n)$* – Soit $g_{n-1} = H^1(\rho_n)(g)$. 0n a d'après la proposition 4.6.6 et 3.2.3 une application surjective

$$\lambda_g : H^1(E(g_2) \otimes L^{n-1}) \longrightarrow H^1(\rho_n)^{-1}(g_{n-1})$$

envoyant 0 sur g et dont les fibres sont les orbites de l'action de $H^0(C, \mathcal{G}_{n-1}^g)$.

4.6.8. *Surjectivité de $H^1(\rho_n)$* – Il découle de 3.2.7 que $H^1(\rho_n)$ *est surjective.*

5. Courbes multiples primitives abstraites

On utilisera les notations de 4. Rappelons que pour $n \geq 1$, $\mathbf{Z}_n$ désigne le schéma $\operatorname{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^n))$.

5.1. Définition et propriétés élémentaires

Soit C une courbe irréductible lisse. Soient $n \geq 2$ un entier et $g \in H^1(C, \mathcal{G}_n)$, représenté par un 1-cocycle (g_{ij}) d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ de C. On peut voir g_{ij} comme un automorphisme de $U_{ij} \times \mathbf{Z}_n$ laissant U_{ij} invariant. On note $C(g)$ le schéma obtenu en recollant les $U_i \times \mathbf{Z}_n$ au moyen des g_{ij}. Il est facile de voir que $C(g)$ ne dépend effectivement que de g. Si C est projective c'est un schéma propre et de dimension 1, c'est donc une variété projective dont la sous-variété réduite associée est C.

Pour $1 \leq k \leq n$, la sous-variété fermée $U_{ij} \times \mathbf{Z}_k$ de $U_{ij} \times \mathbf{Z}_n$ est invariante par g_{ij}. Ces sous-variétés se recollent donc et définissent une sous-variété $C_k(g)$ de $C(g)$. On a

$$C = C_1(g) \subset C_2(g) \subset \cdots \subset C_{n-1}(g) \subset C_n(g) = C(g).$$

Si $\mathcal{I}_C$ désigne le faisceau d'idéaux de C dans $C(g)$, celui de $C_k(g)$ est $\mathcal{I}_C^k$.

On appelle $C(g)$ une *courbe multiple primitive abstraite* de courbe réduite associée C, de multiplicité n et de fibré en droites associé L.

5.1.1. Proposition : *1 – Si $n' \geq 2$ est un entier et si $g' \in H^1(C, \mathcal{G}_{n'})$, alors il existe un isomorphisme $C(g) \simeq C(g')$ induisant l'identité sur C si et seulement si $n = n'$ et $g = g'$.*

2 – On a $C(g_k) = C_k(g)$.

3 – Soit $L = H^1(\xi_n)(g) \in \operatorname{Pic}(C)$. Alors on a $\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2 \simeq L$.

4 – Toute courbe primitive abstraite de multiplicité n peut être étendue en une courbe primitive abstraite de multiplicité $n+1$ de même courbe réduite associée.

Démonstration. Les trois premières assertions sont immédiates et la quatrième découle de 4.6.8. □

Le faisceau de groupes $(\mathcal{G}_n)^g$ est canoniquement isomorphe au faisceau $\mathcal{A}ut_C(C(g))$ des automorphismes de $C(g)$ induisant l'identité sur C. En particulier $H^0(C,(\mathcal{G}_n)^g)$ s'identifie au groupe $\mathrm{Aut}_C(C(g))$ des automorphismes de $C(g)$ induisant l'identité sur C.

Si $L \in \mathrm{Pic}(C)$, la courbe $C(e_n(L))$ s'appelle la *courbe triviale* de multiplicité n et de fibré en droites associé L (cf. 4.5.3). On en donnera une description plus précise en 5.2.5.

5.1.2. Proposition : *Si C n'est pas projective, les seules courbes multiples primitives abstraites de courbe réduite associée C sont les courbes triviales.*

Démonstration. Cela découle de 4.6.3, 4.6.7 et du fait que C est affine (cf. [15], chapter IV, ex. 1.4). □

5.1.3. *Définition de faisceaux cohérents par recollements* – On note $\mathbf{U}_i$ l'ouvert de $C(g)$ correspondant à $U_i \times \mathbf{Z}_n$ (et qui lui est donc isomorphe), et $\pi_i : \mathbf{U}_i \to U_i \times \mathbf{Z}_n$ l'isomorphisme canonique. On a donc $g_{ij} = \pi_i \circ \pi_j^{-1}$ sur $U_{ij} \times \mathbf{Z}_n$. On se donne des faisceaux cohérents $\mathcal{E}_i$ sur $U_i \times \mathbf{Z}_n$ et des isomorphismes de faisceaux sur $U_{ij} \times \mathbf{Z}_n$:

$$\Theta_{ij} : \mathcal{E}_j \ \simeq \ g_{ij}^*(\mathcal{E}_i)$$

tels que pour tous indices distincts deux à deux i, j, k le carré suivant soit commutatif sur $U_{ijk} \times \mathbf{Z}_n$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_k \arrow[r, "\Theta_{jk}"] \arrow[d, "\Theta_{ik}"] & g_{jk}^*(\mathcal{E}_j) \arrow[d, "g_{jk}^*(\Theta_{ij})"] \\
g_{ik}^*(\mathcal{E}_i) \arrow[r, equal] & g_{jk}^*\big(g_{ij}^*(\mathcal{E}_i)\big)
\end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $C(g)$ tel qu'on ait des isomorphismes $\gamma_i : \mathcal{E}_{|\mathbf{U}_i} \to \pi_i^*(\mathcal{E}_i)$ tels que $\Theta_{ij} = (\pi_j^{-1})^*(\gamma_i\gamma_j^{-1})$.

Le faisceau $\mathcal{F} = g_{ij}^*(\mathcal{E}_i)$ peut être décrit de la façon suivante : pour tout ouvert U de $U_i \times \mathbf{Z}_n$ on a $\mathcal{F}(U) = \mathcal{E}_i(U)$, et la structure de module est la suivante : pour tout $\alpha \in \mathcal{O}_{U_i \times \mathbf{Z}_n}(U)$ et tout $v \in \mathcal{E}_i(U)$ le produit de v par α est en fait $(\alpha \circ g_{ij}).v$.

5.2. Courbes multiples primitives ordinaires

Soient X une variété irréductible lisse et $Y \subset X$ une hypersurface lisse. On note Y_n l'hypersurface de multiplicité n associée et $\mathcal{O}_n$ son faisceau structural.

5.2.1. Théorème : *Il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{O}_{Y,P} \to \mathcal{O}_{n,P}$ section de la restriction $\mathcal{O}_{n,P} \to \mathcal{O}_{Y,P}$. On a donc un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{O}_{n,P} \simeq \mathcal{O}_{Y,P} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t]/(t^n)$.*

Démonstration. Supposons X plongée dans $\mathbb{P}_m$, $P=(1,0,\dots,0)$, X définie par les équations

$$f_1(x_1,\dots,x_m)=\cdots=f_{m-d}(x_1,\dots,x_m)=0$$

(où $d=\dim(X)$) et Y par l'équation supplémentaire $f(x_1,\dots,x_m)=0$ au voisinage de P. On a alors

$$\mathcal{O}_{X,P}=\mathcal{O}_P/(f_1,\dots,f_{m-d}),\quad \mathcal{O}_{n,P}=\mathcal{O}_P/(f_1,\dots,f_{m-d},f^n),\quad \mathcal{O}_{Y,P}=\mathcal{O}_P/(f_1,\dots,f_{m-d},f),$$

avec $\mathcal{O}_P=\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m,P}$, qu'on peut voir comme la sous-algèbre de $\mathbb{C}(x_1,\dots,x_m)$ constituée des éléments A/B, avec $A,B\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_m]$ et $B(0)\neq 0$.

La proposition 5.2.1 se démontre par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est évident. Supposons qu'elle soit vraie pour $n-1\geq 1$. Un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\phi:\mathcal{O}_{Y,P}\to\mathcal{O}_{n,P}$ section de la restriction $\mathcal{O}_{n,P}\to\mathcal{O}_{Y,P}$ est défini par $\phi(x_i)$, $1\leq i\leq m$, qui doit être de la forme

$$\phi(x_i) \;=\; x_i+A_if,$$

avec $A_i\in\mathcal{O}_P$. On doit avoir de plus $f_j(\phi(x_1),\dots,\phi(x_m))=0$ pour $1\leq j\leq m-d$ et $f(\phi(x_1),\dots,\phi(x_m))=0$ dans $\mathcal{O}_{n,P}$. La formule de Taylor donne

$$f_j(x_1+A_1f,\dots,x_m+A_mf) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1}\left(f^i\sum C_{\alpha_1\dots\alpha_m}\frac{\partial^i f_j}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_i}}(x_1,\dots,x_m)A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_i}\right),$$

$$f(x_1+A_1f,\dots,x_m+A_mf)=f+\sum_{i=1}^{n-1}\left(f^i\sum C_{\alpha_1\dots\alpha_m}\frac{\partial^j f}{\partial x_{\alpha_1}\cdots\partial x_{\alpha_i}}(x_1,\dots,x_m)A_{\alpha_1}\cdots A_{\alpha_i}\right).$$

dans $\mathcal{O}_{nP}$ (les $C_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ étant des coefficients constants) . D'après l'hypothèse de récurrence on peut supposer qu'on peut écrire

$$f_j(x_1+A_1f,\dots,x_m+A_mf)=D_jf^{n-1}\ ,\quad f(x_1+A_1f,\dots,x_m+A_mf)=Df^{n-1}\ ,$$

avec $D_j,D\in\mathcal{O}_P$. Remplaçons maintenant $A_1,\dots,A_m$ par $A'_1=A_1+f^{n-2}B_1,\dots,$ $A'_m=A_m+f^{n-2}B_m$ respectivement. On a alors dans $\mathcal{O}_{nP}$ (c'est-à-dire modulo (f^n))

$$f_j(x_1+A'_1f,\dots,x_m+A'_mf)=f^{n-1}.\left(D_j+\sum_{i=1}^m\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m)B_i\right),$$

$$f(x_1+A'_1f,\dots,x_m+A'_mf)=f^{n-1}.\left(D+\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m)B_i\right).$$

Puisque Y est lisse la matrice

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(0)\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f_{m-d}}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_{m-d}}{\partial x_m}(0)\\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m}(0)\end{pmatrix}$$

est de rang maximal $m-d+1$. On peut donc choisir $B_1,\dots,B_m$ de telle sorte que

$$D_j+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m)B_i \;=\; 0\ ,\qquad D+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_m)B_i \;=0\ .$$

On a alors

$$f_j(x_1+A'_1f,\dots,x_m+A'_mf)=0\ ,\qquad f(x_1+A'_1f,\dots,x_m+A'_mf)=0$$

dans $\mathcal{O}_{nP}$. □

En modifiant légèrement la démonstration précédente on obtient le

5.2.2. Corollaire : *Il existe un voisinage U de P dans Y tel que si U_n désigne l'ouvert correspondant de Y_n on ait un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\ U_n \arrow[rr, "\simeq"] & & U\times\mathbf{Z}_n \end{tikzcd}$$

Autrement dit, Y_n est localement triviale.

5.2.3. Corollaire : *Toute courbe multiple primitive au sens de 2.1 est une courbe multiple primitive abstraite.*

5.2.4. Proposition : *Soient C_n une courbe primitive de multiplicité $n\geq 1$, C la courbe lisse réduite, C_2 la courbe double associées, et $L=\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2}\in\mathrm{Pic}(C)$. Soit $g\in H^1(C,\mathcal{G}_n)$ tel qu'il existe un isomorphisme $C(g)\simeq C_n$ induisant l'identité sur C. Alors on a $L=H^1(\xi_n)(g)$.*

Démonstration. Soit (g_{ij}) un 1-cocycle d'un recouvrement ouvert (U_i) de C représentant g. Donc g_{ij} est un automorphisme de $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^n)$ tel que $\rho g_{ij}=\rho$, ρ désignant le morphisme canonique $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^n)\to\mathcal{O}_C(U_{ij})$. On a alors $g_{ij}(t)=\tau_{ij}t$, avec τ_{ij} inversible, donc $\nu_{ij}=\rho(\tau_{ij})\in\mathcal{O}_C^*(U_{ij})$. Le fibré $H^1(\xi_n)(g)$ est défini par le 1-cocycle (τ_{ij}). D'après la construction de $C(g)$ il est immédiat que $\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2}$ est défini par le même cocycle, d'ou le résultat. □

On a en fait $\nu_{ij}\in\mathcal{O}_C^*(U_{ij})[t]/(t^{n-1})$, et (τ_{ij}) est un 1-cocycle définissant un fibré en droites sur C_{n-1} isomorphe à $\mathcal{I}_C$.

5.2.5. *Description des courbes triviales* – Soit $L\in\mathrm{Pic}(C)$, et S le fibré en droites L^* sur C, vu comme une surface. La section nulle de L^* définit un plongement $C\subset S$. Soit C_n la courbe

primitive de multiplicité n associée. Alors C_n est la courbe triviale de multiplicité n, c'est-à-dire que $C_n \simeq C(e_n(L))$ (cf. 4.5.3).

5.2.6. *Paramétrisation des courbes doubles* – Soit $C_2 = C(g)$ une courbe double de courbe lisse sous-jacente C et de fibré en droites associé L. D'après 4.6.3, C_2 est triviale si et seulement si $E(g) \simeq T_C \oplus L^*$, c'est-à-dire si et seulement si la suite exacte (15) est scindée. Les courbes doubles non triviales de courbe lisse sous-jacente C et de fibré en droites associé L sont naturellement paramétrées par $\mathbb{P}(H^1(T_C \otimes L))$, le point correspondant à $C(g)$ étant associé à l'extension (15). On retrouve les résultats de [2].

5.2.7. *Paramétrisation des prolongements de courbes multiples* – Soient n un entier tel que $n \geq 3$,$C_{n-1} = C(\gamma)$ une courbe multiple prmimitive de multiplicité $n-1$ et γ_2 l'image de γ dans $H^1(C, \mathcal{G}_2)$. On note $\mathcal{C}_n(C_{n-1})$ l'ensemble des prolongements de C_{n-1} en courbe primitive de multiplicité n. Soient C_n un tel prolongement et g l'unique élément de $H^1(C, \mathcal{G}_n)$ tel que $C_n = C(g)$. D'aprs 4.6.7 il existe une surjection canonique

$$\lambda_g : H^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{C}_n(C_{n-1})$$

donc les fibres sont les orbites d'une action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ sur $H^1(C, \mathcal{G}_n)$ (cf. 3.2.4, 3.2.9).

5.2.8. *Cas d'unicité des extensions de courbes* – Soit C_n une courbe primitive de multiplicité n de courbe lisse projective sous-jacente C et de fibré en droites associé L. Soient g le genre de C et $d = \deg(L)$. Il résulte de 4.6.7 qu'il existe un *unique* prolongement de C_n en courbe de multiplicité $n+1$ dans les cas suivants :

- Si $g \geq 1$: $d > \frac{4g-4}{n}$, ou $d = \frac{4g-4}{n}$ et $L^n \neq \omega_C^2$. En particulier, si $n > 4g-4$ et $d > 0$.
- Si $g = 0$: $n = 2, 3$ et $d \geq -1$, $n \geq 4$ et $d \geq 0$.

5.3. Plongement des courbes multiples primitives abstraites

Soit C une courbe lisse plongée dans une surface lisse S, elle-même plongée dans $\mathbb{P}_m$, $m \geq 4$. Soit $n \geq 2$ un entier. On note C_n la courbe primitive de S de multiplicité n et de courbe réduite associée C. Si $P \in C$ on note T_{SP} le plan de $\mathbb{P}_m$ tangent à S en P. Rappelons qu'on appelle *sécante* à C une droite de $\mathbb{P}_m$ contenant au moins deux points distincts de C.

5.3.1. Proposition : *Soit $O \in \mathbb{P}_m$ un point n'appartenant à aucun plan tangent T_{SP}, $P \in C$, et à aucune sécante à C. Alors la projection de centre O, $\pi_O : \mathbb{P}_m \to \mathbb{P}_{m-1}$ induit un plongement $C_n \subset \mathbb{P}_{m-1}$.*

Démonstration. On sait déjà que π_O induit un plongement $C \subset \mathbb{P}_{m-1}$ (cf. [15], Chap. IV, Prop. 3.4). Soit $P \in C$. Puisque $O \notin T_{SP}$ il existe un voisinage U (au sens de la topologie usuelle) de P tel que π_O induise un plongement $U \cap S \subset \mathbb{P}_{m-1}$. Donc $\pi_O^* : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{m-1},\pi_O(P)} \to \mathcal{O}_{C_n,P}$ est surjectif, et π_O induit bien un plongement $C_n \subset \mathbb{P}_{m-1}$. □

5.3.2. Théorème : *Toute courbe multiple primitive abstraite peut être plongée dans $\mathbb{P}_3$.*

Démonstration. Soit D une courbe multiple primitive abstraite, de courbe réduite associée C. On part d'un plongement $D \subset \mathbb{P}_m$, $m \geq 4$. Il faut prouver qu'il existe un point $O \in \mathbb{P}_m$ tel que la projection de centre O, $\pi_O : \mathbb{P}_m \to \mathbb{P}_{m-1}$ induise un plongement $C_n \subset \mathbb{P}_{m-1}$.

D'après la structure locale de D il existe des surfaces lisses $S_1, \ldots, S_k \subset \mathbb{P}_m$ (non nécessairement projectives) telles que $D \subset S_1 \cup \cdots \cup S_k$. La variété des points situés sur les plans tangents à une des S_i en les points de C est de dimension au plus 3, de même que celle des points situés sur les sécantes. Il suffit donc d'aprés la proposition 5.3.1 de prendre O en dehors de l'adhérence de ces variétés. □

On en déduit en utilisant aussi le corollaire 5.2.3 le

5.3.3. Corollaire : *Les courbes multiples primitives abstraites sont exactement les courbes multiples primitives au sens de 2.1.*

5.4. Éclatements

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n et de courbe réduite associée C. On peut supposer que $C_n = C(g)$, avec $g \in H^1(C, \mathcal{G}_n)$. Si $2 \leq i \leq n$ on notera g_i l'image de g_n dans $H^1(C, \mathcal{G}_i)$. On a donc $C(g_i) = C_i$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de C On suppose que pour tout indice i, $U_i \neq C$ et que $\omega_{C|U_i}$ est trivial. Pour tout ouvert U de C, on note ρ le morphisme canonique $\mathcal{O}_C(U)[t]/(t^n) \to \mathcal{O}_C(U)$.

Soit (g_{ij}) un 1-cocycle de $\mathcal{U}$ de C représentant g. Donc g_{ij} est un automorphisme de $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^n)$ tel que $\rho g_{ij} = \rho$.

Soient $i_0 \in I$, $P \in U_{i_0}$ et $x \in \mathcal{O}_C(U_{i_0})$ engendrant l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{CP}$ et ne s'annulant qu'en P. On peut en modifiant au besoin $\mathcal{U}$ supposer que i_0 est le seul indice i tel que $P \in U_i$. Soit A un endomorphisme de $\mathcal{O}_C(U_{i_0})[t]/(t^n)$ tel que $\rho A = \rho$. On suppose que P est le seul point singulier de A, c'est-à-dire que A induit un automorphisme de $\mathcal{O}_C(U_{i_0} \backslash \{P\})[t]/(t^n)$, et que $\mathcal{O}_C(-P)$ est trivial sur U_{i_0}. On définit un nouveau 1-cocycle $\gamma(A, (g_{ij})) = (g'_{ij})$ de $\mathcal{U}$ par

$$g'_{ij} = g_{ij} \quad \text{si} \quad i \neq i_0 \text{ et } j \neq i_0, \qquad g'_{i_0 j} = A.g_{i_0 j}, \qquad g'_{j i_0} = g_{j i_0}.A^{-1} \ .$$

On note g' l'élément de $H^1(C,\mathcal{G}_n)$ représenté par (g'_{ij}) (on verra plus loin que g' ne dépend que de g et q), et C'_m les courbes multiples correspondantes.

5.4.1. Proposition : *On suppose que A est de la forme $A=\phi_{\mu,x^q\nu}$, avec $q>0$ et ν inversible. Alors*

1 - La courbe $C(g')$ est l'éclatement du diviseur de Cartier qP de $C(g)$.

2 - L'association $(g_{ij})\to\gamma(A,(g_{ij}))$ induit un morphisme surjectif

$$b^P_{n,q}:H^1(C,\mathcal{G}_n)\to H^1(C,\mathcal{G}_n)$$

ne dépendant que de q et P.

3 - On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(C,\mathcal{G}_n) & \xrightarrow{H^1(\xi_n)} & \mathrm{Pic}(C) \\ \downarrow{\scriptstyle b^P_{n,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes\mathcal{O}_C(qP)} \\ H^1(C,\mathcal{G}_n) & \xrightarrow{H^1(\xi_n)} & \mathrm{Pic}(C) \end{array}$$

4 - On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(C,\mathcal{G}_n) & \xrightarrow{H^1(\rho_n)} & H^1(C,\mathcal{G}_{n-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle b^P_{n,q}} & & \downarrow{\scriptstyle b^P_{n-1,q}} \\ H^1(C,\mathcal{G}_n) & \xrightarrow{H^1(\rho_n)} & H^1(C,\mathcal{G}_{n-1}) \end{array}$$

5 - Pour tous entiers $q,q'>0$ on a $b^P_{n,q}\circ b^P_{n,q'}=b^P_{n,q+q'}$.

Démonstration. La démonstration de 1- est analogue à celle de [2], Theorem 1.9.

L'asserion 2- découle de 1-, mais on peut la démontrer directement. Remplaçons (g_{ij}) par un cocycle cohomologue $(h_ig_{ij}h_j^{-1})$, on a

$$A.h_{i_0}g_{i_0j}h_j^{-1}=(Ah_{i_0}A^{-1}).Ag_{i_0j},$$

et d'après la proposition 4.4.1, $Ah_{i_0}A^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{O}_C(U_{i_0})[t]/(t^n)$, donc $\gamma(A,(h_ig_{ij}h_j^{-1}))$ est cohomologue à $\gamma(A,(g_{ij}))$. Ceci permet de définir $b^P_{n,q}$ sans ambiguité. D'autre part la relation (13) montre que $b^P_{n,q}$ ne dépend que de q. Ceci démontre 2-.

Soit $\sigma\in\mathcal{O}_C(U)$ une équation de P. Posons $g_{ij}=\phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}$. Alors $H^1(\rho_n)(g)$ est représenté par le cocycle $(\delta_{ij})=(\rho(\nu_{ij}))$, tandis que $H^1(\rho_n)(b^P_{n,q}(g))$ l'est par le cocycle (ϵ_{ij}) défini par

$$\epsilon_{ij}=\delta_{ij}\quad\text{si}\quad i\neq i_0\text{ et }j\neq i_0,\qquad \epsilon_{i_0j}=\sigma^q\delta_{i_0j},\qquad \delta_{ji_0}=\sigma^{-q}\delta_{ji_0}\ .$$

On en déduit aisément 3-. Les autres assertions sont immédiates. □

On s'intéresse maintenant à la correspondance obtenue entre les fibres de $H^1(\rho_n)$. Soit $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2} \in \mathrm{Pic}(C)$. D'aprs la partie 2- du théorème précédent, on a $\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2'} = L(qP)$. Rappelons que le fibré $E(g_2)$ est une extension de L^* par T_C. Soit $u \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(L^*, T_C) = H^1(T_C \otimes L)$ correspondant à cette extension.

5.4.2. Proposition : *Le fibré $E(g_2')$ est associé à l'image de u dans $H^1(T_C \otimes L(qP))$ par le morphisme $H^1(T_C \otimes L) \to H^1(T_C \otimes L(qP))$ induit par l'inclusion $L \subset L(qP)$.*

Démonstration. Ce résultat est contenu dans [2], Theorem 1.9. On en donne une autre démonstration utilisant des cocycles. On utilise les notations de 5.4.1. Alors $E(g_2)$ est obtenu en recollant les fibrés $(T_C \oplus \mathcal{O}_C)_{|U_i}$ au moyen des automorphismes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_{ij} & \nu_{ij} \end{pmatrix}$. Le fibré $E(g_2')$ lui est obtenu en recollant les fibrés $(T_C \oplus \mathcal{O}_C)_{|U_i}$ au moyen des automorphismes $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_{ij} & \nu_{ij} \end{pmatrix}$ si $i \neq i_0$, $j \neq i_0$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma^q\mu_{ij} & \sigma^q\nu_{ij} \end{pmatrix}$ si $i = i_0$, et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma^{-q}\mu_{ij} & \sigma^{-q}\nu_{ij} \end{pmatrix}$ si $j = i_0$. Le résultat en découle immédiatement. □

On en déduit le diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_C \arrow[r] \arrow[d, equal] & E(g_2') \arrow[r] \arrow[d, "\tau_q"] & L^*(-qP) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_C \arrow[r] & E(g_2) \arrow[r] & L^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Rappelons qu'on a une application surjective canonique

$$\lambda_g : H^1(E(g_2) \otimes L^{n-1}) = H^1(E(g_2)^* \otimes T_C \otimes L^{n-2}) \longrightarrow H^1(\rho_n)^{-1}(g)$$

(cf. 4.6.7). Soit

$$\beta^P_{n,q} : H^1(E(g_2)^* \otimes T_C \otimes L^{n-2}) \longrightarrow H^1(E(g_2')^* \otimes T_C \otimes L(qP)^{n-2})$$

le morphisme surjectif déduit de τ_q et de $L \subset L(qP)$.

5.4.3. Proposition : *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
H^1(E(g_2) \otimes L^{n-1}) \arrow[r, "\lambda_g"] \arrow[d, "\beta^P_{n,q}"] & H^1(\rho_n)^{-1}(g) \arrow[d, "b^P_{n,q}"] \\
H^1(E(g_2') \otimes L(qP)^{n-1}) \arrow[r, "\lambda_{g'}"] & H^1(\rho_n)^{-1}(g')
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Démonstration analogue à la précédente, utilisant celle de la proposition 4.6.6. □

5.5. Courbes multiples scindées

Soient $n \geq 2$ un entier et C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n et de courbe réduite associée C, et de fibré en droites associé L.

On dit que C_n est *scindée* s'il existe un morphisme $C_n \to C$ induisant l'identité sur C. Les exemples les plus simples sont les courbes triviales. Ce sont d'ailleurs les seuls exemples si $n = 2$, d'après [2] ou 5.2.6.

On s'intéresse aux paires (C_n, π), où C_n est une courbe scindée de multiplicité n et $\pi : C_n \to C$ est un morphisme induisant l'identité sur C. On dit que deux telles paires, (C_n, π) et (C'_n, π') sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\epsilon : C_n \to C'_n$ induisant l'identité sur C et tel que $\pi = \pi' \circ \epsilon$. On peut classifier ces paires de la même manière que les courbes primitives, en utilisant des faisceaux de groupes différents. On considère les automorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$ laissant invariant $\mathbb{C}[[x]]$. Ils sont du type suivant : soit $\nu \in \mathbb{C}[[x,t]]/(t^{n-1})$ inversible. Alors il existe un unique automorphisme ψ_ν de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$ tel que $\psi_\nu(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}[[x]]$ et que $\psi_\nu(t) = \nu t$. Les automorphismes de $\mathbb{C}[[x,t]]/(t^n)$ laissant invariant $\mathbb{C}[[x]]$ sont exactement les ψ_ν. Le groupe de ces automorphismes s'identifie donc à $\big(\mathbb{C}[[x,t]]/(t^{n-1})\big)^*$, muni de la loi de groupe

$$\nu' * \nu \ = \ \nu'.\nu(x, \nu' t).$$

On définit de même les faisceaux de groupes $\mathcal{S}_n$ sur C par : pour tout ouvert propre U de C, $\mathcal{S}_n(U)$ est le groupe des automorphismes de $U \times \mathbf{Z}_n$ la projection sur U invariante. On a une suite exacte canonique de faisceaux de groupes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{S}_n \xrightarrow{\rho'_n} \mathcal{S}_{n-1} \longrightarrow 0.$$

L'ensemble $H^1(C, \mathcal{S}_n)$ s'identifie à celui des classes d'isomorphismes des paires (C_n, π). On a un morphisme de faisceaux de groupes naturel

$$s_n : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{G}_n,$$

Mais $\mathcal{S}_n$ n'est pas distingué. Ces inclusions commutent avec les restrictions $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_{n-1}$ et $\mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_{n-1}$.

Soient $g \in H^1(C, \mathcal{S}_n)$ et $\overline{g}$ son image dans $H^1(C, \mathcal{G}_n)$. Soit (C_n, π) la courbe scindée associée à g. On a donc $C_n = C(\overline{g})$. On note C_i la courbe de multiplicité i sous-jacente, pour $2 \leq i < n$ (ce sont bien entendu des courbes scindées, munies de la restriction de π), L le fibré en droites sur C associé, et $\overline{g}_2$ l'image de $\overline{g}$ dans $H^1(C, \mathcal{G}_2)$. Alors on a

$$E(\overline{g}_2) \ \simeq \ L^* \oplus T_C$$

(une courbe double scindée est triviale). Notons que la projection $\pi : C_n \to C$ induit une décomposition canonique en somme directe : le fibré $E(\overline{g}_2)$ s'identifie au *fibré tangent restreint* $\mathbb{T}_1$ (cf. 6 et la proposition 6.1.8), et le morphisme tangent associé à π induit un morphisme $E(\overline{g}_2) \to T_C$. L'inclusion $T_C \to E(\overline{g}_2)$ est définie elle canoniquement pour toute courbe multiple. On montre comme dans les cas des courbes multiples qu'on a un isomorphisme de faisceaux de groupes $(\mathcal{O}_C)^g \simeq L^{n-2}$. Comme dans le cas des courbes multiples on obtient si $n \geq 3$ une application surjective

$$l_g : H^1(L^{n-2}) \longrightarrow H^1(\rho'_n)^{-1}(\rho'_n(g)).$$

La relation avec les faisceaux de groupes $\mathcal{G}_n$ est donnée par le diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{S}_n \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{S}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_C \oplus T_C \arrow[r] & \mathcal{G}_n \arrow[r] & \mathcal{G}_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le faisceau de groupes $(\mathcal{S}_n)^g$ s'identifie au faisceau $\mathcal{A}ut_C^S(C_n)$ des automorphismes de C_n laissant la projection sur C invariante. Le diagramme commutatif précédent induit le suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L^{n-2} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{A}ut_C^S(C_n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{A}ut_C^S(C_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & L^{n-2} \oplus (T_C \otimes L^{n-1}) \arrow[r] & \mathcal{A}ut_C(C_n) \arrow[r] & \mathcal{A}ut_C(C_{n-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1(L^{n-2}) \arrow[r, "l_g"] \arrow[d, hook] & H^1(\rho'_n)^{-1}(\rho'_n(g)) \arrow[d, "H^1(s_n)"] \\
H^1(L^{n-2}) \oplus H^1(T_C \otimes L^{n-1}) \arrow[r, "\lambda_g"] & H^1(\rho_n)^{-1}(\rho_n(\overline{g}))
\end{tikzcd}$$

Je ne sais pas si $H^1(s_n)$ est injective. Ce problème est lié à celui de l'existence de paires (C_n, π) non isomorphes mais donc les courbes multiples associées le sont.

On donne au chapitre 8 la classification des courbes multiples scindées de multiplicité 3.

5.6. Classification des prolongements de courbes multiples dans les cas simples

Soient $n \geq 3$ un entier et C_{n-1} une courbe primitive de multiplicité $n-1$ de courbe réduite associée C et de fibré en droites associé L. Soient $\gamma \in H^1(C, \mathcal{G}_{n-1})$ tel que $C_{n-1} = C(\gamma)$ et $\gamma_2 \in H^1(C, \mathcal{G}_2)$ l'image de γ. On s'intéresse aux prolongements de C_{n-1} en courbes de multiplicité n. Il existe deux cas simples :

- Le cas où $h^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1}) = 0$: il y a dans ce cas un prolongement unique de C_{n-1} en courbe de multiplicité n.
- Le cas où $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ est trivial. Les prolongements sont dans ce cas paramétrés par $H^1(C, E(\gamma_2) \otimes L^{n-1})$.

Soit g le genre de C. Le premier cas se produit par exemple quand $E(\gamma_2)$ est stable et

$$\deg(L) \ \geq \ \frac{3g-3}{n-\frac{3}{2}}.$$

Des cas où le second cas se produit sont donnés dans le corollaire 7.2.3.

6. Faisceaux des dérivations et fibrés tangents restreints

6.1. Définitions et propriétés élémentaires

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n et de courbe réduite associée C. On a une filtration canonique $C = C_1 \subset \cdots \subset C_{n-1} \subset C_n$, où C_i est multiple primitive de multiplicité i. Comme d'habitude on note $\mathcal{O}_i$ le faisceau structural de C_i, et L le fibré en droites $\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_{C_2}$ sur C.

On peut supposer que $C_n = C(g)$, avec $g \in H^1(C, \mathcal{G}_n)$. Si $2 \leq i \leq n$ on notera g_i l'image de g_n dans $H^1(C, \mathcal{G}_i)$. On a donc $C(g_i) = C_i$.

6.1.1. *Fonctions rationnelles* – On peut voir C comme un point du schéma C_n. On appelle *fonction rationnelle* sur C_n un élément de l'anneau $\mathcal{O}_{C_n,C}$. Soient $P \in C$ et $z \in \mathcal{O}_{nP}$ une équation locale de C. Il existe d'après le théorème 5.2.1 un isomorphisme

$$\theta : \mathcal{O}_{nP} \simeq \mathcal{O}_{CP}[[t]]/(t^n)$$

compatible avec la projection $\mathcal{O}_{nP} \to \mathcal{O}_{CP}$. L'anneau des fonctions rationnelles sur C_n s'identifie alors au localisé $\big(\mathcal{O}_{CP}[[t]]/(t^n)\big)_{(t)}$. On peut donc représenter les fonctions rationnelles sur C_n par des sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i$, où pour $1 \leq i \leq n$, α_i est une fonction rationnelle sur C. Mais cette représentation dépend bien sûr de l'isomorphisme θ. On notera $\mathbb{C}(C_n)$ l'anneau des fonctions rationnelles sur C_n.

6.1.2. *Dérivations* – Pour tout ouvert U de C_n on note $\mathcal{D}_n^0(U)$ le $\mathcal{O}_n(U)$-module des dérivations de $\mathcal{O}_n(U)$ dans lui-même. Si U est non vide et distinct de C_n, tout élément de $\mathcal{D}_n^0(U)$ induit de manière évidente une dérivation D de $\mathbb{C}(C_n)$ telle que pour tout $P \in U$ on ait $D(\mathcal{O}_{nP}) \subset \mathcal{O}_{nP}$. Il en découle que pour tout ouvert $V \subset U$ on a une restriction bien définie $\mathcal{D}_n^0(U) \to \mathcal{D}_n^0(V)$. On obtient ainsi un préfaisceau de $\mathcal{O}_n$-modules $\mathcal{D}_n^0$. Le faisceau associé $\mathcal{D}_n$ est cohérent et s'appelle le *faisceau des dérivations* sur C_n. Notons tout ouvert U de C_n distinct de C_n est affine et qu'on a donc $\mathcal{D}_n(U) = \mathcal{D}_n^0(U)$. On note de même $\mathcal{D}_i$ le faisceau des dérivations sur C_i si $2 \leq i < n$.

Le faisceau $\mathcal{D}_n$ est le dual du faisceau des différentielles Ω_{C_n}.

6.1.3. Proposition : *Le faisceau $\mathcal{D}_n$ est quasi localement libre de type* $(0, \ldots, 0, 1, 1)$.

Autrement dit, $\mathcal{D}_n$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_{n-1}$.

Démonstration. Cela du fait que, comme indiqué dans 4.2.2 les dérivations de $\mathbb{C}[[x,t]]$ sont de la forme $D = a\frac{\partial}{\partial x} + tb\frac{\partial}{\partial t}$, avec $a, b \in \mathbb{C}[[x,t]]$. $\square$

6.1.4. *Représentation de $\mathcal{D}_n$ par des 1-cocycles* – Soit (g_{ij}) un 1-cocycle d'un recouvrement ouvert (U_i) de C représentant g. Donc g_{ij} est un automorphisme de $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^n)$ tel que $\rho g_{ij} = \rho$, ρ désignant le morphisme canonique $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^n) \to \mathcal{O}_C(U_{ij})$. On peut supposer que pour tout indice i, $\omega_{C|U_i}$ est trivial. On notera abusivement $\frac{\partial}{\partial x}$ une section de $\omega_{C|U_i}$ engendrant ce fibré. Alors le faisceau $\mathcal{D}_{n,i}$ des dérivations de $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^n)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{n|U_i} \oplus \mathcal{O}_{n-1|U_i}$, engendré par $\frac{\partial}{\partial x}$ et $t\frac{\partial}{\partial t}$. Le faisceau $\mathcal{D}_n$ s'obtient en recollant les $\mathcal{D}_{n,i}$ au moyen des automorphismes de $\mathcal{D}_{n,i|U_{ij}}$

$$\Delta_{ij} : D \longmapsto g_{ij} \circ D \circ g_{ij}^{-1} \ , \tag{16}$$

par le procédé indiqué dans 5.1.3. Supposons que $g_{ij} = \phi_{\mu\nu}$, avec $\mu, \nu \in \mathcal{O}_{n-1}(U_{ij})$. Soient μ', ν' les éléments de $\mathcal{O}_{n-1}(U_{ij})$ tels que $g_{ij}^{-1} = \phi_{\mu'\nu'}$. Alors un calcul simple montre qu'on a

$$\Delta_{ij}(\frac{\partial}{\partial x}) \ = \ \big(1 + g_{ij}(\frac{\partial \mu'}{\partial x})\nu t\big).\frac{\partial}{\partial x} + \nu g_{ij}(\frac{\partial \nu'}{\partial x}).t\frac{\partial}{\partial t}, \tag{17}$$

$$\Delta_{ij}(t\frac{\partial}{\partial t}) \ = \ \big(g_{ij}(\frac{\partial \mu'}{\partial t})\nu^2 t - \mu\big).t\frac{\partial}{\partial x} + \big(g_{ij}(\frac{\partial \nu'}{\partial t})\nu^2 t + 1\big).t\frac{\partial}{\partial t} \quad . \tag{18}$$

On considère maintenant l'isomorphisme de recollement

$$\Theta_{ij} : \mathcal{D}_{n,j|U_{ij}} \longrightarrow g_{ij}^*(\mathcal{D}_{n,i|U_{ij}}),$$

(cf. 5.1.3). Compte tenu de la structure de module de $g_{ij}^*(\mathcal{D}_{n,i|U_{ij}})$, la matrice de (Θ_{ij}) relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x}, t\frac{\partial}{\partial t})$ est obtenue en appliquant g_{ij}^{-1} aux coefficients de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $t\frac{\partial}{\partial t}$ dans les formules précédentes.

6.1.5. *Restriction à C* – On note E_C le fibré vectoriel de rang 2 sur C défini par l'unique extension non triviale $0 \to \mathcal{O}_C \to E_C \to T_C \to 0$.

6.1.6. Proposition : *On a* $\mathcal{D}_{n|C} \simeq E_C$ *si* $\deg(L) \neq 0$ *et* $\mathcal{D}_{n|C} \simeq \mathcal{O}_C \oplus T_C$ *si* $\deg(L) = 0$.

Démonstration. On utilise la description précédente de $\mathcal{D}_n$ en termes de 1-cocycles. On a $g_{ij}(t) = \tau_{ij} t$, avec τ_{ij} inversible, donc $\nu_{ij} = \rho(\tau_{ij}) \in \mathcal{O}_C^*(U_{ij})$, et d'après la proposition 5.2.4, le 1-cocycle (ν_{ij}) représente le fibré en droites L sur C. Un calcul simple (utilisant 4.3.2, (17) et (18)) montre que relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x}, t\frac{\partial}{\partial t})$ de $\mathcal{D}_{n,i|U_{ij}} \otimes \mathcal{O}_{C|U_{ij}}$, l'automorphisme induit par Δ_{ij} est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\nu_{ij}\frac{d}{dx}(\frac{1}{\nu_{ij}}) & 1 \end{pmatrix} .$$

Le 1-cocycle $(\nu_{ij}\frac{d}{dx}(\frac{1}{\nu_{ij}})dx)$ représente un élément λ de $H^1(C, \omega_C) \simeq \mathbb{C}$. D'après [15], Chapter III, ex. 7.4 et [25] on a $\lambda = \deg(L)$. Le résultat découle alors aisément de 2.3.2. $\square$

La *première filtration canonique* de $\mathcal{D}_n$ (cf. [7]) est

$$T_C \otimes \mathcal{I}_C^{n-1} \ \subset \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{I}_C^{n-2} \subset \cdots \subset \ \mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C \subset \ \mathcal{D}_n$$

(c'est-à-dire que $\mathcal{I}_C^i \mathcal{D}_n \simeq \mathcal{D}_{n-i} \otimes \mathcal{I}_C^i$). Les gradués se calculent aisément avec la proposition 6.1.6.

6.1.7. *Fibré tangent restreint* – Soit E le sous-faisceau de $\mathcal{D}_n$ annulateur de $\mathcal{I}_C^{n-1}$. C'est un fibré vectoriel de rang 2 sur C_{n-1}. On pose

$$\mathbb{T}_{n-1} \ = \ E \otimes (\mathcal{I}_C)^*,$$

où le dual de $\mathcal{I}_C$ est pris sur C_{n-1} (le dual de $\mathcal{I}_C$ sur C_n étant isomorphe lui à $\mathcal{O}_{n-1}$). On appelle $\mathbb{T}_{n-1}$ le *fibré tangent restreint de* C_n. Bien que ce soit un fibré sur C_{n-1} il dépend effectivement de C_n, et plus précisément de l'inclusion $C_{n-1} \subset C_n$. La classe d'isomorphisme de C_n seule détermine $\mathbb{T}_{n-1}$ à l'action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ près.

Considérons les 1-cocycles (g_{ij}) représentant g et (Δ_{ij}) représentant $\mathcal{D}_n$ (cf. 6.1.4). Alors le $\mathcal{O}_{n-1|U_{ij}}$-module libre $t\mathcal{O}_{n|U_{ij}} \oplus \mathcal{O}_{n-1|U_{ij}}$ est invariant par Δ_{ij}, et $\mathbb{T}_{n-1}$ est obtenu en recollant ces fibrés au moyen des Δ_{ij}. Sur l'ouvert U_i, $\mathbb{T}_{n-1}$ est engendré par $t\frac{\partial}{\partial x}$ et $t\frac{\partial}{\partial t}$.

6.1.8. Proposition : *On a* $\mathbb{T}_i = \mathbb{T}_{n-1|C_i}$ *pour* $2 \leq i < n-1$, *et* $\mathbb{T}_1 \simeq E(g_2)$.

Démonstration. La première assertion est immédiate. La seconde se démontre en utilisant les formules (17) et (18). Soit $(\psi_{ij}) = (\phi_{\mu_{ij}\nu_{ij}})$ le 1-cocycle à valeurs dans $\mathcal{G}_2$ image de (g_{ij}). Ce 1-cocycle représente g_2. Le fibré $\mathbb{T}_1$ sur C est obtenu en recollant les

$$\mathcal{O}_{C|U_i}.t\frac{\partial}{\partial x} \oplus \mathcal{O}_{C|U_i}.t\frac{\partial}{\partial t}$$

au moyen des matrices $\begin{pmatrix} \nu_{ij} & -\mu_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc par définition de $E(g_2)$ et d'après 2.3.3 on a bien $\mathbb{T}_1 \simeq E(g_2)$ (cf. 4.6.2) . □

La *seconde filtration canonique* de $\mathcal{D}_n$ (cf. [7]) est

$$\mathbb{T}_1 \otimes \mathcal{I}_C^{n-1} \ \subset \cdots \subset \ \mathbb{T}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C^2 \ \subset \ \mathbb{T}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C \ \subset \ \mathcal{D}_n$$

(c'est-à-dire que l'annulateur de $\mathcal{I}_C^i$ dans $\mathcal{D}_n$ est $\mathbb{T}_i \otimes \mathcal{I}^{n-i}$).

On a une filtration mixte

$$\mathbb{T}_C \otimes \mathcal{I}_C^{n-1} \subset \mathbb{T}_1 \otimes \mathcal{I}_C^{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{D}_i \otimes \mathcal{I}_C^{n-i} \subset \mathbb{T}_i \otimes \mathcal{I}_C^{n-i} \subset \cdots \subset \mathbb{T}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C \subset \mathcal{D}_n \ .$$

dont les gradués sont

$$(\mathbb{T}_i \otimes \mathcal{I}_C^{n-i})/(\mathcal{D}_i \otimes \mathcal{I}_C^{n-i}) \simeq L^{n-i-1}, \qquad (\mathcal{D}_i \otimes \mathcal{I}_C^{n-i})/(\mathbb{T}_{i-1} \otimes \mathcal{I}_C^{n-i+1}) \simeq T_C \otimes L^{n-i}.$$

6.1.9. *Cas d'une courbe plongée dans une surface lisse* – On suppose que C_n est plongée dans une surface lisse S. Alors on a

$$\mathbb{T}_{n-1} \;=\; T_{S|C_{n-1}}.$$

6.2. Prolongements du faisceau des dérivations en fibré vectoriel de rang 2 et extensions de la courbe multiple

On utilise les notations de 6.1. On suppose que $n \geq 3$.

On montre dans ce qui suit que sous certaines hypothèses, prolonger C_{n-1} en une courbe de multiplicité n revient essentiellement à étendre $\mathcal{D}_{n-1}$ en un fibré vectoriel de rang 2 sur C_{n-1} (correspondant au fibré $\mathbb{T}_{n-1}$ sur la courbe de multiplicité n extension de C_{n-1}). Dans tout ce qui suit on suppose que le groupe $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ des automorphismes de C_{n-1} laissant C invariante (cf. 7) est trivial.

Le fibré vectoriel $\mathbb{T}_{n-1}$ de rang 2 sur C_{n-1} n'est défini qu'une fois choisie l'extension $C(g) = C_n$ de C_{n-1}. C'est un prolongement du faisceau des dérivations de C_{n-1}. On est donc dans la situation de 2.2 : on a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{T}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{D}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & T_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{T}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C \arrow[r] & \mathbb{T}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{T}_1 = E(g_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & L^* \arrow[r, equal] \arrow[d] & L^* \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les prolongements possibles de $\mathcal{D}_{n-1}$ sont décrits par le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}(T_C, \mathbb{T}_1 \otimes L^{n-2}) \arrow[d] & & & \\
 & H^1(\mathbb{T}_1 \otimes L^{n-1}) \arrow[d, "\theta"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_1 \otimes L^{n-2}) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{End}(\mathbb{T}_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(T_C, \mathbb{T}_1 \otimes L^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(T_C, \mathbb{T}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(T_C, \mathbb{T}_1) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(T_C, \mathbb{T}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C)$ correspondant à $\mathbb{T}_{n-1}$. Alors d'après 2.2.4 les éléments de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{n-1}}(T_C, \mathbb{T}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C)$ correspondant aux prolongements de $\mathcal{D}_{n-1}$ sont de la forme $\sigma + i \circ \theta(u)$, avec $u \in H^1(\mathbb{T}_1 \otimes L^{n-1})$. On note $\mathbb{T}(u)$ le fibré vectoriel prolongement de $\mathcal{D}_{n-1}$ associé à $\sigma + i \circ \theta(u)$.

D'après 4.6.7 les courbes de multiplicité n extensions de C_{n-1} sont associées aux éléments de $H^1(C, \mathcal{G}_{n-1})$ de la forme $\lambda_g(u)$, avec $u \in H^1(C, \mathbb{T}_1 \otimes L^{n-1})$. On note $\mathbb{T}_{n-1}(u)$ le fibré $\mathbb{T}_{n-1}$ correspondant à la courbe $C(\lambda_g(u))$.

6.2.1. Théorème : *On a* $\mathbb{T}(-(n-1)u) \simeq \mathbb{T}_{n-1}(u)$ *pour tout* $u \in H^1(C, \mathbb{T}_1 \otimes L^{n-1})$.

Démonstration. On pose $g_{ij} = \phi_{\mu_{ij},\nu_{ij}}$, avec $\mu_{ij}, \nu_{ij} \in \mathcal{O}_C(U_{ij})/(t^{n-1})$. Soit $\overline{g} = \lambda_g(u)$. Alors $\overline{g}$ est représenté par un cocycle de la forme $(\overline{g}_{ij})$, avec

$$\overline{g}_{ij} \;=\; \lambda_{\theta_{ij},\beta_{ij}} \circ g_{ij},$$

avec $\theta_{ij}, \beta_{ij} \in \mathcal{O}_C(U_{ij})$. La famille $(\theta_{ij}, \beta_{ij})$ représente u au sens de 2.3.3 et 4.6.6. Mais au sens de 2.2.7, u est représenté par $(\frac{\theta_{ij}}{(\nu_{ij})_0^{n-1}}, \frac{\beta_{ij}}{(\nu_{ij})_0^{n-1}})$.

Un calcul simple utilisant 4.1.2 montre que $\overline{g}_{ij} = \phi_{\overline{\mu}_{ij},\overline{\nu}_{ij}}$, avec

$$\overline{\mu}_{ij} = \mu_{ij} + \delta_{ij} t^{n-2}, \qquad \overline{\nu}_{ij} = \nu_{ij} + \epsilon_{ij} t^{n-2},$$

où

$$\delta_{ij} = (\mu_{ij})_0 \beta_{ij} + \theta_{ij}, \qquad \epsilon_{ij} = (\nu_{ij})_0 \beta_{ij}.$$

On pose

$$g_{ij}^{-1} = \phi_{\mu'_{ij},\nu'_{ij}}, \qquad \overline{g}_{ij}^{-1} = \phi_{\overline{\mu}'_{ij},\overline{\nu}'_{ij}}.$$

Alors, en utilisant (8) on voit que

$$\overline{\mu}'_{ij} = \mu'_{ij} + \delta'_{ij} t^{n-2}, \qquad \overline{\nu}'_{ij} = \nu'_{ij} + \epsilon'_{ij} t^{n-2},$$

avec

$$\delta'_{ij} = \frac{1}{(\nu_{ij})_0^n}((\mu_{ij})_0\epsilon_{ij} - (\nu_{ij})_0\delta_{ij}) = -\frac{1}{(\nu_{ij})_0^{n-1}}\theta_{ij},$$
$$\epsilon'_{ij} = -\frac{1}{(\nu_{ij})_0^n}\epsilon_{ij} = -\frac{1}{(\nu_{ij})_0^{n-1}}\beta_{ij}.$$

Compte tenu de 5.1.3, les formules (17), (18) montrent que $\mathbb{T}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C$ est défini par les matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\nu'_{ij}}(1 + \frac{\partial \mu'_{ij}}{\partial x}t) & \frac{1}{\nu'_{ij}}(\mu'_{ij} + \frac{\partial \mu'_{ij}}{\partial t}t) \\ \frac{1}{\nu'_{ij}}\frac{\partial \nu'_{ij}}{\partial x}t & 1 + \frac{1}{\nu'_{ij}}\frac{\partial \nu'_{ij}}{\partial t}t \end{pmatrix} .$$

Il en découle que $\mathbb{T}_{n-1} = \mathbb{T}_{n-1}(0)$ est défini par les matrices

$$\begin{pmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \mu'_{ij}}{\partial x}t & \mu'_{ij} + \frac{\partial \mu'_{ij}}{\partial t}t \\ \frac{\partial \nu'_{ij}}{\partial x}t & \nu'_{ij} + \frac{\partial \nu'_{ij}}{\partial t}t \end{pmatrix} .$$

De même, $\mathbb{T}_{n-1}(u)$ est défini par les matrices

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_{ij} & \overline{B}_{ij} \\ \overline{C}_{ij} & \overline{D}_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial \overline{\mu}'_{ij}}{\partial x}t & \overline{\mu}'_{ij} + \frac{\partial \overline{\mu}'_{ij}}{\partial t}t \\ \frac{\partial \overline{\nu}'_{ij}}{\partial x}t & \overline{\nu}'_{ij} + \frac{\partial \overline{\nu}'_{ij}}{\partial t}t \end{pmatrix} .$$

On déduit des calculs précédents que $\overline{A}_{ij} = A_{ij}$, $\overline{C}_{ij} = C_{ij}$, et

$$\overline{B}_{ij} = B_{ij} - (n-1)\frac{1}{(\nu_{ij})_0^{n-1}}\theta_{ij}t^{n-2}, \qquad \overline{D}_{ij} = D_{ij} - (n-1)\frac{1}{(\nu_{ij})_0^{n-1}}\beta_{ij}t^{n-2},$$

d'où le résultat d'après 2.2.7. □

On en déduit le

6.2.2. Corollaire : *On suppose que $E(g_2) = \mathbb{T}_1$ est stable, que $\deg(L) \leq 0$ et $L^k \not\simeq \mathcal{O}_C$ pour $1 \leq k < 2n$. Alors deux prolongements de C_{n-1} en courbes de multiplicité n sont isomorphes si et seulement si les prolongements correspondants $\mathbb{T}_{n-1}$ de $\mathcal{D}_{n-1}$ en faisceau localement libre de rang 2 sur C_{n-1} le sont.*

Démonstration. D'après le corollaire 7.2.3 les conditions précédentes entrainent la trivialité de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$. D'autre part la stabilité de $E(g_2)$ implique que C est de genre positif et que $h^0(\omega_C \otimes E(g_2) \otimes L^{n-2}) = 0$. On a donc $\mathrm{coker}(\theta) = H^1(C, \mathbb{T}_1 \otimes L^{n-2})$ (cf. 2.2.4). Le résultat découle donc du théorème 6.2.1. □

7. Automorphismes des courbes multiples primitives

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n et de courbe réduite associée C projective. On supposera que $C_n = C(\gamma)$, avec $\gamma \in H^1(C, \mathcal{G}_n)$. Si $2 \leq i \leq n$ on notera γ_i l'image de γ dans $H^1(C, \mathcal{G}_i)$. On a donc $C(\gamma_i) = C_i$. On supposera que γ est représenté par un 1-cocycle (g_{ij}) d'un recouvrement ouvert (U_i) tel que pour tout i, $\omega_{C|U_i}$ soit trivial.

Soient $\mathcal{A}ut_C(C_n)$ le faisceau de groupes des automorphismes de C_n laissant C invariante, et $\mathrm{Aut}_C(C_n)$ le groupe de ses sections globales. On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{A}ut_C(C_n) \simeq \mathcal{G}_n^{\gamma}.$$

On a donc d'après la proposition 4.6.6, si $n \geq 3$, une suite exacte de faisceaux de groupes

$$0 \longrightarrow E(\gamma_2) \otimes L^{n-1} \longrightarrow \mathcal{A}ut_C(C_n) \longrightarrow \mathcal{A}ut_C(C_{n-1}) \longrightarrow 0. \tag{19}$$

7.1. Automorphismes des courbes doubles

7.1.1. Proposition : *On suppose que C_2 est non triviale. Alors*

1 - Les automorphismes de C_2 induisant l'identité sur C sont de la forme $\chi_D = I_{C_2} + D$, où D est une section globale de $T_C \otimes L$.

2 - On a un isomorphisme canonique de groupes $\mathrm{Aut}_C(C_2) \simeq H^0(C, T_C \otimes L)$.

Démonstration. Les automorphismes de C_2 sont de la forme $\chi_D = I_{C_2} + D$, où D est une dérivation à valeurs dans $\mathcal{I}_C$, c'est-à-dire un élément de $H^0(\mathbb{T}_1 \otimes \mathcal{I}_C)$. D'après la suite exacte (15) et le fait que cette suite est non scindée, C_2 étant non triviale, on a

$$H^0(\mathbb{T}_1 \otimes \mathcal{I}_C) \simeq H^0(T_C \otimes L).$$

On obtient un isomorphisme de groupes dans 2- à cause de l'égalité $\chi_D \circ \chi_{D'} = \chi_{D+D'}$. □

Si C_2 est triviale, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Aut}(C_2) \simeq H^0(T_C \otimes L) \times \mathbb{C}^*,$$

la loi de groupe étant

$$(\mu, \lambda).(\mu', \lambda') = (\lambda\mu' + \mu, \lambda\lambda').$$

Le sous-groupe $H^0(T_C \otimes L)$ est le même que pour une courbe non triviale. Pour interprèter le groupe $\mathbb{C}^*$ on utilise la construction de C_2 (cf. 5.2.5). L'automorphisme de C_2 correspondant à $\lambda \in \mathbb{C}^*$ provient de l'homothétie du fibré L^* de rapport λ.

7.2. Automorphismes des courbes de multiplicité n

7.2.1. *Le morphisme* $\mathrm{Aut}_C(C_n) \to \mathbb{C}^*$ – (Cf. 4.5.3). Comme dans le cas $n = 2$ (cf. 4.6.2) on a $(\mathcal{O}_C^*)^\gamma = \mathcal{O}_C^*$, donc le morphisme canonique $\xi_n : \mathcal{G}_n \to \mathcal{O}_C^*$ induit un morphisme surjectif $\xi_n^\gamma : (\mathcal{G}_n)^\gamma \to \mathcal{O}_C^*$, d'où

$$H^0(\xi_n^\gamma) : \mathrm{Aut}_C(C_n) \longrightarrow \mathbb{C}^*,$$

qu'on peut aussi décrire de la façon suivante : soit $\Phi \in \mathrm{Aut}_C(C_n)$, défini par une famille (ϕ_i), où ϕ_i est un automorphisme de $\mathcal{O}_C(U_i)[t]/(t^n)$, telle que $\phi_j g_{ij} = g_{ij}\phi_i$ sur U_{ij} pour tous i, j, et supposons que $\phi_i = \phi_{\mu_i,\nu_i}$. Alors on a pour tout i

$$H^0(\xi_n^\gamma)(\Phi) \;=\; (\nu_i)_0.$$

Le rapport avec 4.2, 4.3.1 est le suivant : pour tout point fermé P de C_n on a

$$\xi_{n,P}^\gamma \;=\; \xi_{\mathcal{O}_{n,P}}^n.$$

Si C_n est triviale, on a une inclusion naturelle $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{Aut}_C(C_n)$ (cela découle de la description des courbes triviales, cf. 5.2.5), et on a évidemment $H^0(\xi_n^\gamma))(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

7.2.2. Théorème : *Si* $\mathrm{im}(H^0(\xi_n^\gamma))$ *contient un* λ *tel que* $\lambda^i \neq 1$ *pour* $1 \leq i \leq n-1$, *alors* C_n *est triviale.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 2$ est règlé par la proposition 7.1.1. Supposons que $n \geq 3$ et que le résultat soit vrai pour $n-1$. Soient $\lambda \in \mathrm{im}(H^0(\xi_n^\gamma))$ tel que $\lambda^i \neq 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et $\Phi \in \mathrm{Aut}_C(C_n)$ tel que $H^0(\xi_n^\gamma)(\Phi) = \lambda$. En considérant l'automorphisme de C_{n-1} induit par Φ on voit que C_{n-1} est triviale. On peut donc mettre les g_{ij} sous la forme

$$g_{ij} \;=\; \lambda_{\theta_{ij}\beta_{ij}} \circ \phi_{0,\nu_{ij}} \;=\; \phi_{\theta_{ij}t^{n-2},\nu_{ij}(1+\beta_{ij}t^{n-2})}\ ,$$

où (ν_{ij}) représente L et $(\theta_{ij}, \beta_{ij})$ un élément ω de $H^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1})$ (puisque C_2 est triviale on a $E(\gamma_2) = T_C \oplus L^*$). Il faut montrer que $\omega = 0$. On peut supposer que les fonctions ν_{ij} sont non constantes. Compte tenu de 4.6.6 on a $\theta_{ij} = -\nu_{ij}^{n-1}\theta_{ji}$ et $\beta_{ij} = -\nu_{ij}^{n-2}\beta_{ji}$.

L'automorphisme Φ est défini par une famille (ϕ_i), où ϕ_i est un automorphisme de $\mathcal{O}_C(U_i)[t]/(t^n)$, telle que

$$\phi_i g_{ij} \;=\; g_{ij}\phi_j \tag{20}$$

pour tous i, j. Posons $\phi = \phi_{\mu_i,\lambda}$. Alors d'après la proposition 4.1.2, (20) se traduit par les deux relations suivantes dans $\mathcal{O}_C(U_{ij})[t]/(t^{n-1})$:

$$\mu_i + \lambda^{n-1}\theta_{ij}t^{n-2} \;=\; \nu_{ij}\big(\sum_{k=0}^{n-2}(\mu_j)_k\nu_{ij}^k t^k\big) + (\theta_{ij} + \nu_{ij}\beta_{ij}(\mu_i)_0)t^{n-2}, \tag{21}$$

$$\lambda\phi_{\mu_i,\lambda}(\nu_{ij}) + \lambda^{n-1}\nu_{ij}\beta_{ij}t^{n-2} \;=\; \lambda\nu_{ij} + \lambda\nu_{ij}\beta_{ij}t^{n-2}. \tag{22}$$

De (22) on déduit

$$\phi_{\mu_i,\lambda}(\nu_{ij}) \;=\; \nu_{ij} + \beta_{ij}\nu_{ij}(1-\lambda^{n-2})t^{n-2}. \tag{23}$$

En utilisant l'égalité

$$\phi_{\mu_i,\lambda}(\nu_{ij}) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\mu_i t)^k \frac{d^k \nu_{ij}}{dx}$$

et le fait que ν_{ij} n'est pas constant on voit que μ_i est de la forme

$$\mu_i \;=\; a_i t^{n-3} + b_i t^{n-2},$$

avec $a_i, b_i \in \mathcal{O}_C(U_i)$, et (23) devient

$$\beta_{ij} \;=\; \frac{1}{(1-\lambda^{n-2})\nu_{ij}} \frac{d\nu_{ij}}{dx} a_i \ . \tag{24}$$

En écrivant cette relation avec (j,i) au lieu de (i,j) et en utilisant les égalités $\beta_{ij} = -\nu_{ij}^{n-2}\beta_{ji}$ et $\nu_{ji} = 1/\nu_{ij}$, on obtient $\nu_{ij}^{n-2} = a_i/a_j$, d'où en dérivant

$$(n-2)\nu_{ij}^{n-3}\frac{d\nu_{ij}}{dx} \;=\; \frac{1}{a_j^2}(a_i \frac{da_j}{dx} - a_j \frac{da_i}{dx}) \ .$$

Cette relation, utilisée dans (24) donne

$$\beta_{ij} \;=\; \frac{1}{(n-2)(1-\lambda^{n-2})}(\nu_{ij}^{n-2}\frac{1}{a_j}\frac{da_j}{dx} - \frac{1}{a_i}\frac{da_i}{dx}) \ ,$$

donc (β_{ij}) représente 0 dans $H^1(L^{n-2})$, et on peut supposer que $\beta_{ij} = 0$ pour tous i, j. Il faut bien entendu vérifier qu'on peut obtenir une expression indépendante du choix de la base $\frac{\partial}{\partial x}$ de $T_{C|U_i \cup U_j}$. Cela se voit aisément en utilisant la proposition 4.2.1.

La relation (21) s'écrit, en utilisant ce qui précède,

$$\theta_{ij} \;=\; \frac{1}{1-\lambda^{n-1}}(b_i - \nu_{ij}^{n-1} b_j) \ ,$$

donc (θ_{ij}) représente 0 dans $H^1(T_C \otimes L^{n-1})$, et on a bien $\omega = 0$. □

On va en déduire que $\mathrm{Aut}_C(C_n)$ est particulièrement simple, voire trivial, dans un certain nombre de cas. Rappelons qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_C \longrightarrow E(\gamma_2) \longrightarrow L^* \longrightarrow 0 \tag{25}$$

(cf. 4.6.3).

7.2.3. Corollaire : *Soient g le genre de C et $d = \deg(L)$. On suppose que les conditions suivantes sont réalisées :*

- *Si $g \geq 1$: $d \leq 0$, et en cas d'égalité $L^k \not\simeq \mathcal{O}_C$ pour $1 \leq k \leq n-1$.*
- *Si $g = 0$: $d < -2$.*

Alors :

1 - Si la suite exacte (25) n'est pas scindée, alors $\mathrm{Aut}_C(C_n)$ *est trivial.*

2 - Si la suite exacte (25) est scindée et C_n *non triviale, alors* $\mathrm{Aut}_C(C_n)$ *est fini, et si* C_n *est triviale, alors on a* $\mathrm{Aut}_C(C_n) \simeq \mathbb{C}^*$.

Démonstration. Découle de la proposition 7.1.1 et des suites exactes (19). □

7.2.4. *Le noyau de* $H^0(\xi_n^\gamma)$ – On notera $\mathrm{Aut}_C^0(C_n)$ le noyau de $H^0(\xi_n^\gamma)$. Soit $D \in H^0(C_{n-1}, \mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C)$. Pour tout ouvert U de C_n, on en déduit une dérivation D de $\mathcal{O}_n(U)$ telle que $\mathrm{im}(D) \subset \mathcal{I}_C$ et $D(\mathcal{I}_{C|U})) \subset \mathcal{I}_{C|U}^2$, et un élément χ_D de $\mathrm{Aut}_C^0(C_n)$ défini par : pour tout ouvert U de C_n et tout $\lambda \in \mathcal{O}_n(U)$,

$$\chi_D(\lambda) \;=\; \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} D^k(\lambda).$$

Cette notation est cohérente avec elle de 7.1.1. Du théorème 4.2.5 on déduit aisément le

7.2.5. Théorème : *Pour tout* $\phi \in \mathrm{Aut}_C^0(C_n)$ *il existe un unique* $D \in H^0(C_{n-1}, \mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C)$ *tel que* $\phi = \chi_D$.

De la suite exacte (19) on déduit la suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(E(g_2) \otimes L^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_C(C_n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_C(C_{n-1}).$$

Le sous-groupe $H^0(E(g_2) \otimes L^{n-1})$ est contenu dans $\mathrm{Aut}_C^0(C_n)$, on a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(E(g_2) \otimes L^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_C^0(C_n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_C^0(C_{n-1}).$$

Cette suite exacte est la même que la suivante

$$0 \longrightarrow H^0(E(g_2) \otimes L^{n-1}) \longrightarrow H^0(C_{n-1}, \mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C) \longrightarrow H^0(C_{n-2}, \mathcal{D}_{n-2} \otimes \mathcal{I}_C)$$

déduite de

$$0 \longrightarrow E(g_2) \otimes L^{n-1} \longrightarrow \mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C \longrightarrow (\mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C)_{|C_{n-1}} \longrightarrow 0.$$

Mais bien entendu la structure de groupe sur $H^0(C_{n-1}, \mathcal{D}_{n-1} \otimes \mathcal{I}_C)$ déduite de celle de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ n'est pas l'addition.

7.3. L'action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$

On suppose que $n \geq 3$. On décrit ici l'action de $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$ sur $H^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1})$. Rappelons que si $\mathcal{C}_n(C_{n-1})$ désigne l'ensemble des courbes primitives de multiplicité n qui sont des prolongements de C_{n-1}, alors on a une application surjective

$$\lambda_\gamma : H^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{C}_n(C_{n-1})$$

dont les fibres sont précisément les orbites de cette action (cf. 3.2, 5.2.7).

Soit $\psi \in \mathrm{Aut}_C(C_{n-1})$. On suppose que pour tout i, ψ_{U_i} se relève en un automorphisme $\overline{\psi}_i$ de $C_{n|U_i}$. Soit ψ_i l'automorphisme de $U_i \times \mathbf{Z}_n$ défini par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_{n|U_i} & \xrightarrow{\simeq} & U_i \times \mathbf{Z}_n \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\psi}_i} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_i} \\ C_{n|U_i} & \xrightarrow{\simeq} & U_i \times \mathbf{Z}_n \end{array}$$

Il en découle que $\psi_i \circ g_{ij} \circ \psi_j^{-1} \circ g_{ij}^{-1}$ est trivial sur $C_{n-1|U_i}$ pour tous i, j, et s'identifie donc à une section de $\big(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1}\big)_{|U_i}$. On posera donc

$$\psi_i \circ g_{ij} \circ \psi_j^{-1} \circ g_{ij}^{-1} \ = \ \lambda_{v_{ij} w_{ij}} \ .$$

Soit $\delta = H^0(\xi_{n-1}^\gamma)(\psi) \in \mathbb{C}^*$. Alors ψ_i se met sous la forme $\psi_i = \phi_{\mu_i \delta}$.

7.3.1. Proposition : *Soit $u \in H^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1})$, représenté par un cocycle $(\lambda_{\theta_{ij}\beta_{ij}})$ (cf. 4.5.1, 4.6.4). Alors $\psi.u$ est représenté par le cocycle $(\lambda_{\theta'_{ij}\beta'_{ij}})$, avec*

$$\theta'_{ij} \ = \ \delta^{n-1}\theta_{ij} - (\mu_i)_0.\delta^{n-2}\beta_{ij} + v_{ij}, \qquad \beta'_{ij} \ = \ \delta^{n-2}\beta_{ij} + w_{ij} \ .$$

Démonstration. D'après 3.2, $\psi.u$ est représenté par le cocycle

$$\big(\psi_i \circ \lambda_{\theta_{ij}\beta_{ij}} \circ g_{ij} \circ \psi_j^{-1} \circ g_{ij}^{-1}\big) \ = \ \big(\psi_i \circ \lambda_{\theta_{ij}\beta_{ij}} \circ \psi_i^{-1} \circ \lambda_{v_{ij}w_{ij}}\big) \ ,$$

et le résultat découle aisément du lemme 4.6.5. □

7.3.2. *Cas où C_{n-1} est triviale* – Soient g le genre de C et $d = \deg(L)$. On suppose que C_{n-1} est triviale et que les conditions suivantes sont réalisées :

- Si $g \geq 1$: $d < 0$, ou $d = 0$ et $L^k \neq \mathcal{O}_C$ pour $1 \leq k \leq n-1$.
- Si $g = 0$: $d < -2$.

On a dans ce cas $E(\gamma_2) = T_C \oplus L^*$, donc

$$H^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1}) \ \simeq \ H^1(T_C \otimes L^{n-1}) \oplus H^1(L^{n-2}) \ .$$

D'après le corollaire 7.2.3 on a $\mathrm{Aut}_C(C_{n-1}) = \mathbb{C}^*$, et son action sur $H^1(E(\gamma_2) \otimes L^{n-1})$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times \big(H^1(T_C \otimes L^{n-1}) \oplus H^1(L^{n-2})\big) & \longrightarrow & H^1(T_C \otimes L^{n-1}) \oplus H^1(L^{n-2}) \\ (\delta, (\theta, \beta)) & \longmapsto & (\delta^{n-1}\theta, \delta^{n-2}\beta) \end{array}$$

Il en découle qu'en général $\mathcal{C}_n(C_{n-1})$ est constitué de la courbe triviale de multiplicité n extension de C_{n-1} et des courbes non triviales, qui s'identifient aux points fermés d'un *espace projectif tordu* (appelé aussi *espace projectif anisotrope*, cf. [6], [3]) de dimension $4g-5-(2n-3)d$. Le lieu singulier de cet espace projectif tordu est constitué de deux espaces projectifs de dimensions respectives $g-2-(n-2)d$ et $3g-4-(n-1)d$. Le premier espace projectif correspond aux prolongements de C_{n-1} qui sont des courbes *scindées* non triviales (cf. 5.5). Le second correspond aux courbes non triviales C_n telles que $\mathcal{I}_C$ soit isomorphe à $\pi^*(L)$, π désignant la projection $C_{n-1} \to C$.

8. Courbes primitives de multiplicité 3

8.1. Les cas simples

Les courbes de multiplicité 2 sont bien connues (cf. [2] ou 5.2.6). Soit C une courbe projective lisse irréductible de genre g. Rappelons que les courbes doubles non scindées de courbe réduite associé C et telles que le faisceau d'idéaux de C soit $L \in \mathrm{Pic}(C)$ sont paramétrées par $\mathbb{P}(H^1(T_C \otimes L))$. Il existe une seule courbe scindée de courbe réduite associé C et telle que le faisceau d'idéaux de C soit L, c'est la courbe triviale décrite en 5.2.5.

Soit C_2 une courbe double de courbe réduite associée C et de fibré en droites sur C associé L de degré d. On s'intéresse aux courbes triples (c'est-à-dire de multiplicité 3) qui sont des prolongements de C_2. Soit $\mathcal{C}_3(C_2)$ l'ensemble de ces courbes. Soit $\gamma \in H^1(C, \mathcal{G}_2)$ l'élément correspondant à C_2. D'après 5.2.7, il existe une surjection

$$H^1(E(\gamma) \otimes L^2) \longrightarrow \mathcal{C}_3(C_2) \tag{26}$$

qui dépend du choix d'un élément de $\mathcal{C}_3(C_2)$, et dont les fibres sont les orbites de l'action de $\mathrm{Aut}_C(C_2)$.

8.1.1. Proposition : *S'il existe plusieurs prolongements possibles de C_2 en courbes de multiplicité 3, alors on a $d < 2g-2$, ou $d = 2g-2$ et $L \simeq \omega_C$.*

Démonstration. S'il existe plusieurs prolongements possibles de C_2 on doit avoir $h^1(E(\gamma) \otimes L^2) > 0$ d'après la description précédente de $\mathcal{C}_3(C_2)$. De la suite exacte $0 \to T_C \to E(\gamma) \to L^* \to 0$ on déduit la suivante

$$H^1(T_C \otimes L^2) \longrightarrow H^1(E(\gamma) \otimes L^2) \longrightarrow H^1(L) \longrightarrow 0.$$

Donc si $h^1(E(\gamma) \otimes L^2) > 0$, on a $h^1(T_C \otimes L^2) > 0$ ou $h^1(L) > 0$. Le résultat découle du fait que si $D \in \mathrm{Pic}(C)$ est tel que $h^1(D) > 0$, alors on a $\deg(L) < 2g-2$ ou $\deg(L) = 2g-2$ et $L = \omega_C$. $\square$

On suppose dans toute la suite que $d < 2g-2$, ou $d = 2g-2$ et $L \simeq \omega_C$. Les cas les plus simples sont ceux pour lesquels $\mathrm{Aut}_C(C_2)$ est trivial. Dans ce cas l'application (26) est une bijection et $\mathcal{C}_3(C_2)$ s'identifie à $H^1(E(\gamma)\otimes L^2)$ de manière non canonique (à une translation près d'après 3.2.4). Le groupe $\mathrm{Aut}_C(C_2)$ a été calculé en 7. On en déduit aisément que les seuls cas qui restent où il est non trivial sont les suivants :

- $d < 2g-2$ et C_2 est triviale.
- $L = \omega_C$.

8.2. Les cas où $d < 2g-2$ et où C_2 est triviale

On a alors $\mathrm{Aut}_C(C_2) = \mathbb{C}^*$ et $H^1(E(\gamma)\otimes L^2) = H^1(T_C\otimes L^2)\oplus H^1(L)$. Soit C_3^0 la courbe triviale de multiplicité 3 prolongement de C_2.

Soit (ν_{ij}) un cocycle représentant L, relativement à un recouvrement (U_i) de C tel que chaque $\omega_{C|U_i}$ soit trivial. Alors C_3^0 est représentée par le 1-cocycle $(\phi_{0,\nu_{ij}})$. Si $\tau\in\mathbb{C}^*$, l'automorphisme correspondant ψ_τ de C_2 s'étend en un automorphisme de C_3^0 représenté par la famille $(\phi_{0,\tau})$ d'automorphismes des $U_i\times\mathbf{Z}_n$.

Soit $\sigma\in H^1(E(\gamma)\otimes L^2)$, représenté par une famille $(\lambda_{\theta_{ij}\beta_{ij}})$ (cf. 4.5.1, 4.6.6). Alors d'après la proposition 7.3.1, $\psi_\tau.\sigma$ est représenté par la famille

$$(\phi_{0,\tau}\circ\lambda_{\theta_{ij}\beta_{ij}}\circ\phi_{0,\nu_{ij}}\circ\phi_{0,1/\tau}\circ\phi_{0,1/\nu_{ij}}) \;=\; (\lambda_{\tau^2\theta_{ij},\tau\beta_{ij}})\ .$$

On en déduit l'action de $\mathrm{Aut}_C(C_2)$ sur $H^1(E(\gamma)\otimes L^2)$:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^*\times(H^1(T_C\otimes L^2)\oplus H^1(L)) & \longrightarrow & H^1(T_C\otimes L^2)\oplus H^1(L)\\ (\tau,(\theta,\beta)) & \longmapsto & (\tau^2\theta,\tau\beta)\end{array}$$

Comme attendu, $\mathbb{C}^*$ laisse 0 invariant, ce qui correspond au fait que les automorphismes de C_2 se prolongent en automorphismes de C_3^0.

Les prolongements de C_2 sont donc d'une part la courbe triviale C_3^0 et d'autre part les prolongements non triviaux, paramétrés par le quotient de $(H^1(T_C\otimes L^2)\oplus H^1(L))\backslash\{0\}$ par l'action précédente de $\mathbb{C}^*$. Si $h^1(E(\gamma)\otimes L^2)\neq 0$, ce quotient est un *espace projectif tordu*. Les courbes scindées forment un sous-espace projectif isomorphe à $P(H^1(L))$, si $h^1(L)\neq 0$.

8.3. Le cas où $L = \omega_C$

8.3.1. *Le cas où C_2 est triviale* – On a alors $H^1(E(\gamma)\otimes L^2) = H^1(\omega_C)\oplus H^1(\omega_C)\simeq\mathbb{C}^2$, et $H^0(T_C\otimes L)=\mathbb{C}$. Comme précédemment C_3^0 est représentée par le 1-cocycle $(\phi_{0,\nu_{ij}})$. Soit $D_i = \frac{d}{dx_i}$ une base de $T_{C|U_i}$. Sur U_{ij} on a $D_j = \frac{1}{\nu_{ij}}D_i$ (car $L=\omega_C$). Soit $\mu\in H^0(T_C\otimes L)$ et

ψ_μ l'automorphisme associé de C_2 (cf. 7.1). Soit $\psi_{\mu,1}^{D_i}$ l'automorphisme de $U_i \times \mathbf{Z}_2$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_{2|U_i} & \xrightarrow{\simeq} & U_i \times \mathbf{Z}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mu,1}^{D_i}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_\mu} \\ C_{2|U_i} & \xrightarrow{\simeq} & U_i \times \mathbf{Z}_2 \end{array}$$

(cf. 4.2). On considère maintenant les automorphismes aussi notés $\psi_{\mu,1}^{D_i}$ de $U_i \times \mathbf{Z}_3$ extensions des précédents. Soit

$$\lambda_{v_{ij}w_{ij}} \;=\; \psi_{\mu,1}^{D_i} \circ \phi_{0,\nu_{ij}} \circ (\psi_{\mu,1}^{D_j})^{-1} \circ \phi_{0,1/\nu_{ij}} \ .$$

8.3.2. Lemme : *On a*

$$v_{ij} \;=\; \frac{D_i(\nu_{ij})}{\nu_{ij}}\mu \ , \qquad w_{ij} \;=\; -\frac{1}{2}\frac{D_i(\nu_{ij})}{\nu_{ij}}\mu^2 \ .$$

Démonstration. Cela découle du calcul simple

$$\lambda_{v_{ij}w_{ij}}(x_j) = x_j - \frac{1}{2}\frac{D_i(\nu_{ij})}{\nu_{ij}}\mu^2 t^2 \ , \qquad \lambda_{v_{ij}w_{ij}}(t) = t + \frac{D_i(\nu_{ij})}{\nu_{ij}}\mu t^2 \ .$$

□

On en déduit avec la proposition 7.3.1 l'action de $\mathrm{Aut}_C(C_2)$ sur $H^1(E(\gamma) \otimes L^2)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (\delta, (\theta, \beta)) & \longmapsto & (\theta - \beta\delta - (g-1)\delta^2, \beta + (2g-2)\delta) \end{array}$$

Les facteurs $g-1$ et $2g-2$ sont causés par le cocycle $(\frac{D_i(\nu_{ij})}{\nu_{ij}} dx_i)$ (cf. 6.1.6). Il faut aussi considérer l'action du sous-groupe $\mathbb{C}^*$ de $\mathrm{Aut}_C(C_2)$, qui a été calculée en 8.2. Il en découle aisément qu'il n'y a que deux $\mathrm{Aut}_C(C_2)$-orbites : celle de 0 correspond à la courbe triviale prolongement de C_2 et l'autre est un prolongement non trivial qui est une courbe scindée.

8.3.3. *Le cas où C_2 n'est pas triviale* – Ici on a $H^1(E(\gamma) \otimes L^2) \simeq \mathbb{C}$, et l'action de $H^0(T_C \otimes L) = \mathbb{C}$ est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\delta, \beta) & \longmapsto & \beta + (2g-2)\delta \end{array}$$

On en déduit que si $g \neq 1$ il existe un unique prolongement de multiplicité 3 de C_2, alors que si $g = 1$ il en existe une famille paramétrée par $\mathbb{C}$.

8.4. Courbes scindées de multiplicité 3

Elles sont entièrement classifiées d'après ce qui précède, mais on peut en donner une autre description. Soit $L \in \mathrm{Pic}(C)$. On considère une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

sur C correspondant à $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(L^*, \mathcal{O}_C) = H^1(L)$. De l'inclusion $\mathcal{O}_C \subset E$ on déduit un plongement $C \subset \mathbb{P}(E)$. On note $C_3(\sigma)$ la courbe de multiplicité 3 associée, qui est scindée et dont le fibré en droites associé est L.

Soit C_2^0 la courbe triviale de multiplicité 2, de courbe réduite C et de fibré en droites associé L. Soit $\mathcal{C}^S(C_2^0)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de prolongements de C_2^0 en courbe scindée de multiplicité 3. D'après 5.5 on a une application surjective canonique

$$l_g : H^1(L) \longrightarrow \mathcal{C}^S(C_2^0).$$

8.4.1. Proposition : *1 - Les fibres de l_g sont les orbites de l'action de $\mathbb{C}^*$ par multiplication.*
2 - Pour tout $\sigma \in H^1(L)$, on a $l_g(\sigma) = C_3(\sigma)$.

Démonstration. La première assertion découle immédiatement de la classification complète des courbes de multiplicité 3. La seconde se démontre aisément en partant d'un cocycle définissant σ, d'où on déduit des trivialisations locales de E permettant de définir $C_3(\sigma)$ par un cocycle adéquat. □

Références

[1] Bănică, C., Forster, O. *Multiple structures on plane curves.* In Contemporary Mathematics 58, Proc. of Lefschetz Centennial Conf. (1986), AMS, 47-64.

[2] Bayer, D., Eisenbud, D. *Ribbons and their canonical embeddings.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3 (1995), 719-756.

[3] Beltrametti, M., Robbiano, L. *Introduction to the theory of weighted projective spaces.* Expositiones Math. 4 (1986) 111-162.

[4] Beorchia, V., Franco, D. *On the Moduli Space of 't Hooft Bundles.* Ann. Univ. Ferrara, sez. VII, Sc. Mat. Vol. XLVII (2001), 253-268.

[5] Boratynski, M., *Locally complete intersection multiple structures on smooth algebraic curves.* Proc. of the Amer. Math. Soc. 115 (1992), 877-879.

[6] Delorme, C. *Espaces projectifs anisotropes.* Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 203-223.

[7] Drézet, J.-M. *Faisceaux cohérents sur les courbes multiples* . Collectanea Mathematica 57, 2 (2006), 121-171.

[8] Eisenbud, D., Green, M. *Clifford indices of ribbons.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3 (1995), 757-765.

[9] Ferrand, D. *Courbes gauches et fibrés de rang 2.* C.R. Acad. Sci. Paris, 281 (1977), 345-347.

[10] Fossum, R. *Commutative extensions by canonical modules are Gorenstein rings.* Proc. of the Amer. Math. Soc. 40 (1973), 395-400.

[11] Frenkel, J. *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés.* Bull. de la Soc. Math. de France 85 (1957), 135-220.
[12] Gallego, F.J., González, M., Purnaprajna, B.P. *Deformation of finite morphisms and smoothing of ropes.* Preprint (2005), math.AG/0502467 .
[13] Godement, R. *Théorie des faisceaux.* Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann, Paris (1964).
[14] González, M. *Smoothing of ribbons over curves.* Journ. für die reine und angew. Math. 591 (2006), 201-235.
[15] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* GTM 52, Springer-Verlag (1977).
[16] Hartshorne, R. *Curves with high self intersection on algebraic surfaces.* Publ. Math. IHES 36 (1969), 111-125.
[17] Hartshorne, R. *Stable vector bundles of rank 2 on* $\mathbb{P}_3$. Math. Ann. 238 (1978), 229-280.
[18] Hartshorne, R. *Stable reflexive sheaves of rank 2 on* $\mathbb{P}_3$. Math. Ann. 254 (1978), 121-176.
[19] Lárusson, F. *Holomorphic neighbourhood retractions of ample hypersurfaces.* Math. Ann. 307 (1997), 695-703.
[20] Lichtenbaum, S., Schlessinger, M. *The cotangent complex of a morphism.* Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), 41-70.
[21] Manolache, N. *Cohen-Macaulay Nilpotent Structures.* Revue Roumaine Math. pures et appl. 31 (1986), 563-575.
[22] Manolache, N. *Multiple Structures on Smooth Support.* Math. Nachr. 167 (1994), 157-202.
[23] Manolache, N. *Double rational normal curves with linear syzygies.* Manusc. Math. 104 (2001), 503-517.
[24] Manolache, N. *Cohen-Macaulay Nilpotent Schemes.* Preprint (2003), math.AG/0312514.
[25] Matsumura, H. *Geometric structure of the cohomology rings in abstract algebraic geometry.* Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto (A) 32 (1959), 33-84.
[26] Nüssler, T., Trautmann, G. *Multiple Koszul structures on lines and instanton bundles.* Intern. Journ. of Math. 5 (1994), 373-388.
[27] Vatne, J.E. *Multiple structures.* Thesis. Preprint (2002), math.AG/0210042.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

Adresse email: `drezet@math.jussieu.fr`

URL: `http://www.math.jussieu.fr/~drezet`