



**HAL**  
open science

# Simulation de fibres dans un écoulement turbulent homogène isotrope

Olivier Thomine

► **To cite this version:**

Olivier Thomine. Simulation de fibres dans un écoulement turbulent homogène isotrope. [Rapport de recherche] CORIA. 2008. hal-00685271v2

**HAL Id: hal-00685271**

**<https://hal.science/hal-00685271v2>**

Submitted on 10 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mémoire de Maîtrise

présentée à la

Faculté des Sciences & Techniques de l'Université de Rouen

**Discipline :** Sciences physiques

**Spécialité :** Mécanique des Fluides, Numérique et énergétique  
par

**Olivier THOMINE**

## Simulation de fibres dans un écoulement turbulent homogène isotrope

---

*Encadrant :*

J. Reveillon   Professeur des Universités, CORIA, Rouen   Directeur de stage

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modélisations et modèles successifs</b>	<b>3</b>
2.1	Simulation de particules libres dans un champ turbulent HI (Homogène isotrope)	3
2.1.1	Théorie . . . . .	3
2.1.2	Mise en application . . . . .	6
2.1.3	Interprétation des résultats . . . . .	6
2.2	Simulation de particules liées dans un champ turbulent HI (Fibre non étirable) .	7
2.2.1	Théorie . . . . .	7
2.2.2	Simulation dans le cadre de fibres non étirables . . . . .	12
2.2.3	Étude des résultats . . . . .	15
2.3	Simulation de fibres étirables . . . . .	15
2.3.1	Théorie . . . . .	15
2.4	Intégration du couple de rappel . . . . .	19
2.4.1	Théorie . . . . .	19
2.4.2	Simulation . . . . .	20
2.4.3	Interprétation des résultats . . . . .	20
2.4.4	Confrontation des résultats . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>
	<b>Références</b>	<b>26</b>

## 1 Introduction

Le but de ce stage est de réussir à simuler la trajectoire, la déformation, l'étirement ainsi que la rupture d'une fibre de verre dans un champ de vitesse qui nous est donné. L'application des équations de Navier et Stokes dans la fibre pour déterminer son étirement et son comportement dans ce milieu étant extrêmement coûteux en calculs, nous appliquerons ici un modèle de tige articulé par des liaisons rotoïdes à partir d'un code de dispersion des particules. Nous étudierons ici la faisabilité de cette méthode ainsi qu'une étude qualitative des résultats, ce qui nous permettra à l'avenir de devenir de plus en plus fidèle au comportement réel de ces fibres. Pour ce faire nous procéderons en trois étapes. Tout d'abord nous programmerons une simulation pour des particules libres, nous tenterons de déterminer leur trajectoire en fonction de leur masse, du temps caractéristique de ces particules et du champ de vitesse. Ensuite nous lierons ces particules par des liaisons rigides (nous verrons par la suite la méthode utilisée), puis nous intégrerons une gestion des ruptures selon des paramètres modifiables. Enfin nous adapterons ce modèle à des particules dont les liaisons sont étirables selon une loi d'étirement des fibres que nous exposerons plus tard. Le champ de vitesse fourni est un champ de vitesse turbulent homogène isotrope. Celui-ci sera considéré comme « gelé », c'est à dire qu'il sera stationnaire.

## 2 Modélisations et modèles successifs

### 2.1 Simulation de particules libres dans un champ turbulent HI (Homogène isotrope)

#### 2.1.1 Théorie

##### Équation de trajectoire

Dans le cas d'une particule plongée dans un champ de vitesse, on a :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}_f}{dt} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_p}{\tau_p} \quad (1)$$

Avec :

- $\tau_p$  est le temps caractéristique de la particule, qui sera considéré comme paramètre donné au programme pour effectuer la simulation

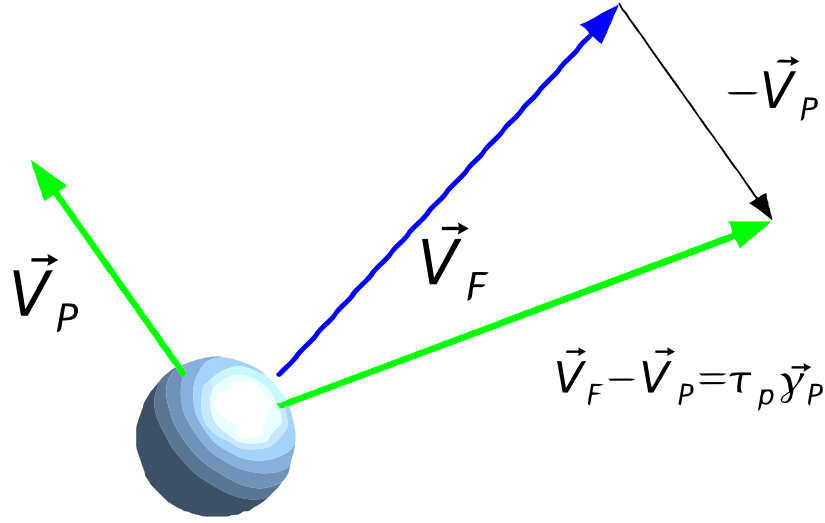


FIG. 1: Détermination de l'accélération que subit une particule.

- $\vec{V}_f$  le vecteur vitesse du fluide là où se trouve la particule
- $\vec{V}_p$  le vecteur vitesse de la particule

$\tau_p$  est le temps caractéristique de la particule qui représente la capacité de la particule à réagir plus ou moins au champ de vitesse dans lequel elle est plongée. Ce paramètre caractéristique de la particule dépend, entre autre, de sa masse volumique et de son profil.

Plus le temps caractéristique est élevé, plus l'inertie de la particule sera élevée et moins le champ de vitesse influencera sa trajectoire ( $\tau_p$  très grand implique une accélération  $\gamma$  très faible).

Afin d'effectuer la simulation (en 2D initialement), on projette sur  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  :

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_X = \frac{V_{f,x} - V_{p,x}}{\tau_p} , \\ \vec{\gamma}_Y = \frac{V_{f,y} - V_{p,y}}{\tau_p} . \end{cases} \quad (2)$$

Une intégration nous permet de déterminer sa vitesse en discrétisant à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{V_{p,x}^{t+1} - V_{p,x}^t}{\Delta t} = \frac{V_{f,x}^t - V_{p,x}^t}{\tau_p} , \\ \frac{V_{p,y}^{t+1} - V_{p,y}^t}{\Delta t} = \frac{V_{f,y}^t - V_{p,y}^t}{\tau_p} . \end{cases} \quad (3)$$

d'où :

$$\begin{cases} V_{p,x}^{t+1} = (V_{f,x}^t - V_{p,x}^t) \frac{\Delta t}{\tau_p} + V_{p,x}^t , \\ V_{p,y}^{t+1} = (V_{f,y}^t - V_{p,y}^t) \frac{\Delta t}{\tau_p} + V_{p,y}^t . \end{cases} \quad (4)$$

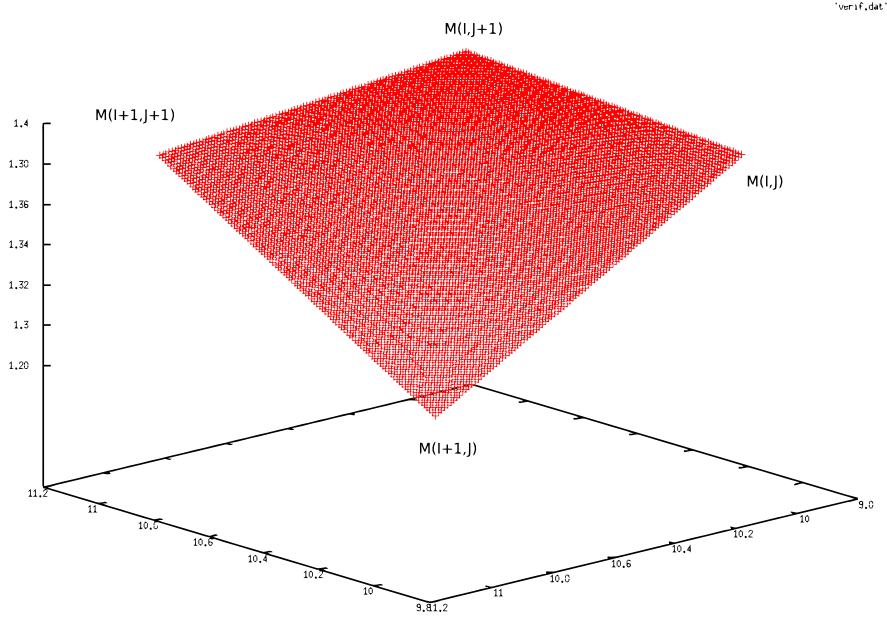


FIG. 2: Interpolation d'un champ scalaire à l'ordre 1

A partir de la vitesse de la particule que nous sommes maintenant en moyen de calculer, nous pouvons par intégration déterminer sa position. Nous obtenons

Une discrétisation nous permet donc de déterminer sa position à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$\begin{cases} X_p^{t+1} = V_{p,x}^t \Delta t + X_p^t, \\ Y_p^{t+1} = V_{p,y}^t \Delta t + Y_p^t. \end{cases} \quad (5)$$

### Interpolation du champ de vitesse

Le champ de vitesse nous étant donné ponctuellement, il nous est nécessaire à partir de cette donnée de déterminer une approximation de sa valeur en n'importe quel point. Pour ce faire, nous utiliserons une interpolation d'ordre 1. Pour déterminer la valeur en n'importe quel point du champ, en admettant que nous connaissons la valeur aux points  $M(X, Y)$ ,  $M(X + \Delta X, Y)$ ,  $M(X, Y + \Delta Y)$ ,  $M(X + \Delta X, Y + \Delta Y)$ , on peut déterminer en  $X_0, Y_0$  ( $X < X_0 < X + \Delta X$ ;  $Y < Y_0 < Y + \Delta Y$ ) la valeur interpolée du champ de vitesse. La valeur de celle-ci est donnée par :

$$V_{app} = [(V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1} - V_{i+1,j} + V_{i,j})F(X) + V_{i,j+1} - V_{i,j}]F(Y) + V_{i,j} + F(X)[V_{i+1,j} - V_{i,j}] \quad (6)$$

avec  $F(X)$  la partie fractionnaire de  $X$ .

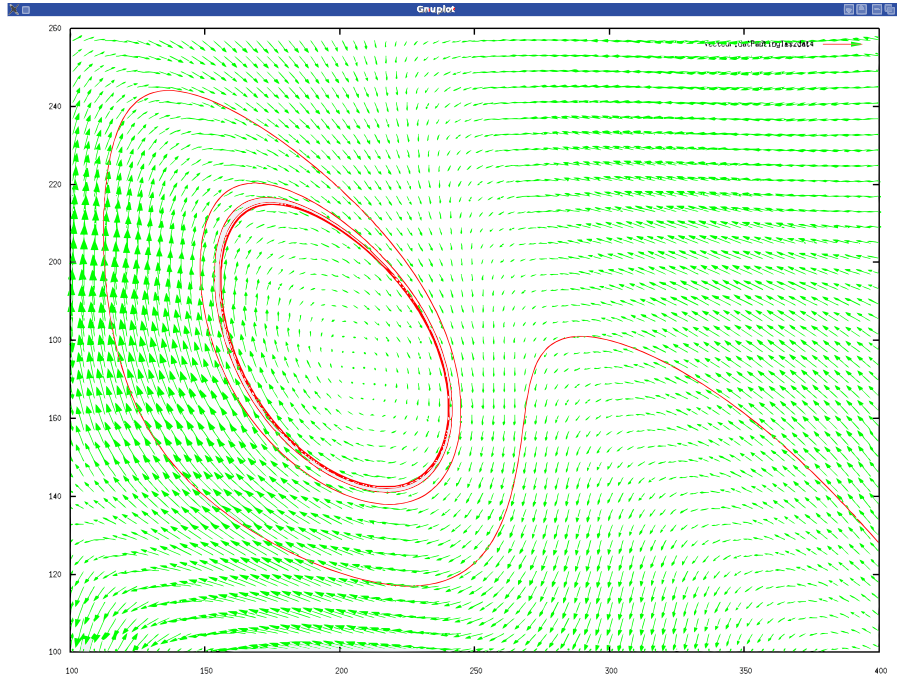


FIG. 3: Trajectoire d'une particule dans le champ de vitesse

### 2.1.2 Mise en application

Un programme Fortran nous permettra de suivre une particule plongée dans un champ de vitesse turbulent en utilisant les deux formules trouvée ci-dessus. Les dimensions du domaine dans lequel nous effectuerons la simulation est de  $12\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ . Voici par exemple la trajectoire d'une particule plongée dans ce champ :

Nous pouvons à partir de ce programme suivre un nombre quelconque de particules, par exemple 5 :

### 2.1.3 Interprétation des résultats

D'après les résultats de la simulation, plusieurs caractéristiques peuvent être déduites. Nous avons vu la signification physique de  $\tau_p$ . Cette constante est le temps caractéristique de la particule. Ce temps symbolise son inertie, donc la sensibilité de la particule au champ de vitesse dans lequel elle est plongée. Plus  $\tau_p$  est élevé, plus la masse volumique de la particule sera élevée, moins son accélération sera importante (Équation 1), donc plus sa trajectoire sera insensible aux variations du champ de vitesse (Figures 4a et 4b). A partir d'une certaine inertie, la particule ne peut plus se stabiliser autour d'un tourbillon, sa trajectoire évolue continuellement (Figure 4b), mais en dessous de cette valeur critique, la trajectoire de la particule peut converger autour d'un

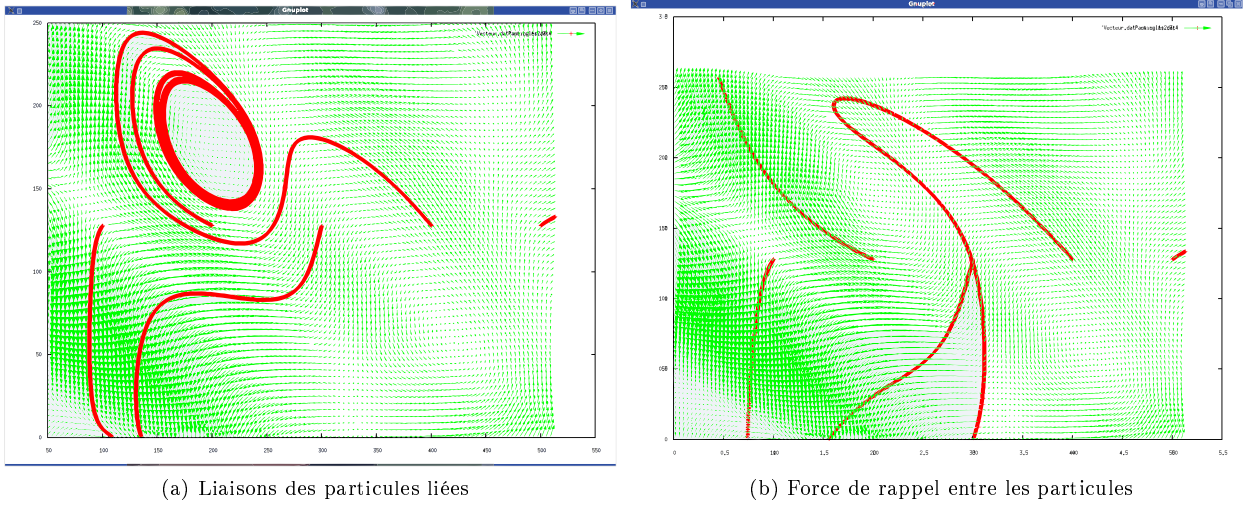


FIG. 4: Évolution de 5 particules de masse  $m_0$  à gauche et  $100m_0$  à droite

tourbillon. Une condition qui pourra être utilisée pour arrêter la simulation sera la détection d'une périodicité dans la trajectoire de cette particule, ce qui signifiera la stabilisation de sa trajectoire autour d'un tourbillon.

Nous voyons bien dans la figure 4b que les trajectoires des particules sont beaucoup moins sensibles que celles que nous avons dans la simulation précédente, où leur masse était tellement faible que nous pouvons presque considérer leur vitesse comme simultanément égale à celle du champ de vitesse.

Nous avons vu d'après l'équation 4 que la précision de la discrétisation dépend directement du rapport  $\Delta t/\tau_p$ . Ce rapport est suffisamment faible pour qu'à chaque itération la particule se déplace très peu, assez pour que la discrétisation que nous utilisons puisse être considérée comme continue.

## 2.2 Simulation de particules liées dans un champ turbulent HI (Fibre non étirable)

### 2.2.1 Théorie

#### Principe utilisé

Nous tenterons de simuler une fibre non étirable plongée dans ce même champ.

Afin de considérer chaque particule comme liée à ses voisine par une liaison rigide, nous considérerons un ressort reliant chaque particule une par une. On définit la constante de raideur du ressort par  $C$ .

La force de rappel, en considérant  $L_0$  la distance inter-particulaire à l'équilibre, sera  $\vec{F}_{AB} =$



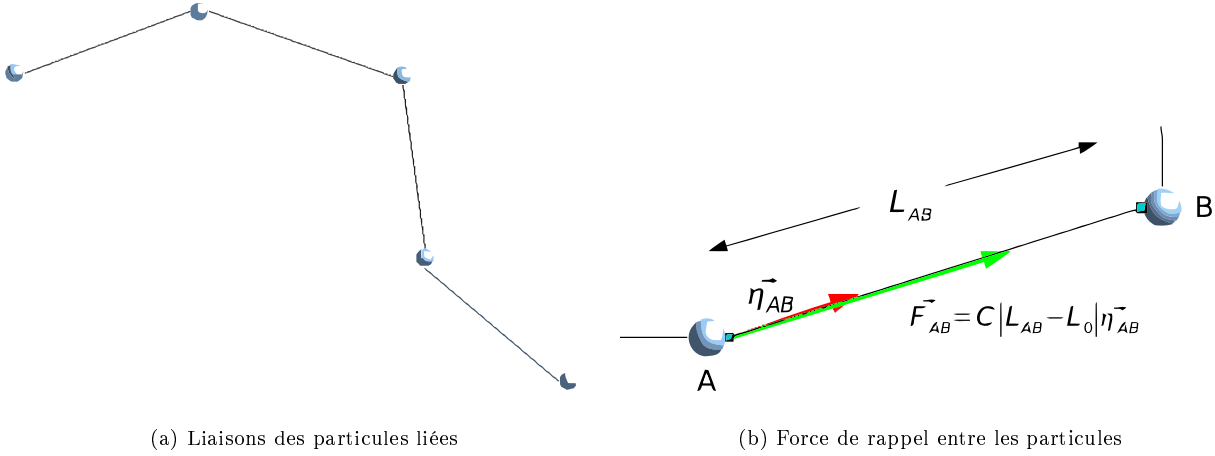


FIG. 5: Liaison et forces entre les particules pour modéliser une fibre.

$C|L - L_0|\vec{\eta}_{AB}$ , avec  $\vec{\eta}_{AB}$  le vecteur unitaire selon la droite (AB).

Considérons une particule  $i$ , reliée donc à la particule  $i + 1$  et  $i - 1$ , avec  $1 < i < N$  (nombre de particules), nous verrons pour les particules 1 et  $N$  par la suite qui sont des cas particuliers.

On a :

$$\begin{cases} \vec{F}_{i-1 \rightarrow i} = C|L_0 - L_{i-1,i}|\vec{\eta}_{i,i-1}, \\ \vec{F}_{i \rightarrow i+1} = C|L_0 - L_{i,i+1}|\vec{\eta}_{i,i+1}. \end{cases} \quad (7)$$

Pour la première particule, il n'y a qu'un seul lien, on a donc  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = C|L_0 - L_{2,1}|\vec{\eta}_{1,2}$ . Pour la dernière,  $\vec{F}_{N-1 \rightarrow N} = C|L_0 - L_{N,N-1}|\vec{\eta}_{N,N-1}$ .

Sachant que le principe d'action réaction dit que  $\vec{F}_{i-1 \rightarrow i} = -\vec{F}_{i \rightarrow i-1}$ , le calcul de la force de la  $i^{\text{ème}}$  particule sur la  $(i + 1)^{\text{ème}}$  nous permet de connaître la force réciproque. Le programme calculera donc les forces s'exerçant des deux cotés du ressort simultanément, cela divisera le nombre de forces à calculer par deux.

A partir de ces forces de rappel, on obtient donc la somme des forces :

$$\sum \vec{F}_i = C|L_0 - L_{i-1,i}|\vec{\eta}_{i,i-1} + C|L_0 - L_{i,i+1}|\vec{\eta}_{i,i+1} + \frac{m_p}{\tau_p}(\vec{V}_f - \vec{V}_{p_i}). \quad (8)$$

On obtient ainsi l'accélération :

$$\vec{\gamma}_i = \frac{C}{m_p}|L_0 - L_{i-1,i}|\vec{\eta}_{i,i-1} + \frac{C}{m_p}|L_0 - L_{i,i+1}|\vec{\eta}_{i,i+1} + \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_{p_i}}{\tau_p}. \quad (9)$$

En posant  $C_m = C/m_p$ , puis en discrétisant de la même manière que précédemment, on

obtient :

$$\frac{\overrightarrow{V_{p_i}^{t+1}} - \overrightarrow{V_{p_i}^t}}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\overrightarrow{V_f^t} - \overrightarrow{V_{p_i}^t}}{\tau_p}}_{\overrightarrow{\gamma}_{Fluide}} + \underbrace{C_m |L_0 - L_{i-1,i}^t| \overrightarrow{\eta_{i,i-1}}}_{\overrightarrow{\gamma_{i-1 \rightarrow i}}} + \underbrace{C_m |L_0 - L_{i,i+1}^t| \overrightarrow{\eta_{i,i+1}}}_{\overrightarrow{\gamma_{i+1 \rightarrow i}}} \quad (10)$$

En projetant et en identifiant, nous obtenons finalement

$$\begin{cases} V_{p_i,x}^{t+1} = V_{p_i,x}^t + \Delta t \left[ \frac{V_{f,x}^t - V_{p_i,x}^t}{\tau_p} + C_m |L_0 - L_{i-1,i}^t| (\overrightarrow{\eta_{i,i-1}} \cdot \overrightarrow{e_x}) + C_m |L_0 - L_{i,i+1}^t| (\overrightarrow{\eta_{i,i+1}} \cdot \overrightarrow{e_x}) \right], \\ V_{p_i,y}^{t+1} = V_{p_i,y}^t + \Delta t \left[ \frac{V_{f,y}^t - V_{p_i,y}^t}{\tau_p} + C_m |L_0 - L_{i-1,i}^t| (\overrightarrow{\eta_{i,i-1}} \cdot \overrightarrow{e_y}) + C_m |L_0 - L_{i,i+1}^t| (\overrightarrow{\eta_{i,i+1}} \cdot \overrightarrow{e_y}) \right]. \end{cases} \quad (11)$$

$\overrightarrow{\eta_{AB}} \cdot \overrightarrow{e_{x_i}}$  se détermine tout simplement par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\eta_{AB}} \cdot \overrightarrow{e_x} = \frac{X_B - X_A}{\sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}}, \\ \overrightarrow{\eta_{AB}} \cdot \overrightarrow{e_y} = \frac{Y_B - Y_A}{\sqrt{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}}. \end{cases} \quad (12)$$

Pour connaître la position de la particule on utilise toujours le même principe :

$$\begin{cases} X_p^{t+1} = V_{p,x}^t \Delta t + X_p^t, \\ Y_p^{t+1} = V_{p,y}^t \Delta t + Y_p^t. \end{cases} \quad (13)$$

### Critères de non divergence et de précision de la simulation

Nous avons vu précédemment que la précision de la simulation dépendait du rapport  $\Delta t / \tau_p$ , nous voyons que maintenant elle dépend aussi de  $C_m$ . Si  $\Delta t C_m$  est élevé, un petit éloignement de la particule engendrera une grande accélération « de rappel » de celle-ci. A partir d'une certaine valeur, le système devient même divergent car à l'instant  $t + \Delta t$ , si le rappel ramène la particule de l'autre côté de la valeur d'équilibre  $L_0$  de telle sorte que :

$$|L_0 - L^{t+\Delta t}| > |L_0 - L^t| \longrightarrow \|\overrightarrow{F}^{t+\Delta t}\| > \|\overrightarrow{F}^t\| \quad (14)$$

Dès lors la force croîtra de plus en plus et la particule s'éloignera de plus en plus en oscillant autour du point d'équilibre.

Le but est donc de choisir judicieusement  $C_m$  pour qu'un éloignement d'une particule par rapport à l'autre se « résorbe » rapidement, sans pour autant créer des forces trop grandes par rapport à l'échelle de discrétisation que l'on aura choisi. Le critère de divergence nous est donné par l'équation 14. Il nous amène à :

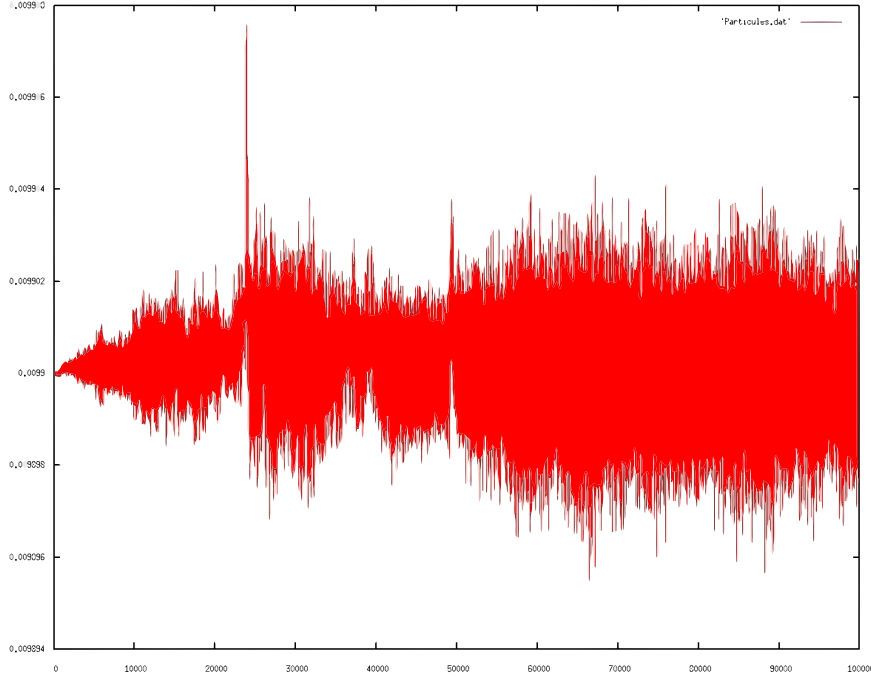


FIG. 6: Distance inter-particulaire au cours de la simulation

$$\frac{\Delta t^2}{2} \frac{||\vec{F}_k||}{m_p} \simeq \frac{|L - L_0|}{2} \longrightarrow \Delta t^2 C_m |L - L_0| \simeq |L - L_0| \quad (15)$$

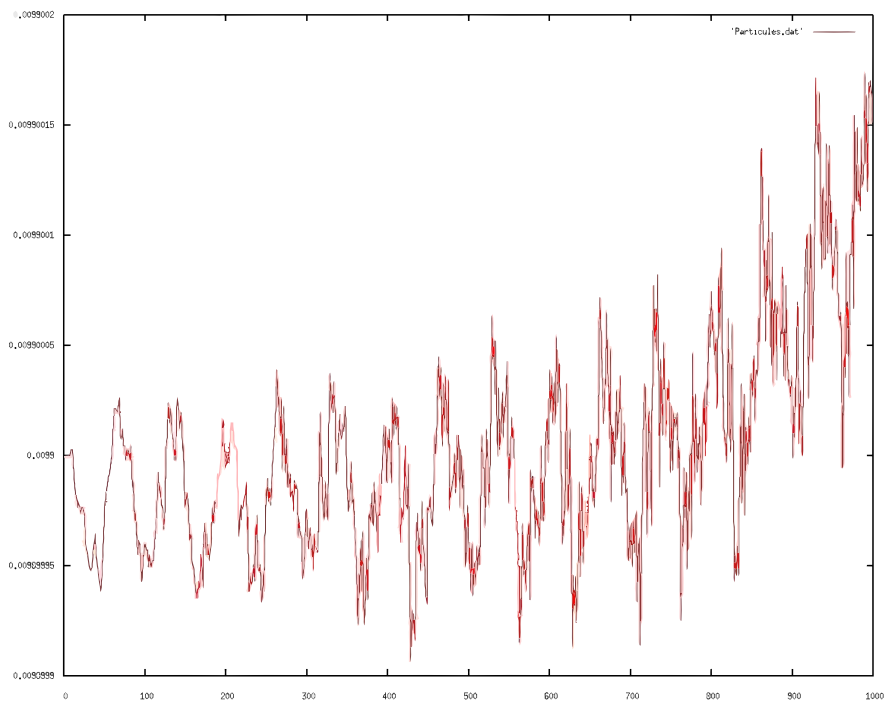
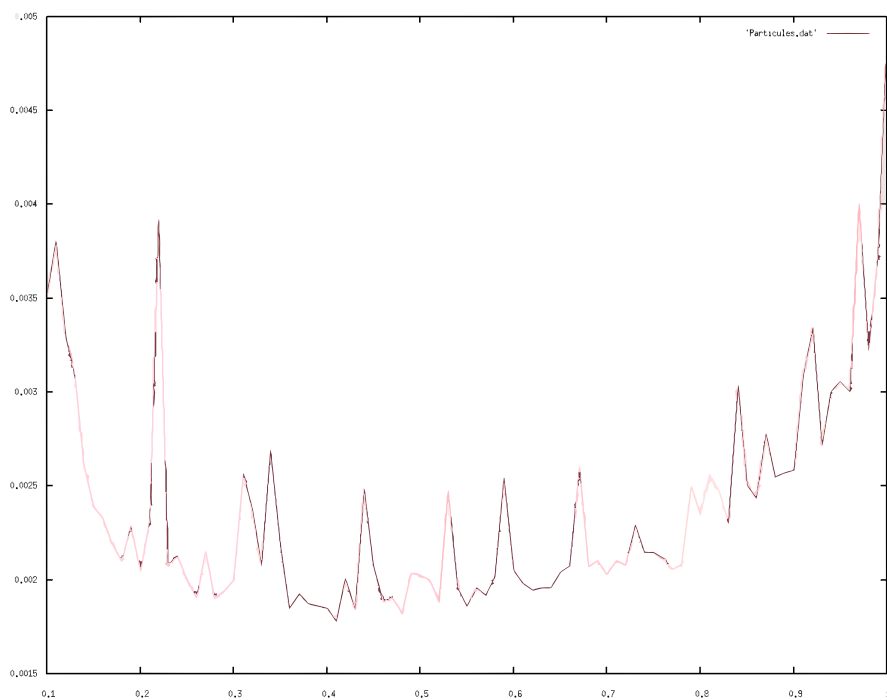
Un critère pour la non divergence de la simulation est donc  $C_m < 1/\Delta t^2$ . La valeur optimale de cette constante de raideur a été déterminée par l'étude de la variation des écarts inter-particulaires lors d'une simulation en fonction de cette constante. Lors d'une simulation, nous avons une variation de l'écart moyen entre les particules qui suit cette évolution :

Nous avons pris ici  $C_m = 1/\Delta t^2$ .

Sur 1000 itérations, la variation de longueur est la suivante :

Nous voyons bien une oscillation, due au ressort oscillant autour de sa position d'équilibre. Nous constatons de même que plus la constante de raideur du ressort est élevée, plus la résorption de cet écart est rapide. Afin de déterminer la meilleure valeur pour  $C_m$ , nous avons simulé pour  $\frac{0.1}{\Delta t^2} < C_m < \frac{1}{\Delta t^2}$  l'écart type de la distance inter-particulaire lors de la simulation. Nous avons obtenu :

Nous voyons ici que le plus faible écart est atteint pour  $C_m = \frac{0.41}{\Delta t^2}$ . C'est désormais cette valeur qui sera utilisée sur l'ensemble des simulation de particules liées que nous ferons.

FIG. 7: variation de la distance,  $C_m = 1/\Delta t^2$ FIG. 8: Écart-type moyen de la distance inter-particulaire en fonction de  $C_m$

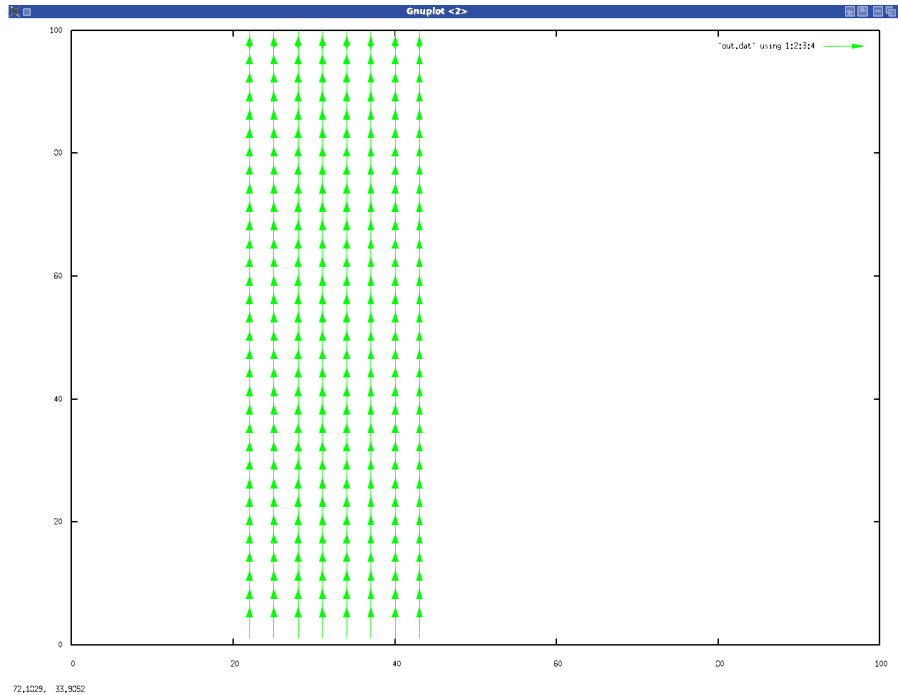


FIG. 9: Champ de vitesse utilisé pour les tests

### 2.2.2 Simulation dans le cadre de fibres non étirables

Un test simple pour vérifier le bon fonctionnement de ce programme est de plonger une fibre dans un champ de vitesse simple. En l'occurrence, le champ de vitesse utilisé est le suivant :

Regardons maintenant l'évolution d'une fibre placée dans ce champ, en utilisant ces paramètres :  $\Delta t = 0.001$  ;  $\tau_p = 0,1$  ;  $L_0 = 0,01$  ; Nombre de particules : 100 ; Nombre d'itérations : 2000

Intuitivement nous voyons que la particule se déplace de manière tout à fait logique. La variation de longueur de la fibre due aux ressort ne dépasse guère 2% :

Ici nous avons les forces dues au champ de vitesse subies par chaque particule de la fibre :

Plaçons maintenant cette fibre dans le champ turbulent HI, nous obtenons la trajectoire suivante :

Voici une autre trajectoire obtenue avec les paramètres suivants : Nombre de particules : 100 ; Itérations : 10000 ;  $\Delta t = 0.001s$  ; Maillage (cm) :  $dx = 0.0467$ ,  $dy = 0.0467$  ; Dimension du domaine : 12cm x 12cm ; Caractéristiques des particules :  $\tau_p = 0.1s$ ,  $L_0 = 0.01cm$ .

Si nous augmentons  $\tau_p$  de chaque particule, nous obtenons une autre trajectoire :

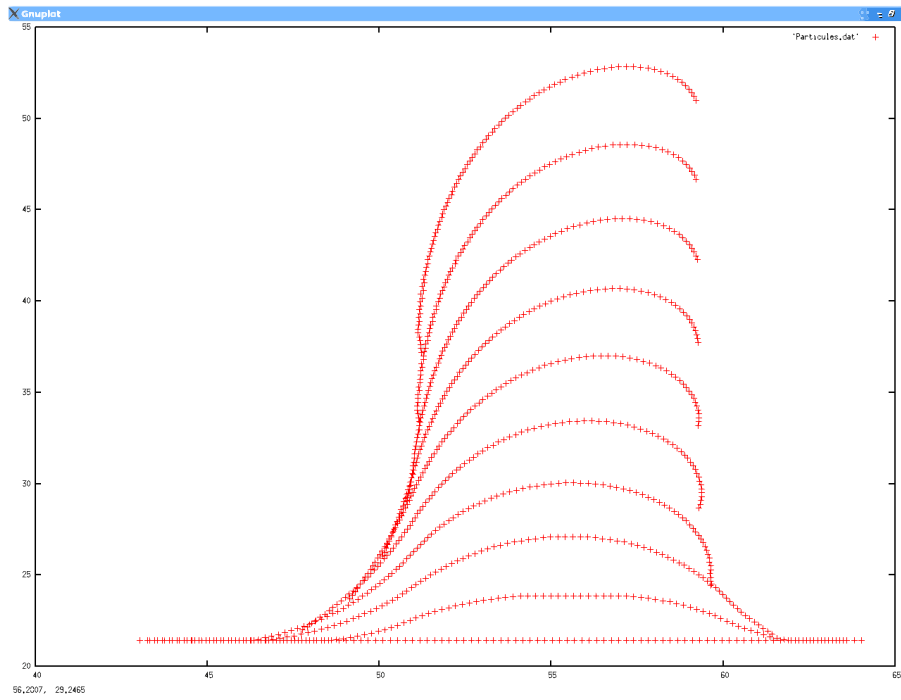


FIG. 10: Déplacement de la fibre dans le champ de vitesse

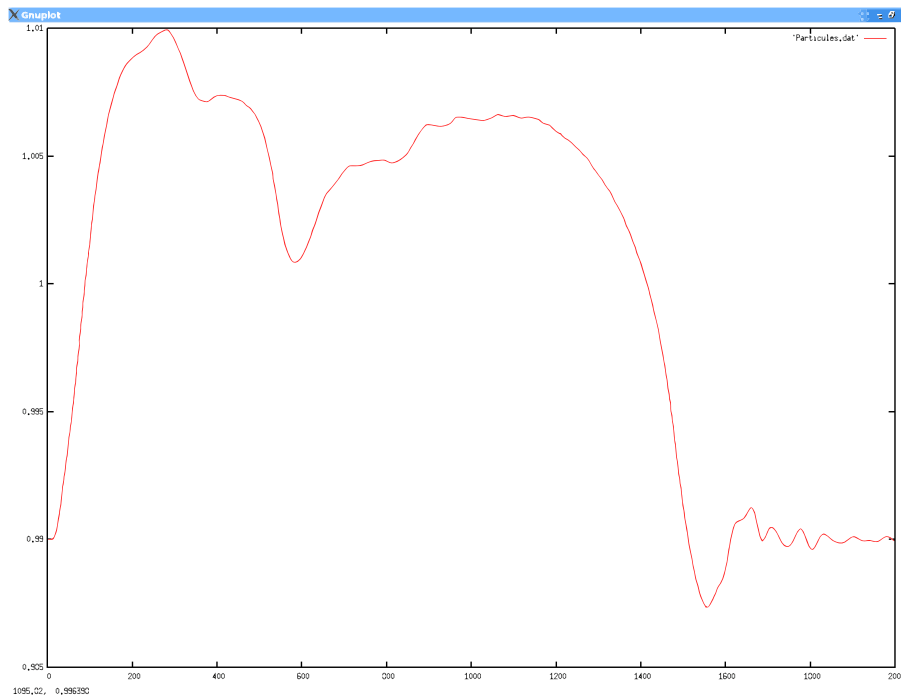


FIG. 11: Longueur de la fibre au cours de la simulation

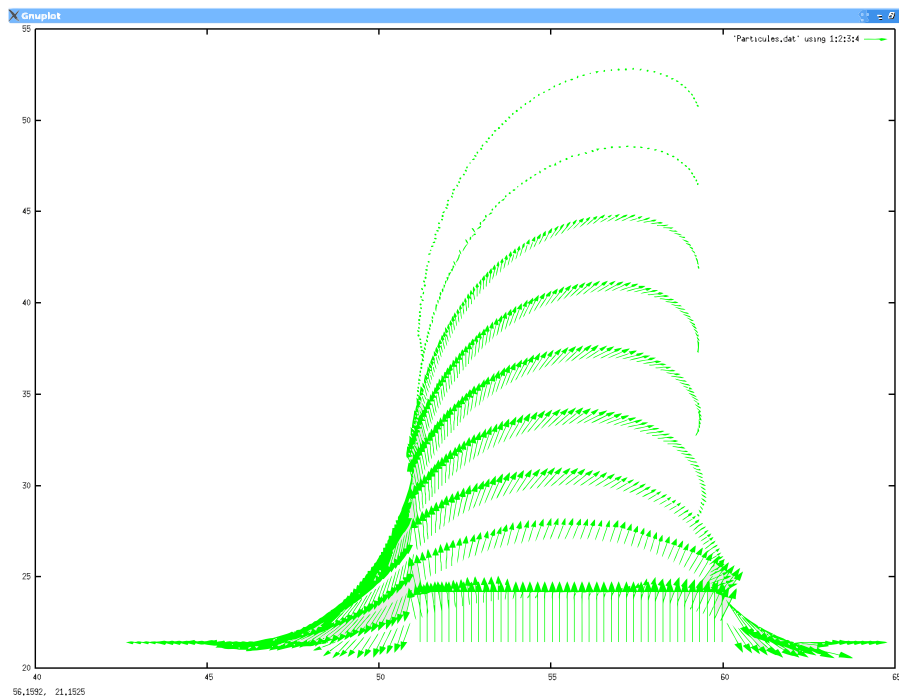


FIG. 12: Forces exercées par le fluide sur les particules

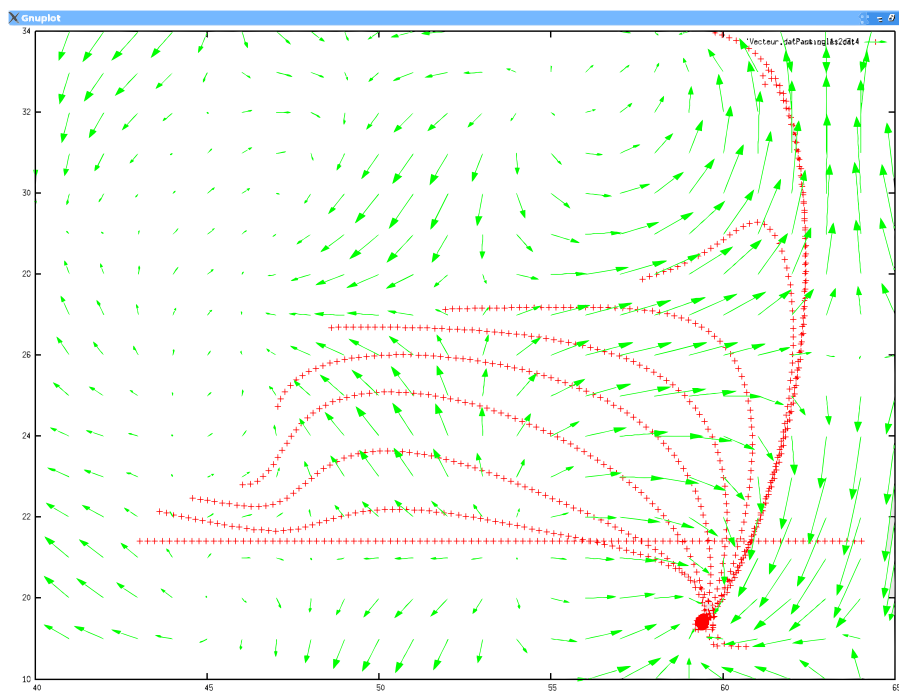


FIG. 13: Trajectoire de la fibre dans le champ de vitesse

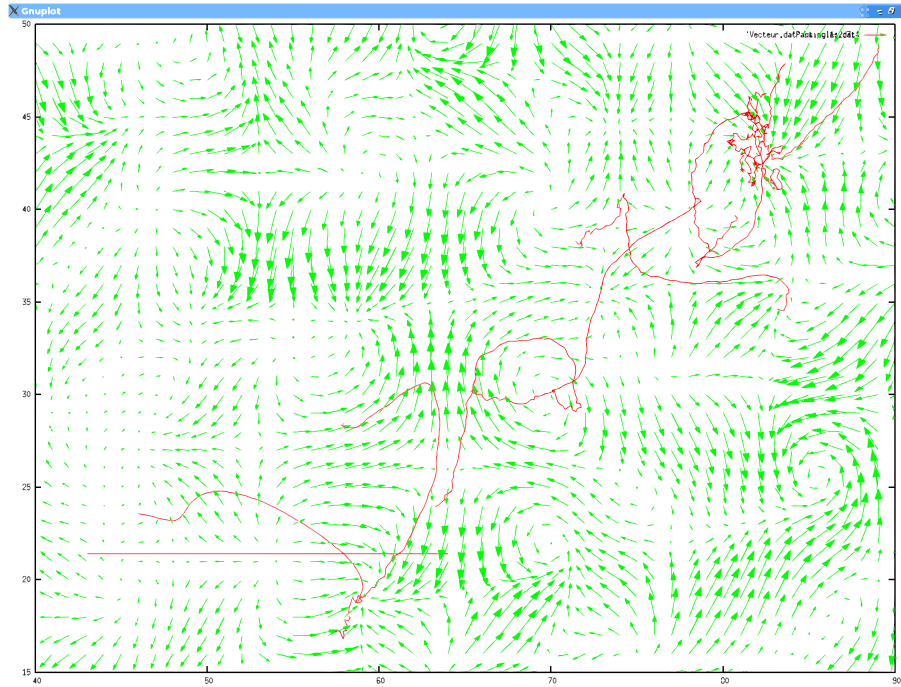


FIG. 14: Trajectoire de la fibre dans le champ de vitesse

### 2.2.3 Étude des résultats

Nous voyons tout d'abord (Figure 13) que la fibre finit sa course dans un tourbillon, de même dans la Figure 14. Nous pouvons en déduire que, contrairement aux particules liées,  $\tau_p$  peut balayer une large plage, la fibre convergera tout de même à un moment dans un tourbillons. Cela peut s'expliquer par la longueur de la fibre, qui la rend plus sensible au champ turbulent qu'une particule isolée. De plus, le modèle utilisé, i.e. des ressorts entre les particules, est plus que satisfaisant, car l'élongation de la fibre ne dépasse guère 1% dans les simulations, sachant qu'une discrétisation temporelle plus faible entraînera un écart plus faible. En effet, voici la longueur maximum de la fibre en fonction du pas de discrétisation :

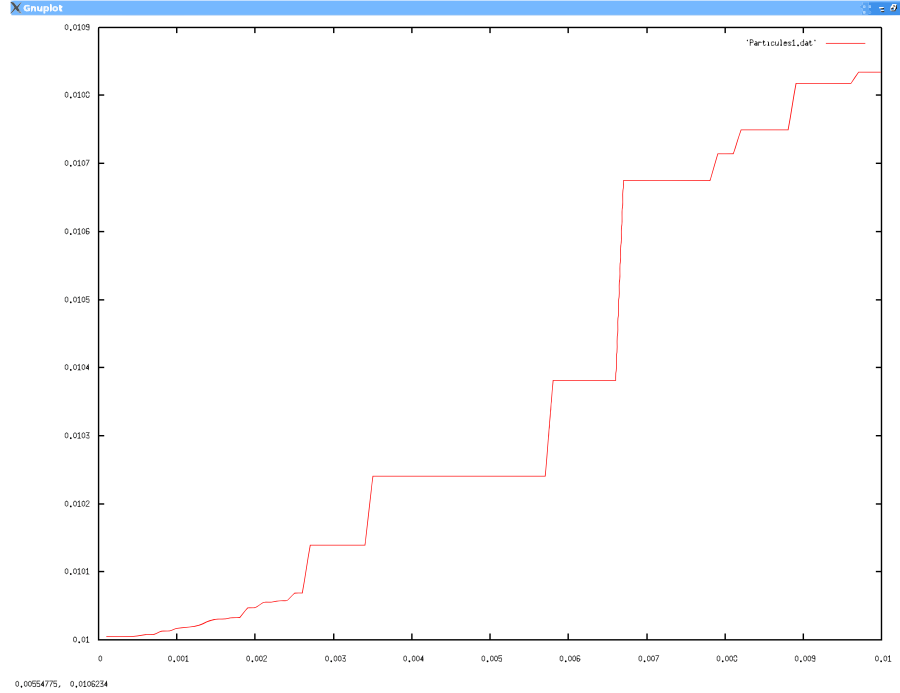
## 2.3 Simulation de fibres étirables

### 2.3.1 Théorie

#### Comportement plastique de la fibre

Afin de simuler le comportement d'une fibre de verre en fusion (comportement visco-élastique) nous introduirons un paramètre supplémentaire qu'est la variation de la distance inter-particulaire (initialement  $L_0$ ) en fonction des contraintes et de l'étirement qui s'exerce sur la fibre. Pour ce



FIG. 15: Longueur maximale de la fibre en fonction de  $\Delta t$ 

faire une fonction a été rajoutée dans le programme : si la longueur inter-particulaire dépasse une fonction du seuil, on redéfinit une nouvelle longueur à l'équilibre. Cela peut se traduire de la manière suivante : si  $L_{AB} > A.L_{Seuil} + B$ , alors  $L_{Seuil}^{t+\Delta t} = C(L^t - L_{Seuil}) + L_{Seuil}$  dans le cadre d'une considération d'élongation linéaire. De la manière suivante nous simulons un comportement plastique de la fibre. En effet, pour un étirement suffisant, la longueur à l'équilibre variera (augmentera dans le cas présent).

### Prise en compte des ruptures de la fibre

Une autre option ajoutée est de considérer la rupture des fibres. La condition de rupture est remplie si la distance inter-particulaire est supérieure à une longueur limite (entrée en paramètre). Dans le cas de cette simulation, nous avons défini la longueur limite  $L > 2L_0$ . Afin de gérer ces ruptures, nous avons procédé de la manière suivante. Au final, une rupture revient juste à ne pas considérer les forces de rappel entre les deux particules de part et d'autre de la rupture. Nous avons donc défini une liste contenant la première ainsi que la dernière particule de chaque fibre. En cas de rupture, on définit la dernière particule de la fibre, on rajoute une ligne où on définit le début de la nouvelle fibre.

Au cours de la simulation, toujours dans le même champ de vitesse, la fibre s'est étiré. Voici sa longueur au cours de la simulation :

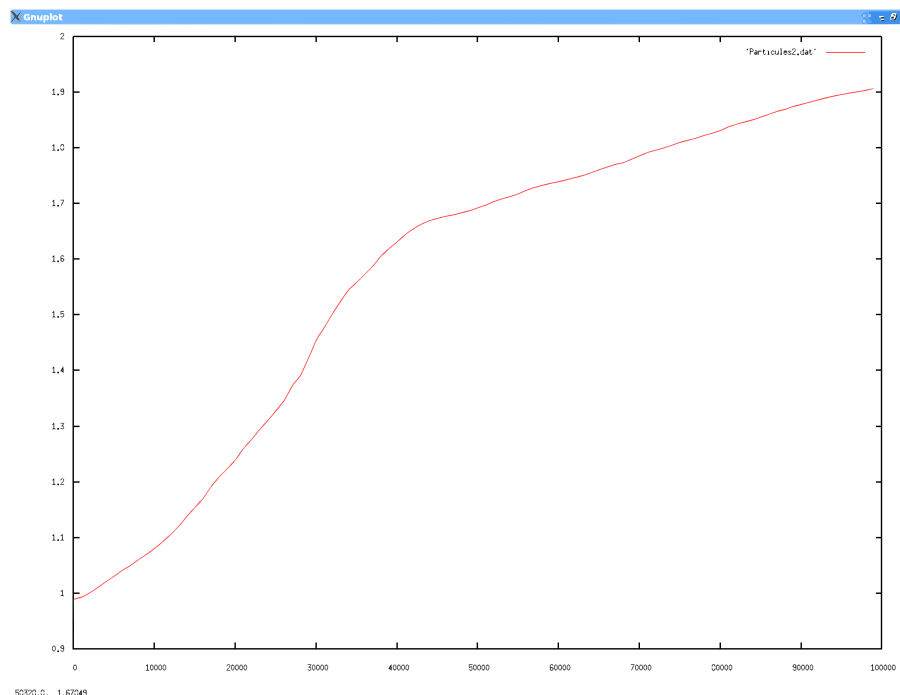


FIG. 16: Longueur de la fibre au cours de la simulation

Nous voyons ici que la longueur de la fibre a presque doublé, ce qui nous montre un bon comportement plastique (le rapport entre le seuil d'étirement et la viscosité de la fibre ne sera pas abordé ici). Les seuils inter-particulaires (les distances à l'équilibre) évoluent de cette manière :

D'après la Figure 17 nous voyons l'évolution des seuils (donc indirectement l'étirement) de la particule au cours de la simulation. Nous voyons que les plus grands seuils se trouvent au milieu de la particule. Cela peut s'expliquer simplement. En effet, les forces les plus importantes se trouvent au centre de la fibre, là où l'inertie de chaque côté de la particule est le plus élevé. Nous voyons que la fibre s'étire beaucoup lorsqu'elle rentre dans un champ de vitesse est proche de l'opposé de chaque côté de la fibre. C'est là que la rupture est la plus probable car c'est là que les contraintes sont les plus élevées. La fibre plongée dans le champ se déplace de la manière suivante :

Nous voyons l'apparition d'une rupture. Cette rupture est parfaitement gérée par la méthode utilisée (utiliser une liste des premières et dernières particules de chaque fibre). Le résultat du programme nous montre le moment ainsi que la particule où se produit la rupture :

La particule 49 se situe approximativement au centre de la fibre (la fibre fait 100 particules de longueur).

Néanmoins, nous observons encore un dernier problème : les fibres n'opposent strictement

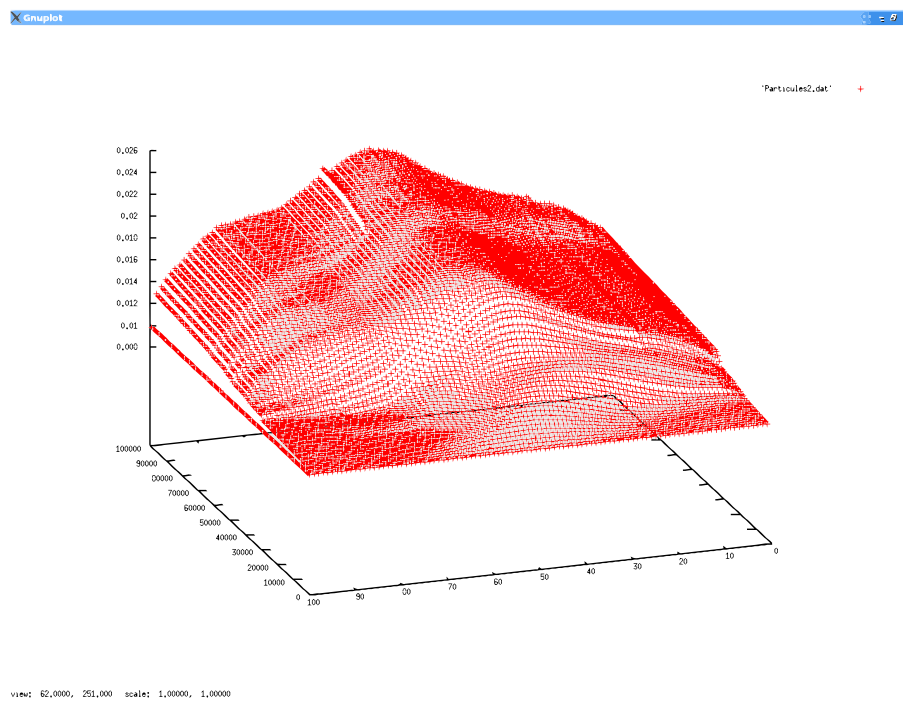


FIG. 17: Évolution des seuils tout au long de la fibre au cours des itérations

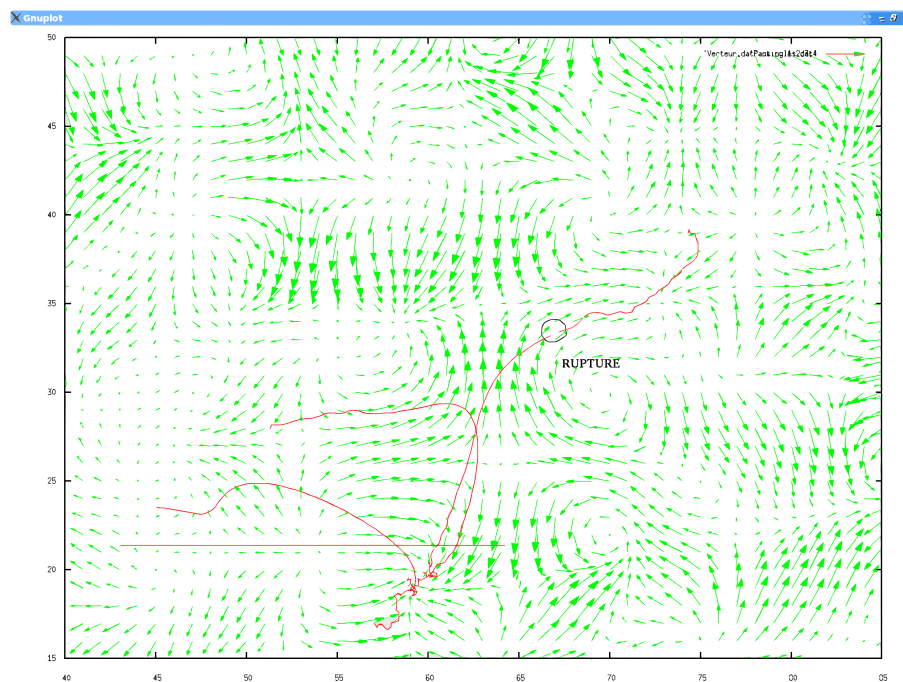


FIG. 18: Apparition d'une rupture au cours de la simulation,  $L_{max} = 2L_0$

```

=====
| Nombre de particules : 100
| Nombre d'itérations : 31000
| dt : 0.00100000005 s
| dx : 0.0467000008 cm
| dy : 0.0467000008 cm
| Dimension boîte : X= 12.0018997cm Y= 12.0018997cm
| Coeff trainée : 10.
| longueur : 0.99000001
| K : 0.409999996 dt²
=====
It : 30785    2 Rupture : 49

```

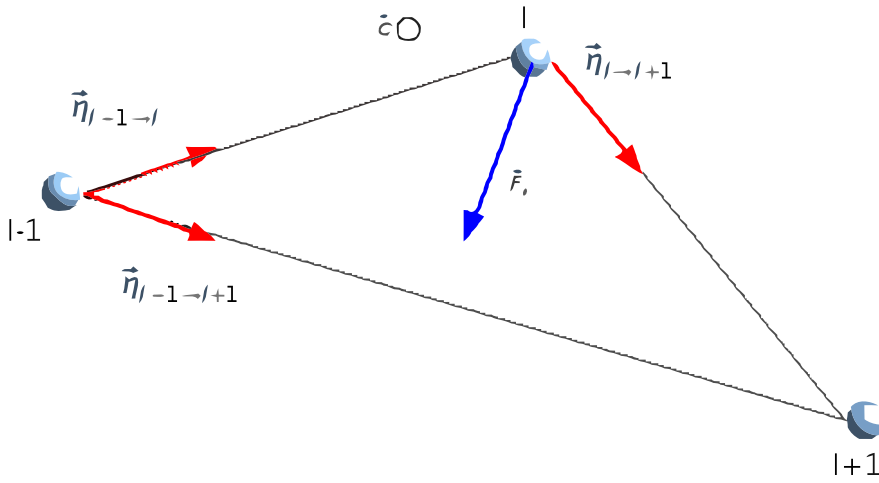


FIG. 19: Détermination du couple de rappel

aucune résistance à la torsion. Cela se traduit par un « emmêlement » de celles-ci jusqu'à être confinées dans un espace extrêmement petit. Pour éviter ce phénomène nous allons introduire un couple de rappel des particules qui dépend de l'angle local que prend la fibre.

## 2.4 Intégration du couple de rappel

### 2.4.1 Théorie

Afin de prendre en compte un rappel qui dépend de l'angle local des particules, nous considérons 3 particules disposés de la manière suivante, ainsi que les vecteurs unitaires qui les relient.

Nous déterminons le couple massique (massique car nous obtiendrons l'accélération de la particule indépendamment de sa masse) de la manière suivante. Nous posons  $\vec{C}_i = \alpha (\overrightarrow{\eta_{i-1 \rightarrow i}} \wedge \overrightarrow{\eta_{i \rightarrow i+1}})$  avec  $C_i$  le couple de rappel et  $\alpha$  un coefficient de proportionnalité (en  $kg/s^2$ ). Nous voulons  $\vec{F}_i \perp \overrightarrow{\eta_{i-1 \rightarrow i+1}} \perp \vec{C}_i$ . Nous définissons donc  $\vec{F}_i = \vec{C}_i \wedge \overrightarrow{\eta_{i-1 \rightarrow i+1}} = \alpha (\overrightarrow{\eta_{i-1 \rightarrow i}} \wedge \overrightarrow{\eta_{i \rightarrow i+1}}) \wedge \overrightarrow{\eta_{i-1 \rightarrow i+1}}$ .

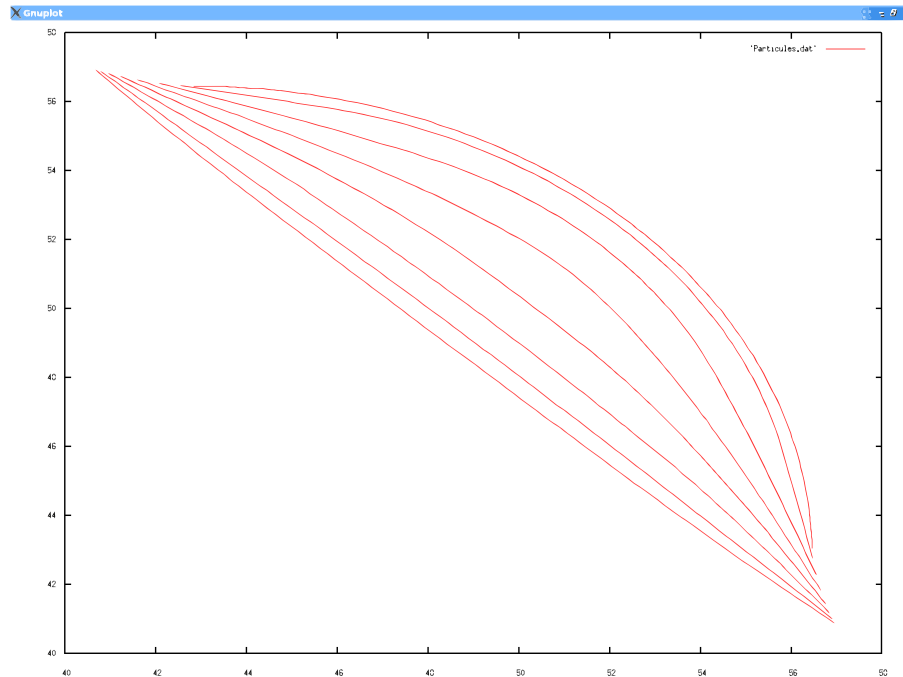


FIG. 20: Redressement de la fibre dans un champ au repos

Les vecteurs unitaires sont déterminés comme précédemment. Les conditions de convergence maximales ne seront pas calculées ici pour la simple raison qu'elles sont inutiles. En effet, la constante  $\alpha$  doit être faible face aux autres paramètres qui s'exercent sur la particule. Si  $\alpha$  devient grand, la fibre deviendra rigide et se déplacera comme une barre.

#### 2.4.2 Simulation

Une fois ce code intégré dans la simulation, nous avons effectué plusieurs tests. Le premier est de mettre une fibre dont la forme est un arc de cercle dans un champ au repos et voir si elle se redresse afin de devenir droite. Et effectivement celle-ci se redresse :

Une fois cela programmé, nous simulons cette fibre dans le champ de vitesse pour différentes valeurs de  $\alpha$  :

#### 2.4.3 Interprétation des résultats

Tout d'abord, la figure 20 nous montre bien que le couple de rappel tend à rendre la fibre rectiligne dans un milieu au repos. Un détail montrant que nous nous approchons bien d'un comportement réel est que la fibre a un angle de courbure opposé à celui initial à la fin de la simulation. Ceci est dû à l'inertie de la fibre qui continue à la tordre dans l'autre sens, même lorsque le couple est nul (fibre parfaitement rectiligne). Nous pouvons ensuite interpréter

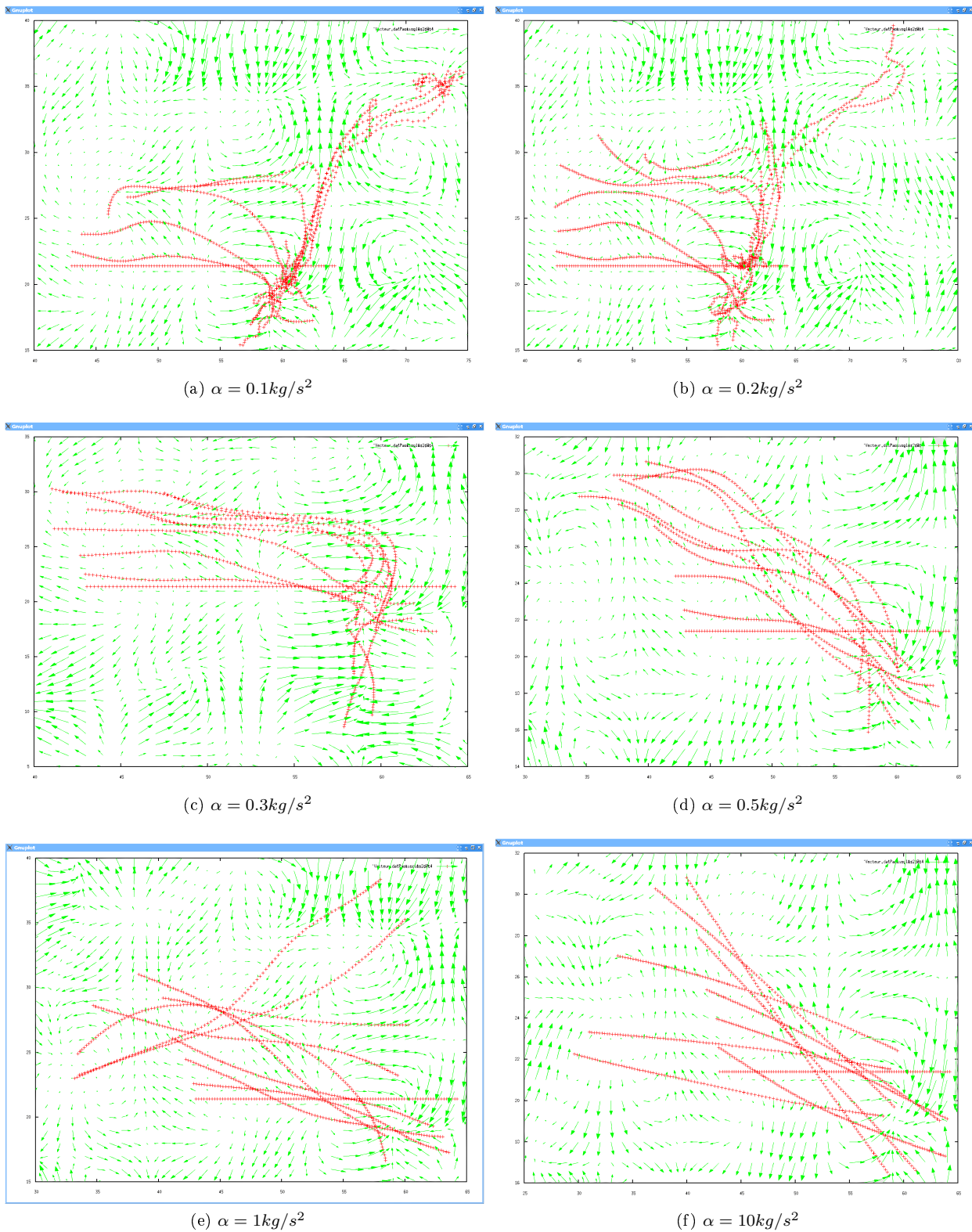
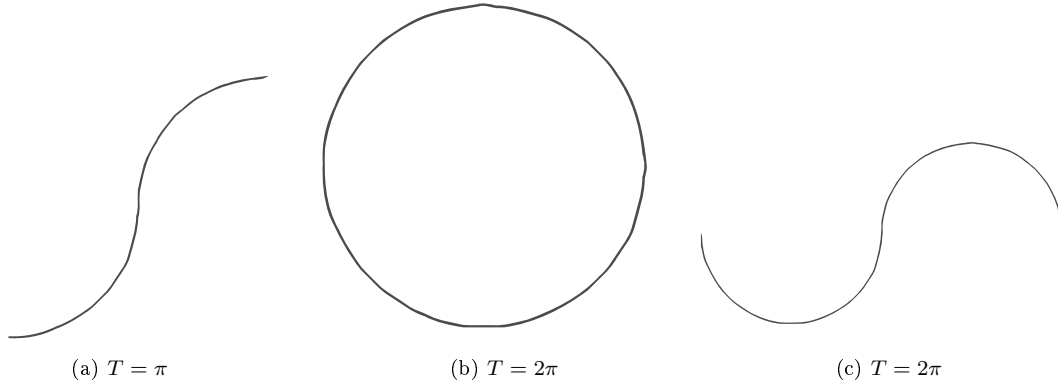


FIG. 21: Évolution d'une fibre pour différentes valeurs de  $\alpha$



l'influence de  $\alpha$  sur la simulation. En effet, de la figure 21a à 21f, nous voyons que plus  $\alpha$  est élevé, plus la fibre est difficile à tordre, jusqu'à une valeur de  $\alpha$  (10 est un bon ordre de grandeur dans ce cas) où la fibre se comporte comme une barre rigide. Afin d'analyser finement la réaction de la fibre en fonction de  $\alpha$ , nous avons ajouté tout au long de la fibre les angles locaux pris en chaque particule. Pour ce faire, nous avons simplement ajouté le long de la fibre le  $\sin^{-1}$  du produit vectoriel calculé  $\|\overrightarrow{\eta_{i-1 \rightarrow i}} \wedge \overrightarrow{\eta_{i \rightarrow i+1}}\|$ . Nous définissons donc le taux de torsion  $T_{Fibre} = \sum_{i=2}^{N_{Fibre}-1} |\sin^{-1}(\|\overrightarrow{\eta_{i-1 \rightarrow i}} \wedge \overrightarrow{\eta_{i \rightarrow i+1}}\|)|$  en radian, ce qui correspondra dans le cas d'une fibre continue à  $T_{Fibre} = \int_{Fibre} \frac{dl}{R(l)}$  avec  $R(l)$  le rayon de courbure à l'endroit considéré. Voici par exemple le taux pour différentes fibres :

Nous avons donc relevé au cours de la simulation ce taux selon diverses valeurs de  $\alpha$  (pour  $0 < \alpha < 1$ ). Nous obtenons le graphique suivant :

Nous voyons que pour  $\alpha$  très faible (couple de rappel quasiment nul), la fibre s'enroule autour d'elle-même  $80/(2\pi) \simeq 13$  fois. Le but va être (dans ces conditions particulières) de déterminer  $\alpha$  afin que la fibre ne s'enroule pas autant, tout en ayant un comportement non modifié dans les champs de rotationnel faible. Voici la variation du taux d'enroulement en fonction du paramètre  $\alpha$  (tous les autres paramètres étant fixés) :

Nous voyons que dans la zone où l'enroulement est contrôlé ( $0.315 < \alpha < 0.350$ ) la fibre ne s'enroule pas plus de 8 fois sur elle-même, ce qui est nettement plus acceptable que lorsque l'enroulement ne l'est pas (jusqu'à 14 fois).

La valeur de  $\alpha$  qui sera retenue dans les simulations faites par la suite sera de  $0.33kg/s^2$ . Cette valeur est correcte car elle fait partie de l'intervalle en dehors duquel le couple n'a soit aucun effet, soit est trop important (barre rigide).

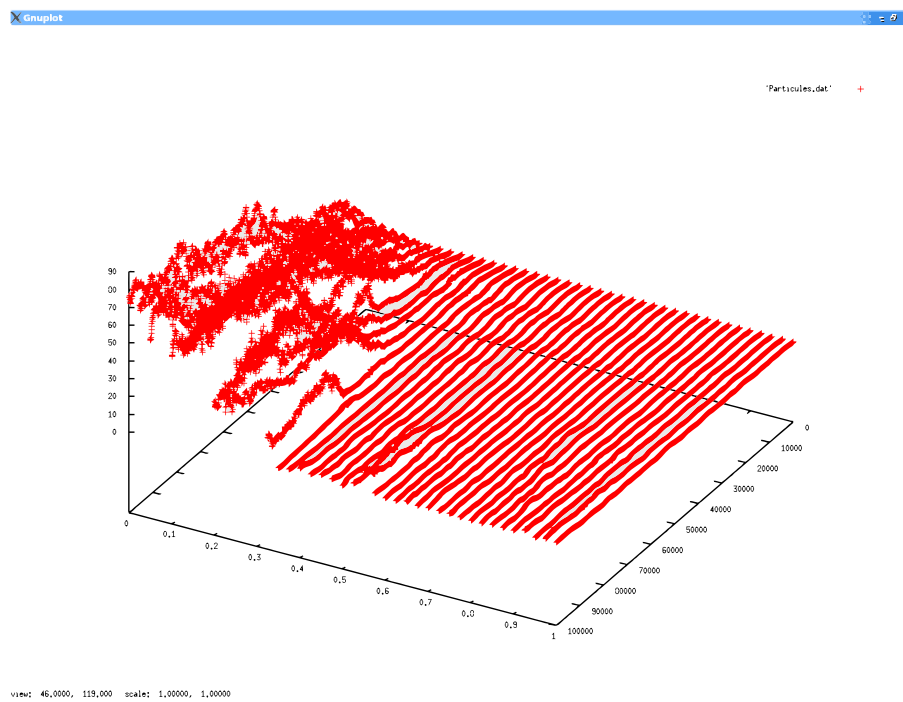


FIG. 22: Taux de torsion en fonction de  $\alpha$  au cours de la simulation

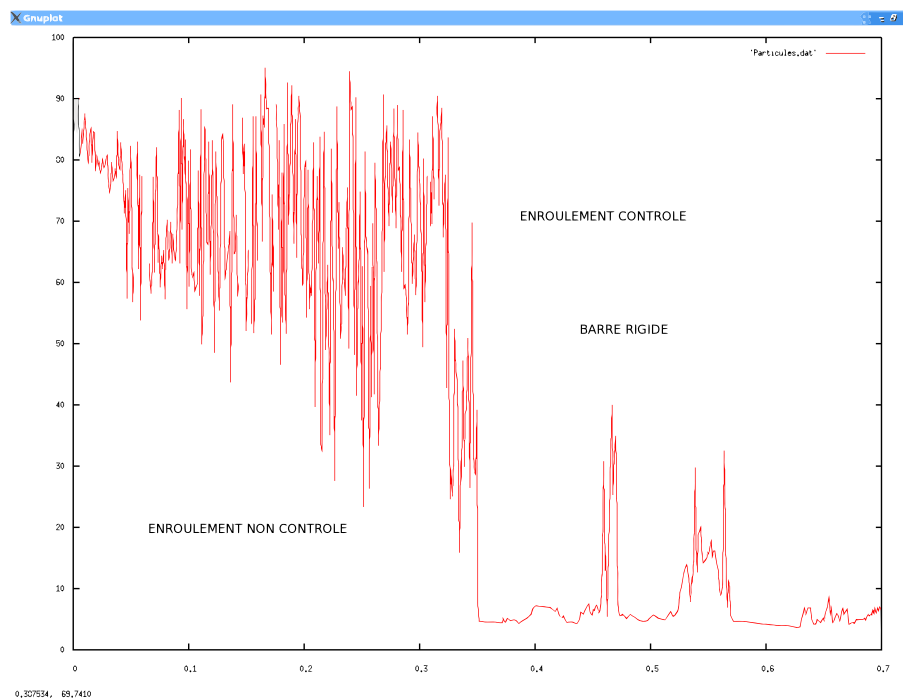
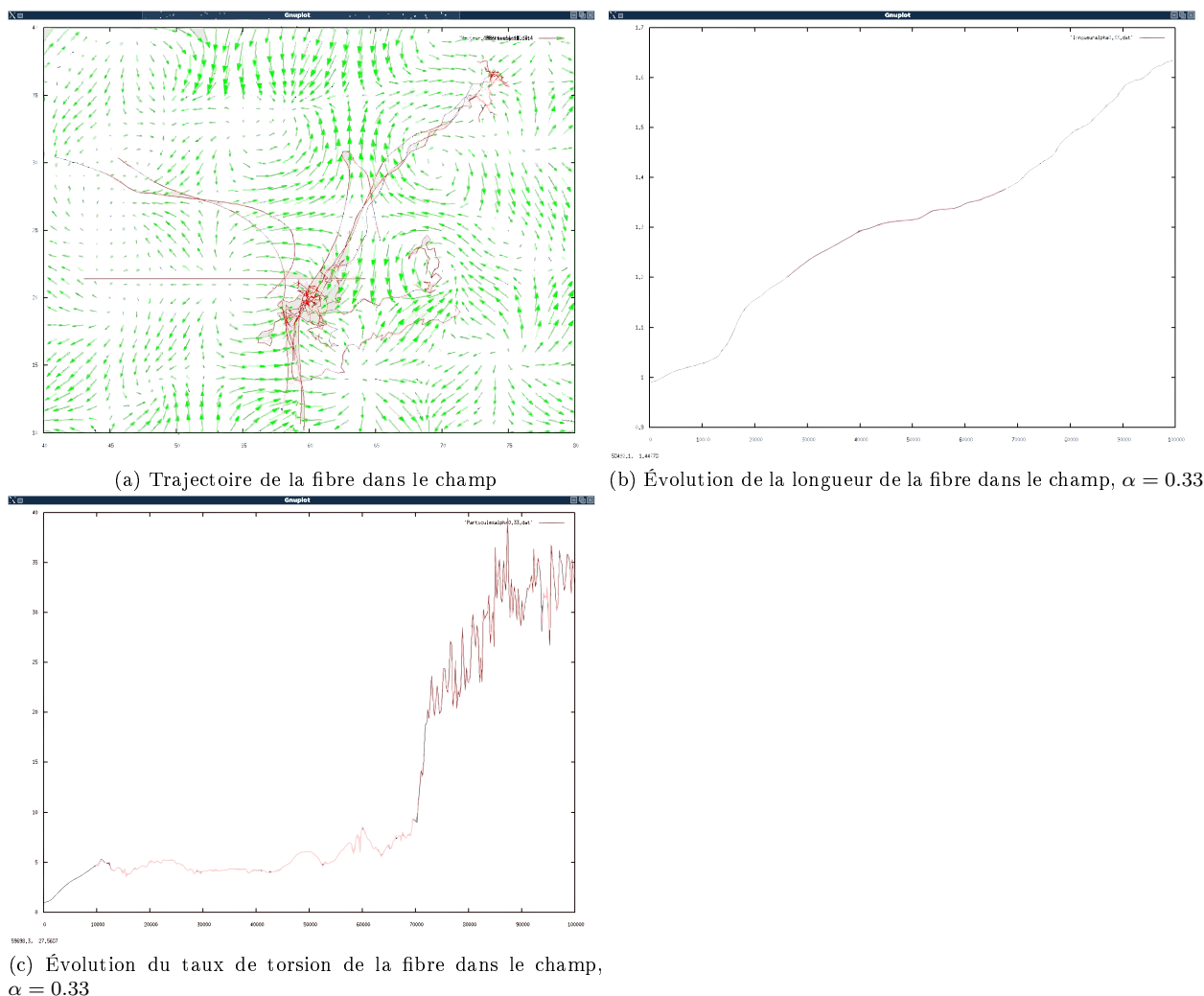


FIG. 23: Enroulement maximum en fonction de  $\alpha$



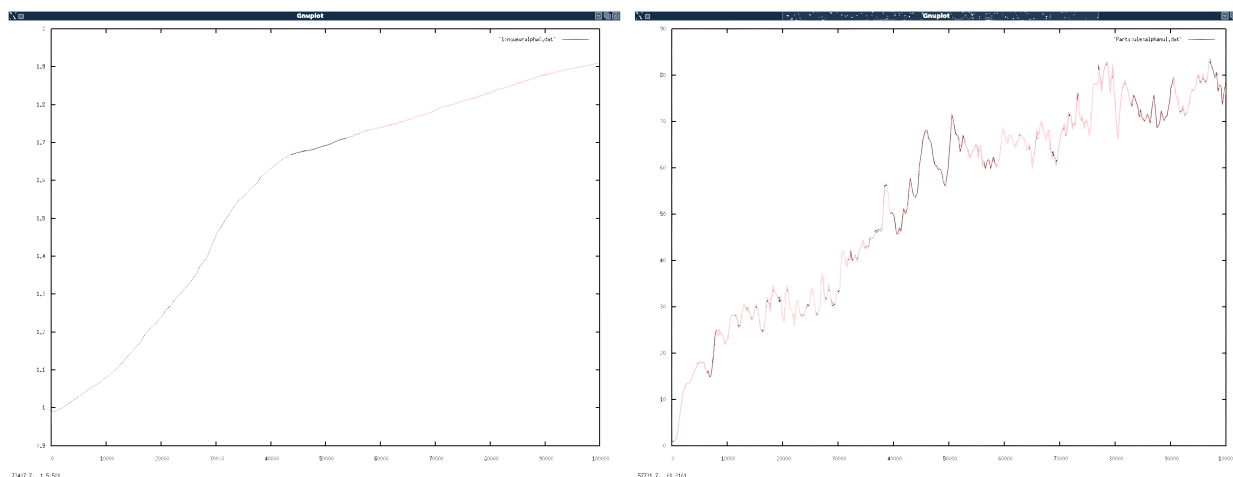
FIG. 24: Évolution d'une fibre et de ses paramètres ( $\alpha = 0.33$ ).

#### 2.4.4 Confrontation des résultats

Voici dans ces conditions particulières le comportement de la fibre avec  $\alpha = 0.33kg/s^2$  :

Voici maintenant la longueur et enroulement de la fibre avec la même simulation effectuée avec un couple de rattrapage  $\alpha = 0kg/s^2$  :

Nous voyons bien que l'élongation de la fibre est sensiblement la même, seul l'enroulement change (donc la trajectoire aussi). L'introduction d'une constante de couple de rappel permet d'éviter un enroulement abusif de la fibre, mais cela ne change pas pour autant l'élongation de la fibre au cours de la simulation, ce paramètre peut donc être utilisé dans la simulation pour l'améliorer.



(a) Évolution de la longueur de la fibre dans le champ

(b) Évolution du taux de torsion

### 3 Conclusion

Cette étude de faisabilité de simulation de fibres de verre dans un champ turbulent nous a montré qu'un modèle relativement simple a permis de simuler un comportement réaliste des fibres. Nous avons vu comment, à partir de la simulation de dispersion de particules dans un champ, nous avons réussi à élaborer un modèle de fibre prenant compte de leur étirement, de leur rupture, de leur torsion et de leur coefficient de traîné. Nous avons de même analysé les résultats de la simulation en fonction de la variation des différents paramètres utilisés. Toutes ces simulations ont été faites sur un ordinateur personnel, donc de puissance bien restreinte, par rapport aux super calculateurs existants. Malgré cette petite puissance, les simulations ont été extrêmement rapides (10 minutes pour la plus longue). Cela tend à présager une intégration simple et efficace dans les codes DNS actuellement développés. Néanmoins, ce modèle restant distant de la réalité physique, plusieurs choses à intégrer seront nécessaires afin d'obtenir des simulations au plus proche du comportement observable de ces fibres. Parmi celles-ci, une condition non plus linéaire pour décrire leur allongement, mais des équations tirées de la rhéologie qui permettront d'obtenir un comportement au plus proche de celui des fibres. De plus, afin de ne plus considérer un environnement figé comme cela a été fait dans ces simulations, une génération du champ au cours du temps sera nécessaire. Dans ce programme il n'a pas été pris en compte de variation de ce champ, cela reste donc à programmer afin de pouvoir l'intégrer dans une DNS.

## Références

- [1] Magazine chocs. *Issu du LRBA*, 2006.
- [2] L. Daudeville F. Bernard and R. Gy. Calcul des contraintes résiduelles dans les zones d'assemblage de plaques verre trempé.
- [3] Etude bibliographique du forgeage, incluant les théories viscolastiques du verre.
- [4] E. Guazzelli. Rhéologie des fluides complexes.
- [5] H. Carré and L. Daudeville. Détermination de la résistance du verre trempé.
- [6] L.R. Glicksman S.Krishnan. A 2-dimensional analysis of heated free jet at low reynolds numbers.
- [7] M.A. Matovich J.R.A Pearson. Spinning a molten threadline.
- [8] Glicksman Leon R. A prediction of the upper temperature limit for glass fibre spinning.
- [9] Cours de mécanique des fluides diphasiques, année m1 epo.