

# Feuilletage lisse de $\mathbb{S}^5$ par surfaces complexes

## Smooth foliation of $\mathbb{S}^5$ by complex surfaces

Guillaume Deschamps <sup>a</sup>

<sup>a</sup>UFR de Mathématiques, Université Bretagne Occidentale, 6 avenue le Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest.

---

### Abstract

In 2002 Meersseman-Verjovsky [2] constructed a smooth, codimension-one, foliation on 5-sphere by complex surfaces with two compact leaves. The aim of this note is to improve and simplify their construction in order to give a smooth foliation on 5-sphere by complex surfaces with only one compact leaf.

### Résumé

En 2002 Meersseman-Verjovsky [2] ont construit un feuilletage de codimension un de  $\mathbb{S}^5$  par feuilles complexes, possédant 2 feuilles compactes. Le but de cette note est d'améliorer et de simplifier la construction afin de munir la sphère de dimension cinq d'un feuilletage lisse à feuilles complexes avec une seule feuille compacte.

---

## 1. Introduction

La note de Novikov [5] parue en 1964, où il esquissait une démonstration que tout feuilletage lisse de la 3-sphère par surface possédait une feuille compacte, a eu un impact considérable. On pouvait alors penser que la construction de Lawson [1] d'un feuilletage lisse de codimension un sur  $\mathbb{S}^5$  avec une seule feuille compacte, était optimal du point de vue du nombre de feuilles compactes. Mais on sait aujourd'hui [4,6] qu'il existe un feuilletage lisse de codimension un sur la sphère  $\mathbb{S}^5$  sans feuille compacte.

Trente ans plus tard Meersseman-Verjovsky [2] en modifiant la construction de Lawson ont pu définir un feuilletage lisse à feuilles complexes sur  $\mathbb{S}^5$  muni de deux feuilles compactes. C'est le premier exemple exotique d'un tel feuilletage (en particulier qui ne peut être plongé dans une 3-variété de Stein). Le but de cette note est de simplifier notablement la construction de Meersseman-Verjovsky.

**Théorème :** *Il existe un feuilletage lisse à feuilles complexes et de codimension un sur  $\mathbb{S}^5$  ne contenant qu'une seule feuille compacte.*

---

*Email address:* guillaume.deschamps@univ-brest.fr (Guillaume Deschamps).

Ce théorème dit en particulier que le feuilletage de Meersseman-Verjovsky n'est pas optimal en terme de nombre de feuilles compactes. La démonstration que nous donnons s'inspire de la construction de [2] dont nous rappelons ici les notations.

## 2. Notations

On considère  $\mathbb{S}^5$  comme la sphère unité de  $\mathbb{C}^3$ . Soit

$$W = \{z \in \mathbb{C}^3 - \{0\} / P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}.$$

C'est une variété complexe. Soit  $K$  l'intersection de  $W$  avec  $\mathbb{S}^5$ . On décompose la 5-sphère en deux variétés à bord :  $\mathcal{N}$ , un voisinage tubulaire fermé de  $K$  dans  $\mathbb{S}^5$  et  $\mathcal{M}$  l'adhérence du complémentaire de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathbb{S}^5$ . En particulier le bord commun de  $\mathcal{N}$  et de  $\mathcal{M}$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times K$ .

Soit  $X$  une variété à bord dont le bord  $\partial X$  est une variété complexe. On rappelle qu'un feuilletage de  $X$  par variétés complexes est dit *plat* [2] s'il s'étend en un feuilletage à feuilles complexes de  $X \cup \partial X \times [0, 1]$  qui coïncide avec le feuilletage naturel du collier  $\partial X \times [0, 1]$ . L'intérêt de cette définition provient de la proposition suivante.

**Proposition [2]** : *Soient  $(X_i, \mathcal{F}_i)$  deux feuilletages à bord ( $i = 1, 2$ ). Supposons les bords biholomorphes et les feuilletages plats. Alors pour tout biholomorphisme  $\psi$  de  $\partial X_1$  sur  $\partial X_2$ , il existe un feuilletage par variétés complexes sur l'union  $X_1 \cup_\psi X_2$  (recollé le long du bord via  $\psi$ ) dont la restriction à  $X_1$  (respectivement à  $X_2$ ) est  $\mathcal{F}_1$  (respectivement  $\mathcal{F}_2$ ).*

On sait que  $\mathcal{N}$  admet un feuilletage à feuilles complexes plat dont la seule feuille compacte est son bord  $\partial \mathcal{N}$  [2]. Nous rappellerons brièvement la construction dans le paragraphe suivant, c'est un feuilletage du type feuilletage de Reeb.

Dans la construction originale de Meersseman-Verjovsky, les auteurs ne réussissent pas à construire un feuilletage plat sur  $\mathcal{M}$ . La démonstration de notre théorème revient précisément à construire un feuilletage plat par variétés complexes sur  $\mathcal{M}$  avec comme seule feuille compacte  $\partial \mathcal{M}$ .

## 3. Construction d'un feuilletage plat sur $\mathcal{N}$

On considère la courbe elliptique  $E = \{[z] \in \mathbb{C}P^2 / P(z) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0\}$  ainsi que le  $\mathbb{C}^*$ -fibré  $W$  de base  $E$  obtenu en quotientant  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  par l'action engendrée par :

$$(z, u) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \longmapsto (e^{2i\pi w} \cdot z, \psi(z) \cdot u) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$$

où  $w$  est le module de  $E$  et  $\psi$  une fonction holomorphe bien choisie [2]. On munit alors la variété  $\tilde{\mathcal{N}} = \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C} \times [0, +\infty[ - \{(0, 0)\})$  du feuilletage trivial par surfaces complexes et on note :

$$\begin{cases} T : (z, u, t) \in \tilde{\mathcal{N}} \longmapsto (z, \lambda w \cdot u, d(t)) \in \tilde{\mathcal{N}} \\ U : (z, u, t) \in \tilde{\mathcal{N}} \longmapsto (e^{2i\pi w} \cdot z, \psi(z) \cdot u, t) \in \tilde{\mathcal{N}} \end{cases}$$

pour  $0 < \lambda < 1$  et  $d$  un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  tel que  $d(t) = t$  si  $t \leq 0$  et  $d'(t) < 1$  si  $t > 0$ . L'action de  $\mathbb{Z}^2$  engendrée par  $T$  et  $U$  est libre, propre, respecte le feuilletage et est holomorphe le long des feuilles. On vérifie alors que le quotient s'identifie à la variété  $\mathcal{N}$  munit d'un feuilletage plat par surfaces complexes.

#### 4. Construction d'un feuilletage plat sur $\mathcal{M}$

On définit  $Y = P^{-1}([0, +\infty[) - \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{C}^3$  et l'application

$$g : (z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \longmapsto P(z) - \phi(t) \in \mathbb{R}$$

Contrairement à ce qui est fait dans [2] ici nous choisissons la fonction  $\phi$  bien précise définie par :

$$\begin{aligned} \phi : ]-\infty, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{\exp(-\frac{1}{t})}\right) & \text{si } t \in ]0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction  $\phi$  a les propriétés suivantes :

- i)  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$
- ii)  $\phi'(t) = \frac{\phi(t)}{t^2 \exp(-\frac{1}{t})} > 0$  si  $t > 0$
- iii)  $\phi$  est une bijection de  $]0, 1]$  sur  $]0, \phi(1)]$  d'inverse la fonction  $\phi^{-1}(t) = \frac{1}{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)}$ .

On prolonge alors  $\phi$  sur  $[1, +\infty[$  en une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , surjective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et tel que  $\phi'(t) > 0 \forall t > 0$ .

Posons alors  $\Xi = g^{-1}(\{0\}) - \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$  et remarquons que  $\Xi$  est l'union de

$$\Xi^- = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} / t \leq 0, z \neq [0, 0, 0)\}$$

difféomorphe à  $W \times ]-\infty, 0]$  et de

$$\Xi^+ = g^{-1}(\{0\}) \cap \{(z, t) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} / t \geq 0, z \neq [0, 0, 0)\}$$

difféomorphe à  $Y$ . L'intersection de ces deux pièces est difféomorphe à  $W = \partial Y$  si bien que  $\Xi$  est difféomorphe à  $Y$  augmenté d'un collier infini. On feuillette alors  $\Xi^+$  par les niveaux

$$L_t = \{(z, t) \in \Xi^+ / P(z) = \phi(t)\}$$

et  $\Xi^-$  par les niveaux

$$L_t = \{(z, t) \in \Xi^- / P(z) = \phi(t) = 0\}$$

C'est un feuilletage lisse à feuilles complexes sur  $\Xi$ . Pour  $0 < \lambda < 1$ , on note

$$\begin{aligned} G : \Xi &\longrightarrow \Xi \\ (z, t) &\longmapsto \left(\lambda j z, h(t)\right) \end{aligned}$$

où  $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est la fonction constante égale  $t$  sur  $]-\infty, 0]$  et sur  $\mathbb{R}^+$  égale à :

$$h^+(t) = \phi^{-1}\left(\lambda^3 \phi(t)\right).$$

Le groupe engendré par  $G$  agit librement, proprement sur  $\Xi$ , respecte le feuilletage et est holomorphe en restriction aux feuilles. Le quotient  $Y_1$  est donc une variété feuilletée par feuilles complexes.

**Lemme 1.** : *La variété  $Y_1$  est difféomorphe à  $\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M} \times ]-\infty, 0]$ .*

*Preuve.* Si on note  $\text{int}(\Xi^+)$  l'intérieur de  $\Xi^+$  alors le difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \text{int}(\Xi^+) &\longrightarrow P^{-1}(1) \times ]0, +\infty[ \\ (z, t) &\longmapsto \left( \frac{z}{\phi^{\frac{1}{3}}(t)}, \phi(t) \right) \end{aligned}$$

induit un difféomorphisme entre les feuilletages naturels de ces deux variétés. De plus il conjugue  $G$  à :

$$\begin{aligned} \tilde{G} : P^{-1}(1) \times ]0, +\infty[ &\longrightarrow P^{-1}(1) \times ]0, +\infty[ \\ (z, t) &\longmapsto (jz, \lambda^3 t) \end{aligned}$$

Le quotient de  $\text{int}(\Xi^+)$  par  $G$  est donc difféomorphe à un fibré en cercle de fibre  $P^{-1}(1)$  et de monodromie donnée par la multiplication par  $j$ . Maintenant la fibration de Milnor qui envoie un point  $z$  de l'intérieur de  $\mathcal{M}$  sur  $P(z)/|P(z)|$  a la même monodromie [3]. On a bien  $\text{int}(\Xi^+)/G$  difféomorphe à  $\text{int}(\mathcal{M})$  et donc  $Y_1$  difféomorphe à  $\mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M} \times ]-\infty, 0]$ .  $\square$

Le feuilletage que nous avons construit sur  $Y_1$  est lisse du fait du choix de la fonction  $\phi$  :

**Lemme 2.** : *La fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en zéro.*

Par définition, dire que le feuilletage sur  $Y_1$  est lisse équivaut à dire que le feuilletage sur  $\mathcal{M}$  est un feuilletage plat (à feuilles complexes) dont la seule feuille compacte est son bord. Ce qui conclut la démonstration de notre théorème.

*Preuve du Lemme 2.* On pose  $u(t) = 1 - \ln(\lambda^3) \exp(-\frac{1}{t})$ , on peut alors écrire

$$\forall t \in ]0, 1] \quad h^+(t) = \phi^{-1}(\lambda^3 \phi(t)) = \frac{t}{t \ln\left(1 - \ln(\lambda^3) \exp(-\frac{1}{t})\right) + 1} = \frac{t}{t \ln(u(t)) + 1}$$

Mais en zéro on a  $\exp(-\frac{1}{t}) = o(t^n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  de sorte que  $u(t) = 1 + o(t^n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  et donc :

$$h^+(t) = \frac{t}{t \ln(1 + o(t^n)) + 1} = \frac{t}{o(t^{n+1}) + 1} = t + o(t^{n+2})$$

En d'autres termes on a  $h^+(0) = 0$ ,  $h^{+'}(0) = 1$  et  $h^{+(n)}(0) = 0$ ,  $\forall n > 1$ . La fonction  $h$  est bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en zéro.  $\square$

**Remerciements.** Je tiens à remercier L. Meersseman d'avoir porté mon attention sur cette question. Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

## Références

- [1] H. B. Lawson : *Codimension-one foliations of spheres*, Ann. of Math. 94 (1971), 494-503.
- [2] L. Meersseman et A. Verjovsky : *A smooth foliation of the 5-sphere by complex surfaces*, Ann. of Math. (2) 156 (2002), 915-930.
- [3] J. Milnor : *Singular points on complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Study 61, Princeton Univ. Press, Princeton (1968).
- [4] G. Meigniez : *Regularization and minimization of  $\Gamma_1$ -structures*, arXiv : 0904.2912v3 (2010).

- [5] S.P. Novikov : *Foliations of codimension 1 on manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 155 (1964), 1010-1013.
- [6] P.A. Schweitzer : *Codimension one foliations without compact leaves*, Comment. Math. Helvetici 70 (1995), 171-209.