



**HAL**  
open science

# Effets des conditions de glissement sur l'écoulement de Bodewadt d'un fluide de type Reiner-Rivlin

Bikash Sahoo, Sébastien Poncet

► **To cite this version:**

Bikash Sahoo, Sébastien Poncet. Effets des conditions de glissement sur l'écoulement de Bodewadt d'un fluide de type Reiner-Rivlin. 20e Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-00679096

**HAL Id: hal-00679096**

**<https://hal.science/hal-00679096>**

Submitted on 14 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Effets des conditions de glissement sur l'écoulement de Bödewadt d'un fluide de type Reiner-Rivlin

B. Sahoo<sup>a</sup>, S. Poncet<sup>b</sup>

a. National Institute of Technology, Department of Mathematics, Rourkela, 769008 ORISSA (India)

b. Laboratoire M2P2, Technopôle Château-Gombert, 38 rue F. Joliot-Curie, 13451 MARSEILLE

## Résumé :

*L'écoulement stationnaire d'un fluide de Reiner-Rivlin en rotation au-dessus d'un disque fixe est étendu au cas où la surface du disque admet un glissement partiel. Les équations de quantité de mouvement se réduisent à un système d'équations fortement non-linéaires résolues par la méthode des différences finies. Les effets des conditions de glissement et des propriétés du fluide sur les caractéristiques de la couche limite sont discutés en détails. Le paramètre de glissement a un effet dominant sur le champ de vitesse, alors que le caractère non-newtonien influe sur le coefficient de moment.*

## Abstract :

*The steady flow of a rotating Reiner-Rivlin fluid over a stationary disk is extended to the case where the disk surface admits partial slip. The momentum equation gives rise to a highly nonlinear boundary value problem solved numerically by a second-order finite difference scheme. The effects of slip and non-Newtonian fluid characteristics on the boundary layer are discussed in details. It is observed that slip has prominent effect on the velocity field, whereas a predominant influence of the non-Newtonian parameter is observed on the moment coefficient.*

**Mots clefs :** écoulement de Bödewadt ; fluide de type Reiner-Rivlin ; conditions de glissement

## 1 Introduction

Les écoulements de fluides non-newtoniens engendrés par la rotation d'un disque ont été largement étudiés durant les dernières décennies [1] pour les nombreuses applications industrielles qui en découlent : des disques durs d'ordinateur, au design des générateurs de puissance ou de manière plus évidente dans le domaine de la rhéologie. Dans de précédents travaux [2], nous nous sommes intéressés à l'écoulement de Von Kármán [10] engendré par la rotation d'un disque infini dans un milieu fluide au repos et aux transferts de chaleur associés dans le cas d'un fluide conducteur de type Reiner-Rivlin avec des conditions de glissement partiel. Ces précédents résultats sont étendus ici au cas de l'écoulement d'un fluide en rotation uniforme au-dessus d'un disque infini au repos.

Ce problème a été largement considéré dans la littérature pour des fluides incompressibles newtoniens. Il a été étudié pour la première fois par Bödewadt [3] par des approximations de couche limite. La solution de Bödewadt montre que les effets de couche limite s'étendent jusqu'à  $\zeta = 8$ , où  $\zeta$  est la distance adimensionnée mesurée le long de l'axe de rotation du disque. Cette solution a ensuite été corrigée par Browning (non publié), qui nota une couche limite plus épaisse que pour l'écoulement de Von Kármán. Batchelor [5] généralisa ces analyses au cas où le disque de rayon infini tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  constante dans un fluide tournant à une vitesse  $\Omega$  différente, ce qui a été étudié plus tard numériquement par Rogers et Lance [7]. Pour  $\omega = 0$ , on retrouve le problème considéré par Bödewadt [3]. Nydahl [6] a étendu le problème de Bödewadt pour introduire des transferts de chaleur. Ses résultats confirment ceux de Bödewadt alors que Rogers et Lance [7] obtiennent une

valeur de  $H_\infty = 1.3494$  (valeur de la vitesse axiale loin du disque) très supérieure à celle précédemment obtenue. Le lecteur peut se référer au livre d'Owen et Rogers [8] pour une revue extensive des travaux sur l'écoulement de Bödewadt jusqu'en 1989. Si la littérature est très fournie sur le problème de Von Kármán dans le cas non-newtonien (voir [2]), elle l'est beaucoup moins pour l'écoulement de Bödewadt. On peut citer néanmoins les travaux de Kitchens et Chang [9], qui ont étudié l'écoulement de Bödewadt pour un fluide non-newtonien du second ordre. La présente étude est une tentative pour combler ce manque en essayant notamment de quantifier les influences des paramètres non-newtonien et de glissement sur la structure de la couche limite de Bödewadt.

## 2 Méthode numérique

### 2.1 Modèle mathématique

On considère un fluide non-newtonien de type Reiner-Rivlin, pour lequel le tenseur des contraintes  $\tau_{ij}$  est relié au tenseur des déformations  $e_{ij}$  [1] par :

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + 2\mu_c e_{ik}e_{kj} \quad (1)$$

$$e_{jj} = 0 \quad (2)$$

où  $p$  représente la pression,  $\mu$  le coefficient de viscosité et  $\mu_c$  le coefficient de viscosité croisée.

Le fluide occupe l'espace  $z > 0$  au-dessus d'un disque fixe de dimension infinie situé en  $z = 0$ . L'écoulement est dû à la rotation solide du fluide à une vitesse angulaire constante  $\Omega$  loin du disque. Le problème est écrit en coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$  avec une hypothèse d'axisymétrie de l'écoulement :  $\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0$ . Les conditions aux limites de non-glissement pour le champ de vitesse s'écrivent :

$$\begin{aligned} z = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \\ z \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow r\Omega, \quad p \rightarrow p_\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

On introduit alors les transformations de Von Kármán [10] :

$$u = r\Omega F(\zeta), \quad v = r\Omega G(\zeta), \quad w = \sqrt{\Omega\nu}H(\zeta), \quad z = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}\zeta, \quad p - p_\infty = -\rho\nu\Omega P \quad (4)$$

où  $u, v, w$  sont les composantes radiale, tangentielle et axiale de la vitesse et  $z$  la distance au disque fixe. Ces transformations permettent de réduire les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien à un système d'équations différentielles ordinaires. La même démarche est ici adoptée dans le cas non-newtonien. On définit alors le paramètre non-newtonien  $L = \mu_c\Omega/\mu$ . En considérant les approximations de couche limite usuelles, les équations de continuité et de quantité de mouvement se réduisent à :

$$\frac{dH}{d\zeta} + 2F = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2} - H\frac{dF}{d\zeta} - F^2 + G^2 - F - \frac{1}{2}L\left[\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 - 3\left(\frac{dG}{d\zeta}\right)^2 - 2F\frac{d^2F}{d\zeta^2}\right] = 1 \quad (6)$$

$$\frac{d^2G}{d\zeta^2} - H\frac{dG}{d\zeta} - 2FG - G + L\left(\frac{dF}{d\zeta}\frac{dG}{d\zeta} + F\frac{d^2G}{d\zeta^2}\right) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2H}{d\zeta^2} - H\frac{dH}{d\zeta} - \frac{7}{2}L\frac{dH}{d\zeta}\frac{d^2H}{d\zeta^2} + \frac{dP}{d\zeta} = 0 \quad (8)$$

Les conditions aux limites (3) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \zeta = 0 : \quad F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0, \\ \zeta \rightarrow \infty : \quad F \rightarrow 0, \quad G \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Le fluide adhère partiellement à la paroi. Une généralisation des conditions partielles de glissement donne dans les directions radiale et azimutale :

$$u|_{z=0} = \lambda_1 T_{rz}|_{z=0}, \quad v|_{z=0} = \lambda_2 T_{\phi z}|_{z=0} \quad (10)$$

où  $T_{rz}$ ,  $T_{\phi z}$  sont les composantes physiques du tenseur des contraintes et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les coefficients de glissement :

$$\lambda = \lambda_1 \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \mu, \quad \eta = \lambda_2 \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}} \mu. \quad (11)$$

En utilisant les transformations (4), les conditions aux limites de glissement partiel (Eq.10) deviennent :

$$\begin{aligned} F(0) &= \lambda[F'(0) - LF(0)F'(0)], & G(0) &= \eta[G'(0) - 2LF(0)G'(0)], & H(0) &= 0 \\ F(\infty) &\rightarrow 0, & G(\infty) &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Les conditions aux limites loin du disque restent ainsi inchangées.

## 2.2 Solution numérique

On résoud le système d'équations différentielles non-linéaires défini par les Équations (5-7) associé aux conditions aux limites (Eq.12) en adoptant le même schéma numérique du second ordre en espace que celui décrit dans [2]. Le domaine d'intégration semi-infini  $\zeta \in [0, \infty)$  est remplacé par un domaine d'extension fini  $\zeta \in [0, \zeta_\infty)$ . En pratique,  $\zeta_\infty$  doit être choisi suffisamment grand pour que la solution numérique tende vers les conditions aux limites à l'infini. Ici, on fixe  $\zeta_\infty = 27$ , valeur qui est à comparer avec celle utilisée pour le problème de Von Kármán :  $\zeta_\infty = 10$  [2].

Les Équations (5-7) sont discrétisées par des opérateurs de différence centrée pour les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{h^2} - H_i \left( \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h} \right) - F_i^2 + G_i^2 - F_i - \frac{1}{2} L \left[ \left( \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h} \right)^2 \right. \\ \left. - 3 \left( \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2h} \right)^2 - 2F_i \left( \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{h^2} \right) \right] - 1 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}}{h^2} - H_i \left( \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2h} \right) - 2F_i G_i - G_i \\ + L \left[ \left( \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h} \right) \left( \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2h} \right) + F_i \left( \frac{G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}}{h^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$H_{i+1} = H_i - h(F_i + F_{i+1}) \quad (15)$$

où  $h = 0.05$  est le pas d'espace supposé constant sur tout le domaine. Le maillage dans la direction axiale est donc défini par :  $\zeta_i = ih$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ , avec  $n$  le nombre de points. Pour initier la résolution des Équations (13) and (14), non seulement les valeurs de  $F_0$  et  $G_0$  sont nécessaires mais il faut également connaître les valeurs de  $F_1$  et  $G_1$ . Celles-ci sont obtenues par des développements en série de Taylor autour de  $\zeta = 0$  pour  $F$  et  $G$ . Le calcul est mené jusqu'à ce que les valeurs de  $F$ ,  $G$  et  $H$  soient connues en tout point du maillage. Il est à noter qu'il faut satisfaire les conditions aux limites asymptotiques (Eq.12). Pour satisfaire les conditions en  $\zeta = \zeta_\infty$  (Eq.9), une méthode de shooting associée à une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisée.

## 3 Résultats et discussion

La Figure 1 présente les valeurs de  $F$ ,  $G$  et  $H$  pour une condition de non glissement ( $\lambda = 0$ ) et un fluide newtonien ( $L = 0$ ). Près du disque, la composante radiale de la vitesse  $F$  est purement centripète. Les comportements des trois composantes de vitesse confirment la représentation de l'écoulement donnée par Schlichting [4]. À partir du profil de  $G$ , on peut en déduire l'épaisseur de la couche limite  $\zeta_{99}$ , définie comme étant la position axiale pour laquelle la vitesse tangentielle est égale à la vitesse tangentielle du fluide à l'infini à 1% près. Pour  $L = 0$  et  $\lambda = 0$ , la valeur classique  $\zeta_{99} = 8$  (voir [8]) est retrouvée par la présente approche.

On considèrera dans la suite une rugosité uniforme, c'est à dire  $\lambda = \eta$ . Les variations de la composante radiale de la vitesse  $F$  avec le paramètre non-newtonien  $L$  et le paramètre de glissement  $\lambda$  sont

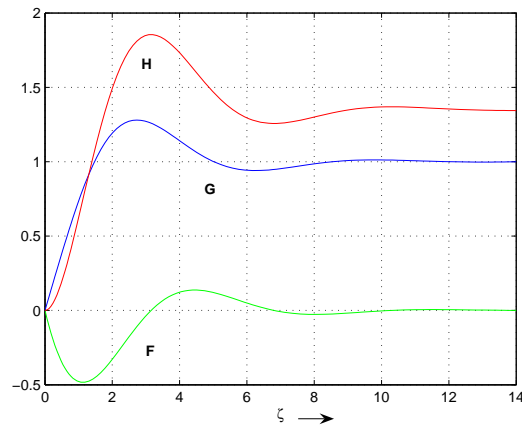


FIGURE 1 – Profils de vitesse pour un fluide newtonien avec  $\lambda(=\eta) = 0$ .

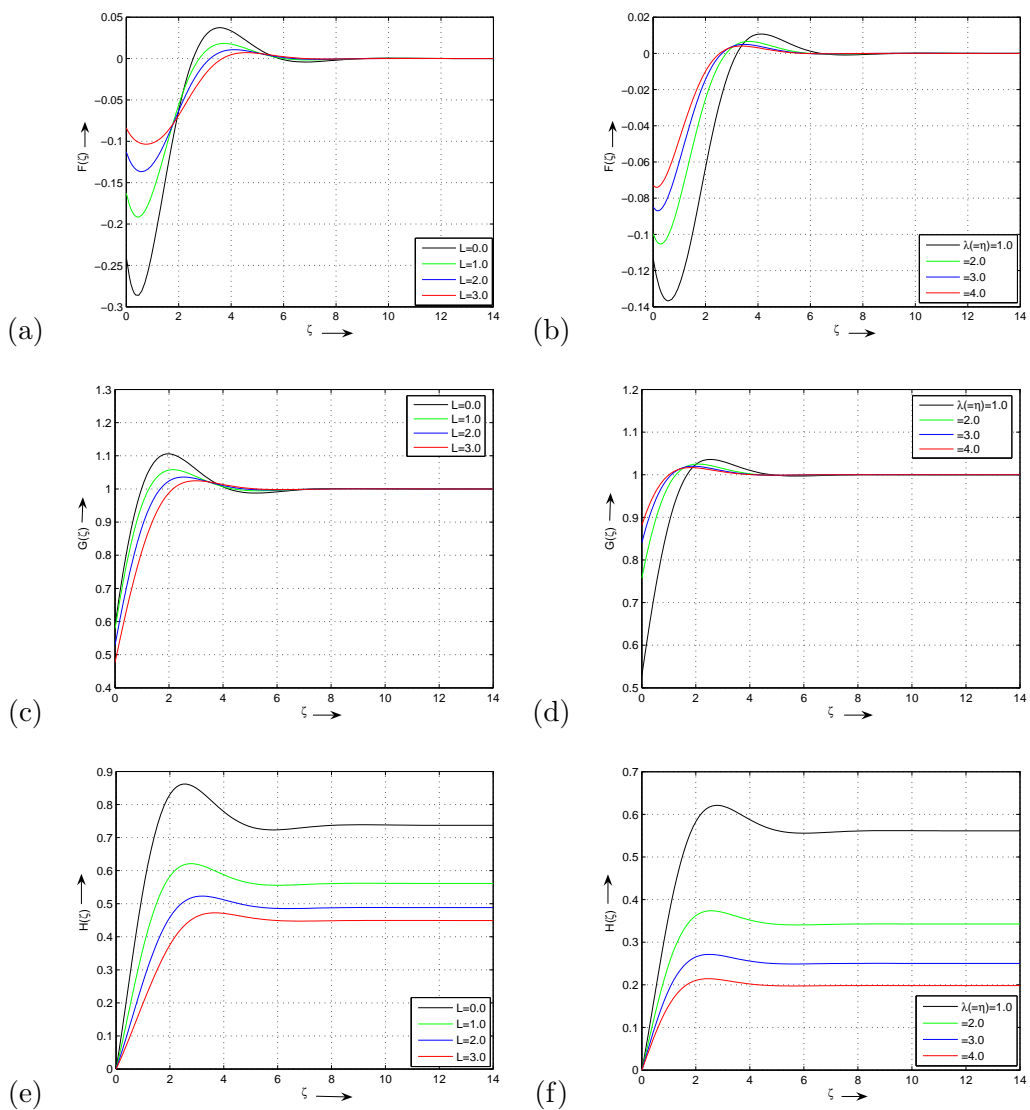


FIGURE 2 – Variations de  $F$ ,  $G$  et  $H$  avec  $L$  pour  $\lambda(=\eta) = 1$  (a,c,e) et avec  $\lambda(=\eta)$  pour  $L = 2$  (b,d,f).

présentées sur les Figures 2a et 2b respectivement. Sur la Figure 2a, il est clair que  $L$  a un effet dominant sur  $F$  près du disque. L'amplitude de l'écoulement radial centripète diminue près du disque pour des valeurs croissantes de  $L$ . Cependant, le profil de la composante radiale de vitesse reste toujours le même quelque soit la valeur de  $L$  :  $F$  est négative près du disque (écoulement centripète), change de signe loin de celui-ci (l'écoulement est alors dit centrifuge) avant de tendre vers sa valeur asymptotique. La Figure 2b montre la variation de  $F$  avec le paramètre de glissement  $\lambda (= \eta)$ , pour des valeurs constantes des autres paramètres. L'effet du glissement sur  $F$  est important essentiellement près du disque. Son comportement est ensuite peu modifié pour des valeurs plus grandes de  $\zeta$ . La valeur asymptotique de  $F$  est finalement atteinte sur une distance beaucoup plus courte que dans le cas de base pour  $L = \lambda = 0$ . Les Figures 2c et 2d présentent de même les variations de la composante tangentielle  $G$  de la vitesse avec  $L$  et  $\lambda (= \eta)$  respectivement. Le paramètre non-newtonien  $L$  a un effet spectaculaire sur  $G$ , loin du disque vers  $\zeta = 2$  (voir Fig. 2c). Une augmentation de  $L$  entraîne une décroissance de la vitesse tangentielle  $G$  proche du disque. Par contre,  $G$  augmente près du disque lorsque  $\lambda (= \eta)$  augmente (Fig. 2d). Les deux paramètres  $L$  et  $\lambda$  ont donc un effet opposé sur la composante de vitesse  $G$ . Les variations de la composante axiale  $H$  de la vitesse avec les paramètres  $L$  et  $\lambda$  sont données sur les Figures 2e et 2f respectivement. Les résultats montrent que les deux paramètres ont un effet similaire sur  $H$ . La composante axiale devient plus faible lorsque l'un de ces paramètres augmente. La valeur de cette composante loin du disque  $H_\infty$  est fortement réduite dans les deux cas comparée à la valeur de base 1.3494 obtenue pour  $L = \lambda = 0$ .

On peut déduire des profils de  $F$  et  $G$  la valeur du coefficient de moment  $C_M$ , défini sous forme adimensionnée par :

$$C_M = \frac{-2\pi G'(0)[1 - 2LF(0)]}{\sqrt{Re}} \quad (16)$$

avec  $Re = \Omega R^2/\nu$  le nombre de Reynolds basé sur le rayon du disque  $R$  et la vitesse maximale ( $\Omega R$ ). Pour pouvoir utiliser cette définition, il faut supposer que le rayon du disque  $R$  est suffisamment grand. Pour  $L = 0$ , l'Équation (16) se réduit à  $C_M = -2\pi G'(0)$ . Le coefficient de moment ne dépend plus alors que de  $G'(0)$ . Il est à noter que la valeur de  $G'(0)$  pour un fluide newtonien ( $L = 0$ ) et des conditions de non glissement ( $\lambda = 0$ ) est en excellent accord avec la valeur  $G'(0) = 0.77289$  obtenue par Owen et Rogers [8]. Dans ce cas de base, on retrouve la valeur classique  $C_M = -4.86$ .

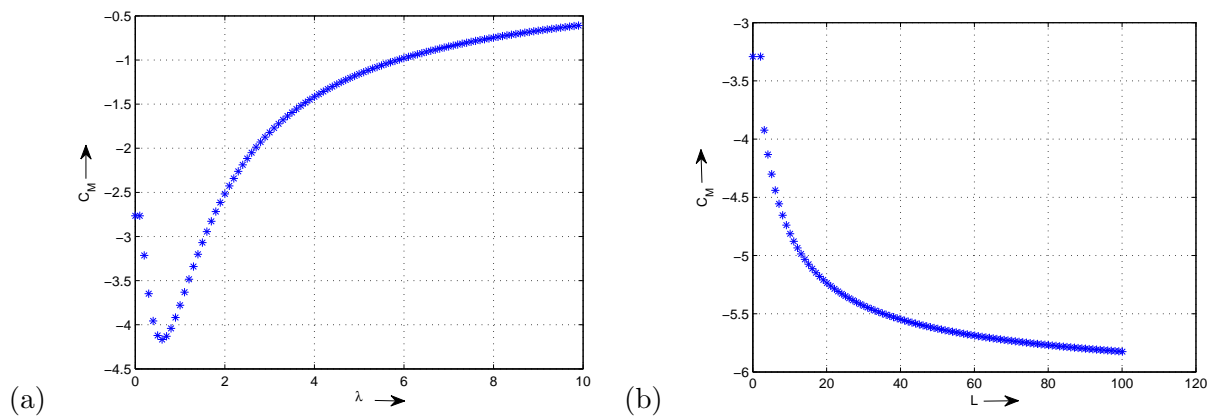


FIGURE 3 – (a) Variations du coefficient de moment  $C_M$  (a) avec  $\lambda$  pour  $L = 1$  et  $Re = 1$ ; (b) avec  $L$  pour  $\lambda = 1$  et  $Re = 1$ .

Les variations de  $C_M$  avec les paramètres de glissement  $\lambda$  et non-newtonien  $L$  sont montrés sur les Figures 3a et 3b respectivement. Quelque soit la valeur des paramètres,  $C_M$  est toujours négatif, ce qui est dû au problème considéré d'un fluide en rotation au-dessus d'un disque fixe. Le gradient axial de la vitesse tangentielle  $G'$  est ainsi toujours positif et donc  $C_M$  est toujours négatif. Le problème de Von Kármán flow considéré par Sahoo [2] est précisément le problème inverse, ce qui explique la

différence de signe. Pour  $L = 1$  et  $Re = 1$  (Fig.3a), le coefficient de moment  $C_M$ , en valeur absolue, augmente (resp. diminue) fortement pour des valeurs croissantes du paramètre de glissement  $\lambda$  lorsque  $\lambda < 0.6$  (resp.  $\lambda > 0.6$ ). Il tend rapidement vers 0 pour des très grandes valeurs de  $\lambda$ , ce qui signifie que le couple nécessaire pour maintenir le disque au repos est quasiment nul lorsque le paramètre de glissement est grand. Malgré la différence de conditions aux limites entre les deux problèmes, ces résultats confirment ceux obtenus par Sahoo [2] pour l'écoulement de Von Kármán. Sur la Figure 3b, le paramètre de glissement  $\lambda$  est fixé à 1 et le paramètre non-newtonien  $L$  varie entre 0 et 100 pour  $Re = 1$ .  $C_M$  augmente alors en valeur absolue avec  $L$ . Dans ce cas, le couple requis pour maintenir le disque fixe est beaucoup plus grand que celui nécessaire pour maintenir le disque à  $\omega$  dans le cas de l'écoulement de Von Kármán [2].

## 4 Conclusion

L'écoulement dû à la rotation d'un fluide non-newtonien de type Reiner-Rivlin près d'un disque fixe a été étudié pour la première fois pour diverses conditions de glissement et différentes valeurs du paramètre non-newtonien. Les équations différentielles fortement non linéaires qui en résultent sont résolues par un schéma aux différences finies du second ordre en espace. Les effets combinés du glissement  $\lambda = \eta$  et du paramètre non-newtonien  $L$  sur le champ de vitesse ont été regardés en détails. Il est intéressant de noter que  $\lambda$  et  $L$  ont des effets similaires sur les composantes radiale et axiale de la vitesse. Pour des valeurs croissantes de  $\lambda$  ou  $L$ , un léger épaissement de la couche limite du disque fixe est observé. Par contre, ces deux paramètres ont des effets opposés sur la composante tangentielle de la vitesse et sur le coefficient de moment. Le couple ainsi requis pour maintenir le disque fixe tend vers 0 pour des valeurs croissantes de  $\lambda$  et augmente en valeur absolue avec  $L$ , montrant un effet dominant du paramètre non-newtonien.

## Références

- [1] Attia, H.A. 2005 Numerical study of flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid on a rotating porous disk. *Appl. Math. Comp.* **163** 327-342
- [2] Sahoo, B. 2009 Effects of partial slip, viscous dissipation, Joule heating on Von Kármán flow and heat transfer of an electrically conducting non-Newtonian fluid. *Comm. Nonlin. Sci. Num. Sim.* **14** (7) 2982-2998
- [3] Bödewadt, U.T. 1940 Die Drehströmung über festem Grund. *Z. Angew. Math. Mech.* **20** 241-253
- [4] Schlichting, H. 1979 Boundary layer theory (7th Edition). *McGraw-Hill*, New-York.
- [5] Batchelor, G.K. 1951 Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady non rotationally symmetric flow. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **4** 29-41
- [6] Nydahl, J.E. 1971 Heat transfer for the Bödewadt problem. *PhD thesis, Colorado State University*.
- [7] Rogers, M.H., Lance, G.N. 1964 The boundary layer on a disk of finite radius in a rotating fluid. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **17** 319-330
- [8] Owen, J.M., Rogers, R.H. 1989 Flow and heat transfer in rotating disk systems. Vol. 1 : Rotor-Stator Systems. *Research Stud. Press Ltd, John Wiley & Sons*, New-York.
- [9] Kitchens, C.W., Chang, T.S. 1973 Newtonian and non-Newtonian liquids rotating adjacent to a stationary surface. *Appl. Sci. Res.* **27** 283-296
- [10] Von Kármán, T. 1921 Über laminare und turbulente Reibung. *Z. Angew. Math. Mech.* **1** 233-252