



**HAL**  
open science

## Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité

Florimond Guéniat, Luc R. Pastur, François Lusseyran, Thierry M. Faure

### ► To cite this version:

Florimond Guéniat, Luc R. Pastur, François Lusseyran, Thierry M. Faure. Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité. 14ème Rencontre du Non-Linéaire, Mar 2011, Paris, France. pp. 87-92. hal-00678968

**HAL Id: hal-00678968**

**<https://hal.science/hal-00678968>**

Submitted on 14 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Opérateur de Koopman et identification de structures cohérentes : application à un écoulement de cavité

F. Guéniat<sup>1,3</sup>, L.R. Pastur<sup>1,3</sup>, F. Lusseyran<sup>3</sup>, & Th. M. Faure<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Sud 11, F-91405 Orsay Cedex

<sup>2</sup> Université Pierre & Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France

<sup>3</sup> LIMSI-CNRS BP 133, F-91403 Orsay Cedex

florimond.gueniat@limsi.fr

**Résumé.** On présente la technique de décomposition en modes dynamiques récemment introduite en mécanique des fluides pour extraire les structures spatiales pertinentes vis-à-vis de la dynamique d'un écoulement. La méthode est illustrée sur un écoulement de cavité.

**Abstract.** Dynamic mode decomposition (DMD) has been recently introduced in the field of fluid mechanics. It is aimed at extracting spatial structures expected to be relevant with respect to the fluid flow dynamics. DMD is applied to a cavity flow for the sake of illustration.

## 1 Introduction

Un système physique ouvert possède, potentiellement, un nombre infini de degrés de liberté. Néanmoins, les écoulements sont le plus souvent organisés autour de structures cohérentes qui jouent un rôle décisif dans la dynamique. On peut par exemple penser aux grandes structures tourbillonnaires des allées de von Karman, que l'on observe aussi bien dans des expériences de laboratoire que dans le sillage de structures à grande échelle telles que des navires ou des îles, pour lesquels les nombres de Reynolds sont très grands et la turbulence pleinement développée sur la gamme des échelles inertielles. Ces structures invitent à chercher des moyens de réduction de la dimension effective des écoulements considérés. Une idée classique consiste à rechercher une base vectorielle, constituée de modes, capable de décrire les réalisations  $\mathbf{u}$  du champ mesuré. Ce champ exhibe une structure dans l'espace,  $\mathbf{r}$ , et évolue dans le temps,  $t$ . Dans l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps, on cherche alors à écrire  $\mathbf{u}$  sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \geq 1} a_i(t) \psi_i(\mathbf{r}), \quad (1)$$

la base des  $\{\psi_i\}$  (ou des  $\{a_i\}$ ) étant a priori de dimension infinie, discrète ou continue. Dans l'optique d'une réduction de modèle et, plus généralement, dans les méthodes de type Galerkin, on se restreint à un ensemble fini de modes :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} a_i(t) \psi_i(\mathbf{r}),$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est une approximation du champ  $\mathbf{u}$  et  $\mathcal{S}$  un ensemble de dimension finie. Lorsque les conditions aux limites sont homogènes, une base naturelle est donnée par les modes de Fourier. Dans des problèmes aux conditions aux limites plus complexes, on peut recourir à des méthodes empiriques de décomposition suivant les axes principaux de l'ensemble des données (modes POD) [3], ou rechercher des champs solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un état de base stationnaire (modes globaux) [11]. Récemment, Schmid [9,10] et Rowley [8] ont proposé une nouvelle méthode de décomposition, basée sur l'hypothèse de l'existence d'un opérateur d'évolution [6], permettant théoriquement d'extraire directement les informations de la dynamique (non-linéaire) de l'écoulement en régime permanent instationnaire [4].

Dans cette contribution, nous présentons la méthode en détail et l'illustrons sur un écoulement de cavité cisailé.

## 2 Décomposition en modes dynamiques

### 2.1 Opérateur d'évolution

On considère un système dynamique évoluant sur une variété  $\Omega$  de dimension  $N$ ,  $X$  un point de  $\Omega$  représentant l'état du système, et  $\phi_t$  le flot de  $\Omega$  dans  $\Omega$  qui fait passer le système de l'état  $X(t_0)$  au temps  $t_0$  à l'état  $X(t_0 + t)$  au temps  $t_0 + t$  :

$$X(t_0 + t) = \phi_t(X(t_0)). \quad (2)$$

On réalise alors une mesure  $h(X)$  sur l'état du système, à des intervalles de temps  $\Delta t$  réguliers. La fonction  $h$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  est élément d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  dont la métrique sera définie par un produit scalaire interne. On introduit alors un opérateur d'évolution, l'opérateur de *Koopman*  $U_t$ , agissant dans  $\mathcal{H}$ , tel que [6]

$$U_t h(X) = h(\phi_t X). \quad (3)$$

Ainsi,  $U_t h$  a en  $X$  la valeur que  $h$  aura au point  $\phi_t X$  vers lequel  $X$  aura été transporté après le temps  $t$ . L'opérateur  $U_t$ , linéaire, décrit l'évolution temporelle d'une observable dont la série,

$$V_0^{N-1} = \{h(t_0), h(t_0 + \Delta t), h(t_0 + 2\Delta t), \dots, h(t_0 + (N-1)\Delta t)\}, \quad (4)$$

est produite par la dynamique (non-linéaire) sous-jacente du flot. On a noté ici  $h(t_k) \equiv h(X(t_k))$ . De la définition (3) on peut récrire (4) sous la forme

$$V_0^{N-1} = \{h(t_0), U_{\Delta t} h(t_0), U_{2\Delta t} h(t_0), \dots, U_{(N-1)\Delta t} h(t_0)\}, \quad (5)$$

avec  $U_{k\Delta t} = U_{\Delta t}^k$ , de sorte que  $V_0^{N-1}$  est un sous-espace de Krylov d'ordre  $N$ . Dans la suite il sera implicitement fait référence au temps  $\Delta t$  d'échantillonnage des données et nous noterons  $U_{\Delta t} \equiv U$  et  $X_k = X(t_0 + k\Delta t)$ . Supposons l'opérateur  $U$  diagonalisable, et que ses vecteurs propres forment une base de  $\mathcal{H}$ , et notons  $\phi_i$  un vecteur propre de  $U$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  :

$$U\phi_i = \lambda_i\phi_i.$$

La famille des  $\{\phi_i\}$  est de dimension infinie et toute mesure  $h(t_k)$  de l'état du système peut se décomposer sur cette base :

$$h(X_k) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \phi_i(X_k), \quad (6)$$

où  $\alpha_i$  est la projection de  $h$  sur la base des  $\{\phi_i\}$ . Notons que la base n'est pas orthogonale a priori et que la projection est donc non-normale a priori. Les  $\alpha_i$  sont les coefficients de Koopman. La généralisation à une observable  $h$  non scalaire, par exemple deux composantes du champ de vitesse mesurées dans un plan par des techniques de vélocimétrie par images de particules, est immédiate; le coefficient  $\alpha_i$ , complexe a priori, pourra avoir autant de composantes que  $h$ .

### 2.2 Évolution sur un attracteur

On peut remarquer une importante propriété des fonctions de Koopman :

$$h(X_{k+1}) = Uh(X_k) = U\left(\sum_{i \geq 1} \phi_i(X_k)\alpha_i\right) = \sum_{i \geq 1} U\phi_i(X_k)\alpha_i = \sum_{i \geq 1} \lambda_i\phi_i(X_k)\alpha_i.$$

Par récurrence, on obtient donc :

$$h(X_{k+1}) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^k \phi_i(X_0)\alpha_i. \quad (7)$$

Le résultat remarquable est que, si un opérateur d'évolution tel que  $U$  existe, c'est-à-dire si la dynamique (non-linéaire) sous-jacente est déterministe, alors toute valeur prise par  $h$  peut se

déduire de la connaissance de la projection de la condition initiale  $h(X_0)$  sur la base des  $\phi_i(X_0)$ , et des valeurs propres  $\lambda_i$ . D'autre part, si la dynamique du système évolue sur un attracteur non dégénéré, *i.e.* si l'image de la variété  $\Omega$  est  $\Omega$ , alors  $U$  est un opérateur unitaire [6], le théorème spectral assurant que les valeurs propres sont sur le cercle unité, ses vecteurs propres  $\phi_i$  étant orthogonaux, et  $(Uf, Ug) = (f, g)$ . L'opérateur  $U$  est alors un automorphisme de la variété, et la décomposition de l'équation (6) est complète.

### 2.3 Estimation des modes propres de l'opérateur

Il existe diverses manières d'estimer les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur  $U$  et nous ne présenterons ici que la méthode dite de la matrice compagnon. De plus amples détails peuvent être trouvés dans [10]. Considérons, puisqu'il en sera question plus loin, le cas particulier où la mesure  $h$  est celle d'un champ de vitesse, dont on extrait les deux composantes  $u_x(x, y, t)$  et  $u_y(x, y, t)$  du champ de fluctuations  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  par rapport au champ moyen, dans un plan  $(x, y)$  vertical, réalisée à intervalles de temps réguliers et suffisamment petits pour que toutes les échelles (temporelles) de la dynamique soient résolues. L'espace de Krylov (4) s'écrit

$$V_0^{N-1} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}\},$$

les indices correspondant aux différents temps  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$  de la mesure et  $\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_k)$ . L'hypothèse sur laquelle repose la méthode de la matrice compagnon est que les  $N$  premières mesures — où  $N < M$ ,  $M$  étant la dimension de l'observable — contenues dans  $V_0^{N-1}$ , suffisent à décrire n'importe quelle réalisation ultérieure du champ  $\mathbf{u}$ , et notamment le  $N$ -ème :

$$\mathbf{u}_N = c_0 \mathbf{u}_0 + c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_{N-1} \mathbf{u}_{N-1},$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{u}_N = V_0^{N-1} \mathbf{c}, \quad (8)$$

avec  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^\dagger$ ,  $\dagger$  représentant l'opérateur de transposition hermitienne. En remarquant par ailleurs, d'après (5), que :

$$UV_0^{N-1} = V_1^N,$$

il résulte de l'hypothèse (8) que l'on peut introduire une matrice  $C$ , dite matrice compagnon, telle que :

$$UV_0^{N-1} = V_0^{N-1} C + \mathbf{r}^\dagger \mathbf{e}_N, \quad (9)$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\mathbf{e}_N = (0, 0, \dots, 1)^\dagger \in \mathbb{R}^{N+1}$  et  $\mathbf{r}$  un vecteur résidu, orthogonal au sous-espace de Krylov  $V_0^{N-1}$ , qui tend vers zéro lorsque la condition (8) est strictement vérifiée.

La matrice  $C$  est de dimension  $N \times N$ . Ses éléments inconnus, les  $c_j$ , peuvent être déterminés, d'après l'égalité (8), en minimisant la norme :

$$\mathbf{c}_{opt} = \min_{\mathbf{c}} \left\| \mathbf{u}_N - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \mathbf{u}_j \right\|_2.$$

Il est aisé de calculer les valeurs et vecteurs propres de  $C$  ; or ces derniers sont liés à celles et ceux de l'opérateur  $U$ ,  $C$  et  $U$  étant similaires. En effet, soit  $\mathbf{v}_j$  un vecteur propre de  $C$  associé à la valeur propre  $\sigma_j$ , alors :

$$V_0^{N-1} C \mathbf{v}_j = V_0^{N-1} (\sigma_j \mathbf{v}_j) = \sigma_j (V_0^{N-1} \mathbf{v}_j).$$

Or, d'après (9),  $V_0^{N-1}C\mathbf{v}_j = UV_0^{N-1}\mathbf{v}_j$  si le résidu est nul, d'où :

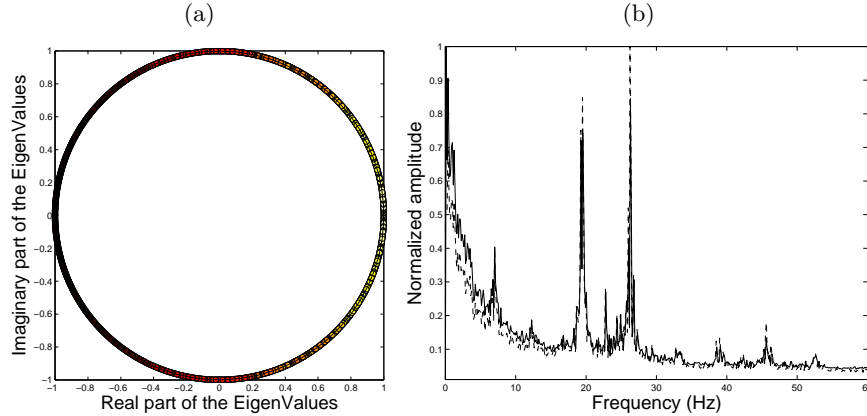
$$U(V_0^{N-1}\mathbf{v}_j) = \sigma_j(V_0^{N-1}\mathbf{v}_j),$$

de sorte que  $\sigma_j \equiv \lambda_j$  est valeur propre de  $U$  associée au mode  $V_0^{N-1}\mathbf{v}_j \equiv \boldsymbol{\alpha}_j$ . Il est donc possible de déterminer, empiriquement à partir de l'ensemble  $V_0^{N-1}$ ,  $N$  éléments de la base des  $\{\phi_i\}$  :

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^{k-1} \phi_i(X_0) \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (11)$$

L'ensemble des conditions initiales  $\{\phi_i(X_0)\}$  est déterminée en projetant  $\mathbf{u}_0$  sur les  $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ . La relation (8) conduit aux mêmes limites qu'en Fourier, à savoir que la plus petite fréquence résolue dans le système est  $f_{\min} = 1/T$ , où  $T = N\Delta t$  est le temps total d'observation imposé par  $V_0^{N-1}$ . De la même façon, la plus haute fréquence résolue est  $f_{\max} = 1/\Delta t$ . Il en résulte aussi que les modes propres  $\phi_k$  de  $U$  sont des modes de Fourier  $e^{i\omega_k t}$  si la dynamique est périodique [8]. De plus, il faudrait faire tendre  $N$  vers l'infini pour que la condition (8) soit vérifiée si la dynamique du système évoluait sur un attracteur chaotique. Dans la plupart des cas réels, où la dynamique est chaotique et  $T$  est fini, le résidu  $\mathbf{r}$  dans (9) n'est pas nul, et  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  dans (11) n'est qu'une représentation approchée de la réalisation  $\mathbf{u}_k$  du champ de vitesse fluctuant. Remarquons enfin qu'à aucun moment l'état  $X$  du système ni l'opérateur d'évolution  $U$  ne sont déterminés.

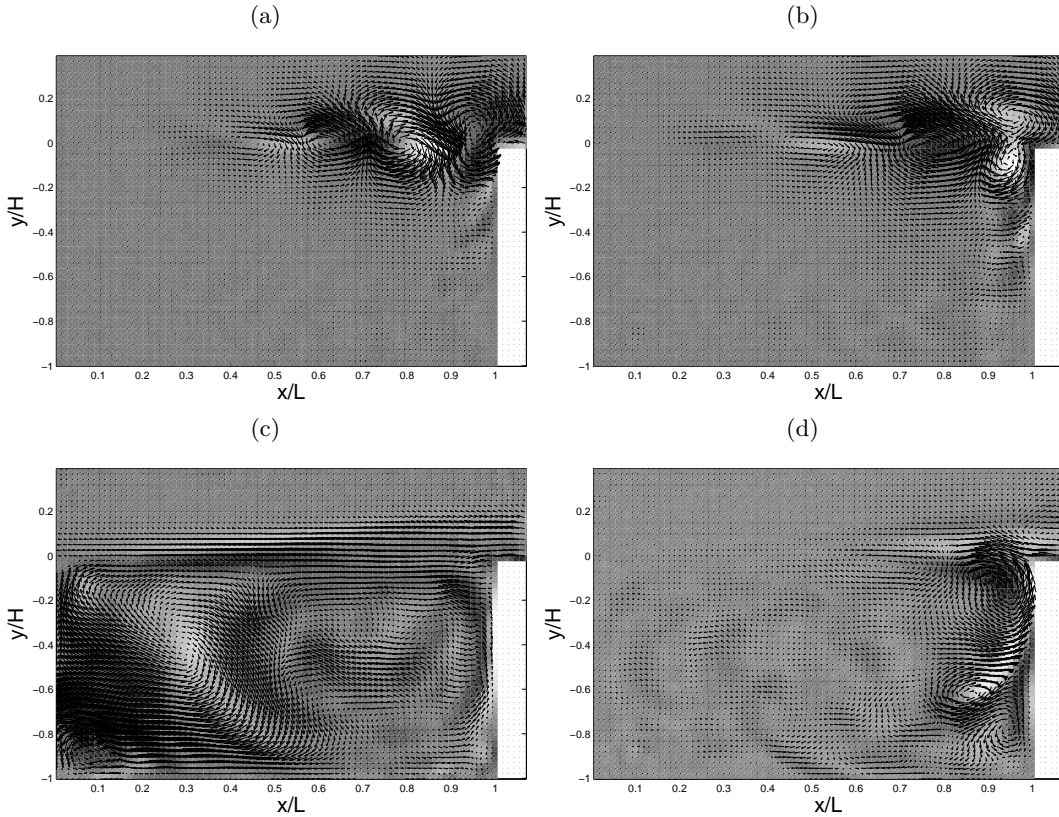
### 3 Application à un écoulement de cavité



**Figure 1.** Décomposition en modes dynamiques : (a) valeurs propres de l'opérateur, qui se distribuent sur le cercle unité en régime permanent. Les niveaux de gris traduisent l'amplitude, au sens de la norme  $\mathcal{L}^2$ , du mode dynamique associé (blanc pour les plus énergétiques). (b) Comparaison des spectres de puissance obtenus par analyse de Fourier (trait plein) ou par décomposition en modes dynamiques (pointillés). L'analyse de Fourier est faite sur les champs de fluctuation de la vitesse, en moyennant les spectres de puissance obtenus en chacun des points de la grille spatiale. Le spectre de Koopman est obtenu en reportant, pour chaque canal fréquentiel, l'amplitude du mode dynamique associé.

L'écoulement considéré est un écoulement de cavité, décrit dans [1]. Le rapport de forme de la cavité, rapport de sa longueur  $L = 100$  mm sur sa hauteur  $H$ , vaut  $L/H = 2$ . La vitesse incidente est  $U = 1.9$  m/s, correspondant à un nombre de Reynolds, basé sur  $L$ , de l'ordre de  $Re_L = UL/\nu_{air} = 12700$ . La couche cisailée, qui sépare l'intérieur de l'extérieur de la cavité, est instable vis-à-vis de modes de Kelvin-Helmholtz [5]. D'autre part, la présence du coin aval conduit à une sélection des modes d'oscillation de la couche cisailée et il en résulte, dans le régime considéré, l'apparition d'oscillations auto-entretenues, qui se traduisent par un spectre de puissance

très piqué autour de quelques fréquences caractéristiques (cf spectre de la Fig. 1b en trait plein). Dans le régime permanent, les valeurs propres  $\lambda_k$  de l'analyse de Koopman sont sur le cercle unité, comme on peut le voir sur la Fig. 1a; on peut donc les écrire sous la forme  $\lambda_k = \exp(i\omega_k \Delta t)$  et identifier  $f_k = \omega_k/2\pi$  à une fréquence de Fourier (temporelle). On compose ainsi un spectre en affectant, à chaque canal de fréquence  $f_k \pm \delta f_k/2$ , l'amplitude, au sens de la norme  $\mathcal{L}^2$ , du mode dynamique  $\alpha_k$  qui lui est associé. On obtient le spectre de la Fig. 1b (trait pointillé), qui tend vers le spectre de Fourier de l'écoulement (en trait plein).



**Figure 2.** Modes dynamiques  $\alpha_k$  associés aux fréquences (a)  $f_k = 19,6$  Hz, (b)  $f_k = 26,4$  Hz, correspondant à des structures de la couche cisailée, et (c)  $f_k = 0,5$  Hz, (d)  $f = 7,1$  Hz, associées à des structures intra-cavitaires. Le champ de vecteur représente la partie réelle de  $\alpha_k = \alpha_{k,x}e_x + \alpha_{k,y}e_y$ . L'échelle de couleur encode le champ de vorticité.

Les structures spatiales  $\alpha_k$ , associ es aux fréquences  $f_k$  les plus piqu es du spectre, sont présentées sur la Fig. 2. Comme on s'y attend, les structures associ es aux fréquences les plus élevées et énergétiques du spectre, sont associ es à des modes de la couche cisailée (figures du haut). Les basses fréquences sont quant à elles associ es à des structures intra-cavitaires, comme le révèlent les figures du bas.

## 4 Discussion et conclusion

La décomposition en mode dynamique, récemment proposée par P. Schmid [9,10], introduit, dans le domaine de la mécanique des fluides, les concepts de l'analyse de Koopman initialement développée, dans les années 30, dans le contexte des systèmes dynamiques hamiltoniens [6,8]. Cette analyse se révèle extrêmement prometteuse pour l'identification de structures cohérentes d'un écoulement fluide, pertinentes vis-à-vis de sa dynamique temporelle. Dans le cas d'un régime

permanent, lorsque la dynamique du système évolue sur un attracteur, les modes de Koopman tendent (au sens de la limite) vers les structures spatiales associées aux fréquences de Fourier temporelles [1,8].

En mécanique des fluides, il est fréquent de vouloir rechercher une décomposition du type de celle de l'équation (1), notamment pour réduire la complexité de la représentation du champ de vitesse. Les structures spatiales,  $\psi_i(\mathbf{r})$ , sont souvent obtenues par une décomposition de type Karhunen-Loève, ou décomposition orthogonale propre (acronyme anglo-saxon consacré : POD) [2] : la base (orthogonale) des modes spatiaux est construite, empiriquement, à partir de l'ensemble des mesures  $V_0^{N-1}$ , par identification des composantes principales de la matrice  $V_0^{N-1}$  [3]. Néanmoins, dans les régimes tels que celui représenté par le spectre de la Fig. 1b, où deux fréquences caractéristiques de la couche cisaillée,  $f_1 = 19$  Hz et  $f_2 = 26$  Hz, sont en compétition et apparaissent alternativement, au cours du temps, dans les spectres instantanés de puissance, la POD identifie un unique mode moyen, à la fréquence  $f_m \simeq (f_1 + f_2)/2$ , et une seule structure spatiale associée,  $\psi_m(\mathbf{r}) \simeq (\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r}))/2$ . Identifier les structures spatiales associées à chacune des fréquences  $f_1$  et  $f_2$  suppose, dans ce cas, de réaliser une POD conditionnelle selon qu'un mode ou l'autre d'oscillation est présent dans la couche cisaillée [7]. La décomposition en modes dynamiques que nous avons présentée ici parvient quant à elle à identifier les structures spatiales associées à chacune des fréquences importantes du spectre de puissance : on dispose ainsi d'un moyen empirique efficace pour extraire le *squelette* du champ de vitesse, en identifiant les structures caractéristiques autour desquelles s'organise l'écoulement.

## Références

1. J. BASLEY, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN, T. M. FAURE, N. DELPRAT, Experimental investigation of global structures in an incompressible cavity flow using time-resolved PIV, *Experiments in Fluids* (2010)  
<http://www.springerlink.com/content/m64283717837p427/fulltext.pdf>
2. G. BERKOOZ, P. HOLMES & J.L. LUMLEY, The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows, *Annual Review of Fluid Mechanics* **25** pp. 539-575 (1993).
3. L. CORDIER & M. BERGMANN, Proper Orthogonal Decomposition : an overview, *Lecture series 2002-04 and 2003-04 on post-processing of experimental and numerical data*, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 46 pages.
4. C. DOUAY, F. GUENIAT, T. FAURE, L. PASTUR & F. LUSSEYRAN, Instabilités centrifuges dans un écoulement de cavité : décomposition en modes dynamiques, *Compte-rendu des Rencontres du Non-Linéaire*, 2011.
5. P. HUERRE & M. ROSSI, Hydrodynamic instabilities in open flows, in *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities*, pp. 81-294, Editors C. Godreche, P. Manneville, Cambridge University press (1998).
6. B.O. KOOPMAN, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **17**, pp 315-318 (1931).
7. R. PETHIEU, L. R. PASTUR, F. LUSSEYRAN & TH. M. FAURE, Caractérisation expérimentale de la compétition non-linéaire de modes de Kelvin-Helmholtz dans un écoulement en cavité, *Compte-rendu des Rencontres du Non-Linéaire*, 2007, pp. 143-148.
8. C. W. ROWLEY, I. MEZIĆ, S. BAGHERI, P. SCHLATTER & D. S. HENNINGSON, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics* **641**, pp. 115-127 (2009).
9. P.J. SCHMID & J. SESTERHENN, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, in *61st annual meeting of the APS division of fluid dynamics*, APS, San Antonio, Texas, USA (2008).
10. P.J. SCHMID, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics* **656**, pp. 6-28 (2010).
11. Voir par exemple la thèse HDR de D. SIPP, Dynamique et contrôle des instationnarités en aérodynamique, 2009, et les références incluses.