



**HAL**  
open science

## Contrôle de Température dans un Flux de Poiseuille

Felipe Castillo Buenaventura, Emmanuel Witrant, Luc Dugard

► **To cite this version:**

Felipe Castillo Buenaventura, Emmanuel Witrant, Luc Dugard. Contrôle de Température dans un Flux de Poiseuille. CIFA 2012 - 7ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Jul 2012, Grenoble, France. pp.88. hal-00681109

**HAL Id: hal-00681109**

**<https://hal.science/hal-00681109>**

Submitted on 20 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contrôle de Température dans un Flux de Poiseuille

Felipe Castillo\* Emmanuel Witrant\* Luc Dugard\*

\* *GIPSA-lab, Control Systems Department,  
– Université de Grenoble, CNRS/UJF  
ENSE3 BP 46 38402 Saint Martin d’Hères, France.  
felipe.castillo, emmanuel.witrant, luc.dugard@gipsa-lab.grenoble-inp.fr*

---

**Résumé :** Le problème de contrôle de température dans les systèmes avec temps de transport de matière est étudié dans cet article, avec une application sur un procédé-pilote de contrôle d’un flux de Poiseuille. La conception et la description du procédé-pilote sont d’abord présentées, suivies de sa modélisation par une approche 0-D et une approche 1-D, avec des équations aux dérivées partielles dont les paramètres de convection sont variables par rapport au temps. Une discrétisation spatiale de deuxième ordre est effectuée sur le modèle unidimensionnel pour pouvoir utiliser des outils de contrôle des systèmes de dimension finie. A partir d’une mesure de température, l’estimation des états distribués est faite en utilisant un filtre de Kalman étendu (FKE). Finalement, une commande pseudo-optimale est conçue à partir des états estimés pour poursuivre une référence de température en prenant en compte le temps de transport de l’énergie moyenne du gaz dans le procédé. Des résultats de simulation valident la modélisation effectuée et montrent l’efficacité de l’observateur et du contrôleur développés.

*Mots-clés:* FKE, flux de Poiseuille, commande pseudo-optimale, transport de masse.

---

## 1. INTRODUCTION

Le transport de fluides est un phénomène souvent rencontré dans de nombreuses applications industrielles ; il engendre des temps de retard variables qui rendent le contrôle en boucle fermée beaucoup plus difficile. Ces applications sont très variées avec par exemple, dans le domaine de l’industrie automobile, le contrôle précis de la fraction d’air frais dans le collecteur d’admission des moteurs avec recirculation des gaz d’échappement, qui est un facteur critique pour la réduction des émissions polluantes (voir J.Wang (2008)). Un autre type d’application est le système de ventilation dans les mines : la qualité de l’air doit être régulée pour assurer de bonnes conditions de qualité de l’air et de température dans les chambres d’extraction (voir Witrant et al. (2010)). La moitié environ de l’énergie consommée dans les mines est destinée au système de ventilation, ce qui montre l’intérêt de développer des systèmes de contrôle performants pour des objectifs d’économie énergétique.

Ces types de systèmes sont souvent modélisés par des équations aux dérivées partielles ce qui implique le traitement de systèmes de dimension infinie. La réduction et la discrétisation de ces systèmes sont une stratégie systématiquement utilisée ; entre autres, afin de diminuer le temps de calcul des modèles et de mettre en œuvre des contrôleurs en utilisant des outils mathématiques pour des systèmes de dimension finie. Dans Joshi et al. (1995), par exemple, les équations de Navier-Stokes sont discrétisées en utilisant la méthode de Galerkin afin d’utiliser une commande linéaire quadratique pour stabiliser le système. Dans (Witrant et al. (2010)), les équations de

Navier-Stokes sont réduites puis discrétisées en utilisant le schéma de Lax-Wendroff pour faire une identification des paramètres de transport de la pression dans un système de ventilation de mine.

Dans cet article, un modèle physique réduit d’un banc d’essais visant à la régulation d’un flux de Poiseuille est développé en divisant le système en deux sous-systèmes : la colonne chauffante et le tube. Un modèle “zéro-dimensionnel” (0-D) est conçu pour la colonne et un modèle avec des équations différentielles partielles où le paramètre de convection est variable par rapport au temps, est développé pour le tube. Ce modèle mono-dimensionnel (1-D) avec un nombre d’états infini est discrétisé en utilisant des approximations de deuxième ordre pour la dérivée spatiale avec comme objectif d’utiliser des stratégies d’observation et de contrôle pour les modèles de systèmes de dimension finie. Comme seule la mesure de la température de sortie est disponible sur le dispositif, un observateur de Kalman étendu est synthétisé pour reconstruire tous les états du système discrétisé, nécessaires au calcul des lois de commande qui seront appliquées au système. Une commande pseudo optimale est conçue pour assurer la poursuite d’une référence de température de sortie. Finalement, des simulations des lois d’observation et de commande sont effectuées sur le modèle pour illustrer la démarche proposée et son efficacité.

## 2. DESCRIPTION DU BANC D’ESSAIS

Pour étudier plus en détail le phénomène de transport de l’énergie moyenne dans un flux de Poiseuille, un banc d’essai a été spécialement conçu pour tester et valider des

stratégies de commande avancée. La Figure 1 montre le schéma du dispositif.

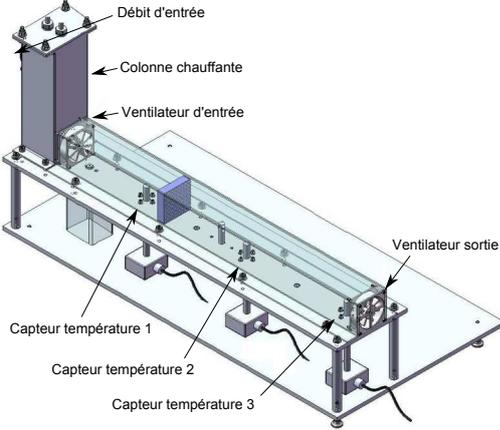


FIGURE 1. Schéma du banc d'essais

Ce dispositif est constitué principalement par une colonne chauffante, un tube, une résistance, deux ventilateurs, un débitmètre et des capteurs de température. Le but de cette expérience est de contrôler la température de sortie du tube en pilotant la puissance dissipée sur la résistance pour différents débits massiques d'air (entrées exogènes produites par les ventilateurs) à travers le tube. Seuls la température de sortie du tube et le débit massique d'entrée seront pris en compte comme mesures pour le développement d'une commande en boucle fermée du système.

### 3. MODÉLISATION DU BANC D'ESSAIS

La modélisation du dispositif montré Figure 1 est abordée en considérant deux sous-systèmes : la colonne chauffante et le tube. La surface de la section transversale de la colonne chauffante est beaucoup plus grande que celle du tube, ce qui entraîne une vitesse du gaz dans la colonne plus lente que dans le tube. Cela permet de considérer la colonne chauffante comme un volume de contrôle avec des échanges thermiques qui proviennent de la résistance chauffante. Cependant, pour le tube, cette approche n'est pas pertinente car elle ne permet pas de prendre en compte le temps de transport de l'entropie ou l'énergie moyenne, qui fait l'intérêt de cette étude. Pour le tube, un modèle 1-D d'ordre réduit est donc conçu pour représenter la dynamique du gaz et le temps de transport de l'énergie moyenne du gaz dans le système.

#### 3.1 Modèle du volume d'entrée

Dans cette sous-section, la modélisation de la colonne chauffante est développée en utilisant une approche de volume de contrôle. Considérons l'énergie interne d'un gaz parfait :

$$U_0 = C_v m_0 T_0 \quad (1)$$

où  $U_0$  est l'énergie interne,  $T_0$  la température du gaz,  $m_0$  la masse dans la colonne chauffante et  $C_v$  la chaleur

spécifique du gaz à volume constant. La dérivée de (1) par rapport au temps est :

$$\dot{U}_0 = C_v m_0 \dot{T}_0 + C_v T_0 \dot{m}_0 \quad (2)$$

D'après la première loi de la thermodynamique, la dynamique de l'énergie interne du gaz peut aussi s'écrire selon la relation :

$$\dot{U}_0 = \sum h_i \dot{m}_i + dQ + dW \quad (3)$$

où  $h_i$  est l'enthalpie spécifique du gaz qui entre ou sort du volume avec son débit massique  $\dot{m}_i$ ,  $dQ$  les échanges thermiques et  $dW$  le travail fait par le gaz. Pour le cas de la colonne chauffante, il y a deux débits interagissant avec le volume : le débit d'entrée  $\dot{m}_{in}$  et le débit de sortie  $\dot{m}_{out}$ . Le gaz n'effectue aucun travail dans le volume de contrôle, d'où  $dW = 0$ . Pour écrire l'équation (3) en termes de température, l'enthalpie spécifique d'un gaz parfait, définie par  $h_0 = C_p T_0$ , où  $C_p$  est la chaleur spécifique à pression constante du gaz, est utilisée. Donc (3) peut se re-écrire :

$$\dot{U}_0 = C_p T_{in} \dot{m}_{in} - C_p T_0 \dot{m}_{out} + dQ \quad (4)$$

où  $T_{in}$  est la température du gaz entrant dans la colonne chauffante. Pour simplifier le modèle, on fait deux hypothèses :

- A-1 la dynamique de la pression dans le volume de contrôle est beaucoup plus rapide que celle de la température, permettant de considérer un comportement quasi-statique de la pression et la masse ;
- A-2 les pertes de charge sont négligées à cause du faible débit massique et des sections d'entrée/sortie de gaz suffisamment grandes. Ceci implique que  $p_0 \approx p_{in}$ , où  $p_{in}$  est la pression d'entrée.

Les hypothèses A-1 et A-2 permettent de re-écrire respectivement (2) et (4) :

$$\dot{U}_0 = C_v m_0 \dot{T}_0 \quad (5)$$

$$\dot{U}_0 = C_p \dot{m}_{in} (T_{in} - T_0) + dQ \quad (6)$$

Pour simplifier, surtout dans l'approche du modèle 1-D (voir sous-section suivante), la dynamique de la température va être exprimée en termes de la masse volumique en introduisant le changement de variable  $\rho_0 = \frac{p_{in}}{RT_0}$  (loi des gaz parfaits). En égalant (5) et (6) et en utilisant la loi des gaz parfaits pour remplacer la masse en termes de pression d'entrée et de constante des gaz  $R$ , on obtient :

$$\dot{\rho}_0 = -\frac{R\gamma T_{in} \dot{m}_{in}}{p_{in} V_0} \rho_0 - \frac{R}{p_{in} V_0 C_v} \rho_0 dQ + \frac{\gamma \dot{m}_{in}}{V_0} \quad (7)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique dans la colonne chauffante,  $V_0$  est le volume de la colonne chauffante et  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

#### 3.2 Modèle 1-D du Tube

Un modèle réduit uni-dimensionnel (1-D) du tube est développé pour décrire la dynamique de la masse volumique dans le tube et servir de base à la synthèse des lois

de commande prenant en compte le temps de transport de l'énergie moyenne. Pour modéliser la dynamique du fluide dans le tube, on utilise les équations unidimensionnelles d'Euler sous forme non-conservative pour un gaz parfait et pour un tube à section constante. Ces équations peuvent s'écrire en termes des variables primitives (masse volumique  $\rho$ , vitesse de particules  $u$  et pression  $p$ ). Ainsi (voir DE. Winterbone (2000)) :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathbf{V}) = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & a^2 \rho & u \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \\ (\gamma - 1)\rho(q + uG) \end{bmatrix}$$

$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  est la vitesse du son,  $G$  un terme lié aux pertes dues aux frottements et  $q$  un terme lié aux échanges thermiques avec la paroi. L'équation (8) est une équation différentielle hyperbolique dont la solution ne peut pas être trouvée analytiquement. L'application abordée dans cet article permet de ne prendre en compte qu'une partie de l'équation (8). Plusieurs hypothèses peuvent être faites pour simplifier le problème :

- H-1 la vitesse de propagation d'onde d'entropie (d'énergie moyenne et de masse) dans le tube est beaucoup plus lente que celles de la propagation de la pression et des particules dans le tube (vitesse du son), i.e.  $u \ll a$  ;
- H-2 la pression peut être considérée constante car la pression dans le tube est très proche de la pression atmosphérique, les ventilateurs n'introduisant que des changements de pression très faibles ;
- H-3 les pertes de charge dues aux frottements, tout comme les pertes thermiques sont ignorées, i.e.  $q = 0$  et  $G = 0$ .

En considérant H-2 et H-3, la dérivée de  $u(x, t)$  et  $p(x, t)$  par rapport à  $x$  est nulle. Cela permet de réduire (8) à l'équation d'advection suivante :

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} + u(t) \frac{d\rho(x, t)}{dx} = 0 \quad (9)$$

où  $u(t)$  est le paramètre de convection variable par rapport au temps. Le débit massique de l'entrée du procédé est mesuré et fournit la vitesse de particule  $u(t)$ , qui peut être reconstruite en utilisant la loi des gaz parfaits avec H-1, H-2 et H-3 :

$$u(t) = \frac{\dot{m}_{in}}{\rho_0 A_t} \quad (10)$$

où  $A_t$  est la section du tube. Le paramètre de convection  $u(t)$  est donc proportionnel au débit massique d'entrée et inversement proportionnel à la masse volumique dans la colonne chauffante. Avec les équations (9) et (10), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} + \frac{\dot{m}_{in}}{\rho_0 A_t} \frac{d\rho(x, t)}{dx} = 0 \quad (11)$$

Il faut noter qu'aucune entrée de contrôle n'apparaît dans cette équation, donc le contrôle doit agir sur la condition limite. Une condition limite est alors définie pour l'entrée du tube. Le changement de masse volumique à travers le ventilateur d'entrée étant très faible, la condition limite d'entrée est :

$$\rho(0, t) = \rho_0 \quad (12)$$

### 3.3 Discrétisation du Modèle du procédé pour la commande

Dans cette sous-section, la discrétisation de (11) et la connection des deux modèles (volume de contrôle et tube) sont présentées. Considérons la discrétisation spatiale centrale de deuxième ordre pour une équation d'advection (voir Hundsdorfer (2000)) en prenant  $N$  éléments finis dans le tube (avec  $N = \frac{L}{\Delta X}$ ), (9) peut être représentée approximativement en utilisant  $N$  équations différentielles ordinaires. Il faut noter que pour les éléments  $i = 1$  et  $i = N$  la discrétisation spatiale centrale n'est pas définie et les conditions limites du tube doivent être incluses en conséquence. Pour le cas de  $i = 1$ , la condition limite présentée dans l'équation (12) s'intègre comme s'il existait un élément fini  $i = 0$  dont la dynamique est donnée par l'équation (7). Par contre, dans le cas  $i = N$ , il faut prendre en compte l'information venant de la courbe caractéristique  $u(t)$  pour définir la dynamique de  $\rho_N$ .

Pour aborder ce problème, on utilise la méthode des caractéristiques (voir DE. Winterbone (2000)) qui permet de représenter le modèle discrétisé complet de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 &= -\frac{R\gamma T_{in} \dot{m}_{in}}{p_{in} V_0} \rho_0 - \frac{R}{p_{in} V_0 C_v} \rho_0 dQ + \frac{\gamma \dot{m}_{in}}{V_0} \\ \dot{\rho}_1 &= -\frac{\dot{m}_{in}}{\rho_0 A_t} \frac{1}{2\Delta x} (\rho_2 - \rho_0) \\ &\dots \\ \dot{\rho}_{N-1} &= -\frac{\dot{m}_{in}}{\rho_0 A_t} \frac{1}{2\Delta x} (\rho_N - \rho_{N-2}) \\ \dot{\rho}_N &= -\frac{\dot{m}_{in}}{\rho_0 A_t} \frac{1}{\Delta x} (\rho_N^n - \rho_{N-1}^n) \end{aligned} \quad (13)$$

Il faut noter que l'équation (13) n'est pas linéaire parce que l'entrée du contrôle  $dQ$  est multipliée par l'état  $\rho_0$  et la dynamique de tous les états, sauf  $\rho_0$ , est divisée par  $\rho_0$ . Cependant, le système d'équations (13) montre l'intérêt d'utiliser la masse volumique comme variable d'état au lieu de la température. Si la transformation  $\rho = \frac{p_{in}}{RT}$  était appliquée à l'équation (13), on obtiendrait un système plus complexe et plus non-linéaire.

## 4. OBSERVATEUR D'ÉTAT AVEC UN FKE

Dans cette section, la reconstruction du vecteur d'états  $\rho$  du système (13) est faite à partir de la mesure de température obtenue par le capteur 3 de la Figure 1. Avec le changement de variable utilisé préalablement, la sortie du système peut s'écrire ainsi :

$$y = h(\rho) = \frac{p_{in}}{R\rho_n} \quad (14)$$

A partir des résultats obtenus en (13), des stratégies d'estimation d'états non-linéaires doivent être mises en œuvre pour reconstruire le vecteur d'état  $\rho$ . Le filtre de Kalman étendu (FKE) est probablement l'algorithme le plus utilisé pour l'estimation de systèmes non-linéaires. Il a montré sa fiabilité, surtout dans des applications où les non-linéarités du système sont faibles (voir Julier et Uhlmann (2004)). Le système (13) correspond à ce cas dans le sens où le domaine de variation des valeurs du vecteur d'états  $\rho$  est petit (entre 1 et 1.2), ce qui suggère que le FKE peut être une bonne approche.

Soit le système linéaire à paramètres variant par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (15)$$

avec  $A(t)$  et  $C(t)$  uniformément bornées. Si le système (15) est uniformément complètement observable, alors il existe un observateur de la forme (voir Anderson et Moore (1971) Besançon (2007)) :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - K(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \quad (16)$$

avec  $K(t)$  le gain d'observation donné par le filtre de Kalman étendu (FKE) (voir Gelb (1992)) et :

$$A(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), u(t)) \quad (17)$$

$$C(t) := \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t)) \quad (18)$$

Pour mettre en œuvre le FKE associé au système (13) présenté dans la section précédente, il faut d'abord calculer  $A(t)$  via l'équation (17) en utilisant les résultats de la section précédente. Soit les deux fonctions suivantes :

$$f_0(\rho, dQ) = -\frac{R\gamma T_{in}\dot{m}_{in}}{p_{in}V_0}\rho_0 - \frac{R}{p_{in}V_0C_v}\rho_0 dQ + \frac{\gamma\dot{m}_{in}}{V_0} \quad (19)$$

$$f_i(\rho) = -\frac{\dot{m}_{in}}{\rho_0 A_t} \frac{1}{2\Delta x} (\rho_{i+1} - \rho_{i-1}) \quad (20)$$

où (19) est la fonction associée à la dynamique de la masse volumique dans la colonne chauffante et (20) est une généralisation de la dynamique du reste des états. En dérivant (19) et (20) par rapport à  $\rho$ , on obtient :

$$\frac{\partial f_0(\rho, dQ)}{\partial \rho_0} = \alpha_1 + \alpha_2 dQ; \quad \frac{\partial f_0(\rho, dQ)}{\partial \rho_i} = 0 \quad \forall i \neq 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i(\rho, dQ)}{\partial \rho_0} &= \beta \frac{(\rho_{i-1} - \rho_{i+1})}{\rho_0^2}; & \frac{\partial f_i(\rho, dQ)}{\partial \rho_{i-1}} &= -\frac{\beta}{\rho_0}; \\ \frac{\partial f_i(\rho, dQ)}{\partial \rho_{i+1}} &= \frac{\beta}{\rho_0} \end{aligned} \quad (22)$$

où  $\alpha_1 = -\frac{\gamma R \dot{m}_{in} T_{in}}{p_{in} V_0}$ ,  $\alpha_2 = -\frac{R}{V_0 C_v p_{in}}$  et  $\beta = -\frac{\dot{m}_{in}}{2\Delta x A_t}$ . Avec les équations (21) et (22) la matrice  $A(t)$  est construite selon l'équation (17). Pour trouver  $C(t)$ , l'équation (14) est dérivée par rapport à  $\rho$  :

$$C(t) = \frac{\partial h(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{P_{in}}{R\hat{\rho}_n^2} \quad (23)$$

L'observabilité du couple  $(A(t), C(t))$  peut être vérifiée. Pour la mise en œuvre en temps réel de l'observateur, les variations de  $A(t)$  et  $C(t)$  sont supposées suffisamment lentes par rapport au temps, permettant ainsi de résoudre l'équation de Riccati sous sa forme quasi-stationnaire.

## 5. COMMANDE DE LA TEMPÉRATURE DE SORTIE PAR UN CONTRÔLE OPTIMAL

Le but de cette section est de synthétiser un contrôleur pour que le système (13) suive une température de référence de sortie. La linéarisation du système (13) est faite autour d'un point  $(\bar{\rho}, \bar{u})$  pour exprimer le système sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + E(t) \quad (24)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_2 \bar{\rho}_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; E(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \bar{\rho}_0 \bar{d}Q \\ \beta \left(1 - \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_0}\right) \\ \beta \left(\frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_0}\right) \\ \dots \\ 2\beta \left(\frac{\bar{\rho}_{N-1} - \bar{\rho}_N}{\bar{\rho}_0}\right) \end{bmatrix}$$

$A(t)$  étant similaire à la même matrice obtenue dans l'observateur mais évaluée au point  $(\bar{\rho}, \bar{u})$  au lieu de  $(\hat{x}(t), u(t))$ . Comme il est demandé de poursuivre une référence, l'état est étendu avec un intégrateur pour assurer un bon suivi de la référence en régime stationnaire. Le nouvel état est défini comme :

$$\dot{e} = y - r \quad (25)$$

où  $r$  est la référence. Il faut noter que, aussi bien  $y$  que  $r$ , sont donnés en température alors que les états estimés par l'observateur sont des masses volumiques. On redéfinit donc l'équation (25) :

$$\dot{e} = \rho_N - r_\rho \quad (26)$$

où  $r_\rho = \frac{p_{in}}{Rr}$ . On a alors l'état étendu suivant :

$$\dot{x}_e(t) = A_e(t)x_e(t) + B_e(t)u(t) + E_e(t) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A_e(t) &= \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ F & 0 \end{bmatrix}; B_e(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ 0 \end{bmatrix}; E_e(t) = \begin{bmatrix} E(t) \\ r_\rho \end{bmatrix} \\ F &= [0 \ 0 \ \dots \ -1]; x_e(t) = \begin{bmatrix} \rho \\ e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si la paire  $(A_e(t), B_e(t))$  est complètement commandable, alors il existe une entrée de contrôle  $u(t)$  donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t)A_e(t) + A_e^T(t)P(t) - \\ &P(t)B_e(t)R^{-1}B_e^T(t)P(t) + Q \\ \dot{\Gamma}(t) &= P(t)B_e(t)R^{-1}B_e^T(t)\Gamma(t) + P(t)E_e(t) - A_e(t)\Gamma \\ u(t) &= -R^{-1}B_e^T(t)[P(t)X_e(t) - \Gamma(t)] \end{aligned} \quad (28)$$

avec  $R = R^T > 0$  et  $Q > 0$ , telle que la fonction de coût :

$$J = \int_0^{t_f} (x_e^T(t)Qx_e(t) + Ru(t)^2) dt \quad (29)$$

soit minimisée (voir Santiago et al. (2011)). Les conditions limites des dynamiques (28) sont fournies par les conditions terminales  $P(tf) = 0$  et  $\Gamma(tf) = 0$  (aucun coût n'ayant été spécifié au temps final dans (29)). Pour simplifier la mise en œuvre du contrôleur, la solution quasi-stationnaire du système (28) est utilisée, avec un gain pour le retour d'états  $K_x(t)$  et un gain de précompensation  $K_E(t)$  qui inclut les variations de la référence. Le schéma final du contrôle de température est présenté dans la figure suivante :

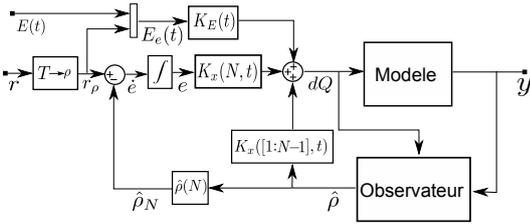


FIGURE 2. Schéma de l'architecture de contrôle

## 6. RÉSULTATS DES SIMULATIONS

Cette section présente les résultats de simulation obtenus à partir du modèle, avec l'observateur et le contrôleur développés dans la section précédente. Pour toutes les simulations, les paramètres du procédé sont ceux indiqués :  $p_{in} = 1 \times 10^5$  Pa,  $T_{in} = 300$  K,  $V_0 = 4 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>,  $A_t = 6.4 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>,  $N = 9$  et  $L = 1$  m où  $L$  est la longueur du tube.

### 6.1 Résultats sur le modèle du banc d'essais

Pour tester le modèle du banc d'essais, deux simulations différentes sont faites : une première où un changement de l'entrée de commande est introduit pour différents débits massiques et la seconde où des changements de l'entrée de commande sont effectués, à débit massique constant.

La Figure 3 présente les résultats de la première simulation pour trois débits massiques différents. Bien que la valeur de l'entrée de contrôle soit égale pour les trois cas, les résultats sont significativement différents. On peut noter que, lors d'une baisse de débit massique, la température de sortie augmente ainsi que le retard sur la température de sortie. Ces résultats sont conformes aux prévisions car

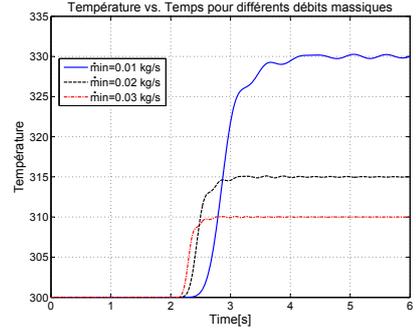


FIGURE 3. Réponse de la température de sortie pour différents débits massiques (kg/s) et une entrée de 300 W

pour de faibles débits, plus d'énergie est absorbée par le gaz par unité de masse, ce qui se manifeste par l'augmentation de la température de sortie. Le débit massique affecte directement le paramètre de convection  $u(t)$  selon l'équation (10), entraînant un temps de transport de la masse volumique plus grand et par conséquent des retards plus importants sur la température de sortie. La Figure 3 suggère également un comportement assez non-linéaire du système par rapport aux changements du débit massique.

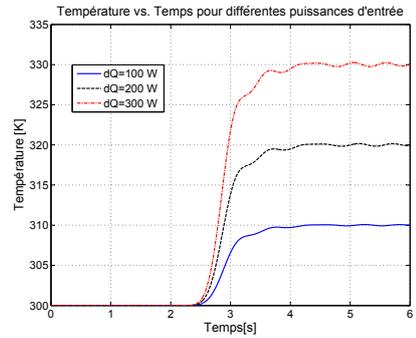


FIGURE 4. Réponse de la température de sortie pour différentes puissances d'entrée et un débit massique de 0.02 [kg/s]

La Figure 4 présente les résultats de la deuxième simulation, où à débit massique constant, on fait varier la taille de  $dQ$ . Les résultats obtenus montrent que le temps de transport est relativement peu affecté par le changement de puissance de l'entrée. En revanche, la température de sortie change assez fortement par rapport aux changements de  $dQ$ , ce qui permet de conclure à une bonne commandabilité de la température du système. Il faut également noter que la température de sortie a une réponse presque linéaire par rapport à  $dQ$ .

### 6.2 Résultats de l'observateur d'états

L'observateur développé dans cet article est simulé en reprenant les mêmes paramètres que ceux choisis dans la dernière sous-section. Pour analyser sa performance, l'observateur est initialisé à une masse volumique plus grande que celle du modèle. De même, la poursuite d'une référence est faite par le régulateur de la Figure 2. Les valeurs pour les matrices de covariance  $V$  et  $W$  sont définies par  $W = 0.01$  et  $V = 0.001 I_{N,N}$ , où  $I_{N,N}$  est la matrice identité de dimension  $N \times N$ . La variance de la mesure est choisie égale à 0.01 et  $V$  est réglée afin d'obtenir la réponse adéquate de l'observateur.

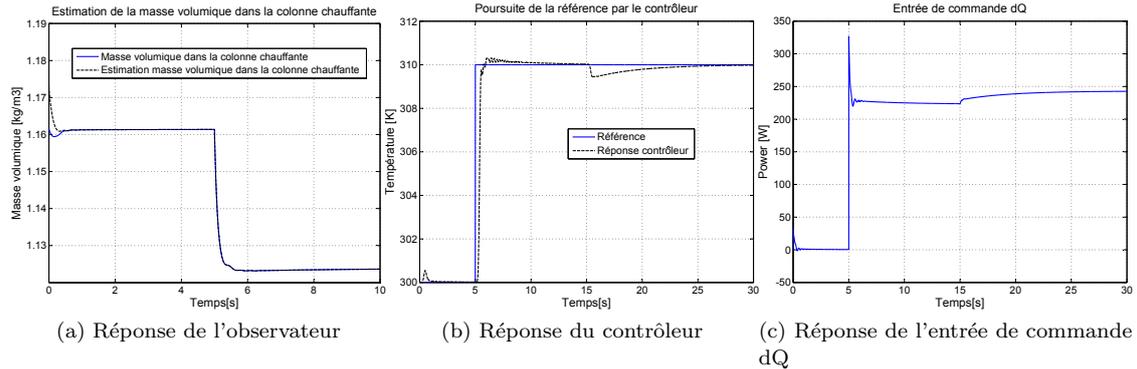


FIGURE 5. Résultats de simulation de l'observateur et du contrôleur

La Figure 5a montre la réponse de l'estimation de la masse volumique dans la colonne chauffante. Le résultat montre que les états estimés convergent très rapidement vers l'état réel : même sous des changements forts de la masse volumique, l'observateur répond de façon adéquate.

### 6.3 Résultats de la commande pseudo optimale

En implantant l'architecture de commande de la Figure 2, la commande optimale développée est testée avec l'observateur (dont les conditions initiales sont celles de la sous-section précédente), en présence d'un changement de référence et d'une perturbation dans l'entrée pour vérifier la performance du contrôleur. Les matrices  $Q$  et  $R$  sont définies par  $Q = 4000 I_{N+1, N+1}$ ;  $R = 0.001$  pour assurer une bonne poursuite de la référence sans dépasser la puissance maximale délivrée par la résistance.

La Figure 5b présente la réponse du système en boucle fermée pour un changement de référence et une perturbation de  $20 W$  sur l'entrée du contrôle au temps  $t = 15s$ . Comme la figure l'illustre, le système arrive effectivement à rejoindre la référence en quelques secondes, sans erreur statique, grâce à l'extension d'états. De même, le système répond de façon robuste à la perturbation introduite.

L'entrée du contrôle est montrée dans la Figure 5c. Sa réponse est très rapide à cause de la précompensation de la référence à l'entrée de contrôle  $dQ$ . Dans cette application, la dérivée  $\frac{d}{dt}(dQ)$  n'est pas limitée, l'actionneur étant une résistance électrique qui est supposée pouvoir être pilotée rapidement. Par contre, il ne faut jamais dépasser sa valeur maximale de puissance, qui dans ce cas est de  $400 W$ .

## 7. CONCLUSIONS

Dans ce travail, un modèle physique du procédé pilote montré Figure 1 a été développé en utilisant une approche 0-D pour la dynamique de la masse volumique de la colonne chauffante et une approche 1-D pour le tube en mettant en œuvre une discrétisation spatiale du deuxième ordre sur l'équation d'advection. Les résultats obtenus du modèle correspondent au comportement attendu ; la valeur de la température de sortie montre une forte dépendance par rapport au débit massique  $\dot{m}_{in}$  et à la puissance d'entrée  $dQ$ , en présentant des retards sur le transport de l'énergie moyenne interne du gaz. Un FKE est conçu

pour observer les états dans le tube ainsi que la masse volumique dans la colonne chauffante. La performance de l'estimateur est vérifiée en observant la masse volumique dans la colonne chauffante depuis la température de sortie. Finalement, un contrôle pseudo optimal est synthétisé pour contrôler la température de sortie du procédé. Un état supplémentaire est ajouté pour assurer une bonne poursuite de la référence et la robustesse face aux perturbations. Les résultats obtenus montrent que la référence est bien suivie, même en présence de perturbation d'entrée, sans saturer l'entrée du contrôle.

## RÉFÉRENCES

- Anderson, B. et Moore, J. (1971). *Linear Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Besaçon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Applications*. Springer, Berlin Heidelberg.
- DE. Winterbone, R.P. (2000). *Theory of Engine Manifold Design : Wave Action Methods for IC Engines*. Society of Automotive Engineers. Inc.
- Gelb, A. (1992). *Applied optimal estimation*. MIT Press, Cambridge MA.
- Hundsdoerfer, W. (2000). *Numerical Solution of Advection-Diffusion-Reaction Equations : Lecture Notes*. Thomas Stieltjes Institut.
- Joshi, S., Speyert, L., et Kim, J. (1995). Modelling and control of two dimensional poiseuille flow. *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*.
- Julier, F. et Uhlmann, J. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE, vol. 92 (3)*.
- J.Wang (2008). Air fraction estimation for multiple combustion mode diesel engines with dual-loop EGR systems. *Control Engine Practice 16, 1479-1468*.
- Santiago, E., Witrant, E., Goniche, M., et Clairet, F. (2011). An optimal feedback approach to particle source identification in tokamaks. *Proceedings of the 15th IEEE International Conference on System Theory, Control and Computing*.
- Witrant, E., D'Innocenzo, A., Sandou, G., Santucci, F., Benedetto, M.D.D., Isaksson, A.J., Johansson, K.H., Niculescu, S.I., Olaru, S., Serra, E., Tennina, S., et Tiberi, U. (2010). Wireless ventilation control for large-scale systems : the mining industrial case. *International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 20 (2), pp. 226 - 251*.