



**HAL**  
open science

# Induction de type gravitationnelle générée par des densités de courants d'accélération de masses

Mathieu Beau

► **To cite this version:**

Mathieu Beau. Induction de type gravitationnelle générée par des densités de courants d'accélération de masses. 2012. hal-00683021v1

**HAL Id: hal-00683021**

**<https://hal.science/hal-00683021v1>**

Preprint submitted on 27 Mar 2012 (v1), last revised 26 Sep 2014 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Induction de type gravitationnelle générée par des densités de courants d'accélération de masses

Mathieu Beau\*

*School of Theoretical Physics, Dublin Institute for  
Advanced Studies, 10 Burlington Road, Dublin 4<sup>†</sup>*

(Dated: March 27, 2012)

## Abstract

Nous proposons une théorie (G) du champ vectorielle  $G_\mu(x)$  en s'appuyant sur une construction analogue à la théorie électromagnétique (EM) et sur un principe d'induction de type gravitationnelle générée par des densités de courants de masses accélérées. Il s'agit de présenter les fondements de la théorie de champ (G) en discutant d'abord ce principe d'induction sur lequel on se base pour construire un champ, puis en proposant les équations de ce champ. Nous introduirons ensuite des champs physiques et établirons les équations qui décrivent un nouveau phénomène de type gravitomagnétique prédit par la théorie (G) s'ajoutant en première approximation à l'effet gravitomagnétique (GEM) dont les équations dérivent de la théorie de la relativité générale de la gravitation (RG). Enfin, nous discuterons comme perspectives théoriques de ce travail, l'implémentation de la théorie (G) au cadre général de la relativité (RG).

## CONTENTS

I	Notes d'introduction à propos du travail en cours de préparation	2
II	Principe d'induction et construction d'un champ vectoriel couplant avec l'accélération des corps en mouvement	3
A	La théorie de la gravitation Newtonienne et Einsteinienne	3
B	L'induction de type gravitationnelle par des courants d'accélération de masses	4
C	Construction d'un champ vectoriel couplant avec l'accélération des corps en mouvement	7
III	Les équations du champ	11
A	Champs physiques du tenseur de déformations gravitationnelles	11
B	Premier groupe d'équation : équations de structure	13
C	Deuxième groupe d'équations : lien avec les sources	14
D	Équations de propagations	17
1	Équations de propagation du potentiel $G_\mu(x)$	17
2	Équations de propagation des champs physiques $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$	18
E	Constante de couplage $\kappa$ dite <i>constante d'induction gravitationnelle</i>	19
F	Tenseur des contraintes gravitationnelles	21
IV	Champs physiques et nouveau phénomène de type gravitomagnétique (GEM-G)	23
A	Idée générale	23
B	Équations de champs de type gravitomagnétique	24
V	Implémentation au cadre de la RG	26
A	Retour sur le principe d'induction	26
B	Équations covariantes	26
C	Tenseur des contraintes du champ (G) et tenseur impulsion-énergie total	28
D	Argument cosmologique et hypothèse sur l'expression de $\kappa$ dans le vide	29
E	Couplage du champ métrique et du champ d'induction gravitationnelle	30
	References	32

## I. NOTES D'INTRODUCTION À PROPOS DU TRAVAIL EN COURS DE PRÉPARATION

En parallèle de mes activités de recherches actuelles, je me concentre depuis deux ans sur le projet de recherche traité dans ce manuscrit qui nécessite un travail scrupuleux et demande beaucoup de recul et donc de temps pour en cerner la portée et les limites. Les recherches dans le domaines de la gravitation, qu'elles soient théoriques ou expérimentales sont si nombreuses qu'il faudrait une vie entière pour lire en détail, analyser, trier, décortiquer tout ce qui a été dit sur le sujet. La théorie ici présentée n'ayant, à ma connaissance, jamais été formulée et il reste encore beaucoup de choses à faire pour l'exploiter au maximum et pour la connecter avec les autres théories. Il reste en particulier à creuser plus en profondeur la phénoménologie lié à la théorie et donc à donner des calculs en liens avec les expériences passées et futures. Nous réservons ce travail pour la suite et ferons évoluer le manuscrit dans ce sens.

Dans le manuscrit, nous donnons une première approche d'une théorie vectorielle que je caractérise comme gravitationnelle, en vertu des similitudes des équations de mouvements de particules tests. Cette première approche consiste à donner une présentation épistémologique du principe d'induction du champ par des masses en accélération en parallèle avec la théorie usuelle de la gravitation (la discussion pourra se développer plus en détail par la suite).

Après cela, nous construisons par analogie à la théorie électromagnétique (elle-même étant vectorielle) la théorie du champs en s'appuyant sur les principes d'induction du champ par des densités de courant d'accélération de masses et de couplage du champs vectoriel avec l'accélération des particules tests. Nous obtenons les équations de champs, de propagations, discutons la dimension physique et la valeur de la nouvelle constante de couplage et l'analogie avec la théorie des milieux continus (MMC), notamment en introduisant le tenseur des contraintes de notre théorie tout à fait similaire à celui de la (MMC).

Ensuite, nous essayons de regarder comment interpréter les champs physiques et leur rôle dans le mouvement des particules qui les subissent. Il vient naturellement l'idée de voir en limite de petites vitesses et de faibles champs, les corrections apportées aux équations gravitomagnétiques dérivant des équations linéaires de la (RG). Ainsi, supposons que nous ayons une source qui accélère, i.e. qui sort du mouvement géodésique, quelles sont les lois gravitomagnétiques (différentes ici) et quels sont les ordres de grandeurs comparés aux ordres

de grandeurs attendus en (RG) ? Nous n'avons pas fini le dernier point de la question, certes important, mais il est clair qu'il s'agit de la première priorité pour la suite de la rédaction du manuscrit.

Dans les perspectives nous discutons l'implémentation de notre théorie, qui se base sur un paradigme différent de la théorie de la gravitation relativiste, nous montrons que regardée comme une théorie de déformation d'un milieu continu, notre théorie est complémentaire à la théorie générale de la relativité (RG), de la gravitation. Pour la suite du travail, je n'ajouterai pas à ce manuscrit l'ensemble des recherches sur ce sujet car cela fait l'objet d'un travail entier qui sera écrit après avoir finalisé ce papier.

## II. PRINCIPE D'INDUCTION ET CONSTRUCTION D'UN CHAMP VECTORIEL COUPLANT AVEC L'ACCÉLÉRATION DES CORPS EN MOUVEMENT

### A. La théorie de la gravitation Newtonienne et Einsteinienne

La théorie de la gravitation telle que nous la connaissons et telle que nous l'admettons aujourd'hui s'est historiquement construit par différentes approches, vue comme une force à distance par Newton où comme une propriété géométrique de l'espace par Einstein. Pour tout ce qui fait référence à la théorie relativiste et Newtonienne de la gravitation, voir les références classiques.<sup>1,2,3,4</sup> Il existe quelque chose de commun à ces deux approches, le principe d'équivalence qui présente différents énoncés et une version plus forte en théorie de la relativité générale du champ de gravitation, mais fondateur dans les deux cas de la théorie de champ.

Le principe d'équivalence dit deux choses importantes et incontestées aujourd'hui, de part les expériences de grandes précisions. La première dit que la masse grave d'un corps et sa masse inerte sont égales. La seconde dit que la chute d'un corps dans un champ de gravitation est localement équivalente à un mouvement accéléré de ce corps. Ca veut dire qu'en tout point de l'espace, il existe un référentiel localement inertiel, et que donc la gravitation dans ce référentiel local est nulle. Dans l'approximation Newtonienne, dans le cas où le champ est considéré uniforme et constant selon une direction  $z$  de l'espace, on peut représenter ces deux principes par l'équation simple suivante :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g , \quad (1)$$

où  $g$  est le champ de gravitation où l'accélération du corps. La masse n'apparaissant pas puisqu'elle est à la fois l'inertie et le couplage avec *le champ d'accélération*.

Pour construire les équations du champ, Einstein a formulé comme principe que toute forme d'énergie présent dans l'espace-temps est source de gravitation. Ce principe généralise le principe de Newton associant toute masse à un champ de gravité:

$$\Delta\phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) , \quad (2)$$

puisqu'il combine à la fois les premiers principe d'équivalence en caractérisant de façon géométrique le champ de gravitationnel et car il associe l'énergie et pas seulement la masse comme origine du champ:

$$E_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} , \quad (3)$$

où  $E_{\mu\nu}$  est le tenseur d'Einstein dépendant des dérivées première et seconde de la métrique de l'espace temps ( $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci et  $R \equiv R^\mu_\mu$  la courbure scalaire) et où  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur impulsion-énergie associé à la matière et au rayonnement qui obéit à la loi de conservation suivante :

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (4)$$

où  $D_\mu$  est la dérivée covariante; cette redonne les équations du mouvement géodésiques des distributions de masses (qui ne dépendent donc pas des valeurs des masses) :

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}u^\nu u^\sigma = 0 , \quad (5)$$

où  $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$  est la symbole de Christoffel.

## B. L'induction de type gravitationnelle par des courants d'accélération de masses

Considérons une masse ponctuelle se déplaçant dans un champ de gravité uniforme et constant, et un observateur placé dans un référentiel galiléen. Tout le monde s'accorde à dire, d'après la théorie usuel de la gravitation Newtonienne, que la masse accélère de façon constante (on considère ici pour la discussion les lois de la relativité Galiléenne pour simplifier les raisonnements). Maintenant, considérons qu'il n'existe pas de champ de gravité et imaginons que par une source extérieure, nous forçons une masse (ponctuelle) à se mouvoir de façon accélérée, uniforme et constant. Supposons dans un premier temps, que l'on néglige (ce que

nous pouvons discuter) le champ de gravitation usuel produit par la masse en mouvement, de sorte que la métrique de l'espace-temps puisse être considérée comme Minkowskienne en théorie relativiste ou en théorie Newtonienne, de sorte à ce que le potentiel de gravitation produit par la particule soit considéré comme nul. Alors, on pourrait formuler une *réci-proque le principe d'équivalence* qui dirait que l'accélération de la masse qui se trouve être uniforme et constante, devrait correspondre (grossièrement) à un champ de gravitation uniforme et constant, relativement au référentiel galiléen dans lequel est placé l'observateur. Dès lors, si l'on ajoute dans l'espace, une autre masse (ponctuelle), dont la valeur de la masse est suffisamment petite pour ne pas ajouter un champ de gravitation (Newtonien), on pourrait supposer que celle-ci subisse un champ de gravitation uniforme et constant qui serait induit par le déplacement de la première masse forcée de se déplacer de façon accélérée. Comme on l'a dit précédemment, on suppose que les perturbations métriques sont suffisamment faibles pour ne pas avoir à s'en préoccuper. Alors, quelle est donc l'origine de ce champ ? Remarquons tout d'abord que nous avons fait une approximation grossière en disant que le *champ d'accélération* ou champ supposé de gravitation induit par le déplacement accéléré de la masse est uniforme et constant. En effet, nous n'avons pas tenu compte de la distribution spatiale de masse de la particule (qui se trouve être localisé en un point à chaque temps  $t$  de son mouvement) et que donc le champ d'accélération devrait lui aussi être présenté comme une distribution dans l'espace (ajoutons que nous n'avons pas pris en compte les effets de propagation dans l'espace et dans le temps du champ, mais cela sera fait dans le cadre de la cinématique relativiste). Ainsi, le champ lui même doit se présenter comme une distribution spatiale, où en chaque point de l'espace il présente une valeur, notons ce champ  $\vec{a}_G(t, \vec{x})$ . Le principe que nous venons d'énoncer, que l'on peut appeler *la réci-proque du principe d'équivalence* au sens où tout mouvement accéléré génère un champ de gravitation se formule de façon analogue au principe d'action réci-proque où le champ de force (ou densité de force) générée par le déplacement des masses est égale à l'opposé du champ de force générée par le champ de gravitation:

$$\boxed{\rho(t, \vec{x}) \vec{a}_P = -\rho_G \vec{a}_G(t, \vec{x})}, \quad (6)$$

où  $\rho(\vec{x})$  est la distribution de masse (par unité de volume),  $\vec{a}_P$  est l'accélération des masses,  $\vec{a}_G(\vec{x})$  est le champ d'accélération et  $\rho_G$  est une constante de densité gravitationnelle (nous l'expliciterons dans la suite).

On peut expliciter le champ  $\vec{a}_G(t, \vec{x})$  qui de façon analogue à (2) peut s'écrire comme le Laplacien d'un potentiel vecteur (de la dimension d'une longueur)  $c^2 \Delta \vec{G}(t, \vec{x})$ , ce qui nous donne l'équation de champ suivante :

$$\Delta \vec{G}(t, \vec{x}) = -\kappa \rho(t, \vec{x}) \vec{a}_P, \quad (7)$$

où  $\kappa = \frac{1}{c^2 \rho_G}$  est la constante de couplage. L'équation (7) est la limite Newtonienne de l'équation relativiste, mais un autre terme s'ajoutera dans le membre de gauche, contentons nous pour la discussion de cette équation. Le passage relativiste, dans l'espace de Minkowski, se fait tout naturellement en introduisant un quadripotentiel vecteur  $G_\mu(t, \vec{x})$ , où  $\vec{G}(t, \vec{x})$  représente sa partie spatiale. En transformant le Laplacien en d'Alembertien, et la source en densité de courant quadridimensionnelle  $\frac{\rho(t, \vec{x})}{\gamma} \frac{du^\mu}{d\tau}$ , où  $\frac{du^\mu}{d\tau}$  est la quadriaccélération, on a l'équation de champ suivante :

$$\square G_\mu(t, \vec{x}) = -\kappa \rho(t, \vec{x}) a_\mu, \quad (8)$$

avec  $a_\mu = \frac{1}{\gamma} \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{dt}$ , nous détaillerons par la suite l'expression du courant et du quadrivecteur accélération. Nous verrons dans la suite que comme pour (7) se rajoute un terme dans le membre de gauche (le gradient de la divergence du potentiel divisé par deux) D'après (8), on peut exprimer l'analogie relativiste de l'équation (6) :

$$\rho(x) a^\nu = -\rho_G a_G^\nu(x), \quad (9)$$

où  $a_G^\nu(x)$  est le champ (quadridimensionnel) d'accélération induit par les masses en mouvement accélérées.

Ce phénomène d'induction est en fait analogue à celui de l'électromagnétisme (induction du champ par le déplacement d'une charge), à l'exception faite que le déplacement n'est pas lié à un vecteur vitesse mais au vecteur d'accélération. La nuance est forte au sens où dans le premier cas on peut considérer que le courant de charges se déplaçant à vitesse nulle est ni plus ni moins que distribution spatiale de charge alors que dans le second cas, il s'agit du vecteur accélération dans le référentiel comobile multiplié par la distribution spatiale de masse. Ainsi, dans le cas d'une accélération nulle, il n'existe pas d'induction vectorielle (gravitationnelle). C'est pourtant le principe même de la théorie de la gravité d'associer l'énergie des corps au champ de gravitation induit. Cependant la nature de l'effet discuté ici est différente, et donc la théorie (G) n'est pas contradictoire avec la théorie (RG). En

effet, l'induction du champ est dû à la à l'accélération de la distribution de masses, où dit autrement, à sa variation d'énergie au cours du temps.

### C. Construction d'un champ vectoriel couplant avec l'accélération des corps en mouvement

En première approche, nous supposons que l'espace-temps est Minkowskien (trois dimensions spatiale et une temporelle), nous considérons ainsi que la présence des masses dans l'espace-temps n'est la source d'aucun champ de gravitation qui soit décrit par les lois de la (RG). Bien entendu dans la réalité ça n'est pas le cas, mais considérons que cette approche constitue une première approximation satisfaisante (on peut la considérer comme valable dans un référentiel localement inertiel).

Rappelons maintenant les différentes notions de cinématique relativiste dans l'espace de Minkowski. Le quadrivecteur position est déterminé par ses quatre composantes  $x^\mu$ ,  $x_0$  correspond à la coordonnées temporelle et  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  aux coordonnées spatiales, il nous arrivera de noter les coordonnées  $x = (ct, \vec{x})$  de sorte que  $x_0 = ct$  et  $x^i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i$ , où  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  est une base de l'espace. L'intervalle spatio-temporel élémentaire est donc  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ . Remarquons que pour la base Euclidienne, la métrique Minkowskienne est donnée par:  $\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ . Dans la suite nous allons introduire les quadrivecteurs vitesse  $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$  et le quadrivecteur accélération  $\ddot{x}^\mu \equiv \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ . Nous serons amenés à utiliser d'autres notations correspondant aux définitions de la vitesse  $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$  et de l'accélération  $a^\mu = c \frac{dv^\mu}{dt}$ , par rapport au temps  $t$  (et non par rapport au temps propre  $d\tau \equiv ds/c$ ); remarquons que ces deux "vecteurs" ne sont pas des quadrivecteurs. On a les relations suivantes entre les précédents vecteurs:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{\gamma}{c} v^\mu ,$$

$$\ddot{x}^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{du^\mu}{dt} = \frac{\gamma}{c^2} a^\mu ,$$

où le facteur de dilatation temporelle  $\gamma$  est donné par:

$$\gamma = c \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Notons par ailleurs que du quadrivecteur vitesse  $u^\mu$  est sans dimension physique alors que  $v^\mu$  est de la dimension d'une vitesse  $[v^\mu] = [L].[T]^{-1}$ , où  $[L]$  est la dimension d'une longueur

et  $[T]$  celle d'un temps. Le quadrivecteur accélération  $du^\mu/ds$  a pour dimension l'inverse d'une longueur alors que  $a^\mu$  a la dimension d'une accélération  $[a^\mu] = [L].[T]^{-2}$ .

Le but maintenant est de formuler une nouvelle théorie de type gravitationnelle (nous justifierons l'emploi de cet adjectif par la suite) différente à la théorie de la relativité générale, dans ce cadre cinématique Minkowskien, basée sur le *principe d'induction* énoncé précédemment qui suppose un couplage du champ vectoriel noté  $G_\mu(x)$  avec l'accélération des masses  $\ddot{x}^\mu$ . Le "principe d'induction" est un principe de couplage entre un champ donné et des particules tests et réciproquement l'induction du champ provoquée par des courants de masses en mouvement accéléré. Ce principe est analogue au principe d'induction électromagnétique par des courants de charges électrique et de couplage entre le quadripotential électromagnétique  $A_\mu(x)$  et la quadrivitesse  $\dot{x}^\mu$ . Ainsi, par analogie avec le couplage (constante magnétique du vide  $\mu_0$ ) entre le potentiel électromagnétique  $A_\mu(x)$  et la vitesse  $\dot{x}^\mu$  d'une particule de charge  $q$  :

$$L_{EM} = \mu_0 c^2 q A_\mu(x) \dot{x}^\mu , \quad (10)$$

nous construisons le Lagrangien suivant:

$$\boxed{L_G = -mc^2 G_\mu(x) \ddot{x}^\mu} , \quad (11)$$

qui est invariant de Lorentz. Il s'agit d'un champ vectoriel  $G_\mu(x)$  qui couple avec le quadri-vecteur accélération  $\ddot{x}^\mu$  associé à la particule en mouvement avec une constante de couplage  $mc^2$  où  $m$  est supposé être la masse de la particule. Notons que la dimension physique du champs  $G(x)$  est celle d'une longueur ( $[L_G] = mc^2[G] \times [\ddot{x}]$ , où  $[L_G]$  est une énergie et  $[\ddot{x}]$  l'inverse d'une longueur).

Bien entendu, nous pourrions introduire une constante de couplage plus générale, notée par exemple  $w$  (de la dimension d'une énergie), ce qui élargirait l'espace des paramètres de la théorie, mais pour le moment nous supposons que  $w = mc^2$ . Il n'y a a priori aucune raison pour formuler ce choix, mais par cohérence avec la discussion précédente concernant l'hypothèse de l'existence d'un principe d'induction par les masses mouvement accéléré, nous préférons garder ce choix comme point de départ.

L'action de la particule durant un trajet est donnée par l'intégrale sur le temps propre du Lagrangien total obtenu comme la somme du Lagrangien cinétique  $L_K = \frac{mc^2}{2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  :

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (L_K + L_G) d\tau \quad (12)$$

où l'intervalle élémentaire de temps propre  $d\tau = ds/c$ .

Déterminons les équations du mouvement d'une particule dans le champ  $G(x)$ . D'une manière générale, avec un lagrangien  $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x})$  qui dépend des quadrivecteurs position, vitesse et accélération, on obtient par le principe de moindre action, l'équation d'Euler-Lagrange généralisée à l'ordre 2. Considérons un Lagrangien  $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x})$  et l'action associée  $S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L d\tau$ . L'équation d'Euler-Lagrange généralisée dérivant du principe de moindre action  $\delta S = 0$  est donnée par: (forme relativiste des équations fondamentales données par Ostrogradski,<sup>5</sup>, voir aussi<sup>678</sup>):

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu} \right) - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (13)$$

où:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = mc^2 \partial_\mu G_\nu(x) \ddot{x}^\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = mc^2 \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu} = mc^2 G_\mu(x),$$

ce qui donne:

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu} = mc^2 \partial_\nu G_\mu(x) \dot{x}^\nu \Rightarrow \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\mu} \right) = mc^2 \partial_\sigma \partial_\nu G_\mu(x) \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma + mc^2 \partial_\nu G_\mu(x) \ddot{x}^\nu.$$

Ainsi, d'après (13) on obtient:

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + \varepsilon_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + \Delta_{\mu\nu\sigma} \dot{x}^\nu \dot{x}^\sigma = 0}, \quad (14)$$

où l'on définit le tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu}$  comme:

$$\boxed{\varepsilon_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G_\nu + \partial_\nu G_\mu}, \quad (15)$$

et le tenseur  $\Delta_{\mu\nu\sigma}$  comme :

$$\boxed{\Delta_{\mu\nu\sigma} \equiv \partial_\nu \partial_\sigma G_\mu}, \quad (16)$$

avec la relation entre  $\Delta_{\mu\nu\sigma}$  et  $\varepsilon_{\mu\nu}$  suivante:

$$\boxed{\Delta_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \varepsilon_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \varepsilon_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_{\nu\sigma})}. \quad (17)$$

Nous pouvons remarquer une ressemblance étonnante entre les équations du mouvement obtenues (14) avec les équations géodésiques de la théorie de la relativité générale (RG)<sup>4</sup> :

- Le tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu}$  (similaire au tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ ) est symétrique  $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$ ; on l'appelle le *tenseur de déformations (gravitationnelles)* par analogie au tenseur de déformation en mécanique des milieux continus<sup>9</sup> (MMC), étant donné qu'il se définit comme la partie symétrique du gradient (multiplié par deux) du quadrivecteur  $G_\mu(x)$ . Nous discuterons par la suite cette analogie avec la (MMC) qui n'est pas anodine.

- L'objet  $\Delta_{\mu\nu\sigma}$  (similaire à la connexion de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ ) est symétrique sur les deux derniers indices:  $\Delta_{\mu\nu\sigma} = \Delta_{\mu\sigma\nu}$ , et est relié aux dérivées du champ  $\varepsilon_{\mu\nu}$  (17). On appelle ce tenseur le *tenseur gradient des déformations (gravitationnelles)*.

Formellement, il n'est pas surprenant d'avoir une analogie avec les équations du mouvement en (RG) et celle pour une particule subissant le champ  $G_\mu(x)$ . En effet, en intégrant par partie l'action  $S_G = \int L_G d\tau$ , on obtient l'intégrale d'une dérivée totale plus une action  $S'_G = \int d\tau \frac{mc^2}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  et donc l'action  $S_K + S'_G$  est similaire à l'action en RG et les équations d'Euler-Lagrange donnent donc des équations du mouvement de la même forme que les équations géodésiques. Cet argument explique pourquoi la forme des équations de notre modèle et celle de la (RG) sont similaires, cependant il existe trois différences évidentes mais fondamentales:

- Le champ fondamental de notre modèle est un champ vectoriel  $G_\mu(x)$  et le champ physique  $\varepsilon_{\mu\nu}$  dérive de ce champ vectoriel (15),

- Le champ "de connexion"  $\Delta_{\mu\nu\sigma}$  dérive aussi de ce champ vectoriel (16), et puisque la métrique est Minkowskienne, ce champ est un tenseur de rang trois.

- La métrique est Minkowskienne, on suppose donc ne pas être en présence d'un champ de gravitation métrique, qui par ailleurs obéit à la théorie d'Einstein.

Ainsi, à la question de l'équivalence au champ de Gravitation dans la théorie de la relativité générale d'Einstein (RG), la réponse est immédiate car le champ fondamental ici présent n'est pas un champ métrique de rang 2 mais un champ vectoriel  $G_\mu(x)$  qui couple avec l'accélération de la particule, de la même façon que le champ vectoriel  $A_\mu(x)$  en théorie électromagnétique couple avec le quadri-vecteur vitesse. Cependant, nous verrons en perspective que les deux effets gravitationnels sont en fait complémentaires, et que même s'il n'y a pas d'équivalence entre les deux théories il est possible de les décrire dans un cadre commun. Ce sujet fera l'objet d'un futur article et voir la discussion dans la dernière section du manuscrit. Le premier enjeu évidemment est de montrer que le principe de couplage

entre l'accélération et le champ vectoriel existe bel et bien dans la nature.

Notons qu'il existe d'autres similitudes entre (RG) et (G). Par exemple, l'énergie de la particule en mouvement sous l'action du champ  $G_\mu(x)$  a une forme similaire à l'énergie cinétique d'une particule libre en (RG):<sup>6,7,8</sup>

$$\begin{aligned} H_G &\equiv \left( \frac{\partial L_G}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L_G}{\partial \ddot{x}^\mu} \right) \dot{x}^\mu + \frac{\partial L_G}{\partial \ddot{x}^\mu} \ddot{x}^\mu - L_G \\ &= \frac{mc^2}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \end{aligned} \quad (18)$$

avec  $dH_G/dt = 0$ . De même pour l'impulsion généralisée de la particule qui est donnée par:

$$P_\mu = mc^2 \dot{x}_\mu + mc^2 \varepsilon_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad (19)$$

Signalons que pour retrouver le mouvement libre dans l'espace-temps Minkowskien, il suffit de prendre  $G_\mu(x) = G_\mu^{(0)}(x) \equiv x$ , ce qui nous donne  $L_{G^{(0)}} = mc^2 x_\mu \ddot{x}^\mu$  ainsi que  $\varepsilon_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu\nu}^{(0)}$  et donc l'Hamiltonien  $H_{G^{(0)}} = -\frac{1}{2} mc^2 \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ . On retrouve donc parfaitement la cinématique Minkowskienne pour "un champ de Gravitation"  $G$  trivial.

### III. LES ÉQUATIONS DU CHAMP

#### A. Champs physiques du tenseur de déformations gravitationnelles

En vertu de l'analogie dans la construction de notre théorie du champ (G) avec celle de la théorie électromagnétique (EM), on peut introduire des champs physiques analogues au champ électrique et au champ magnétique intervenant dans l'écriture du champ  $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$ . Par ailleurs, notons qu'il existe un champ vectoriel supplémentaire par rapport au cas électromagnétique, qui provient de la diagonale du champ  $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$  (symétrie du champ). En effet, d'après la définition (15), nous voyons que le champ de gravitation  $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$  possède 10 champs indépendants dans le cas général, soit 4 de plus que pour  $F_{\mu\nu}$ .

Tout d'abord, introduisons les potentiels scalaire et vectoriel pour notre 4-vecteur  $G_\mu(x)$ , où  $x = (ct, \vec{x})$  et ainsi  $G_\mu(x)$  est une fonction de  $t$  et  $\vec{x}$ :

$$G_\mu(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \Phi(t, \vec{x}) \\ -\vec{G}(t, \vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

On peut alors définir les composantes du tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$  :

$$\varepsilon_{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \varphi(t, \vec{x}) & \alpha_x(t, \vec{x}) & \alpha_y(t, \vec{x}) & \alpha_z(t, \vec{x}) \\ \alpha_x(t, \vec{x}) & -\chi_x(t, \vec{x}) & -\beta_z(t, \vec{x}) & -\beta_y(t, \vec{x}) \\ \alpha_y(t, \vec{x}) & -\beta_z(t, \vec{x}) & -\chi_y(t, \vec{x}) & -\beta_x(t, \vec{x}) \\ \alpha_z(t, \vec{x}) & -\beta_y(t, \vec{x}) & -\beta_x(t, \vec{x}) & -\chi_z(t, \vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

et donc en utilisant l'équation (15) définissant le tenseur, on définit les composantes du tenseur ci-dessus :

(i) On a un champ  $\vec{\alpha}(t, \vec{x})$  analogue (dans son expression en fonction du potentiel vecteur) au champ électrique:

$$\vec{\alpha}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x}) \quad (22)$$

(ii) De façon similaire, on trouve un champ  $\vec{\beta}(t, \vec{x})$  analogue au champ magnétique:

$$\vec{\beta}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla} \vee \vec{G}(t, \vec{x}) \quad (23)$$

On a une défini une opération  $\vee$  à cause de la symétrie du tenseur champ de gravitation, on peut appeler cet opération "antirotationnel" qui s'obtient par permutations symétriques des composantes spatiales des dérivées et des composantes du vecteur (permanent de la "matrice" formée par les vecteur de bases, le gradient et le vecteur respectivement sur chacune des lignes) :

$$\vec{\nabla} \vee \vec{V} = \text{per} \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & v_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y V_z + \partial_z V_y \\ \partial_x V_z + \partial_z V_x \\ \partial_x V_y + \partial_y V_x \end{pmatrix}$$

(ii) Il existe aussi un nouveau champ vectoriel sur la partie diagonale  $\chi_\mu(ct, \vec{x})$ ,  $\mu = t, x, y, z$ , avec  $\chi_\mu = (\varphi, -\vec{\chi})$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t, \vec{x}) &= 2 \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \vec{x}), \\ \vec{\chi}(t, \vec{x}) &= 2 \vec{\nabla} \odot \vec{G}(t, \vec{x}), \end{aligned} \quad (24)$$

où l'opération  $\odot$  est un produit que l'on appelle "scalaire-vectorel" (ou "vecto-scalaire") définie par  $\forall V, W \in R^3$ :

$$\vec{V} \odot \vec{W} = \begin{pmatrix} V_x W_x \\ V_y W_y \\ V_z W_z \end{pmatrix}$$

On peut ainsi définir l'opérateur  $\vec{\nabla} \odot$  par

$$\vec{\nabla} \odot \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial_x V_x \\ \partial_y V_y \\ \partial_z V_z \end{pmatrix}$$

$\forall V \in R^3$ .

Notons que dans cette théorie où le tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu}$  analogue au tenseur de Faraday dérivant du champ vectoriel  $G_\mu$  est symétrique, ce qui modifie l'analyse vectoriel habituel que l'on utilise pour l'(EM). Il vient comme conséquence que le langage mathématique des formes ne s'utilise pas ici. De même d'un point de vue pragmatique pour les théorèmes de Green-Ostrogradsky et de Stokes qui doivent être réadaptés. Nous ne discutons pas cette analyse vectorielle qui sera l'objet d'un document plus complet et plus détaillé par la suite.

## B. Premier groupe d'équation : équations de structure

Le tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu + \partial_\nu G_\mu$  est la partie symétrique du tenseur de dérivation du potentiel vecteur gravitationnel  $2\partial_\mu G_\nu$ . Il doit à priori obéir à des équations de structure tous comme le tenseur de Faraday  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  qui se trouve être la partie antisymétrique du tenseur de dérivation du potentiel électromagnétique  $2\partial_\mu A_\nu$ . Pour le tenseur de Faraday, nous avons les équations de structure suivantes :

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0 . \quad (25)$$

Ces équations ne conviennent évidemment pas pour le tenseur symétrique  $\varepsilon_{\mu\nu}$ . Par contre il existe des équations pour la partie symétrique que l'on retrouve en mécanique des milieux continus pour le tenseur de déformations.<sup>9</sup> On les appelle les *équations de compatibilités*, elles s'écrivent pour notre problème de la façon suivante :

$$\boxed{\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_{\sigma\rho} - \partial_\nu \partial_\sigma \varepsilon_{\rho\mu} + \partial_\sigma \partial_\rho \varepsilon_{\mu\nu} - \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon_{\nu\sigma} = 0 .} \quad (26)$$

Ces équations forment le premier groupe des équations de champs pour le cas Minkowskien. Elles sont facile à vérifier en utilisant la définition du tenseur de gravitation (15). Notons que le nombre indépendantes d'équations sont de 6 en 3D et de 10 en 4D, étant donné que nous avons 10 champs indépendants dans le tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu}$ .

Notons par ailleurs qu'elles sont d'ordre 2 contrairement à l'(EM), mais cela ne pose pas de problèmes particulier et elle sont utiles pour chercher les équations de propagation, i.e. les équations dynamiques des dix champs physiques  $\varepsilon_{\mu\nu}$ . A ce propos nous verrons que seulement dix équations seulement sont nécessaires, contractrons ainsi les indices  $\mu$  avec  $\rho$  dans (26), de sorte obtenir les dix équations suivantes:

$$\boxed{\square\varepsilon_{\nu\sigma} + \partial_\nu\partial_\sigma\varepsilon_\mu^\mu = \partial_\nu\partial_\mu\varepsilon_\sigma^\mu + \partial_\sigma\partial_\mu\varepsilon_\nu^\mu} . \quad (27)$$

Notons que le terme  $Tr(\varepsilon) \equiv \varepsilon_\mu^\mu = 2\partial_\nu G^\nu(x)$  est la trace du tenseur des déformations, ou encore la quadri-divergence du potentiel  $G_\mu$ .

### C. Deuxième groupe d'équations : lien avec les sources

Le potentiel de gravitation  $G_\mu(x)$  couplant avec l'accélération des particules, par analogie avec les lois de Maxwell de l'Electromagnétisme reliant linéairement le courant de particules  $j_e^\nu$  avec la divergence du tenseur de Faraday. En effet le potentiel (EM) couplant avec la vitesse des particules est généré par une densité de courant de charge:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = -\mu_0 j_e^\nu(x) , \quad (28)$$

où la densité de courant de charge est donnée par:

$$j_e^\nu(x) \equiv \rho_e(x)v^\nu$$

avec la densité volumique de charge  $\rho_e(x)$ , donnée par exemple pour un ensemble de charges électriques:

$$\rho_e(x) = \sum_\alpha q_\alpha \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)) , \quad (29)$$

et où  $\mu_0$  est la constante magnétique du vide. Ainsi il en est de meme pour le champ de gravitation dont on peut supposer que la divergence du tenseur de gravitation  $\varepsilon_{\mu\nu}$  est relié au quadrivecteur densité de courant d'accélération de masses  $j^{(2)\nu}(x)$  (plutôt qu'avec la densité de courant de masses  $j^{(1)\nu}(x) = \rho(x)v^\nu$ ), défini de comme ce qui suit :

$$j^{(2)\nu}(x) \equiv \rho(x)a^\nu = \frac{\rho(x)c^2}{\gamma} \frac{du^\nu}{ds} , \quad (30)$$

où  $du^\mu/ds = \gamma a^\mu/c^2$  est le quadrivecteur accélération,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  et où  $\rho(x)$  est la densité volumique de masse au point  $x$ , donnée pour un ensemble de de masses ponctuelles

par:

$$\rho(x) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}(t)) . \quad (31)$$

Le courant  $j^{(2)\nu}(x)$  est bien un quadrivecteur ( $\rho(x)/\gamma$  étant un invariant de Lorentz et que  $dw^{\mu}/ds$  un quadrivecteur).

Par analogie avec (28) et en s'inspirant des équations (6), (7), (8), (9), on construit le second groupe d'équations du champs de gravitation:

$$\boxed{\partial_{\mu} \varepsilon^{\mu\nu}(x) = -\kappa j^{(2)\nu}(x)} \quad (32)$$

où  $\kappa$  est une constante réelle de dimension physique inverse à celle d'une force par unité de surface (voir calcul dans la section qui suit). En identifiant avec la version relativiste de (9), on voit que le champ d'accélération (que nous avons discuté) est donné par le quadrivecteur divergence du tenseur physique (à une constante près)  $a_G^{\nu}(x) = c^2 \partial_{\mu} \varepsilon^{\mu\nu}(x)$ , et on trouve ainsi une formulation explicite de la théorie du champ en s'appuyant sur ce que l'on a appelé *la réciproque du principe d'équivalence* formulé dans la première section.

Les équations (32) signifient donc que le mouvement accéléré de particules induit un champ de gravitation. On voit apparaître un phénomène d'induction type électromagnétique par des courants, entre le champ  $\vec{\beta}$  et le champ  $\vec{\alpha}$ , ainsi que l'équivalent du théorème de Gauss :

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = -\kappa \Upsilon \\ \vec{\nabla} \vee \vec{\beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} + \vec{\nabla} \odot \vec{\xi} = -\kappa \vec{J} \end{cases} \quad (33)$$

où l'on note une différence très nette avec l'EM venant du fait que le tenseur de déformations gravitationnelles étant symétrique, possède des champs sur ses éléments diagonaux.

### Commentaire sur le nombre d'équations versus le nombre d'inconnues

Au total, nous avons donc 4 inconnues pour le potentiel  $G_{\mu}(x)$  et 10 inconnues pour le tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$ , et sachant que nous avons 10 équations (27) et quatre équations (32), on résout complètement le problème. Ainsi, la théorie vectorielle obtenue n'est pas une théorie de jauge car contrairement à l'électromagnétisme, où l'on a 8 équations pour 10 inconnues, ce qui implique donc la présence de deux degrés de liberté non physique, nous avons le nombre exact d'équations différentielles.

## Remarque sur le courant d'accélération de masses

Nous avons introduit une source nouvelle qui produit le champ, le courant d'accélération de masse noté  $j^{(2)}(x) = \rho(x)a^\mu$ , où  $\rho(x)$  est la densité de masse par unité de volume et  $a^\mu = cd\mathbf{u}^\mu/dt$  l'accélération du courant de masse. Considérons une distribution de masses ponctuelles dans l'espace-temps définie par (31) :

$$\rho(x) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}(t)),$$

où  $\vec{x}_{\alpha}(t)$  est le vecteur position de la masse  $\alpha$  au temps  $t$ .

Notons les composantes du quadrivecteur:

$$j^{(2)\mu}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \Upsilon(t, \vec{x}) \\ \vec{J}(t, \vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

On va déterminer la forme de ces deux distribution scalaire et vectorielle dans le référentiel qui regarde bouger la particule avec la vitesse  $\vec{v}(t)$  au temps  $t$ , que l'on note  $\vec{v}$  par simplicité de notation. Rappelons que dans ce référentiel  $j^{(2)\mu}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x})a^\mu$ , avec  $a^\mu = c\frac{d\mathbf{u}^\mu}{dt}$ , ce qui donne:

$$a^\mu(t, \vec{x}) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \gamma^3 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \\ \gamma^3 (\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{c}) \frac{\vec{v}}{c} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

avec  $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Ainsi, on trouve que la partie temporelle du quadricourant (34), s'interprète comme une distribution de variation d'énergie de masse:

$$\Upsilon(x) = \rho(x)c \frac{d\gamma}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{1}{c^2} \frac{dE_{\alpha}}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}),$$

où  $E_{\alpha} = m_{\alpha}\gamma c^2$  est l'énergie de masse de la particule  $\alpha$ ; et que sa partie spatiale (34) s'interprète comme une distribution de variation d'impulsion:

$$\vec{J}(x) = \rho(x) \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{d\vec{p}_{\alpha}}{dt} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_{\alpha}),$$

où  $\vec{p}_{\alpha} = m_{\alpha}\gamma \vec{v}$  est l'impulsion de la masse  $m_{\alpha}$ .

Notons que dans le référentiel comobile qui suit le mouvement de la particule en chaque instant, i.e. on se place dans un référentiel inertiel en chaque instant du mouvement de la particules qui possède la même vitesse de la particule et se trouve donc dans son référentiel

propre dans lequel la vitesse est nulle  $\vec{v} = 0$  en chaque instant, on a une expression simple du courant :

$$j^{(2)\mu}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(t, \vec{x})\gamma\vec{a} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

il s'avèrera utile dans la suite de regarder les champs dans ce référentiel, de la même façon qu'il est intéressant de regarder les solution (EM) dans le référentiel propre du courant qui se présente comme la densité de charge sans courant vectoriel à l'opposé de notre cas où le courant présente uniquement le courant vectoriel.

Notons comme remarque importante et fondamentale que d'une façon générale le courant d'accélération de masses ne se conserve pas:

$$\partial_\mu j^{(2)\mu} \neq 0,$$

contrairement au courant de masse usuel  $\rho(x)v^\mu$  qui lui se conserve, ainsi que le courant de charge en électromagnétisme. Nous allons voir dans ce qui suit que c'est tout à fait cohérent avec la théorie de champ ainsi formulée.

## D. Equations de propagations

### 1. Equations de propagation du potentiel $G_\mu(x)$

On déduit de l'équation (32) les équations de propagation pour le champ vectoriel  $G_\mu(x)$ . En effet, il vient naturellement d'après la définition de  $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$  que :

$$\boxed{\square G^\nu(x) + \frac{1}{2}\partial^\nu Tr(\varepsilon)(x) = -\kappa j^{(2)\nu}(x)}, \quad (37)$$

Nous avons une difficulté majeur intervenant dans la résolution de (37) à cause du second terme du membre de gauche qu'il n'est pas possible de soustraire par une transformation de jauge. Il faut donc assumer ce terme et en tenir compte dans la résolution des équations. Cependant, une méthode plutôt convenable peut permettre de franchir la difficulté, il suffit de calculer la divergence du quadrivecteur courant de sorte à obtenir une équation scalaire entre la quadri-divergence de  $G_\mu(x)$  et celle du courant :

$$\boxed{\square Tr(\varepsilon)(x) = -\kappa\partial_\nu j^{(2)\nu}(x)}. \quad (38)$$

L'équation (37) nous donne pour les champs  $\Phi(ct, \vec{x})$  et  $\vec{G}(ct, \vec{x})$  les équations suivantes:

$$\begin{cases} \square\Phi(x) = -\kappa\Upsilon'(x) \\ \square\vec{G}(x) = -\kappa\vec{J}'(x) , \end{cases} \quad (39)$$

où l'on a introduit le courant effectif suivant:

$$j^{(2)\nu}(x) = j^{(2)\nu}(x) + \frac{1}{2\kappa}\partial^\nu Tr(g)(x) , \quad (40)$$

avec comme composantes:

$$\begin{cases} \vec{J}' = \vec{J} - \frac{1}{2\kappa}\vec{\nabla}Tr(g) \\ \Upsilon' = \Upsilon + \frac{1}{2\kappa}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}Tr(g) . \end{cases} \quad (41)$$

## 2. Equations de propagation des champs physiques $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$

Les équations de propagation des champs  $\varphi, \vec{\chi}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , se dérivent en utilisant les deux groupes d'équations (26) et (32), de façon similaire au cas (EM). Premièrement, appliquons l'opérateur dérivée  $\partial_\sigma$  aux parties contravariantes des équations (32) et symétrisons le tenseur obtenu en ajoutant le tenseur obtenu par échange les deux indices libres:

$$\partial_\sigma\partial_\mu\varepsilon^\mu{}_\nu(x) + \partial_\nu\partial_\mu\varepsilon^\mu{}_\sigma(x) = -\kappa\partial_\sigma j_\nu^{(2)}(x) - \kappa\partial_\nu j_\sigma^{(2)}(x) ,$$

en utilisant les équations (27) provenant du premier groupe d'équations, on obtient alors :

$$\boxed{\square\varepsilon_{\nu\sigma}(x) + \partial_\nu\partial_\sigma Tr(\varepsilon)(x) = -\kappa\xi_{\nu\sigma}^{(2)}(x)} , \quad (42)$$

où  $\xi_{\nu\sigma}^{(2)}(x) \equiv \partial_\sigma j_\nu^{(2)}(x) + \partial_\nu j_\sigma^{(2)}(x)$  est le tenseur analogue au tenseur  $\xi_{\sigma\nu} \equiv \partial_\sigma j_\nu - \partial_\nu j_\sigma$  en (EM), où  $j_\nu$  est la densité de courant de charges.

On arrive donc à une série d'équations de propagation pour les champs physiques :

$$\begin{cases} \square\vec{\alpha} = -\kappa\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}' + \vec{\nabla}\Upsilon'\right) \\ \square\vec{\beta} = -\kappa\vec{\nabla}\cdot\vec{J}' \\ \square\vec{\chi} = -2\kappa\vec{\nabla}\odot\vec{J}' \\ \square\varphi = -2\kappa\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Upsilon' , \end{cases} \quad (43)$$

où l'on a fait apparaître les composantes du courant effectif définies par (41).

### E. Constante de couplage $\kappa$ dite *constante d'induction gravitationnelle*

Discutons la signification de la constante  $\kappa$  ainsi que le lien possible avec d'autres constantes physiques connues. Calculons sa dimension physique, d'après (32) on a l'équation aux dimensions suivante:

$$[\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu}] = [\kappa] \cdot [j^{(2)\nu}]$$

sachant que la dimension de la quadridivergence du tenseur de gravitation est celle de l'inverse d'une longueur  $[\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu}] = [L]^{-1}$  et que la densité de courant de masse accéléré a la dimension d'une force par unité de volume  $[j^{(2)\nu}] = [M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2} / [L]^3 = [M] \cdot [L]^{-2} \cdot [T]^{-2}$ , on obtient que la dimension de l'inverse de la constante de couplage est celle d'une force par unité de surface (dimension d'une contrainte ou encore d'une densité d'énergie):

$$[\kappa^{-1}] = \frac{[\text{Force}]}{[\text{Surface}]} = \frac{[M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2}}{[L]^2} = [M] \cdot [L]^{-1} \cdot [T]^{-2}.$$

La question qui se pose naturellement c'est de savoir quelle est le lien entre cette constante de couplage et les autres constantes fondamentales de la physique. La théorie étant classique (au sens non quantique), on peut légitimement exclure la dépendance avec la constante de planck  $\hbar$ . Il n'y a non plus pas de raison évidente de considérer la constante de Boltzmann  $k_B$ . De même que les constantes diélectrique  $\epsilon_0$  ou magnétique  $\mu_0$ , du vide, ne semblent pas appropriées. On pense naturellement à la constante universelle de gravitation  $G$  ainsi qu'à la constante de la vitesse de la lumière  $c$ . La première idée venant à l'esprit de faire apparaître la constante de l'équation d'Einstein  $\frac{8\pi G}{c^4}$  dont la dimension est:

$$\left[ \frac{8\pi G}{c^4} \right] = \frac{[M]^{-1} \cdot [L]^3 \cdot [T]^{-2}}{[L]^4 \cdot [T]^{-4}} = [M]^{-1} \cdot [L]^{-1} \cdot [T]^2.$$

On a donc le rapport entre la constante de couplage  $\kappa$  et celle d'Eintein  $8\pi G/c^4$  de la dimension d'une surface :

$$\left[ \kappa \frac{c^4}{8\pi G} \right] = [L]^2.$$

On peut donc introduire une nouvelle constante  $\lambda$  de la dimension d'une longueur, de sorte à relier l'expression de  $\kappa$  à  $\frac{8\pi G}{c^4}$ :

$$\kappa = \pm \frac{8\pi G \lambda^2}{c^4}. \quad (44)$$

La première interrogation concerne le signe de la constante  $\kappa$ , est-elle positive ou négative ? L'analogie avec les lois (RG) n'est pas complète car on ne peut pas dire si la force est

attractive ou répulsive uniquement en fonction du signe de la constante, et notamment car la source n'est pas l'impulsion-énergie des particule (qui est positive) mais le courant relié à l'accélération. Ainsi, d'après ce que nous avons vu quant à l'expression du vecteur densité de courant, la qualité attractive ou répulsive dépend à priori aussi du signe du produit scalaire entre le vecteur vitesse  $\vec{v}$  et le vecteur accélération  $d\vec{v}/dt$ . Et si l'on se place dans un référentiel comobile dans lequel la vitesse des masses est nulle, on voit que cela dépend aussi du signe du vecteur accélération.

Ensuite on voudrait connaître la valeur de  $\lambda$ . L'idée serait de contraindre la valeur de  $\lambda$  pour certain système en calculant des corrections à des effets gravitationnels attendus par la théorie d'Einstein. On serait tenter de penser que  $\lambda$  est relié à la constante cosmologique  $\Lambda$ , étant donné les similitudes que le lecteur aura sûrement déjà remarqué, ainsi  $\lambda$  serait égale à la longueur de Hubble actuelle, soit de l'ordre de  $10^{26}\text{m}$ .<sup>10, 1, 2, 3</sup> On trouverait ainsi une valeur de  $\kappa$  qui serait de l'ordre de  $10^{52}\text{m}$  fois la valeur de la constante d'Einstein, et donc  $\kappa$  serait de l'ordre de  $\underline{10^9\text{Joule/m}^3}$ . Reste à voir si cette valeur est en accord avec les observations actuelles, c'est à dire avec les limites inférieures d'observation des effets prédits par la théorie (G). Notons que le fait que cette constante soit la bonne serait très intéressant pour les expériences actuelles en microgravité visant à tester l'évolutions des constantes physiques au cours du temps ainsi que d'apporter des tests plus précis aux théories de gravitation, notamment une expérience spatiale future PHARAO/ACES dont les horloges atomiques amèneraient à une précision sur les mesures de fréquences de l'ordre de  $10^{-16}$ .<sup>11</sup> On pourrait espérer ainsi observer des effets faisant intervenir la constante cosmologique. Dans tout les cas nous devons nous poser la question de l'universalité de  $\lambda$ , i.e. est-elle constante au cours du temps ou est-elle constante sur un intervalle de temps court par rapport à un temps caractéristique plus long ?

Remarquons enfin que l'on peut introduire une autre constante reliée à  $\kappa$  de façon similaire à la relation entre les constantes électromagnétiques:

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon c^2},$$

en introduisant la *constante de densité massique gravitationnelle* que nous avons posé dans la première section:

$$\rho_G = \frac{1}{|\kappa|c^2} = \frac{c^2}{8\pi G\lambda^2}, \quad (45)$$

qui comme son nom l'indique est de la dimension d'une densité de masse par unité de volume:

$$[\rho_\kappa] = [\kappa]^{-1} \cdot [c]^{-2} = [M] \cdot [L]^{-3} .$$

Nous pouvons encore revenir sur le lien possible avec la constante cosmologique  $\Lambda$ , en supposant que  $\rho_G$  corresponde à la densité d'énergie du vide introduite dans les modèles standard de cosmologie pour combler le manque d'énergie observée par rapport à l'énergie connue, soit de l'ordre de  $10^{-29} \text{g/cm}^3$ .<sup>10,3</sup> Nous reviendrons là-dessus dans la dernière section qui traitera la théorie dans le cadre de la (RG).

## F. Tenseur des contraintes gravitationnelles

L'absence de jauge pour la théorie nous amène à considérer la théorie comme une théorie de contraintes gravitationnelles où l'on peut relier au tenseur de déformations gravitationnelles au tenseur des contraintes gravitationnelles, totalement symétrique et de la dimension d'une densité d'énergie :

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu}(x) \equiv -\rho_G c^2 \varepsilon_{\mu\nu}(x)} , \quad (46)$$

de sorte que ce tenseur ajouté au tenseur des contraintes (ou impulsion-énergie) associée à la matière en mouvement (considéré ici comme microscopique):

$$T_{\mu\nu}^{(M)}(x) \equiv \rho(x) c v_\mu u_\nu , \quad (47)$$

(où  $u^\nu = dx^\nu/ds = \frac{\gamma}{c} dx^\nu/dt$  avec  $v^\mu = dx^\mu/dt$ ) nous donne le tenseur total des contraintes exercé sur le milieu continu (notion à rediscuter, pour l'instant il s'agit d'un milieu effectif apparaissant par analogie):

$$T_{\mu\nu}(x) = \sigma_{\mu\nu}(x) + T_{\mu\nu}^{(M)}(x) = -\rho_G c^2 \varepsilon_{\mu\nu}(x) + \rho(x) c v_\mu u_\nu , \quad (48)$$

et l'annulation de la divergence de ce tenseur de contrainte nous redonne les équations du mouvement:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0 &\Leftrightarrow -\rho_G c^2 \partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu}(x) + \partial_\mu (\rho(x) c v^\mu u^\nu) = 0 , \\ &\Leftrightarrow -\rho_G c^2 \partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu}(x) + \partial_\mu (\rho(x) c^2 v^\mu) u^\nu + \rho(x) c v^\mu \partial_\mu u^\nu \\ &\Leftrightarrow \partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu}(x) = -\kappa \rho(x) a^\nu , \end{aligned}$$

car on a conservation du courant de masse  $\rho(x) v^\mu$ .

Ainsi, on a l'équivalent d'une théorie de déformation de milieu continu sur un espace de Minkowski, ce qui généralise le cas 3D invariant de Galilée.

Notons par ailleurs que le signe de la constante  $\kappa$  est fondamental car la constante devant le tenseur de déformation dans (46) multipliée par le terme  $\epsilon_{00}$  peut s'interpréter comme la densité d'énergie et la partie diagonale spatiale peut interpréter comme la pression. Le signe de ces deux dernières quantités étant dépendante des sources comme nous l'avons discuté précédemment. Les parties hors diagonale se voit elle comme une contrainte de cisaillement, de façon encore une fois analogue aux déformations des milieux continus.<sup>9</sup>

Terminons cette section par une remarque générale. Nous avons supposé, pour coller au second groupe des équations de champs (32) que le tenseur des contraintes est linéaire et directement proportionnel au tenseur des déformations. Nous ne reviendrons pas sur la linéarité, qui bien entendu est discutable étant donné qu'elle suppose les déformations  $G_\mu(x)$  suffisamment petites, et bien entendu dans le cas le plus général (similaire au cas des déformations de grande structure), la théorie du champ se voudrait être non-linéaire, mais cela ne modifie pas fondamentalement les principes de la théorie, contrairement à la théorie relativiste de la gravitation par exemple. Par contre, la relation de linéarité entre les deux tenseurs des contraintes et des déformations est on ne peut plus arbitraire. Nous pourrions en effet considérer de façon similaire à la loi de Hooke une relation linéaire de la forme :<sup>9</sup>

$$\sigma_{\mu\rho} = \frac{E}{1+\nu}\epsilon_{\mu\rho} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\eta_{\mu\rho}Tr(\epsilon), \quad (49)$$

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson qui modélise la déformation dans une direction en fonction de la déformation dans une direction perpendiculaire, constante dans toutes les directions pour un milieu isotrope :  $\nu = \epsilon_{\mu\mu}/\epsilon_{\rho\rho}$ ,  $\mu \neq \rho$ , ce qui est valide pour une petite déformation  $\epsilon_{\mu\rho}(x) \ll \eta_{\mu\rho}$ . Notons que dans le cas d'une petite déformation, la trace du tenseur  $Tr(\epsilon)$  représente la petite variation relative de volume  $\delta V/V$  sous l'action de la déformation. Dans nos équations de champs nous avons donc supposé que le coefficient de Poisson est nul (et donc que le module d'Young  $E = \rho_G c^2$ ), c'est à dire par exemple qu'on suppose qu'il n'y a pas de déformation selon  $x$  lorsque l'on déforme selon  $z$ . En définitive, ce coefficient de Poisson est un paramètre du modèle supplémentaire, à ajouter en toute généralité aux paramètres suivants : la constante de couplage  $\lambda$  dans

l'équation de source et la constante de couplage interne aux particules  $w$  (entre le champ  $G_\mu$  et l'accélération des particules tests) que nous supposons ici être égale à  $mc^2$ .

#### IV. CHAMPS PHYSIQUES ET NOUVEAU PHÉNOMÈNE DE TYPE GRAVITOMAGNÉTIQUE (GEM-G)

##### A. Idée générale

En prévision de l'étude des potentiels gravitationnelles induite en limite  $v/c$ , il convient d'établir une limite à l'ordre  $v/c$  qui reste invariante de Lorentz, i.e. il suffit de négliger les termes de l'ordre  $\vec{u}^2/c^2$  sans modifier ni les expressions des 4-vecteurs  $u^\mu$ , ni celles pour l'accélération  $\dot{u}^\mu$ . Cette limite, en plus de considérer des faibles champs  $\varepsilon_{\mu\nu}(x) \ll \eta_{\mu\nu}$  donne des équations analogues aux équations (GEM), à la différence que les sources ne sont plus les densités de courants de masses mais les densités de courants d'accélération de masses.

Imaginons par exemple que l'on regarde tourner un objet massif à l'échelle terrestre ou astronomique, ou autre exemple du circuit de masses en mouvement circulaire (en rotation uniforme ou non). Alors dans ces cas, le mouvement de rotation devrait induire, aussi petit qu'il soit, en plus d'un champ de gravité prédit par les équations (GEM)<sup>12, 1, 3</sup> un champ de gravité prédit par (GEM-G) dû à l'accélération du déplacement, qui dans le cas circulaire se trouve être radial. Cet effet n'est pas prédit par les équation (GEM) et ne peuvent pas se déduire des équations (RG). Il s'agit donc d'un nouvel effet que nous pourrions mesurer si bien sûr le couplage supposé dans la théorie existe.

Lorsque j'ai dit que nous supposons l'effet petit, il s'avère en première approximation de se limiter aux ordres  $v/c$  et donc aux équations (GEM-G). Nous avons besoin d'une hypothèse de plus, laquelle venant d'une part du fait que nous supposons l'effet géométrique de la gravitation (i.e. celui prédit par la (RG) qui couple avec la présence de densité-énergie) comme une correction linéaire à Minkowski, c'est à dire obéissant aux équations (GEM) et d'autre part que le couplage entre le champ géométrique  $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  et le champ  $\varepsilon_{\sigma\rho}$  est négligeable, i.e. que l'on néglige tous les termes de la forme  $h_{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\rho}$ , et toutes les contractions d'indices possibles. On a donc en premières approximations une théorie découplées aux ordres  $v/c$  et linéaire. Vu l'amplitude des effets observés jusqu'à présent, il semble que ce degré de précision soit suffisant pour le moment. Ainsi pour ce modèle simple, il suffit

d'ajouter les deux effets, c'est à dire que l'accélération d'une particule test subissant les deux effets se calcul simplement par:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_h + \vec{F}_G ,$$

où  $\vec{F}_h = \vec{E}_h + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}_h$  est la force de Lorentz gravitomagnétique (GEM) provenant du champ métrique et  $\vec{F}_G$  est la force de Lorentz gravitomagnétique (GEM-G) provenant du champ  $\varepsilon_{\mu\nu}$ . Il s'agit maintenant de trouver l'expression de cette dernière et les équations du mouvements des champs intervenant dans l'expression de la force.

## B. Equations de champs de type gravitomagnétique

En ne gardant que les termes en  $\dot{x}^\nu \dot{x}^0$  on obtient l'approximation de (14) suivante:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \varepsilon_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu &\approx -2\Delta_{\mu\nu 0}\dot{x}^\nu \dot{x}^0 \\ &= (\partial_\nu \varepsilon_{\mu 0} - \partial_\mu \varepsilon_{\nu 0} + \partial_0 \varepsilon_{\mu\nu})\dot{x}^\nu \dot{x}^0 . \end{aligned} \quad (50)$$

Nous introduisons alors le tenseur antisymétrique, de type Faraday suivant:

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \varepsilon_{\nu 0} - \partial_\nu \varepsilon_{\mu 0} , \quad (51)$$

o la matrice est donne par:

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0, \end{pmatrix} , \quad (52)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\alpha} , \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{\alpha} , \end{aligned} \quad (53)$$

où l'on voit apparaître un quadrivecteur similaire au quadrivecteur potentiel électromagnétique:

$$\tilde{A}_\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\vec{\alpha} \end{pmatrix} , \quad (54)$$

avec  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu$ .

D'après les approximations que nous faisons, on peut réécrire 50 de la forme :

$$\eta_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{dt} \approx -f_{\mu\nu} u^\nu , \quad (55)$$

car  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\mu\nu} u^\nu$  est petit devant les autres termes  $f_{\mu\nu} u^\mu$ . Ainsi on a:

$$\begin{pmatrix} c \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma \vec{v}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \\ \gamma \left( \vec{E} + \vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) \end{pmatrix} , \quad (56)$$

ce qui donne dans le cas non relativiste un expression pour la force:

$$\vec{F}_G = \vec{E} + \vec{B} \times \frac{\vec{v}}{c} ,$$

similaire à celle obtenu pour la théorie (GEM).

Nous allons maintenant regarder les équations auxquelles obéissent les champs analogues aux champs électriques et magnétiques provenant du tenseur  $f_{\mu\nu}$ , d'après (42):

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \varepsilon^{\nu 0} - \partial_\mu \partial^\nu \varepsilon^{\mu 0} \quad (57)$$

$$= -\kappa \partial^0 j^{(2)\nu} . \quad (58)$$

Ainsi, sachant que le tenseur  $f_{\mu\nu}$  obéit au même groupe d'équations de structure que le tenseur de Faraday, on a les équations suivantes pour les champs gravitomagnétiques :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = -\kappa \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Upsilon(t, \vec{x}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(t, \vec{x}) \end{cases}} , \quad (59)$$

où les champs  $\Upsilon(t, \vec{x})$  et  $\vec{J}(t, \vec{x})$  sont les composantes temporelles et spatiales du quadrivecteur densité de courant d'accélération. On note que ça n'est pas le courant qui est à l'origine des champs, mais les variations temporelle du courant.

En perspective directe il faudra calculer pour des modèles particuliers et relevantes les expressions de ces champs et de la force de Lorentz (GEM-G) afin d'estimer les ordres de grandeurs en comparaison avec le modèle (GEM).

## V. IMPLÉMENTATION AU CADRE DE LA RG

### A. Retour sur le principe d'induction

Dans le cadre général de la relativité, considérant comme vrai la réciproque du principe d'équivalence, si l'on force une particule à s'écarter des lignes géodésiques, on devrait également générer un champ de gravitation vectoriel, qui serait donc de nature différente au champ métrique. Nous nous plaçons donc ici au delà du paradigme géométrique pour la théorie de la gravitation car nous supposons qu'un effet supplémentaire qui n'est à priori pas géométrique, on voit ainsi le nouveau champ comme un champ "pure", comme le champ électromagnétique. Mais il existe une différence notable car le champ (EM) bien qu'il soit possible de l'intégrer au cadre générale de la relativité, n'est pas couplée de façon unitaire avec le champ de gravité. Ici, partant du principe que des déviations géodésiques engendre un champ de gravité d'origine vectorielle, on peut imaginer une théorie de gravité complète qui constituée de deux champs, l'un géométrique  $g_{\mu\nu}$  et l'autre de déformation  $G_\mu$  qui serait complémentaire au premier. On ne change donc pas les principes de la (RG), à savoir les principes d'équivalences et la relation entre la courbure et le tenseur impulsion-énergie, on rajoute simplement une contrainte à l'espace-temps métrique qui lui donne une perception "physique".

Ainsi, pour généraliser le principe d'induction gravitationnelle par des courants d'accélération, il suffit de considérer qu'en tout point de l'espace-temps il existe un référentiel localement inertiel dans lequel la théorie Minkowskienne du champ (G) reste localement valide, i.e. qu'une source d'énergie accélérée localement génère un champ vectoriel de gravitation, qui a pour effet d'accélérer les particules tests par les équations de mouvement localement pseudo-géodésique (14).

### B. Equations covariantes

Toutes nos précédentes équations sont covariantes de Lorentz et de plus, si l'on généralise la théorie de la relativité en considérant un champ métrique de rang 2  $g_{\mu\nu}(x)$ , qui ne dérive pas fondamentalement d'un potentiel vecteur, contrairement à la théorie présentée ici-même. Considérons les connections dans l'espace Riemannien données par les symboles de Christoff-

fel:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\sigma}) , \quad (60)$$

à bien différencier des  $\Delta_{\mu\nu\sigma}$  reliées au champs vectotiel  $G_\mu$ .

On sait que le champ métrique  $g_{\mu\nu}(x)$  obéit à l'équation d'Einstein que je rappellerai après dans une forme modifiée par la présence du nouveau champ de gravitation. De façon analogue au cas de l'(EM), les équations présentées ci-dessus dans le cadre Minkowkien sont valides dans le cas généralisé en modifiant la notion de contravariance et la dérivée bien connue,<sup>1,2,3,4</sup> à la différence que le champ  $\varepsilon_{\mu\nu}$  est modifié par le champ métrique:

$$\boxed{\varepsilon_{\mu\nu} = D_\mu G_\nu + D_\nu G_\mu = \partial_\mu G_\nu + \partial_\nu G_\mu + 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma G_\sigma} . \quad (61)$$

Les équations (26) et (32) gardent la même forme en changeant les dérivées partielles en dérivées covariantes:

$$D_\mu D_\nu \varepsilon_{\sigma\rho} - D_\nu D_\sigma \varepsilon_{\rho\mu} = -D_\sigma D_\rho \varepsilon_{\mu\nu} + D_\rho D_\mu \varepsilon_{\nu\sigma} \quad (62)$$

$$D_\mu \varepsilon^{\mu\nu} = -\kappa_j^{(2)\nu} \quad (63)$$

La conséquence de l'équation (63) est que *toute variation géodésique d'un courant de particules massives induit un champ de gravitation vectoriel.*

Une particule massive subissant le champ de gravitation métrique  $g_{\mu\nu}$  peut alors aussi être soumise au champ de gravitation vectoriel. On peut alors écrire le Lagrangien de la particule de façon analogue au Lagrangien (11) en ajoutant le lagrangien libre de la particule sous le champ métrique:

$$L = \frac{mc^2}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - mc^2 G_\mu(x) \frac{D\dot{x}^\mu}{Ds} , \quad (64)$$

l'action est alors donnée par:

$$S = \int L ds = \int \frac{mc^2}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds - \int mc^2 G_\mu(x) \frac{D\dot{x}^\mu}{Ds} ds , \quad (65)$$

le deuxième terme du membre de droite comme nous l'avons vu précédemment est équivalent à l'action suivante (intégration par partie et annulation de l'intégrale de la dérivée totale):

$$\int \frac{mc^2}{2} \varepsilon_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu ds , \quad (66)$$

où  $\varepsilon_{\mu\nu}$  est donné par (61).

En variant l'action, on obtient ainsi des équations du mouvement pour une particules sous un champ de gravitation vectoriel dans un champ métrique analogues à (14):

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \Gamma_{\mu\nu\sigma}\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma = -(\varepsilon_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu + \Delta_{\mu\nu\sigma}\dot{x}^\nu\dot{x}^\sigma) , \quad (67)$$

où la pseudo-connection  $\Delta_{\mu\nu\sigma}$  est donnée par:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu\sigma} &= \partial_\mu D_\nu G_\sigma + \partial_\mu D_\sigma G_\nu - \partial_\nu D_\sigma G_\mu , \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \varepsilon_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \varepsilon_{\mu\nu} - \partial_\mu \varepsilon_{\nu\sigma}) , \end{aligned} \quad (68)$$

qui est analogue à la forme du symbole de Christoffel (60) et qui est symétrique mais qui n'est plus un tenseur.

### C. Tenseur des contraintes du champ (G) et tenseur impulsion-énergie total

La densité Lagrangienne est très similaire à la densité Lagrangienne pour le champ (EM), à la différence que le champ couple avec un courant d'accélération de masse et non pas un courant de vitesse de charge électrique, que le champ est symétrique et non antisymétrique et qu'il est sans dimensions physiques. Cette dernière particularité change drastiquement la signification du champ car remarquons que de part la constante de couplage  $\rho_G c^2$  qui se trouve être de la dimension d'une densité d'énergie par unité de volume spatial, le produit de celle-ci avec le tenseur  $\varepsilon_{\mu\nu}(x)$  donne un tenseur de la dimension d'une densité d'énergie, symétrique et dont la divergence s'annule dans le vide. Il s'avère ainsi que:

$$\boxed{T_{\mu\nu}^{(G)} = \sigma_{\mu\nu} \equiv \rho_G c^2 \varepsilon_{\mu\nu}(x)} \quad (69)$$

a toutes les caractéristiques d'un tenseur impulsion-énergie et part ailleurs, on peut réécrire l'équation (63) de la façon suivante :

$$D_\mu \left( T_{(G)}^{\mu\nu}(x) + T_{(P)}^{\mu\nu}(x) \right) = 0 , \quad (70)$$

où  $T_{(P)}^{\mu\nu}(x) \equiv \rho(x)u^\mu u^\nu$  est le tenseur impulsion-énergie associé aux particules en mouvement, avec:

$$\begin{aligned} D_\mu T_{(P)}^{\mu\nu}(x) &= D_\mu(\rho(x)u^\mu)u^\nu + \rho(x)u^\mu D_\mu u^\nu \\ &= 0 + \rho(x)a^\mu = j^{(2)\mu}(x) , \end{aligned}$$

car le courant de vitesse de masse se conserve  $\partial_\mu(\rho(x)u^\mu) = 0$  et par définition  $u^\mu\partial_\mu u^\nu = a^\mu$ . On a donc un tenseur total d'énergie-impulsion donné par:

$$T_{\mu\nu}^{(G+P)}(x) = T_{\mu\nu}^{(G)}(x) + T_{\mu\nu}^{(P)}(x) . \quad (71)$$

#### D. Argument cosmologique et hypothèse sur l'expression de $\kappa$ dans le vide

Le rapport dimensionnel entre les deux constantes  $\kappa$  et  $8\pi G/c^4$  semble naturelle puisque les dérivées d'ordre deux du tenseur métrique, de la dimension de l'inverse d'une surface, couple avec le tenseur impulsion-énergie des particules, de la dimension d'une densité d'énergie. Alors qu'ici les dérivées d'ordre un du tenseur de gravitation (d'induction) de la dimension de l'inverse d'une longueur couple avec le courant d'accélération des particule de la dimension d'une densité de force. Cependant, s'il on regarde l'équation d'Eintein en présence de la constante cosmologique  $\Lambda$ , de la dimension de l'inverse d'une surface, on trouve un couplage entre le tenseur métrique sans dimension avec le tenseur impulsion-énergie des particules dont la constante de couplage se trouve être

$$\frac{8\pi G}{\Lambda c^4} ,$$

de la dimension d'une force par unité de surface, c'est à dire de la même dimension que  $\kappa$ . Etant donnée que la constante cosmologique correspond à ce que l'on appelle une énergie du vide, à savoir l'énergie présente dans le vide sans présence de matière (puisque  $\Lambda c^4/8\pi G$  est de la dimension d'une densité d'énergie, que l'on appelle du vide), par analogie avec la constante diélectrique du vide pour la théorie (EM), on peut supposer que la *constante d'induction gravitationnelle du vide* que l'on note ici  $\kappa_\Lambda$  est donnée par:

$$\boxed{\kappa_\Lambda = \frac{8\pi G}{\Lambda c^4}} , \quad (72)$$

qui est donc, d'après (44), reliée à la constante  $\lambda_\Lambda$  dite *d'échelle cosmologique* de la dimension d'une longueur:

$$\lambda_\Lambda = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} , \quad (73)$$

cette constante à cette échelle représenterait la taille de l'Univers visible. La constante de densité d'énergie du vide calculée d'après (74) est importante car c'est elle se déduit de la constante d'Hubble et donc peut se mesurer:

$$\boxed{\rho_\Lambda = \frac{1}{\kappa_\Lambda c^2} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}} . \quad (74)$$

La valeur numérique de  $\lambda_\Lambda$  d'après les données récentes<sup>10</sup> est:

$$\lambda_\Lambda = 10^{10} \text{ a.l. } ,$$

avec  $1 \text{ a.l.} = 9.467 \times 10^{15} m$ ; la valeur numérique de la densité du vide est:<sup>10, 3</sup>

$$\rho_\Lambda = 10^{-29} \text{ g.cm}^{-3}$$

ainsi, celle de  $\kappa_\Lambda$ , est:

$$\kappa_\Lambda = 10^{52} \frac{8\pi G}{c^4} = 10^9 \text{ Joule/m}^3$$

La constante peut sembler grande à cause du facteur multiplicateur  $\lambda_\Lambda^2$ , mais cela ne veut rien dire tant qu'on ne compare pas des quantités physiques de même dimension, par exemple un effet prédit par la théorie d'induction et par la théorie gravitationnelle d'Einstein. Il s'agira dans la suite d'estimer les ordres de grandeurs des champs produit par des courants d'accélération de masses dans différents systèmes et de les comparés avec les valeurs champs métriques produits par les masses en mouvement dans le cadre de la théorie d'Einstein.

Par ailleurs, on peut se poser la question de savoir si dans le vide interstellaire, la valeur de la constante  $\lambda$  est bien égale à la valeur cosmologique  $\lambda_\Lambda$  ou si simplement cette valeur  $\lambda_\Lambda$  correspond à des phénomènes d'induction à l'échelle cosmologique. Comme il a été discuté plus haut, le tout serait d'établir des contraintes phénoménologiques sur cette constante pour des systèmes à des échelles cosmologiques et pour des systèmes à des échelles microscopiques (par exemple accélération de particules dans le vide).

### **E. Couplage du champ métrique et du champ d'induction gravitationnelle**

D'après ce que nous venons de voir dans la section précédente, le tenseur impulsion-énergie du système particule massive plus champ de gravité induit par l'accélération covariantes des masses et donnée par (71). Ainsi, d'après les principes de la relativité générale, lorsque l'on considère que le système masses et champ de gravitation n'est pas un système "test", i.e. sans effet sur le champ de gravité métrique  $g_{\mu\nu}(x)$  solution des équations d'Einstein, on trouve que le tenseur impulsion-énergie du système (71) contribue au champ de gravité métrique les équations suivantes en ajoutant la constante cosmologique du vide:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(G+P)} , \quad (75)$$

on ajoute alors les équations de champs (63) dérivant directement de la conservation du tenseur impulsion-énergie, ainsi que les équations de compatibilités (62).

On obtient dans le cas général (tenseur impulsion-énergie général), une série de trois groupes d'équations :

$$\boxed{\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\Lambda\varepsilon_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \\ D_\mu\varepsilon^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\Lambda c^4}D_\mu T^{\mu\nu} \\ E_{\mu\nu\rho\sigma}D^\mu D^\nu\varepsilon^{\sigma\rho} = 0, \end{cases}}, \quad (76)$$

où  $E_{\mu\nu\rho\sigma}$  est le tenseur totalement antisymétrique et où le tenseur impulsion-énergie est donnée par:

$$T_{\mu\nu}\sqrt{-g} \equiv \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left( \frac{\partial L}{\partial \partial_\sigma g_{\mu\nu}} \right). \quad (77)$$

On voit ainsi la théorie (RG) modifié ou plutôt complémentarisée par l'ajout du tenseur de contrainte dérivant du champ de déformation  $G_\mu(x)$ . A noté que si la constante cosmologique est nulle, on a aucun effet supplémentaire. Mais les observations cosmologiques tendent à prédire que cette dernière valeur n'est pas nulle et plus encore jouerait un rôle non négligeable quant à l'évolution cosmologique. L'idée d'accélération de l'expansion vient tout de suite à l'esprit comme pouvant ainsi être relié à la théorie du champ (G), qui se verrait comme une théorie de déformation du milieu gravitationnel, vu alors comme un milieu matériel ayant des propriétés physiques, comme le module d'Young égale à la constante  $\rho_\lambda c^2$ . Cette interprétation rejoint d'une certaine façon la vision de l'éther à laquelle Albert Einstein s'était intéressé, pensant que la relativité générale ne pouvait être considérer sans la présence d'un milieu matériel qui contrairement aux idées pré-relativiste se verrait ni comme un milieu fixe dans un espace-temps absolu ni comme un milieu en mouvement<sup>13, 14, 15</sup> : *Le principe de relativité restreinte nous interdit de considérer l'éther comme constitué de particules qu'on peut suivre dans le temps; mais l'hypothèse de l'éther comme telle ne contredit pas la théorie de la relativité restreinte. Il faut seulement se garder d'attribuer à l'éther un état de mouvement.[...] Nier l'éther, signifie en dernier lieu qu'il faut supposer que l'espace vide ne possède aucune propriété physique. Or, les faits fondamentaux de la mécanique ne se trouvent pas d'accord avec cette conception. L'état mécanique d'un système de corps qui flottent librement dans l'espace vide dépend, non seulement de ses positions relatives (distance) et de ses vitesses relatives, mais encore de son état de rotation qui, du*

*point de vue physique, ne peut pas être conçu comme un caractère appartenant au système en soi. Pour concevoir la rotation du système comme quelque chose de réel, ne fût-ce qu'au point de vue formel, Newton a objectivé l'espace. Par le fait qu'il place son espace absolu parmi les objets réels, la rotation par rapport à l'espace absolu devient aussi une réalité. Newton aurait pu aussi appeler son espace absolu éther; ce qui importe, c'est de supposer comme réel, à côté des objets accessibles à l'observation, un objet qui est inaccessible, afin de pouvoir regarder l'accélération ou la rotation comme quelque chose de réel. Dans cette idée, le tenseur des contraintes  $\sigma_{\mu\nu}$  peut être vu comme une contrainte appliquée cet éther constituant le milieu matériel gravitationnel.*

Il est clair que pour le moment tout cela peut être perçu comme de la spéculation étant donné que nous n'avons pas formulé de modèle cosmologique pouvant permettre de rendre compte des données observationnelles, qui corroboreraient l'interprétation qui est faite ci-dessus. Mais nous pouvons envisager ce chemin comme une perspective enthousiasmante et ambitieuse.

---

\* Also at home.

† mbeau@stp.dias.ie

<sup>1</sup> S. M. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Addison-Wesley (2004)

<sup>2</sup> C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, W. H. Freeman and Compagny (1973)

<sup>3</sup> Schutz, Bernard F. (2003), Gravity from the ground up, Cambridge University Press

<sup>4</sup> L.Landau , Physique Théorique Tome 2 (Théorie des Champs).

<sup>5</sup> M. Ostrogradsky, Mem. Acad. St. Petersburg **6** (4),385 (1850)

<sup>6</sup> M. Borneas, On a generalization of the Lagrange Function, American Journal of Physics, **27** (4), pp. 265-267 (1959).

<sup>7</sup> M. Borneas, Principle of the Action with Higher Derivatives, Phys.Rev **186** (5), 1299, (1969)

<sup>8</sup> D. Anderson, Equivalent Lagrangians in generalized mechanics, J. Math. Phys. **14**, 934 (1973)

<sup>9</sup> Jean Salençon, Mécanique des milieux continus - Tome 1 : Concepts généraux, les Editions de l'Ecole Polytechnique (2005)

<sup>10</sup> W-M Yao et al, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **33**, 1, (2006)

- <sup>11</sup> L. Cacciapuoti, Ch. Salomon, Space clocks and fundamental tests: The ACES experiment, Eur. Phys. J. Special Topics **172**, 57-68 (2009)
- <sup>12</sup> D. R. Brill and J. M. Cohen, Rotating Masses and Their Effect on Inertial Frames, Phys. Rev. **143**, 10111015 (1966)
- <sup>13</sup> A. Einstein, Dialogue sur les objections opposées à la théorie de la relativité, Die Naturwissenschaften **6**, 697-702, (1918), Traduit dans les Oeuvres choisies (dernière référence).
- <sup>14</sup> A. Einstein, L'éther et la théorie de la relativité, conférence à l'Université de Leyde (1920), traduction de M. Solovine dans Traduit dans les Oeuvres choisies (dernière référence). Ether and the Theory of Relativity, in Collected Paper of Albert Einstein, Princeton University Press.
- <sup>15</sup> Oeuvres choisies 2 Relativité I, par F. Balibar, O. Darrignol, B. Jech, Edition du Seuil, Paris.