



HAL
open science

Comportement Macroscopique d'un géomatériau linéaire par la méthode XFEM

Senjun Wu, Naïma Belayachi, Do Duc Phi, Dashnor Hoxha

► **To cite this version:**

Senjun Wu, Naïma Belayachi, Do Duc Phi, Dashnor Hoxha. Comportement Macroscopique d'un géomatériau linéaire par la méthode XFEM. Rencontres AUGC 2010 La Bourboule, 2010, France. pp.1-11. hal-00684143

HAL Id: hal-00684143

<https://hal.science/hal-00684143>

Submitted on 30 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement Macroscopique d'un géomatériau linéaire par la méthode XFEM

Senjun Wu¹, Naima Belayachi¹, Duc Phi Do¹, Dashnor Hoxha¹

¹ Institut PRISME, (EA4229) Polytech'Orléans, rue Léonard de Vinci, 45072 Orléans Cedex 2, France

senjun.wu@etu.univ-orleans.fr, naima.belayachi@univ-orleans.fr,

dashnor.hoxha@univ-orleans.fr, duc-phi.do@univ-orleans.fr

RÉSUMÉ. Cette étude est consacrée au développement d'une approche d'homogénéisation numérique basée sur la méthode XFEM pour déterminer le comportement d'un géomatériau hétérogène. Cette méthode numérique vise à construire la microstructure complexe sans avoir besoin d'un maillage s'adaptant à la structure contrairement à la méthode des éléments finis classique. L'approximation est enrichie par une fonction additionnelle tenant compte de la contribution des interfaces dans le comportement général. La méthode des fonctions de niveau (level set) est couplée avec XFEM pour permettre de définir les discontinuités ou interfaces des matériaux. Le matériau considéré est un composite biphasique constitué d'une matrice continue et des inclusions sphériques. Les exemples numériques sont présentés pour montrer la validité de la méthode d'homogénéisation et d'examiner l'effet de l'interaction entre inclusions.

ABSTRACT. This study aims to model the behaviour of geomaterials by a numerical homogenization based (XFEM) method. The XFEM allows to use meshes not necessarily matching the physical surface of the problem while retaining the accuracy of the classical finite element approach. The approximation is enriched by additional functions taking into account the interfaces contribution in the general behaviour. The level set method is coupled with XFEM for representing material interfaces and discontinuities. The material considered is the biphasic composite with continuous matrix and spherical inclusions. The numerical examples are presented to demonstrate the validity of numerical homogenization procedure and to study the inclusions interaction effect.

MOTS-CLÉS : géomatériau, homogénéisation, la méthode XFEM, fonction de niveau

KEY WORDS: geomaterial, homogenization, the method XFEM, level set function

1. Introduction

Les géomatériaux sont, de part leur histoire, des matériaux fortement hétérogènes et leur comportement mécanique macroscopique dépend de leur composition minéralogique, du comportement mécanique local de chaque constituant et de la microstructure.

Parallèlement à l'approche classique des milieux continus, la modélisation du comportement de tels matériaux est de plus en plus abordée par des approches micromécaniques de changement d'échelle. Les approches analytiques et semi-analytiques basées sur la solution d'Eshelby [GIR 07], tout en donnant un aperçu assez fidèle des mécanismes gouvernant le comportement des géomatériaux, présentent des limites lorsqu'il s'agit de prendre en compte les interactions entre différents constituants lorsque la structure devient, complexe, ce qui est le cas souvent, pour les géomatériaux.

De nombreuses approches ont été développées et proposées pour la modélisation du comportement des matériaux fortement hétérogènes en utilisant des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis, des volumes finis ou encore des différences finis.

Très souvent, les approches numériques faisant usage de l'hypothèse d'un milieu périodique et des calculs directs basés sur la méthode des éléments finis, sont utilisées avec succès pour décrire le comportement linéaire et surtout non linéaire de tels matériaux. Néanmoins ces méthodes sont sujets de deux défauts majeurs : d'abord l'hypothèse de périodicité n'est que très rarement vérifiée stricto-sensu et ensuite pour des structures complexes l'utilisation de la méthode aux éléments finis classique présente des contraintes importantes de raffinement de maillage et de remaillage ce qui a pour effet d'une part de dégrader la précision des résultats et d'autre part, de mobiliser des ressources numériques importantes qui dépassent souvent les capacités disponibles.

Afin de développer une alternative permettant de surmonter ces difficultés, le but de ce travail est de proposer une méthode d'homogénéisation numérique basée sur la méthode XFEM (méthode des éléments finis étendue) [MOE 99] qui permet de construire la microstructure complexe et la présence de discontinuités, sans avoir besoin d'un maillage s'adaptant à la structure.

Le principal atout de cette nouvelle méthode, apparue initialement [BEL 99] pour l'étude des fissures, est de proposer une simple extension de la méthode des éléments finis en autorisant un maillage indépendant de la géométrie du problème. Pour représenter une discontinuité ou une singularité au sein des éléments finis, la base des fonctions de forme est enrichie. La position et la géométrie de la frontière est représenté par l'utilisation des fonctions de niveau (level set function).

Cependant, frontières, vides, fissures deviennent des entités que l'on peut insérer, déplacer, propager, sans avoir à modifier le maillage. Par rapport aux travaux existants sur cette méthode, la particularité de cette étude tient dans l'utilisation d'une approche d'homogénéisation numérique en utilisant la méthode XFEM pour déterminer les champs locaux de contraintes et de déformations. Le géomatériau étudié est considéré comme un composite constitué d'une matrice et des inclusions sphériques. La méthode XFEM est utilisée donc pour représenter les inclusions, et le comportement macroscopique du géomatériau via les relations de moyennes.

2. Principe de la méthode X-FEM

Avant de proposer la procédure d'homogénéisation utilisant la méthode XFEM et justifier notre choix, nous présentons brièvement le principe de XFEM. En comparaison avec la méthode des éléments finis classiques, où le maillage doit se conformer aux surfaces de discontinuité (figure 1.a), la méthode XFEM utilise un maillage de fond (figure 1.b) pour intégrer les équations (d'équilibre dans notre cas). Ce maillage est indépendant de la géométrie du problème ce qui faciliterait l'utilisation de la méthode dans le cas des géométries complexes.

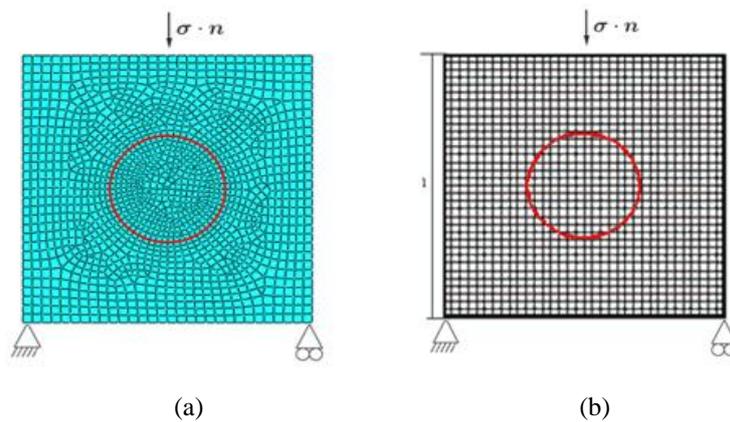


Figure 1. (a) maillage de la méthode FEM, (b) maillage de la méthode XFEM.

Les frontières des discontinuités (contact de grains, frontières d'inclusions et des pores etc) sont décrites par des fonctions de niveaux (level sets), par contre, l'influence de ces frontières sur la réponse du matériau peut être représentée en ajoutant des fonctions discontinues spécifiques dans la base d'interpolation, autrement dit en enrichissant la base [SUK 01]. L'approximation du déplacement dans la méthode XFEM prend la forme générale suivante :

$$u^{X-FEM} = \sum_{i \in I} N_i(x) u_i + \sum_J a_J N_J(x) F(x) \quad [1]$$

où I est l'ensemble des nœuds du maillage, u_i le degré de liberté classique du nœud i , N_i est la fonction de forme possédant la propriété de la partition de l'unité, J l'ensemble des nœuds enrichis, a_j représente les nouveaux degrés de liberté et $F(x)$ est la fonction d'enrichissement.

La figure 2 montre un exemple de maillage utilisé avec les nœuds enrichis dans le cas d'une inclusion. Tous les nœuds d'un élément qui contient une partie de l'interface sont enrichis pour prendre compte la discontinuité des déplacements via cette interface.

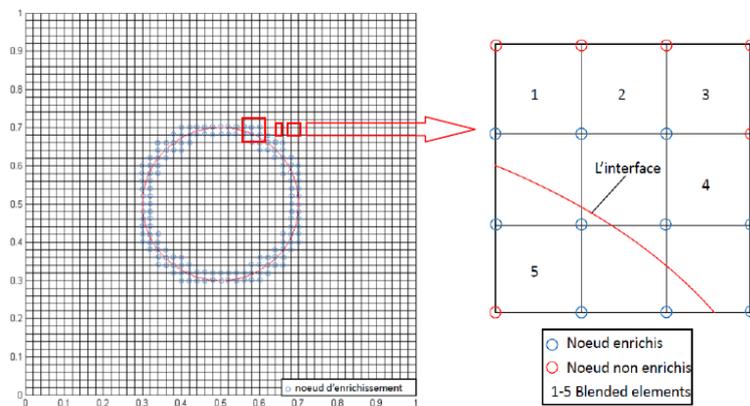


Figure 2. Maillage dans le cas d'une inclusion avec les nœuds enrichis.

2.1 Fonction de niveau (level-set)

Une fonction de niveau est utilisée pour décrire une frontière entre les composantes et s'apparente à un champ de valeurs associé à la frontière ([SET 99]). Cette fonction peut être calculée pour n'importe quel point de l'espace et représente la distance qui sépare ces points de la frontière. En particulier elle est calculée en chaque nœud du maillage I qui se voit alors assigner une valeur algébrique $\phi_i(x)$ donnant la distance de ceux-ci à la frontière (cette valeur de la fonction de niveau prend, par exemple, une valeur négative à l'intérieur d'un vide et positive à l'extérieur).

Il est alors possible de calculer par interpoler la valeur de cette fonction à tout autre point x via les fonctions d'interpolation classiques :

$$\Phi(x) = \sum_I N_I(x) \phi_I \quad [2]$$

Où $N_I(x)$ est la fonction de forme associée au nœud i , ϕ_I est la valeur nodale de la fonction de niveau.

2.2 Choix de la fonction d'enrichissement

La fonction d'enrichissement dépend de la nature du problème étudié. On étudie par la suite deux fonctions d'enrichissement. La première fonction d'enrichissement, qui prend en compte le saut des déplacements dans les interfaces du à la discontinuité est proposé par N. Sukumar dans [SUK 01], elle peut s'exprimer par :

$$F_1(x) = \left| \sum_I \phi_I N_I(x) \right| \quad [3]$$

N. Moes [MOE 03] propose une nouvelle fonction d'enrichissement permettant d'avoir un effet uniquement sur les éléments traversés par l'interface. Au contraire de la fonction F_1 , celle-ci prend une valeur nulle sur les bords des éléments enrichis permettant de limiter l'action de cette fonction aux éléments traversés par l'interface. Elle est donnée par :

$$F_2(x) = \sum_I |\phi_I N_I(x)| - \left| \sum_I \phi_I N_I(x) \right| \quad [4]$$

3. Résultats et discussion

3.1 Validation de la méthode et comparaison

Afin de valider l'approche, trois cas tests simples ont été traités en utilisant d'une part les calculs par cette méthode et d'autre part des calculs directs aux éléments finis. Les cas traités, à présent, sont trois problèmes avec un matériau contenant des vides et ensuite des inclusions. Nous avons choisi pour ces cas d'utiliser la fonction d'enrichissement F_2 .

On traite d'abord le problème d'un cube contenant une cavité sphérique au centre. Les caractéristiques mécaniques pour la matrice sont le module d'Young $E = 7600\text{MPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.1$. La figure 3 montre les conditions aux limites et de chargement (test de compression) auxquelles est soumise la cellule de base. La fraction volumique utilisé dans ce cas est de 3.35%.

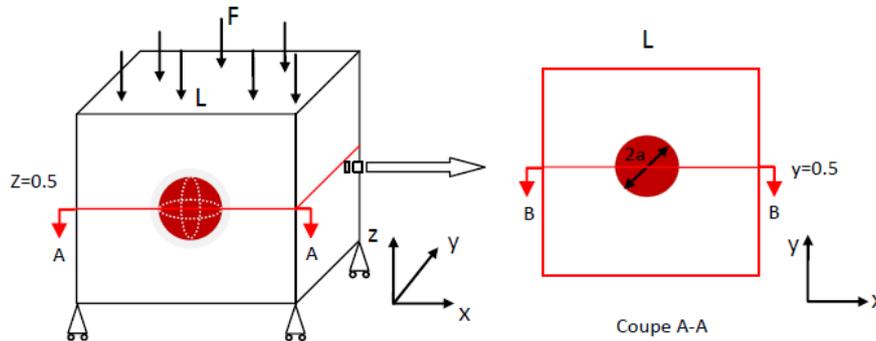


Figure 3. Conditions aux limites et de chargement du matériau biphasique.

Les courbes de la figure 4 présente une comparaison des résultats de la méthode XFEM et la méthode des éléments finis en utilisant le code de calcul ABAQUS. Les résultats obtenus en utilisant XFEM sont en bon accord avec ceux obtenus par FEM ce qui constitue une première validation de la procédure.

Le deuxième cas de validation de la méthode est celui d'une inclusion sphérique centrale dans une matrice cubique. Ce cas qui est plus proche d'un géomatériau est étudié avec la même géométrie que le calcul précédent avec la différence près que le vide est remplacé par l'inclusion et que les propriétés de la matrice et d'inclusions (tableau 1) ont été choisies proches de celles d'une argilite (une matrice argileuse particule de calcite).

Propriétés élastiques	Matrice	Inclusion
Module de YOUNG	7600 MPa	84000 MPa
Le coefficient de poisson	0.1	0.3

Tableau 1. Les propriétés élastiques des constituants.

Les profils des contraintes selon une coupe passant par le centre d'inclusions sont présentés sur la figure 5 et sont comparés, dans ce cas, d'une part avec les résultats obtenus de la méthode des éléments finis (calcul ABAQUS) et d'autre part avec la solution analytique d'Eshelby. Ces résultats indiquent une très bonne concordance entre les résultats XFEM et FEM, tandis que la différence avec la solution analytique est inférieure à 4%. Cette différence est principalement due au fait que les conditions d'un milieu infini supposé dans la solution analytique ne sont pas satisfaites dans le calcul numérique.

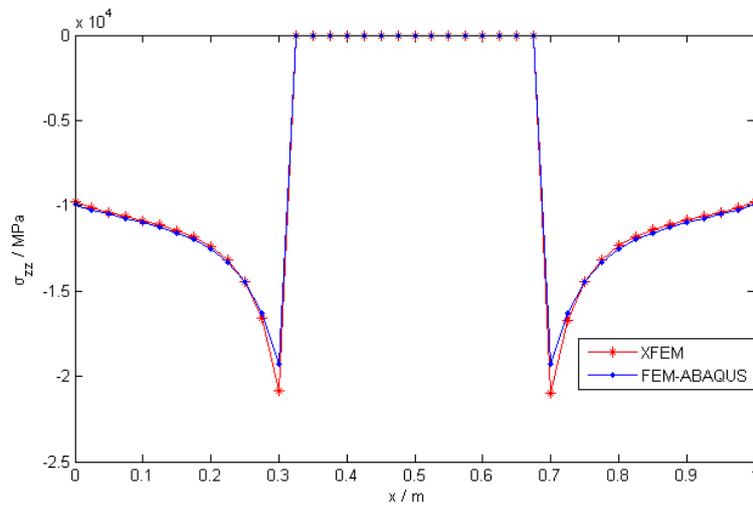


Figure 4. Comparaison des contraintes selon une coupe horizontale au milieu du cube contenant un vide (coupe B-B).

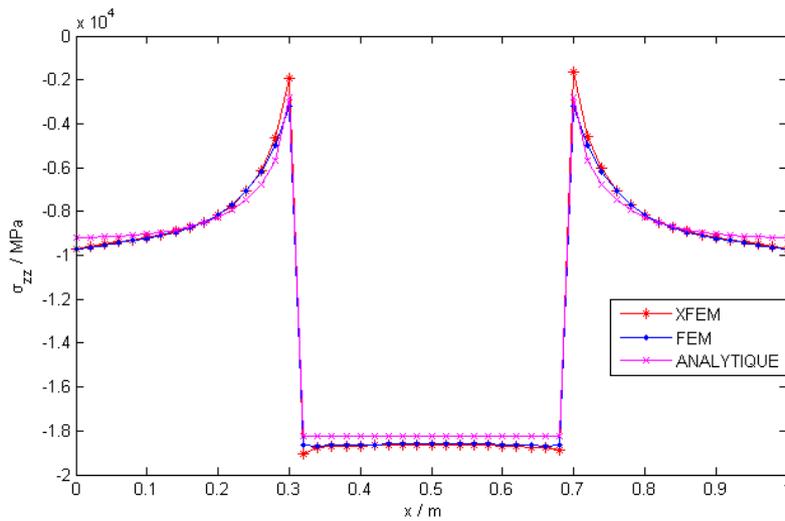


Figure 5. Comparaison des contraintes selon une coupe horizontale (coupe B-B) au milieu du cube contenant une inclusion.

Le troisième cas de validation concerne les propriétés effectives d'un milieu périodique constitué d'une matrice solide et des inclusions sphériques (figure 6). Les propriétés élastiques de la matrice, des inclusions sont celles du tableau 1 avec une fraction volumique de 21%. Le calcul de référence, basé sur XFEM, est réalisé sur

une cellule de base en appliquant les conditions de la périodicité (figure 6.a). Le calcul XFEM global quant à lui contient l'ensemble des inclusions et un maillage de fond régulier (figure 6.b).

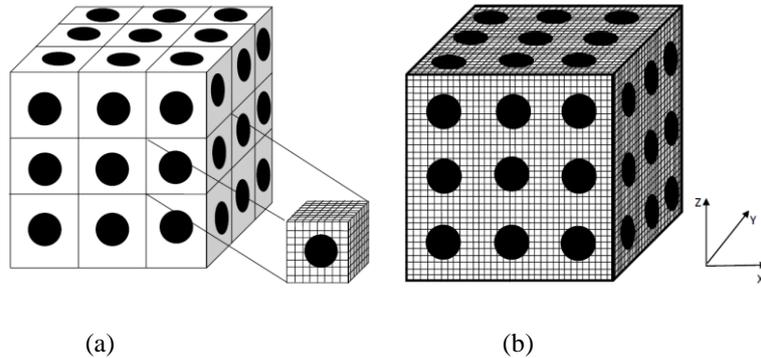


Figure 6. Cube contenant des inclusions sphériques selon une distribution périodique, (a) cellule de base, (b) méthode XFEM.

Les propriétés effectives (module d'Young et coefficient de Poisson) obtenues par les deux procédures sont présentées dans le tableau 2. Les différences entre les résultats du calcul de référence et XFEM global proviennent principalement du niveau de discrétisation différent utilisé dans les deux calculs. En général, et comme cela a été émis en évidence par différents auteurs ([BEL 03], [MOE 03]), un maillage suffisamment fin est nécessaire pour obtenir des résultats précis.

Propriétés effectives	Cellule de base	Méthode XFEM	Différence entre les deux méthodes (%)
Module de YOUNG effectif (MPa)	10761.1	11130.3	3.3
Coefficient de Poisson	0.1374	0.1255	8.6

Tableau 2. Comparaison des propriétés effectives d'un matériau périodique à inclusions sphériques.

3.2 Influence de la distribution des inclusions sur les propriétés effectives

Le problème de l'influence de la distribution aléatoire des inclusions sur les propriétés effectives a été étudié dans cette partie via deux exemples simples concernant des distributions non-périodiques. Pour les deux cas une comparaison a été effectuée entre les résultats obtenus par XFEM et via une procédure dite effective. Selon cette procédure les propriétés effectives sont calculées en deux temps. Dans un premier temps, pour chaque élément cubique (figure 7.a) lorsque

celui-ci contient une inclusion, les propriétés effectives de l'élément sont calculées en utilisant XFEM et une cellule élémentaire similaire à celle de la figure 6.a. Les éléments cubiques ne contenant pas d'inclusions préservent les propriétés de la matrice. Dans une deuxième étape les propriétés ainsi définies sont injectées dans un calcul aux éléments finis contenant uniquement des éléments cubiques, homogène au niveau d'un seul élément, mais variable d'un élément à l'autre.

Pour le calcul XFEM on préserve le même maillage que dans le calcul précédent en ajoutant les mêmes inclusions que pour le calcul « effectif » (figure 7.b)

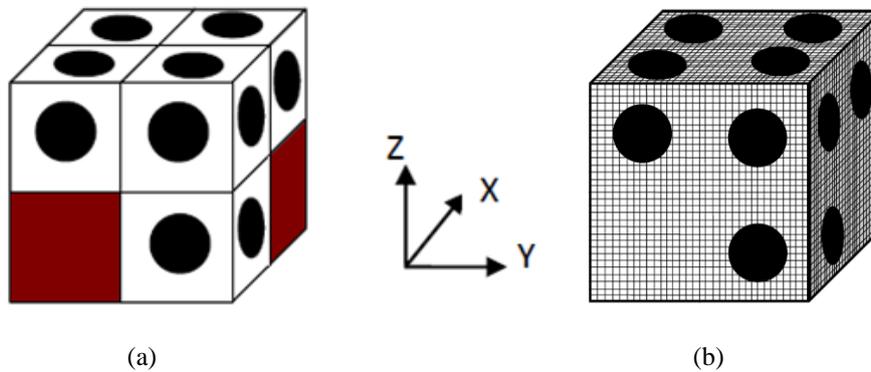


Figure 7. Cube contenant des inclusions sphériques selon une distribution non périodique, (a) procédure effective, (b) méthode XFEM.

	Méthode effective	XFEM	Différence entre les deux méthodes (%)
Ez (MPa)	10633.2	10634.1	0.008
Ey (MPa)	10755.1	10795.9	0.4
Ex (MPa)	10779.2	10904.5	1.15

Tableau 4. Module de Young effectif du matériau à inclusions sphériques selon une distribution non périodique.

La simulation est réalisée avec les mêmes propriétés élastiques des phases du tableau 1 et une fraction volumique de 21% pour les deux cas de calculs. Les résultats des propriétés effectives selon différents axes pour les deux méthodes sont donnés dans le tableau 4 (où l'on s'est limité uniquement dans la présentation des modules de Young).

La même fraction volumique et les mêmes propriétés ont été utilisées pour

effectuer deux autres calculs en prenant deux distributions aléatoires des inclusions (figure 8.a et 8.b). Les positions des inclusions sphériques sont définies par un algorithme aléatoire et lorsqu'une nouvelle sphère est intersectée par une sphère déjà présente, une nouvelle position du centre est définie. Enfin, lorsqu'une sphère est coupée par une face du cube, son image périodique sur l'autre face est réalisée. Les résultats des propriétés effectives sont donnés dans le tableau 5.

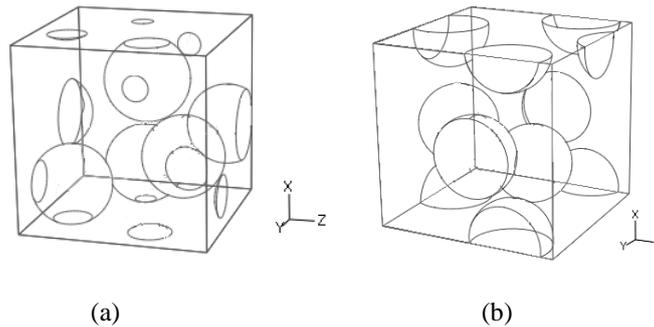


Figure 8. Deux exemples de distributions aléatoires des inclusions.

Propriétés effectives	Distribution (a)	Distribution (b)	Différences entre deux distributions (%)
E_z (MPa)	10664.2	10828.8	1.5%
E_y (MPa)	10988.9	10531.4	4.2%
E_x (MPa)	10821.7	10782.3	0.4%

Tableau 5. Module de YOUNG effectif des matériaux à inclusions sphériques selon les deux distributions aléatoires des figures 8.a et 8.b.

Les résultats présentés ici montrent qu'en dépit du faible nombre d'inclusions qui ne favorisent pas des distributions fortement aléatoires, et malgré le nombre limité des cas étudiés une tendance globale de prise en compte de l'interaction entre les inclusions a été mise en évidence via les calculs XFEM. Ces interactions sont parfois faibles et leur contribution dans la réponse globale du matériau est négligeable. Cependant en vue des derniers résultats ces interactions sont susceptibles de devenir d'autant plus importantes que la structure du matériau devient complexe et le nombre d'inclusions augmente. La méthode XFEM globale deviendra alors un outil appréciable pour tenir compte de ces interactions.

4. Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une méthode numérique d'homogénéisation en utilisant la méthode XFEM, permettant de prédire le comportement linéaire des géomatériaux. Les diverses applications ont permis de valider le développement en MATLAB de la méthode et de mettre en évidence la pertinence de cette méthode à la prédiction des propriétés effectives des matériaux hétérogènes tels que les géomatériaux. La fonction d'enrichissement adoptée procure des résultats similaires à ceux obtenus avec la méthode des éléments finis classique et la méthode analytique. De plus, l'utilisation de fonctions de niveau a démontré certains avantages dans le cas de réalisation de géométries complexes des interfaces matériaux par sa simplicité d'usage. Un seul maillage a été utilisé alors que l'emploi de la méthode des éléments finis induit une nouvelle construction du maillage à chaque distribution des particules. La continuité immédiate de ce travail consiste à étudier des matériaux à structures plus complexes en y introduisant plus de deux types de matériaux, une distribution aléatoire plus réaliste et un comportement non-linéaire des constituants.

5. Références

- [BEL 99] Belytschko T., Black T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 45, 1999, p. 601-620.
- [BEL 03] Belytschko T., Chandu P., Moes N., Sukumar N. and Shuji Usui: Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 56, 2003, p. 609-635.
- [GIR 07] Giraud A., Huynh Q. V., Hoxha D., Kondo D.: Application of results on Eshelby tensor to the determination of effective poroelastic properties of anisotropic rocks-like-composites. *International journal of solids and structures*, vol. 44, 2007, p. 3756-3772.
- [MOE 03] N.Moes, M.Cloires, P.Cartraud, J.F Remacle: A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2003, vol. 192, Pages 3163-3177.
- [MOE 99] Moes Nicolas, Dolbow John, Belytschko M.T: A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- [SET 99] Sethian, J.-A. (1999) *Level Set Methods & Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. UK Cambridge University Press.
- [SUK 01] Sukumar N., Chopp D. L., Moes N., Belytschko M. T. : Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, 2001, p. 6183-6200.