



HAL
open science

Théorie mathématique Platoniste-Théorie aléatoire des nombres (conjecture de Goldbach)

Thierry Delort

► **To cite this version:**

Thierry Delort. Théorie mathématique Platoniste-Théorie aléatoire des nombres (conjecture de Goldbach). 2012. hal-00678559

HAL Id: hal-00678559

<https://hal.science/hal-00678559>

Submitted on 16 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorie Mathématique Platoniste-Théorie Aléatoire des nombres.

Par Thierry DELORT
Février 2012

I.PRESENTATION DES ARTICLES

II.THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

III.THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.
(Conjecture de Goldbach)

I.PRESENTATION DES ARTICLES.

Le premier article, expose une Théorie Platoniste des fondations des mathématiques et de logique. Le 2^{ième} article est à la fois une théorie de logique étudiant le hasard dans les nombres, et aussi une branche de la Théorie des nombres permettant notamment de donner une justification théorique aux Conjectures faibles et étendues de Goldbach. Chaque article est composé de 2 sous-article.

Ces théories sont longuement commentées et présentées dans leur contexte dans le livre titre: Théories d'or 2^{ième} édition, auteur:Thierry Delort, Editions Books on Demand, Paris.

II.THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

Auteur :Thierry DELORT.
Date : 30 Octobre 2011.

1^{ier} article : **INTRODUCTION A LA LOGIQUE PLATONICIENNE-THEORIE DES ENSEMBLES.**

2^{ieme} article :**LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS.**

TABLE DES MATIERES :

1^{ier} article : **INTRODUCTION A LA LOGIQUE PLATONICIENNE-THEORIE DES ENSEMBLES.**

1.INTRODUCTION

2.AXIOMES DE LA THEORIE DE LOGIQUE PLATONICIENNE.

3.CONCEPTS BASIQUES FONDAMENTAUX.

4.CONCLUSION.

2^{ieme} article : **LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS.**

1.INTRODUCTION.

2.THEORIE DE LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS.

3.CONSISTANCE,COMPETUDE ET PARADOXES.

4.EXEMPLES.

5.CONCLUSION

Résumé :

Dans cet article, nous présentons une introduction à la Théorie Logique Platonicienne (TLP), c'est-à-dire une théorie mathématique basée sur le Platonisme. En particulier nous présentons une Théorie des ensembles Platoniste, ce qui nous conduit à obtenir l'existence au sens Platonicien des concepts de bases en mathématiques. La TLP est fondamentale car elle permet de donner une signification Platoniste aux mathématiques, c'est-à-dire basée sur l'existence de concepts mathématiques dans un Espace mathématique Platonique, qui n'existe pas dans les théories mathématiques de logique actuelles basées sur le formalisme.

Nous voyons aussi comment apparaissent naturellement dans toute théorie des ensembles Platoniste les paradoxes classiques (de Cantor ou de Russel) et nous exposons comment la TLP évite ces paradoxes.

A partir des bases de la théorie présentée dans cet article, il est possible de la développer pour obtenir une théorie mathématique de logique Platonicienne de l'ensemble des mathématiques, ce qui sera fait dans un second article.

Mots clés :Platonisme -théorie des ensembles- Paradoxes de Cantor et de Russel- fondations des mathématiques.

1.INTRODUCTION

La plupart des mathématiciens ont l'idée d'une existence réelle des mathématiques, mais jusqu'à présent cette conception, le Platonisme, était purement philosophique, les théories mathématiques de logique actuelle étant basées sur le formalisme. Le présent article présente une théorie mathématique, et non philosophique, donnant une conception Platoniste des mathématiques. C'est-à-dire qu'elle donne une signification réelle, c'est-à-dire dans un Espace mathématique Platonique, aux concepts mathématiques classiques.

Nous verrons donc comment cette Théorie mathématique de Logique Platonicienne (TLP) permet de montrer l'existence au sens Platonique des concepts basiques classiques mathématiques.(Ensemble des naturels, des réels, espaces vectoriels...).

Nous verrons que dans une théorie Platoniste apparaissent naturellement certains paradoxes analogues aux paradoxes classiques (de Cantor et de Russel) et comment ils sont évités par la TLP.

Nous verrons qu'il y a une profonde analogie entre la TLP et la théorie géométrique d'Euclide, notamment l'existence d'un espace dans lequel existe des objets mathématiques, mais contrairement à la théorie d'Euclide, la TLP peut interpréter l'ensemble des mathématiques modernes.

2.AXIOMES DE LA TLP

Le premier Axiome de la TLP est aussi le plus important. Il utilise comme concept primitif le concept d'Espace Mathématique Platonique (EMP). Par « concept primitif », on entend de façon usuelle « concept dont le sens est compris intuitivement, et dont on n'utilise que les propriétés intuitivement évidentes ». On rappelle que toute théorie mathématique utilise des concepts primitifs, et le concept primitif d'Espace Mathématique Platonique apparaît fondamental dans la TLP.

L' Axiome de base de la TLP est donc :

AXIOME 2.1 :

- a)Il existe un unique Espace mathématique Platonique.
- b)Les objets mathématiques existent dans cet Espace Mathématique Platonique.

On voit que cet Axiome utilise aussi comme concept primitif le concept d' « objet mathématique ».

L'Espace Mathématique Platonique (EMP) est analogue à un Espace Euclidien, plan Euclidien ou Espace Euclidien de dimension 3. C'est pourquoi on utilise le terme d' « Espace » pour le désigner. Les objets mathématiques existent à l'intérieur de lui de façon analogue à la manière dont les figures géométriques (cercle, droite ,sphère...) existent à l'intérieur du plan ou de l'Espace Euclidien.

Cependant, l' analogie n'est pas complète car on verra que l'EMP ne peut pas être considéré comme un ensemble contrairement à l'Espace Euclidien dans sa conception mathématique actuelle . C'est pourquoi on dira qu'un objet mathématique *existe dans l'EMP* ou (simplement *existe* s'il est implicite qu'il existe dans l'EMP), et non qu'il *est un élément* de l'EMP.

On définit alors les concepts fondamentaux de la TLP :

DEFINITION 2.2A) :

Un *ensemble* A est un objet existant dans l'EMP défini par les objets qu'il contient appelés *éléments* de A qui sont des objets existants.

On admet l'existence des objets suivants :

AXIOME 2.2B) :

- a) Il existe un ensemble n'ayant aucun élément, unique, appelé « *ensemble vide* » et représenté par σ .
- b) Si a et b sont deux objets existants, alors le couple (a,b), constitué d'un premier terme a et d'un 2^{ème} terme b, est un unique objet existant dans l'EMP .

Comme conséquence de la Définition 2.2A, on a aussi l'Axiome :

AXIOME 2.2C) :

Si A et B sont 2 ensembles ayant les mêmes éléments, alors ils sont identiques.

Cet Axiome est la conséquence immédiate du fait qu'un ensemble est défini par les éléments qu'il contient d'après la Définition 2.2A.

On emploiera aussi dans la TLP un concept primitif fondamental, qui est de *considérer* des *objets mathématiques correspondant à une définition*. On a alors les définitions fondamentales suivantes :

DEFINITION 2.3 :

On dira qu'on *considère* les *objets mathématiques correspondant à une définition D(o)* si :

a) Tout objet mathématique O existant dans l'EMP *correspondant à la définition D(o)*, c'est-à-dire par définition pour lequel on a « D(O) est vraie », est parmi les objets *considérés*.

b) Tout objet mathématique O existant dans l'EMP *ne correspondant pas à la définition D(o)*, c'est-à-dire par définition pour lequel on a Non(« D(o) est vraie ») est parmi les objets *non-considérés*.

c) On dira que la définition D(o) est *binaire* si pour tout objet mathématique existant O, on a ou bien « D(O) est vraie » ou bien Non(« D(O) est vraie »).

d) On dira que la définition D(o) est *cohérente* si pour aucun objet existant O on a « D(O) est vraie » et Non(« D(O) est vraie »).

e) Si on a une définition D(o), et si O est défini comme étant un symbole pouvant représenter certains objets mathématiques tel qu'on ait :

(i) « O₀ est un objet mathématique correspondant à D(o) » est équivalent à « O peut représenter O₀ ».

(ii) « O₀ est un objet mathématique ne correspondant pas à D(o) » est équivalent à « O ne peut pas représenter O₀ ».

(L'équivalence signifiant que les propositions s'entraînent mutuellement.)

(iii) Il existe au moins un objet mathématique pouvant être représenté par O.

On dira alors que O est un *concept associé* à D(o). On identifiera classiquement le symbole O avec un objet qu'il peut représenter.

(Si on a seulement (i) et (ii), on dira que O est un *symbole associé* à D(o).

On distinguera alors 2 sortes de concepts :

-Si O peut représenter tout objet correspondant à D(o), mais représente le même objet partout où il est utilisé, on dira que O est un *concept particulier* associé à D(o).

-Si les objets pouvant être représentés par O ou ne pouvant pas être représentés par O sont les mêmes quelque soient les objets représentés par les concepts particuliers définis avant O , on dira que O est un *concept général* associé à $D(o)$.

On définit de façon analogues des *symboles particuliers* ou *généraux* associés à des définitions, mais on n'utilisera seulement des symboles particuliers.

f) On dira qu'un objet a_0 appartient à un concept général O si a_0 peut être représenté par le concept général O . On dira qu'un concept O_1 (général ou particulier) est inclus dans un concept O_2 si tout objet pouvant être représenté par O_1 peut être représenté par O_2 .

On remarque que les concepts « un objet mathématique » et « l'EMP » sont partiellement définis par l'Axiome 2.1. On peut aussi considérer qu'un objet mathématique est le concept général associé à la définition $D(o)$: « o existe dans l'EMP », et que l'EMP est un concept général primitif partiellement défini par l'Axiome 2.1. De même, « un ensemble » est le concept général associé à la Définition 2.2A. L'un des concepts particuliers les plus courants sera de la forme « x est un concept particulier associé à la définition $D(o)$: « o est élément de A », A étant un concept particulier qui peut représenter seulement des ensembles.

On n'utilise pas de la même façon des concepts généraux et particuliers. Par exemple la définition $D(o)$: « o est identique à un ensemble » a exactement la même signification que « $D_E(o)$ », $D_E(o_E)$ étant la définition associée au concept général « un ensemble », et a exactement la même signification que « Il existe A concept particulier associé à $D_E(o_E)$, tel que o est identique à A ». o_G étant un concept général quelconque, la définition « o est identique à o_G » a une des définitions équivalentes analogues. Donc si E est le concept particulier associé à « o est un ensemble », E peut représenter n'importe quel ensemble quel que soit les objets représentés par les concepts particuliers définis avant E .

Au contraire si B est un concept particulier pouvant représenter seulement des ensembles, si on définit après la définition de B le concept particulier E associé à « o est identique à B », alors B représentant un objet B_0 , E peut représenter seulement l'objet B_0 .

DEFINITION 2.4 :

- $D(o)$ étant une définition, on dira qu'on considère des objets mathématiques correspondant à une définition $D(o)$ qui existent si $D(o)$ est binaire et cohérente.
- On dira qu'une définition $D(o)$ est *non-floue* si $D(o)$ est binaire et cohérente et que $D(o)$ est *floue* sinon.
- Si O est un concept (général ou particulier) associé à une définition $D(o)$, on dira que O est un concept *non-flou* si $D(o)$ est non-floue. (Et que O est *flou* si $D(o)$ est floue).

On dira donc qu'il existe un concept (particulier) non-flou associé à une définition $D(o)$ si $D(o)$ est non-floue et qu'il existe au moins un objet correspondant à $D(o)$. Si O est un concept non-flou, il peut représenter au moins un objet et d'après la Définition 2.3, pour tout objet existant O_0 , ou bien « O_0 peut être représenté par O », ou bien « O_0 ne peut pas être représenté par O », et on ne peut avoir « O_0 peut être représenté par O » et « O_0 ne peut pas être représenté par O ». Ceci peut être considéré comme la définition d'un *concept non-flou*. Alors avec cette définition, on a bien d'après la Définition 2.3e que si O est un concept associé à une définition $D(o)$ non-floue, alors il est non-flou.

Nous recherchons maintenant un Axiome permettant d'obtenir qu'une définition $D(o)$ est non-floue. Tout d'abord on remarque que les concepts mathématiques fondamentaux introduits dans la TLP (« un objet mathématique » qui peut représenter tout objet mathématique, l'EMP qui représente un unique objet, « un ensemble ») apparaissent intuitivement comme des concepts non-flous. L'Axiome le plus simple permettant d'obtenir qu'une définition $D(o)$ est non-floue serait celui qui admet que si une définition $D(o)$ pour définir o utilise seulement des concepts non-flous, généraux ou particuliers, et des concepts primitifs classiques (« est identique à », « pour tout », « Il existe (un et un seul) », « couple », « premier-ou 2^{ième}-terme » (d'un couple), « est élément de »..) alors $D(o)$ est non-floue. C'est cet Axiome que nous admettrons :

AXIOME 2.5 :

- Les concepts « un ensemble » (associé à la définition 2.2A)), « EMP », « objet mathématique », « ensemble vide » (Introduit dans l'Axiome 2.2B)) sont des concepts généraux non-flous appelés *concepts primitifs*.
- Si une définition $D(o)$ utilise pour définir o seulement o , des concepts non-flous (généraux ou particuliers) et des concepts primitifs classiques ayant leur signification usuelle parmi : « est identique à », « pour tout », « Il existe (un et un seul) » (tel que), « couple », « premier-ou 2^{ième}-terme » (d'un couple), « Non », « et », « ou », alors $D(o)$ est une définition non-floue. On dira que les concepts primitifs précédents sont des

concepts primitifs relationnels non-flous. On supposera de plus qu'on utilise toujours un nouveau symbole pour définir un nouveau concept (ou un nouveau symbole) associé à une définition.

On admettra donc axiomatiquement dans cet article les points a) et b) de l'Axiome 2.5. Une justification théorique complète du point b) de cet Axiome fondamental de la TLP sera donnée dans un développement ultérieur de la TLP, dans un second article.

REMARQUE 2.5A) :

a) Dans une définition non-floue, on peut donc utiliser des symboles représentant des concepts non-flous (Par exemple comme on le verra $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \dots$).

b) On peut aussi dans une définition non-floue utiliser les symboles usuels « (,) » pour représenter le concept primitif « couple » qui est non-flou d'après l'Axiome 2.5.

c) On peut aussi utiliser dans une définition $D(o)$ non-floue des symboles $c(o)$, associés à des définitions $D(o_c)$ utilisant o et des concepts non-flous pour définir o_c . Ainsi par exemple si a est un concept non-flou, on peut utiliser « (o,a) », symbole associé à $D(o_c)$: « o_c est identique à (o,a) » dans une définition non-floue $D(o)$.

d) Si dans une définition $D(o)$, on a $, P$ et Q étant 2 propositions on a l'expression « $(\text{Qou}(\text{Non}(P))\text{et}(\text{Pou}(\text{Non}(Q))))$ », P et Q n'utilisant que o et des concepts non-flous, cette expression pourra être utilisée dans une définition non-floue d'après l'Axiome 2.5b). On écrira classiquement « P est équivalent à Q » pour la représenter, et donc on identifiera « est équivalent », s'il est employé dans une définition d'un objet mathématique $D(o)$, à un concept relationnel non-flou. (C'est-à-dire un concept relationnel pouvant être utilisé dans une définition non-floue. De même on identifiera « *si..alors* » à un concept relationnel non-flou.

e) Il peut exister différents concepts particuliers associés à la même définition. Pour cela il suffit d'utiliser des symboles différents. Par exemple si O_1 et O_2 sont associés à la même définition $D(o)$, O_1 et O_2 peuvent représenter chacun d'eux un objet correspondant à $D(o)$, mais ne représentent pas nécessairement le même simultanément.

f) En général on utilisera le concept primitif « il existe » dans une expression du type « Il existe O_1 concept particulier associé à $D_1(o)$ tel que $D^*(o,O_1)$ ($D^*(o,O_1)$ étant une définition) ». Alors pour qu'un objet a_0 corresponde à la définition précédente, d'après la signification du concept primitif « Il existe », il faut et il suffit qu'il existe un objet O_{10} pouvant être représenté par O_1 tel qu'on ait « $D^*(a_0,O_{10})$ est vraie ».

g) Si $D_1(o)$ et $D_2(o)$ sont des définitions (*exactement*) *équivalentes syntaxiquement*, c'est-à-dire ayant exactement la même signification d'après la signification des mots qu'elles utilisent, et si $D_1(o)$ est non-floue, on considèrera évidemment que $D_2(o)$ est non-floue.

h) On mettra toujours explicitement « o_G est le concept général associé à la définition $D(o)$ » pour définir un concept général. Sinon, on supposera implicitement dans une définition « O est le concept associé à $D(o)$ » que O est un concept particulier. De même, si on définit A comme un concept non-flou associé à une définition, on supposera implicitement que A est un *concept particulier* associé à une définition non-floue. Sinon on définira explicitement A comme étant un concept général non-flou.

Dans cet article, on utilisera seulement comme concepts généraux les concepts généraux propres à la TLP (EMP, objet mathématique), et les concepts généraux classiques « ensembles », « ensemble vide », $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \dots$ (dont on montrera l'existence).

On remarque aussi que comme on l'a vu dans la définition $D(o)$: « o est un ensemble », si on a un concept général o_{1G} associé à une définition $D_1(o)$, on peut toujours obtenir une définition utilisant un concept particulier O_1 associé à $D_1(o_1)$ à la place de o_{1G} .

i) On verra que certains concepts généraux sont aussi des concepts particuliers, car ils représentent un unique objet partout où on les utilise (l'ensemble vide, l'EMP, $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \dots$)

j) Si un concept associé à une définition n'est pas à la fois général et particulier, il sera toujours nécessaire de spécifier s'il est un concept général ou particulier, sinon la signification d'une définition l'employant n'est pas définie.

REMARQUE 2.5B) :

a) Un cas particulier est le cas où $D(o)$ emploie un symbole n'ayant aucun sens par exemple « XYZ ». Il est clair qu'on ne peut pas utiliser l'Axiome précédent pour obtenir que $D(o)$ est non-floue. Si par exemple $D(o)$ emploie l'expression « a est élément de o », alors si o n'est pas un ensemble il est impossible que o corresponde à la définition $D(o)$ car si on a « a élément de o », a étant n'importe quel objet mathématique, cela entraîne que o est un ensemble. Même si $D(o)$ emploie seulement les concepts définis à l'Axiome 2.5,

elle peut n'avoir aucun sens, par exemple « o élément élément ». Alors, tout en étant non-floue, aucun objet existant ne correspond à $D(o)$ et donc il n'existe pas de concept associé à $D(o)$.

b) On remarque que d'après l'Axiome 2.5, les définitions $D_C(o)$: « o est un ensemble » (qui est exactement équivalente syntaxiquement à $D_E(o)$, si $D_E(o)$ est la définition d'un ensemble donnée en 2.2A, ou à « o appartient au concept « un ensemble » » ou à « Il existe A concept associé à la définition d'un ensemble $D_E(o_E)$ tel que o est identique à A ») et $D_R(o)$: « o est un ensemble et Non(o est élément de o) » sont des définitions non-floues.

c) On n'utilisera jamais directement la définition 2.2A d'un ensemble pour exprimer ses propriétés, mais seulement le fait qu'il soit un concept non-flou et des Axiomes de formulation très simple comme l'Axiome 2.2C.

Supposons qu'on considère des objets mathématiques correspondant à une définition $D(o)$. On cherche à savoir s'il existe un ensemble A, concept non-flou dont les éléments correspondent à la définition $D(o)$. On a la définition suivante d'un tel ensemble :

DEFINITION 2.6 :

$D(o)$ étant une définition, A est un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à $D(o)$ si on a :

A est un concept particulier non-flou qui peut seulement représenter un ensemble, et pour tout objet existant O :

- (i) « O correspond à $D(o)$ (C'est-à-dire « $D(O)$ vraie ») est équivalent à « O est élément de A »
- (ii) « O ne correspond pas à O (C'est-à-dire Non(« $D(O)$ est vraie ») est équivalent à « O n'est pas élément de A.

REMARQUE 2.7 :

Dans la définition précédente, le concept primitif « est équivalent » signifie que si $D_1(O)$ est équivalente à $D_2(O)$, alors $D_1(O)$ entraîne $D_2(O)$ et $D_2(O)$ entraîne $D_1(O)$. (Il n'a donc pas le sens du concept primitif « est équivalent » donné dans la Remarque 2.5A., mais celui utilisé dans la Définition 2.3e). Il semble que d'après la signification du concept primitif « Non », on ait toujours (i) qui entraîne (ii).

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition $D(o)$ non-floue, c'est-à-dire binaire et cohérente, on pourrait s'attendre à ce qu'il existe un ensemble dont les éléments correspondent à $D(o)$. Ceci équivaudrait à admettre l'Axiome suivant, que nous appellerons « Axiome Naïf » :

AXIOME NAÏF 2.8:

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition $D(o)$ non-floue, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à la définition $D(o)$.

Or cet Axiome est faux. On l'a appelé « Axiome Naïf » car il conduit aux mêmes paradoxes que la Théorie naïve des ensembles.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor à partir de l'Axiome naïf 2.8 :

Supposons qu'on considère les objets mathématiques correspondant à la définition $D_C(o)$ « o est un ensemble ». On a vu que d'après l'Axiome 2.5, $D_C(o)$ est non-floue c'est à dire $D_C(o)$ est binaire et cohérente. Cependant si l'Axiome naïf 2.8 est vrai, alors il existe un ensemble non-flou A_C dont les éléments correspondent à $D_C(o)$, alors admettant que tout sous-ensemble de A_C est un ensemble existant (Ce qui est obligatoire si le concept « ensemble » a les propriétés des ensembles classiques), A_C admet comme élément chacun de ses sous-ensembles, et ceci est impossible car on est dans un cas analogue au Paradoxe de Cantor. On obtient aussi le paradoxe de Cantor dans la TLP, car dans cette théorie, et comme on le voit dans la Définition 2.2A) d'un ensemble, les ensembles ont les mêmes propriétés que les ensembles dans la théorie classique. Montrons cependant comment on l'obtient.

On suppose donc l'existence du concept particulier non-flou A_C . On remarque que d'après l'Axiome 2.2C, A_C représente un unique ensemble.

On considère alors la définition d'un sous-ensemble de A $D_{sAC}(o)$: « o est un ensemble et tout élément de o est élément de A_C », qui est équivalente à « o est un ensemble et pour tout $c(o)$ symbole associé à $D(o)$, « o_c est élément de o », $c(o)$ est élément de o ». Ce qui précède justifie qu'on peut considérer « est inclus », défini classiquement, comme un concept relationnel non-flou). D'après l'Axiome 2.5, $D_{sAC}(o)$ est non-floue, et donc si l'Axiome naïf est vrai, il existe un ensemble non-flou $P(A_C)$ (représentant un unique

ensemble) dont les éléments correspondent à $D_{s(A_C)}(o)$. On a de plus $P(A_C)$ est inclus dans A_C puisque les éléments de $P(A_C)$ sont des ensembles.

Pour tout s_0 appartenant à $P(A_C)$, on définit $f(s_0)$ par $f(s_0)=s_0$. Donc $f(s_0)$ existe nécessairement. On dira classiquement qu'on a défini une fonction f , la fonction « identité ».

On considère alors l'ensemble $S=\{s_0/ s_0 \text{ est élément de } P(A_C) \text{ et } s_0 \text{ n'est pas élément de } s_0\}$. S est un ensemble non-flou représentant un unique ensemble si l'Axiome naïf est vrai.

De plus il est évident que S est inclus dans A , et donc S est un élément de $P(A)$.

On a $f(S)=S$. Si S n'est pas élément de S , S est élément de S , ce qui est impossible puisque S est un concept non-flou donc « o est élément de S » est cohérente. De même il est impossible que S n'est pas élément de S .

On a donc une contradiction avec l'existence de $f(S)$, et donc on est dans un cas analogue au Paradoxe de Cantor, car un objet ne peut à la fois exister et ne pas exister.

(On sait plus généralement qu'il ne peut exister une injection f de $P(A)$ dans un ensemble A , considérant l'ensemble $S=\{s/ s \text{ est élément de } A, s \text{ a un antécédent par } f \text{ et } s \text{ n'est pas élément de } f^{-1}(s)\}$, on obtient que S ne peut avoir d'image par f .)

On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'Axiome naïf pour obtenir l'existence de S et de $P(A_C)$, en supposant l'existence de A_C . Il suffit d'utiliser la théorie des ensembles classiques, et on verra que dans la TLP, ils existent aussi si A_C existe. On obtient donc un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor en utilisant l'Axiome naïf seulement pour obtenir l'existence de A_C .

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Russel :

Considérons les objets correspondants à la Définition $D_R(o)$ « o est un ensemble et $\text{Non}(\text{« } o \text{ est un élément de } o \text{ »})$ ». On a vu que $D_R(o)$ était non-floue d'après l'Axiome 2.5 c'est à dire $D_R(o)$ est binaire et cohérente. Supposons que l'Axiome naïf 2.8 soit vrai. Alors il existe un ensemble A_R non-flou dont les éléments correspondent à $D_R(o)$.

A_R ne peut représenter qu'un unique ensemble d'après l'Axiome 2.2C.

Si « A_R est élément de A_R » est vraie, alors A_R ne correspond pas à $D_R(o)$, et donc A_R n'est pas élément de A_R , il est donc impossible qu'on ait « A_R est élément de A_R » est vraie puisque d'après l'Axiome 2.5 la relation « o est élément de A_R » est cohérente.

Si on a $\text{Non}(\text{« } A_R \text{ est élément de } A_R \text{ » est vraie})$, alors A_R correspond à $D_R(o)$ et donc « A_R est élément de A_R », ce qui est impossible puisque la définition « o est élément de A_R » est cohérente. Il est donc impossible qu'on ait $\text{Non}(\text{« } A_R \text{ est élément de } A_R \text{ » est vraie})$

Or ceci est impossible puisque la définition $D(o)$: « o est élément de A_R » est binaire d'après l'Axiome 2.5 puisque A_R est un concept non-flou, et donc on a ou bien « A_R est élément de A_R » est vraie, ou bien $\text{Non}(\text{« } A_R \text{ est élément de } A_R \text{ » est vraie})$.

On recherche donc un Axiome de la TLP permettant d'obtenir l'existence d'un ensemble non-flou A dont les éléments correspondent à une définition $D(o)$. On remarque que d'après l'Axiome 2.2C, A ne peut représenter qu'un unique ensemble.

Il est clair qu'une condition nécessaire est que $D(o)$ soit binaire et cohérente.

En effet, si $D(o)$ n'est pas binaire, alors pour un objet O existant, on a ni « $D(O)$ est vrai » ni $\text{Non}(\text{« } D(O) \text{ est vraie »})$. Il en résulte, d'après la Définition 2.6, qu'on ne peut pas avoir « O est élément de A » (Sinon on a « $D(O)$ est vraie »), ni $\text{Non}(\text{« } O \text{ est élément de } A \text{ »})$ (Sinon on a $\text{Non}(\text{« } D(O) \text{ est vraie »})$). Or ceci est impossible puisque la définition $D_A(o)$: « o est élément de A » est non-floue d'après l'Axiome 2.5 puisqu'on a supposé A concept non-flou.

Si $D(o)$ n'est pas cohérente, il existe un objet O tel qu'on ait « $D(O)$ est vraie » et $\text{Non}(\text{« } D(O) \text{ est vraie »})$. D'après la Définition 2.6 et la Remarque 2.7, ceci entraîne « O est élément de A » et $\text{Non}(\text{« } O \text{ est élément de } A \text{ »})$. Or ceci est impossible puisque la Définition $D_A(o)$: « o est élément de A » est cohérente d'après l'Axiome 2.5.

Ainsi pour que A ensemble non-flou existe, il est nécessaire que $D(o)$ soit non-floue.

Si o est un objet mathématique correspondant à une définition $D(o)$, il est clair que la définition « o est un objet mathématique tel que $D(o)$ » est plus complète que la définition « $D(o)$ ». Cette notion permettra de comprendre intuitivement l'origine des paradoxes comme ceux de Cantor et de Russel. On introduit donc la notion de *forme complète* d'une définition :

DEFINITION 2.9 :

$D(o)$ étant une définition, on appelle *forme complète* de $D(o)$ la définition : « o est un objet mathématique tel que $D(o)$ ».

Supposons que $D(o)$ soit non-floue, et que tout objet correspondant à $D(o)$ soit élément d'un ensemble non-flou E . Puisque $D(o)$ est binaire et cohérente, il semble intuitivement certain qu'il existe un sous-ensemble de E dont les éléments correspondent à $D(o)$, ce qu'on admettra axiomatiquement. On introduit donc la définition suivante :

DEFINITION 2.10 :

Si on a une définition $D(o)$ telle que tout objet O_0 correspondant à $D(o)$ soit élément d'un ensemble (Qui doit être le même pour tout objet O_0 correspondant à $D(o)$), alors on dira que $D(o)$ est *basique*.

Il sera aussi utile d'introduire dans la TLP les notions suivantes :

DEFINITION 2.11 :

a) Si on a une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ définissant o en utilisant les concepts particuliers O_1, \dots, O_n , on dira par définition qu'on considère la définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de *paramètres fixes* O_1, \dots, O_n si :

-Pour O_1, \dots, O_n représentant simultanément les objets O_{10}, \dots, O_{n0} (ou de façon équivalente pour (O_1, \dots, O_n) représentant la séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) dont on montrera plus loin l'existence), on considère la définition $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$. Donc la définition $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$ n'est définie que si O_1, \dots, O_n représentent simultanément O_{10}, \dots, O_{n0} , et le concept $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$ associé à la définition $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$ ne peut exister que si O_1, \dots, O_n peuvent représenter simultanément O_{10}, \dots, O_{n0} .

b) S'il existe au moins une séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) représentée par (O_1, \dots, O_n) et si pour chaque séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) représentée par (O_1, \dots, O_n) il existe au moins un objet correspondant à la définition $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$, on dira que le *concept particulier* $O(O_1, \dots, O_n)$, associé à la définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de *paramètres fixes* O_1, \dots, O_n existe et est défini en fonction de O_1, \dots, O_n . Dans ce cas, (O_1, \dots, O_n) représentant (O_{10}, \dots, O_{n0}) , le concept particulier $O(O_1, \dots, O_n)$ est identifié au concept particulier $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$. Il dépend donc de la séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) représentée par (O_1, \dots, O_n) . Si en outre $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$ ne représente qu'un objet pour chaque séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) , on dira que $O(O_1, \dots, O_n)$ est *défini uniquement en fonction* de O_1, \dots, O_n (ou de (O_1, \dots, O_n)) pour la définition considérée.

c) O_1, \dots, O_n étant des concepts particuliers, on dira qu' O_1, \dots, O_n sont *fixés*, (ou que (O_1, \dots, O_n) est *fixé*), si on considère qu'ils représentent des objets O_{10}, \dots, O_{n0} parmi ceux qu'ils peuvent représenter simultanément.

On dira que le *concept (particulier)* (O_1, \dots, O_n) existe s'il existe des objets O_{10}, \dots, O_{n0} qui peuvent être représentés simultanément par les concepts O_1, \dots, O_n .

On verra plus loin et on admettra que si O_1, \dots, O_n sont des concepts particuliers non-flous, alors le concept (O_1, \dots, O_n) existe toujours.

REMARQUE 2.12 :

a) Si on a une définition non-floue $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes O_1, \dots, O_n alors le concept particulier $O(O_1, \dots, O_n)$ défini précédemment est le concept particulier associé à $D(o, O_1, \dots, O_n)$ et est donc non-flou. Il pourra donc être utilisé dans une définition non-floue d'après l'Axiome 2.5.

-Si $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est une définition non-floue, d'après la définition d'une définition non-floue, pour tout O_{10}, \dots, O_{n0} représentés simultanément par O_1, \dots, O_n , pour tout objet existant O , on a ou bien « $D(O, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie » ou bien Non (« $D(O, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie ») et on ne peut avoir « $D(O, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie » et Non (« $D(O, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie »).

Si par exemple on a 3 concepts $O_1(O_2, O_3)$, O_2, O_3 , O_1 étant défini en fonction de O_2 et O_3 , alors si (O_1, O_2, O_3) est fixé, $(O_1(O_2, O_3), O_2, O_3)$ ne peut représenter que des objets de la forme $(O_{10}(O_{20}, O_{30}), O_{20}, O_{30})$, où (O_2, O_3) est fixé et représente (O_{20}, O_{30}) et $O_{10}(O_{20}, O_{30})$ est un objet qui peut être représenté par le concept $O_1(O_{20}, O_{30})$.

b) Il est parfois utile de définir un concept particulier associé à une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ non seulement avec O_1, \dots, O_n fixés mais aussi avec C_1, \dots, C_k d'autres concepts particuliers que O_1, \dots, O_n fixés. Pour cela, on doit utiliser un nouveau symbole pour définir $O(O_1, \dots, O_n)$ (Ce qui sera toujours le cas si on définit un nouveau

concept) et de plus de le définir après la définition de $O_1, \dots, O_n, C_1, \dots, C_k$ par la définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ pour O_1, \dots, C_k fixés.

Alors $O_1, \dots, O_n, C_1, \dots, C_k$ représentant simultanément O_{10}, \dots, C_{k0} , $O(O_1, \dots, O_n)$ représente $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$ quelque soit C_{10}, \dots, C_{k0} .

c) Si on a une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes O_1, \dots, O_n , avec O_i défini en fonction de $O_{i1}, \dots, O_{ik(i)}$, alors O_i n'est défini que pour $O_{i1}, \dots, O_{ik(i)}$ fixés (par exemple à $O_{i10}, \dots, O_{ik(i)0}$), et alors $O_i(O_{i1}, \dots, O_{ik(i)})$ peut représenter les objets représentés par le concept $O_i(O_{i10}, \dots, O_{ik(i)0})$. Donc si O_i est fixé on considèrera aussi que $O_{i1}, \dots, O_{ik(i)}$ sont fixés.

d) Si on dit que le concept particulier $O(O_1, \dots, O_n)$ est défini uniquement en fonction de O_1, \dots, O_n , il est important de préciser pour quelle définition.

e) D'après la Définition 2.10, une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes O_1, \dots, O_n est basique si pour tous objets O_{10}, \dots, O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1, \dots, O_n , tout objet O correspondant à $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$ appartient à un ensemble existant, qui doit être le même pour tout O , avec O_1, \dots, O_n fixés à O_{10}, \dots, O_{n0} , mais peut dépendre de O_{10}, \dots, O_{n0} .

f) Soit $O_A(O_1, \dots, O_n)$ un concept particulier non-flou associé à une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$, O_1, \dots, O_n étant des concepts particulier non-flous. Soit alors O'_1, \dots, O'_n n concepts particuliers non-flous tels que (O'_1, \dots, O'_n) soit inclus dans (O_1, \dots, O_n) , c'est-à-dire que si $(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ peut être représenté par (O'_1, \dots, O'_n) alors il peut aussi être représenté par (O_1, \dots, O_n) .

Il est évident alors que la définition $D(o, O'_1, \dots, O'_n)$ est non-floue (car on remplace des concepts non-flous par des concepts non-flous), et qu'il existe un concept non-flou $O_B(O'_1, \dots, O'_n)$ associé à cette définition.

De plus si $(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ peut être représenté par (O'_1, \dots, O'_n) , il est évident que le concept $O_A(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ peut représenter les mêmes objets que $O_B(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$.

On pourra donc écrire $O_B(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ sous la forme $O_A(O'_1, \dots, O'_n)$, qui est donc alors un concept particulier non-flou.

g) Si on a une définition non-floue $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes les concepts non-flous O_1, \dots, O_n , on peut utiliser dans $D(o, O_1, \dots, O_n)$ d'après l'Axiome 2.5 un concept non-flou $O_A(O_{A1}, \dots, O_{Ak})$ associé à une définition non-floue $D_A(o_A, O_{A1}, \dots, O_{Ak})$, avec par exemple O_{A1}, \dots, O_{As} sont parmi O_1, \dots, O_n . Alors pour O_1, \dots, O_n fixés à O_{10}, \dots, O_{n0} , on doit considérer $O_A(O_{A1}, \dots, O_{Ak})$ pour O_1, \dots, O_n fixés à O_{10}, \dots, O_{n0} . Et donc $O_A(O_{A1}, \dots, O_{Ak})$ représente le concept $O_A(O_{A10}, \dots, O_{As0}, O_{As+1}, \dots, O_{Ak})$, associé à $D(o_A, O_{A10}, \dots, O_{As0}, O_{As+1}, \dots, O_{Ak})$.

h) Si $O_A(O_1, \dots, O_n)$ est un concept non-flou associé à la définition $D_A(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes les concepts non-flous O_1, \dots, O_n et que pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, O_i est défini uniquement en fonction des concepts non-flous $O_{i1}, \dots, O_{ik(i)}$, et donc qu'on peut écrire O_i sous la forme $O_i(O_{i1}, \dots, O_{ik(i)})$ alors il est évident que $O_A(O_1, \dots, O_n)$ peut être identifié avec le concept non-flou $O_B(O_{11}, \dots, O_{ij}, \dots, O_{nk(n)})$ associé à la définition $D_B(o, O_{11}, \dots, O_{ij}, \dots, O_{nk(n)})$ de paramètres fixes $O_{11}, \dots, O_{nk(n)}$ qui est la définition $D_A(o, O_1(O_{11}, \dots, O_{1k(1)}), \dots, O_n(O_{n1}, \dots, O_{nk(n)}))$.

i) On remarque que (O_1, \dots, O_n) pouvant représenter plusieurs séquences (O_{10}, \dots, O_{n0}) , on n'aura jamais un concept général associé à une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes O_1, \dots, O_n , car alors les objets qu'il représente dépendent des objets O_{10}, \dots, O_{n0} représentés par O_1, \dots, O_n ce qui est contraire à la définition d'un concept général.

j) Une définition $D(o)$ peut être associée à un concept général si, en définissant o , $D(o)$ n'utilise aucun concept particulier défini avant $D(o)$ qui n'est pas un concept général. Alors les objets correspondant à $D(o)$ sont complètement indépendants des objets représentés par les concepts particuliers définis avant $D(o)$. Si cela est le cas on dira que $D(o)$ est une *définition générale*.

Si on exprime une définition $D(o)$ sous la forme d'une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes O_1, \dots, O_n , on supposera toujours que pour définir o , $D(o, O_1, \dots, O_n)$ n'utilise aucun concept particulier défini avant $D(o)$ excepté O_1, \dots, O_n . En effet si $D(o)$ utilise un autre concept particulier O_{n+1} et que celui-ci n'est pas fixé, alors $D(o, O_1, \dots, O_n)$ n'a pas de sens sauf si O_{n+1} représente un unique objet. Et donc pour définir o les seuls concepts particuliers utilisés par $D(o, O_1, \dots, O_n)$ sont les concepts particuliers O_1, \dots, O_n , et des concepts particuliers définis à l'intérieur de $D(o, O_1, \dots, O_n)$ ou sont aussi des concepts généraux. Et donc si O_1, \dots, O_n sont aussi des concepts généraux, alors $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est une définition générale.

Si on exprime un concept particulier sous la forme $O(O_1, \dots, O_n)$, on supposera toujours implicitement qu'il est associé à une définition de la forme $D(o, O_1, \dots, O_n)$.

Si A est un ensemble dont les éléments correspondent à une définition générale $D(o)$, alors on pourra considérer que A est un concept général, car il représente un ensemble indépendant des objets représentés par les concepts particuliers définis avant lui.

k) Dans certains cas un concept général associé à une définition $D_G(o)$ peut représenter toutes les séquences pouvant être représentées par un concept particulier (O_1, \dots, O_n) , O_1, \dots, O_n étant des concepts particuliers. Ceci est le cas si O_1, \dots, O_n sont définis dans $D_G(o)$ à partir de concepts généraux et que dans $D_G(o)$ o est défini par « o est identique à (O_1, \dots, O_n) ».

Plus généralement un concept général associé à une définition $D_G(o)$ peut représenter tous les objets représentés par un concept particulier $O(O_1, \dots, O_n)$, O_1, \dots, O_n étant des concepts particuliers. (Et donc tous les objets pouvant être représentés par $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$, avec (O_{10}, \dots, O_{n0}) peut être représenté par (O_1, \dots, O_n)).

Ceci est le cas si O_1, \dots, O_n sont des concepts particuliers définis dans $D_G(o)$ à partir de concepts généraux, et si dans $D_G(o)$ o est défini par une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes O_1, \dots, O_n . Alors $O(O_1, \dots, O_n)$ est le concept associé à $D(o, O_1, \dots, O_n)$.

On remarque que si on remplace dans $D_G(o)$ $D(o, O_1, \dots, O_n)$ par « o est identique à (O_1, \dots, O_n) , on obtient une définition générale $D^*_G(o)$ telle que le concept général associé à $D^*_G(o)$ peut représenter toutes les séquences pouvant être représentées par (O_1, \dots, O_n) .

On utilisera aussi le concept fondamental de définition récursive Platoniste :

DEFINITION 2.13 :

Une *définition récursive Platoniste* est définie par la donnée de son *premier terme* t , d'une *propriété récursive* et d'une *clause de récursion* telle que :

- (i) Le premier terme de la définition récursive est un concept particulier non-flou ayant la propriété récursive.
- (ii) Si q est un terme de la définition récursive qui est un concept particulier non-flou, alors la clause de récursion définit un successeur $s(q)$ de q dans la définition récursive, qui est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction du concept q et qui a la propriété récursive. Ainsi $s(q)$ doit être défini par une définition du type $D(o, q)$.

Il est évident que si on a une définition récursive Platoniste, t étant le concept particulier non-flou premier terme de la définition récursive, $s(t)$, $s(s(t))$, \dots , $s(\dots(s(t)\dots))$ termes de la définition récursive sont des concepts non-flous définis uniquement en fonction du concept t . Il semble alors intuitivement évident qu'il existe un ensemble dont les éléments sont les termes de la définition récursive, et qui est défini uniquement en fonction de t . Ceci signifie qu'il existe un ensemble non-flou $A(t)$ défini uniquement en fonction de t et dont les éléments correspondent à la définition : $D_R(o)$: « o est un terme de la Définition récursive de premier terme t ». Nous admettrons Axiomatiquement l'existence de $A(t)$.

Finalement, l'Axiome permettant d'obtenir l'existence d'ensembles dans la TLP, dont certains points ont été justifiés précédemment et d'autres sont admis dans la Théorie classique des ensembles (qui doit être vraie dans la TLP) est le suivant :

Dans cet Axiome :

- On rappelle qu'un ensemble non-flou est un concept (particulier) non-flou pouvant représenter seulement un ensemble). Lorsqu'on écrira que A et B sont des ensembles non-flous, cela supposera toujours que le concept (A, B) , défini en 2.11 existe.

- A et B étant 2 ensembles, A est inclus dans B signifie classiquement « tout élément de A est élément de B ». Ceci signifie qu'on pourra identifier le concept « est inclus » (entre 2 ensembles) à un concept primitif non-flou (Axiome 2.5b), s'il est utilisé dans une définition non-floue $D(o)$ entre des ensembles non-flous ou o et un ensemble non-flou).

- On utilisera la propriété évidente d'*inclusion réciproque*, c'est-à-dire que si A et B sont 2 ensembles non-flous et si on a A est inclus dans B et B est inclus dans A , alors A est identique à B . (Ceci est la conséquence de l'Axiome 2.2C).

- Si on donne une définition sous la forme $D(o, O_1, \dots, O_n)$, O_1, \dots, O_n étant des concepts non-flous, on supposera alors toujours implicitement que $D(o, O_1, \dots, O_n)$ est une définition de paramètres fixes O_1, \dots, O_n .

- On rappelle aussi que si on définit A comme étant un concept non-flou, on supposera implicitement que A est un concept particulier non-flou.

AXIOME 2.14 :

a) Si x est un concept (particulier) non-flou ne pouvant pas représenter l'EMP, alors il existe un ensemble non-flou noté $\{x\}$, dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition $D(o)$ de paramètre fixe x : « o est identique à x ». Il est évident, utilisant la propriété d'inclusion réciproque que $\{x\}$ est défini uniquement en fonction de x .

b) Pour toute Définition récursive Platoniste D_R , il existe un ensemble non-flou $A(t)$, défini uniquement en fonction de t premier terme de la Définition récursive D_R , et dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition $D_R(o)$: « o est un terme de la Définition récursive D_R de premier terme t ».

c) Si A et B sont 2 ensembles non-flous, alors :

-Il existe un ensemble non-flou $A \times B$ dont les éléments sont ceux correspondant à la définition $D(o)$ de paramètres fixes A, B : « Il existe a élément de A et b élément de B tel que o est identique à (a, b) ». Il est évident que ce concept particulier non-flou est défini uniquement en fonction de A et B .

-Il existe un ensemble non-flou $P(A)$ dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition $D(o)$ de paramètre fixe A « o est inclus dans A » (équivalente à la Définition $D(o)$: « o est un ensemble et pour tout concept $c(o)$ associé à la Définition $D(c(o))$: « $c(o)$ est élément de o », $c(o)$ est élément de A », qui est non-floue d'après l'Axiome 2.5)). Il est évident que $P(A)$ est défini uniquement en fonction de A .

-Il existe un ensemble non-flou $A \cup B$ dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition non-floue de paramètres fixes A, B : $D(o)$ « o est élément de A ou o est élément de B ». De même, il est évident que $A \cup B$ est défini uniquement en fonction de A et B .

On pourra montrer simplement qu'il existe aussi des ensembles non-flous $A \cap B$ et A/B , définis de façon analogues à $A \cup B$, et définis uniquement en fonction de A et B .

d) Si A est un ensemble non-flou et pour tout a élément de A on a défini un ensemble non-flou $B(a)$ défini uniquement en fonction de a et de A , alors il existe un ensemble non-flou $\bigcup_A(B(a))$ dont les éléments correspondent à la définition non-floue $D(o)$ de paramètre fixe A : « Il existe a élément de A tel que o est élément de $B(a)$ ». Il est évident que cet ensemble est défini uniquement en fonction de A .

On pourra montrer simplement utilisant cet Axiome 2.14 qu'il existe un concept non-flou $\bigcap_A(B(a))$, défini de façon évidente, et défini uniquement en fonction de A .

e) Si $D(o)$ est une définition non-floue basique, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à $D(o)$. Il est évident que cet ensemble est unique. Ceci est aussi vrai si on a des concepts particuliers non-flous O_1, \dots, O_n , et qu'on a la définition basique et non-floue $D(o, O_1, \dots, O_n)$ de paramètres fixes O_1, \dots, O_n . Alors, on obtient l'existence d'un concept non-flou $A(O_1, \dots, O_n)$, défini uniquement en fonction de (O_1, \dots, O_n) et dont les éléments correspondent à $D(o, O_1, \dots, O_n)$. Ainsi, si (O_1, \dots, O_n) représente (O_{10}, \dots, O_{n0}) , il existe un unique ensemble $A(O_{10}, \dots, O_{n0})$ dont les éléments correspondent à $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$.

REMARQUE 2.15 :

a) On remarque qu'en 2.14a), on a mis la condition que x ne peut pas représenter l'EMP. En effet, l'EMP est un objet mathématique extrêmement particulier, et on a donc choisi dans la TLP qu'il ne puisse pas être élément d'un ensemble. De plus, on remarque que dans les paradoxes de Cantor et de Russel, dans les formes complètes (Définition 2.9) des définitions considérées $D_C(o)$ et $D_R(o)$, le concept « objet mathématique » est défini en utilisant l'expression « existe dans l'EMP ». Au contraire, dans la forme complète d'une définition $D(o)$ basique, on peut identifier le concept « objet mathématique » à un concept représentant l'élément d'un ensemble existant. Tout l'Axiome 2.14 se comprend intuitivement si on considère que pour qu'un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à une définition $D(o)$ existe, il faut qu'on puisse considérer que o doit être défini dans la forme complète de $D(o)$ à partir de l'ensemble vide, d'ensembles non-flous et sans utiliser l'expression « existe dans l'EMP ».

b) On voit dans l'Axiome 2.14 que tous les concepts dont on obtient l'existence sont non-flous. En effet, le concept de « concept non-flou » est essentiel dans la logique Platonicienne, et donc on doit toujours si possible n'introduire que des concepts non-flous dans la TLP, afin que les Définitions utilisant ces concepts non-flous soient elles aussi non-floues d'après l'Axiome 2.5.

c) On remarque que d'après l'Axiome 2.14e), si $D(o)$ est basique et non-floue mais qu'il n'existe aucun objet correspondant à $D(o)$, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à $D(o)$ et qui est l'ensemble vide.

d) On remarque que l'Axiome 2.14 ne permet pas d'obtenir un ensemble ayant l'EMP comme élément, l'EMP n'étant ni un ensemble ni un couple. Cependant un ensemble pourra contenir un couple dont l'EMP est 'un des termes.

e) Il est possible qu'on puisse obtenir un Axiome 2.14 plus court. Par exemple on n'utilisera pas dans cet article le point d) de cet Axiome.

Nous allons maintenant établir des Lemmes et Propositions fondamentaux, qui nous permettront d'obtenir plus loin l'existence de concepts généraux non-flous de la TLP qui pourront être identifiés aux concepts classiques.

LEMME 2.16 :

A étant un ensemble non-flou, alors il existe un ensemble noté $e(A)$, défini uniquement en fonction de A, qu'on peut représenter par :

$$e(A) = \{ \{x\} / x \text{ est élément de } A \}. (\{x\} \text{ représente le concept particulier non-flou introduit en 2.14a))$$

Preuve :

D'après la Remarque 2.15d), on supposera que A ne contient pas l'EMP comme élément.

A étant un ensemble non-flou, x étant le concept non-flou associé à « o est élément de A », on sait d'après 2.14a) que le concept non-flou $\{x\}$ existe et est défini uniquement en fonction de x. On considère alors la Définition D(o) de paramètre fixe A: « Il existe x élément de A tel que o est identique à $\{x\}$ ». Cette définition est non-floue d'après l'Axiome 2.5. De plus il est évident que « D(o) est vraie » entraîne que o est élément de $P(A)$, $P(A)$ étant un concept non-flou d'après l'Axiome 2.14c). Et donc d'après l'Axiome 2.14e), il existe un ensemble $e(A)$ dont les éléments correspondent à D(o). Si A représente l'ensemble vide, il est évident que $e(A)$ représente aussi l'ensemble vide. D'après l'Axiome 2.14e), $e(A)$ est défini uniquement en fonction de A.

En accord avec la Remarque 2.15d), $e(A)$ ne contenant que des ensembles, il ne peut avoir l'EMP comme élément.

PROPOSITION 2.17 :

A et B étant 2 ensembles non-flous, il existe un ensemble non-flou, noté $F(A,B)$, défini uniquement en fonction de A et B, qu'on peut identifier à l'ensemble des *applications* de A dans B.

Preuve :

A et B étant 2 ensembles non-flous, d'après 2.14c), il existe un ensemble non-flou $P(A \times B)$ défini uniquement en fonction de A et B, défini en 2.14c).

On considère alors la définition de paramètres fixes A,B:

D(f) : « f est un élément de $P(A \times B)$ et pour tout a élément de A, il existe un et unique élément de f de premier terme a ». (On peut considérer qu'« un élément de f » est le concept $c(f)$ associé à « $c(f)$ est élément de f »).

Cette définition est évidemment basique et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5. Donc d'après l'Axiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou $F(A,B)$, défini uniquement en fonction de A et B, dont les éléments correspondent à D(f). Il est évident que $F(A,B)$ convient.

REMARQUE 2.17A:

a) Si f est élément de $F(A,B)$, et si a est élément de A, on appellera classiquement *l'image* de f par a, et on notera $f(a)$ le concept associé à « (a,o) est élément de f », défini uniquement en fonction de f,a, qui est non-flou d'après l'Axiome 2.5.

b) Si i est un concept non-flou représentant seulement des éléments de A, g étant un concept non-flou représentant seulement des éléments de $F(A,B)$ alors $g(i)$, concept associé à la définition D(o) : « (i,o) est élément de g » est un concept non-flou d'après l'Axiome 2.5, et évidemment défini uniquement en fonction de g et i. On peut donc utiliser de tels concepts $g(i)$ dans des définitions non-floues.

c) De même si on a une définition D(o), qu'on a un concept non-flou g représentant seulement des éléments de $F(A,B)$ et que dans la définition D(o), un symbole $c(o)$ soit associé à une définition utilisant seulement o et des concepts non-flous pour définir $c(o)$, alors $g(c(o))$ étant un symbole associé à la définition $D(o_g)$: « $(c(o), o_g)$ est élément de g » c'est-à-dire « o_g est l'image de $c(o)$ par g » utilise seulement o et des concepts non-flous pour définir o_g , et donc une définition non-floue pourra utiliser le symbole $g(c(o))$. De même, si on a une définition D(o) dans laquelle o est une application, et que i est un concept non-flou, D(o) pourra utiliser le symbole $o(i)$ en étant non-floue. Ce qui précède justifie que le symbole « () », utilisé dans une

expression « $o()$ » ou « $f()$ », f étant un concept non-flou ne pouvant représenter que des applications, peut toujours être utilisés dans une définition non-floue $D(o)$, et donc peut être considéré comme un concept relationnel non-flou.

LEMME 2.18 :

a) A et B étant 2 ensembles non-flous non vides, si a est un concept pouvant représenter tout élément de a_0 de A et si on a un concept non-flou $f(a,A,B)$ associé à une définition $D(o,A,B)$ et défini uniquement en fonction de a,A et B pouvant représenter seulement un élément de B , alors il existe un concept non-flou f associé à la définition $D_f(o,A,B)$: « o est un élément de $F(A,B)$ et pour tout élément a de A , $f(a,A,B)$ est l'image de a par o » défini uniquement en fonction de A et B .

b) Dans de nombreux cas $f(a)$ n'est pas défini uniquement en fonction de a,A,B , mais en fonction de a,A,B,O_1,\dots,O_n , O_1,\dots,O_n étant des concepts non-flous. Alors si A,B, O_1,\dots,O_n étant fixés a est un concept pouvant représenter tout élément a_0 de A , et $f(a,A,B,O_1,\dots,O_n)$ est un concept non-flou associé une définition $D(o,a,A,B,O_1,\dots,O_n)$ est défini uniquement en fonction de a,A,B,O_1,\dots,O_n et peut représenter seulement un élément de B , alors il existe un concept non-flou f associé à la définition de paramètres fixes A,B,O_1,\dots,O_n $D_f(o,A,B,O_1,\dots,O_n)$: « o est un élément de $F(A,B)$ et pour tout a élément de A , l'image de a par o est $f(a,A,B,O_1,\dots,O_n)$ », f étant défini uniquement en fonction de A,B,O_1,\dots,O_n pour cette définition.

Preuve :

a) D'après l'Axiome 2.5 et la Remarque 2.12, $D_f(o,A,B)$ est une définition non-floue puisque $f(a,A,B)$ est un concept non-flou.

On considère alors la définition $D_1(o)$ de paramètres fixes A,B :

$D_1(o)$: « Il existe a élément de A , tel que o est identique à $(a,f(a,A,B))$ ».

D'après la Définition 2.11, elle signifie, A,B étant fixés représentant A_0,B_0 :

« Il existe un élément a_0 de A_0 tel que o est identique à $(a_0,f(a_0,A_0,B_0))$ (Ce qui n'est possible que si $f(a,A,B)$ est défini pour (a,A,B) représentant (a_0,A_0,B_0) ».

Puisque « $D_1(o)$ est vraie » entraîne o est élément de $A \times B$, $D(o)$ est basique.

De plus $D_1(o)$ est non-floue d'après l'Axiome 2.5 et la Remarque 2.12a).

Donc d'après l'Axiome 2.14e) il existe un ensemble non-flou $f_1(A,B)$ défini uniquement en fonction de A, B et dont les éléments correspondent à $D_1(o)$.

Pour A,B fixés représentant A_0 et B_0 , il est évident que $f_1(A_0,B_0)$ correspond à la définition $D_f(o,A_0,B_0)$.

Donc il existe un concept non-flou $f(A,B)$ associé à la définition $D_f(o,A,B)$ et on montre aisément qu'il est défini uniquement en fonction de A et B .

b) Pour obtenir que A,B,O_1,\dots,O_n étant fixés, a peut représenter tout élément a_0 de A , il suffit d'après la Remarque 2.12b) que le concept a associé à la définition « o est élément de A » soit défini par un nouveau symbole après la définition de A,B,O_1,\dots,O_n et pour A,B,O_1,\dots,O_n fixés.

Il suffit ensuite de remplacer $D_1(o,a,A,B)$ par $D_1(o,a,A,B,O_1,\dots,O_n)$. Alors on utilise le concept $f(a,A,B,O_1,\dots,O_n)$ à la place du concept $f(a,A,B)$.

On remarque que si a était défini avant O_1,\dots,O_n et que par exemple O_1 était défini en fonction de a , alors même si $f(a)$ était défini uniquement en fonction de a,A,B,O_1,\dots,O_n , O_1 fixé à O_{10} entraînerait d'après la Définition 2.11d) que a fixé par exemple à a_0 , et donc alors seule l'image de a_0 serait défini pour O_1 fixé à O_{10} . Et donc on n'obtiendrait pas de fonction f définie uniquement en fonction de A,B,O_1,\dots,O_n .

LEMME 2.19 :

A et B étant 2 ensembles non-flous ne pouvant pas représenter l'ensemble vide et f étant une application de A dans B , alors pour tout b dans B il existe un ensemble non-flou, noté $f^{-1}(b)$ dont les éléments correspondent à la définition $D(o,b,f)$: « b est l'image de o par f » (ou « (o,b) est élément de f »), qui est défini uniquement en fonction de f et b .

Preuve :

Soit A, B 2 ensembles non-flous, f le concept associé à la définition de paramètres fixes A, B « o est élément de $F(A, B)$ » et b le concept associé à la définition de paramètre fixe B : « o est élément de B ».
 f et b sont des concepts non-flous d'après l'Axiome 2.5 et le Lemme 2.17.

On considère alors la définition de paramètres fixes f et b :

$D(o, b, f)$: « (o, b) est élément de f »

Il est évident que $D(o, b, f)$ est basique et qu'elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5.

Donc il existe d'après l'Axiome 2.14e) un ensemble non-flou $f^{-1}(b)$ dont les éléments correspondent à $D(o, b, f)$, et qui est défini uniquement en fonction de f et b .

On a aussi le Lemme :

LEMME 2.20 :

A étant un ensemble non-flou ne pouvant représenter l'ensemble vide, $p(A)$ étant le concept associé à « o est élément de $P(A)$ », il existe un concept non-flou f associé à la définition de paramètres fixes $A, p(A)$: $D_f(o, A, p(A))$: « o est élément de $F(A, \{\sigma, \{\sigma\}\})$ » et pour tout a élément de A (a est élément de $p(A)$ ») est équivalent à (l'image de a par o est $\{\sigma\}$) », f étant défini uniquement en fonction de A et $p(A)$.

Preuve :

On suppose donc que A ne peut représenter l'ensemble vide.

Nous représenterons σ par le symbole 0 et $\{\sigma\}$ par le symbole 1.

σ est un concept non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.5 et donc $\{\sigma\}$ est un concept non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.14a). $\{\sigma, \{\sigma\}\}$ est un ensemble non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.14.

A étant un concept non-flou et $p(A)$ étant le concept associé à « o est élément de $P(A)$ », d'après l'Axiome 2.5 $p(A)$ est un concept non-flou.

Donc d'après l'Axiome 2.5 et la Remarque 2.5A définissant le concept « est équivalent », $D_f(o, A, p(A))$ est non-floue.

On définit alors le concept a associé à « o est élément de A » pour $A, p(A)$ fixés. (a est donc un nouveau symbole défini après les concepts A et $p(A)$ et peut représenter tout élément a_0 de A pour $A, p(A)$ fixés d'après la Remarque 2.12b et le Lemme 2.18).

On considère la définition de paramètres fixes $a, A, p(A)$:

$D(o, a, A, p(A))$: « o est élément de $\{0, 1\}$ et (« o est identique à 1 » est équivalent à « a est élément de $p(A)$ »).

Cette définition est évidemment basique car « $D(o, A, p(A))$ est vraie » entraîne que o est élément de $\{0, 1\}$ qui est un ensemble existant, et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5.

On suppose $a, A, p(A)$ fixés à $a_0, A_0, p_0(A_0)$ (Définition 2.11).

$p_0(A_0)$ étant un ensemble, on a ou bien « a_0 est élément de $p_0(A_0)$ » ou bien « a_0 n'est pas élément de $p_0(A_0)$ ».

Si a_0 est élément de $p_0(A_0)$, $f(a_0)=1$ est le seul objet correspondant à $D(o, a_0, A_0, p_0(A_0))$.

Si a_0 n'est pas élément de $p_0(A_0)$, $f(a_0)=0$ est le seul objet correspondant à $D(o, a_0, A_0, p_0(A_0))$.

Donc on a un concept non-flou existant $f(a, A, p(A))$ associé à $D(o, A, p(A))$ qui est défini uniquement en fonction de $a, A, \{0, 1\}$ et $p(A)$.

Il en résulte d'après le Lemme 2.18b) qu'il existe un concept non-flou $f_1(A, p(A))$ qui représente un unique élément de $F(A, \{0, 1\})$, tel que l'image de chaque a élément de A par $f_1(A, p(A))$ soit $f(a, A, p(A))$ défini précédemment.

Pour $A, p(A)$ fixés à $A_0, p_0(A_0)$, il est évident que $f_1(A_0, p_0(A_0))$ correspond à la définition $D_f(o, A_0, p_0(A_0))$ et donc il existe un concept non-flou associé à la définition $D_f(o, A, B)$ et on montre facilement qu'il est défini uniquement en fonction de $A, p(A)$.

On démontre de façon analogue la réciproque du Lemme précédent :

LEMME 2.21 :

A étant un ensemble non-flou, et f étant le concept non-flou associé à « o est élément de $F(A, \{0, 1\})$ », il existe un concept non-flou associé à la définition de paramètres fixes A, f $D_p(o, A, f)$: « o est un élément de $P(A)$ et pour tout a élément de A , ($f(a)=1$) est équivalent à « a est élément de o », défini uniquement en fonction de A et f .

3. CONCEPTS BASIQUES FONDAMENTAUX

En utilisant les chapitres précédents, on peut alors montrer théoriquement qu'on peut identifier les concepts mathématiques classiques à des concepts non-flous existants dans l'EMP, c'est-à-dire que les concepts mathématiques classiques existent au sens Platoniste.

PROPOSITION 3.1 :

Il existe un concept non-flou, à la fois général et particulier, qu'on peut identifier à \mathbb{N} .

Preuve :

On considère la définition récursive Platoniste définie par :

- σ (l'ensemble vide), est le premier terme de la définition récursive ayant la propriété récursive $P(\sigma)$: « σ est un ensemble »..

-Si q est un terme de la définition récursive ayant la propriété récursive $P(q)$: « q est un ensemble », la clause de récursion définit le terme successeur de q dans la définition récursive : $s(q)$ est le concept associé à la définition « o est identique à $e(q) \cup \{\sigma\}$ », $e(q)$ étant le concept défini uniquement en fonction de q au Lemme 2.16. ($e(q) = \{x / x \text{ est élément de } q\}$).

Il est évident que q étant un concept non-flou ayant la propriété récursive, c'est-à-dire représentant un ensemble, $s(q)$ est un concept non-flou existant d'après l'Axiome 2.14c) et que de plus il est défini uniquement en fonction de q , puisque d'après le Lemme 2.16 $e(q)$ est défini uniquement en fonction de q . De plus $s(q)$ est un ensemble et donc il a la propriété récursive.

Donc on a bien une définition récursive Platoniste.

D'après l'Axiome 2.14b), il existe un ensemble noté $A(\sigma)$, défini uniquement en fonction de σ et donc unique puisque σ représente un unique objet, et dont les éléments sont les termes de la définition récursive, c'est-à-dire : σ , $\{\sigma\}$, $\{\sigma, \{\sigma\}\}$, $\{\sigma, \{\sigma, \{\sigma\}\}\}$, ..., qu'on identifiera à $0, 1, 2, 3, \dots$. On identifiera donc $A(\sigma)$, concept général non-flou, à \mathbb{N} , et de même $0, \dots, 3, \dots$ à des concepts généraux non-flous. \mathbb{N} représentant toujours un unique objet, on peut aussi le considérer comme un concept particulier.

D'après la Remarque 2.12j), \mathbb{N} peut être considéré comme un concept général.

De plus $0, 1, 2, 3$ peuvent aussi être considérés comme des concepts généraux :

Ainsi, si i est un concept général représentant un terme de la définition récursive Platoniste précédente, représenté par les chiffres usuels, alors on définit $i+1$ exprimé par les chiffres usuels comme le successeur $s(i)$ de i dans la définition récursive Platoniste précédente. D'après la Remarque 2.12j), on peut considérer que $i+1$ est un concept général, car il est défini seulement à partir de concepts généraux (0 et i).

REMARQUE 3.2 :

a) On remarque que le nombre d'éléments de chaque terme de la définition récursive est égal au naturel qu'il représente. On dira donc qu'un ensemble A a n éléments s'il existe une bijection entre A et l'ensemble représenté par n .

b) De plus, on remarque que les termes de la définition récursive vérifient les Axiomes de Peano, c'est-à-dire, remplaçant « nombre » par « terme » :

1) Il existe un premier terme : σ

2) Chaque terme de la suite q a un unique successeur immédiat $s(q)$.

3) σ n'est le successeur immédiat d'aucun terme (Puisque sinon il contiendrait σ et serait donc non-vide.)

4) Si q_1 et q_2 sont 2 termes de la suite ayant le même successeur immédiat q_3 alors q_1 est identique à q_2 (Ceci se montre facilement).

5) Toute propriété $Q(q)$ appartenant à σ et au successeur immédiat de tout terme ayant cette propriété appartient à tous les termes. (Ceci est évident car $Q(\sigma)$ entraîne $Q(s(\sigma))$, ..., qui entraîne de proche en proche $Q(n)$, n terme quelconque de la suite).

c) Puisque les éléments de $A(\sigma)$ vérifient les Axiomes de Peano dont on obtient les propriétés classiques des naturels, cela signifie qu'on peut obtenir pour $A(\sigma)$ toutes les propriétés qu'on obtient classiquement pour \mathbb{N} .

PROPOSITION 3.3 :

Il existe des concepts non-flous, à la fois généraux et particuliers, qu'on peut identifier à \mathbb{Z} et \mathbb{Q} .

Preuve :

On a montré l'existence d'un concept non-flou représentant un unique objet identifié à \mathbf{N} .

D'après l'Axiome 2.14c), $\mathbf{N} \times \{1\}$ est un ensemble non-flou représentant un unique objet (identifié à \mathbf{Z}^+), de même que $\mathbf{N}^* \times \{0\}$ (identifié à \mathbf{Z}^*) où $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} / \{0\}$ (On rappelle qu'on a identifié 1 et 0 à des objets existant).

Et donc d'après l'Axiome 2.14, $\mathbf{N} \times \{1\} \cup \mathbf{N}^* \times \{0\}$ est un ensemble non-flou existant, représentant un unique objet qu'on identifiera à \mathbf{Z} .

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est un concept non-flou existant d'après l'Axiome 2.14. Et donc $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} / \mathbf{Z} \times \{(0,1)\}$ est un concept non-flou existant qu'on identifiera à \mathbf{Q} .

\mathbf{Q} et \mathbf{Z} peuvent être considérés comme des concepts généraux d'après la Remarque 2.12j).

De plus, puisqu'ils représentent chacun un unique objet, ils peuvent aussi être considérés comme des concepts particuliers.

PROPOSITION 3.4 :

L'addition et la multiplication dans $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ peuvent être identifiés à des concepts existants non-flous, à la fois généraux et particuliers.

Preuve :

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est un ensemble non-flou existant d'après l'Axiome 2.14.

On peut toujours considérer que \mathbf{N} et $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sont fixés, puisque ces concepts représentent chacun un unique ensemble ;

Pour tout (a,b) élément de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, puisqu'on a vu que les éléments de l'ensemble identifié à \mathbf{N} ont exactement les mêmes propriétés classiques des naturels, on peut obtenir un concept mathématique non-flou défini uniquement en fonction de a et b , appartenant à \mathbf{N} et identifié à $a+b$ (On peut considérer la définition récursive Platoniste de premier terme $(a,0)$ et telle que $s((p,i))=(p+1,i+1)$). Alors d'après le Lemme 2.18 il existe un unique concept non-flou élément de $F(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \mathbf{N})$, noté « ad » tel que pour tout (a,b) de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, l'image de (a,b) par l'application « ad » soit $a+b$.

On identifiera ad avec l'addition dans \mathbf{N} .

« ad » peut être considéré comme un concept général d'après la Remarque 2.12j).

De même on obtient l'existence d'un concept général non-flou qu'on peut identifier avec la multiplication dans \mathbf{N} .

Utilisant l'existence de l'addition et de la multiplication dans \mathbf{N} , il est facile utilisant le Lemme 2.18 d'obtenir des concepts généraux non-flous qu'on peut identifier avec l'addition et la multiplication dans \mathbf{Z} et \mathbf{Q} .

Ces concepts obtenus précédemment représentant toujours un unique, on peut aussi les considérer comme des concepts particuliers.

PROPOSITION 3.5 :

Il existe un concept non-flou, à la fois général et particulier, qu'on peut identifier à \mathbf{R} .

Preuve :

On a déjà montré l'existence de concepts non-flous pouvant être identifiés à \mathbf{Q} et à \mathbf{N} .

D'après la Proposition 2.17 il existe un concept non-flou représentant un objet unique $F(\mathbf{N}, \mathbf{Q})$, dont on appellera les éléments « suites ». (« suite » est donc un concept général).

On considère alors la définition classique d'une suite de Cauchy :

$D_{\text{Cauchy}}(o)$: « o est un élément de $F(\mathbf{N}, \mathbf{Q})$ et pour tout ε rationnel strictement positif, il existe un naturel N tel que pour tout i naturel supérieur à N et pour tout j naturel supérieur à N , on ait $|i(o)-j(o)| < \varepsilon$, où $i(o)$ est le $i^{\text{ème}}$ terme de o , c'est-à-dire l'image de i par o . »

$D_{\text{Cauchy}}(o)$ est évidemment basique puisqu'elle entraîne que o est élément de $F(\mathbf{N}, \mathbf{Q})$ qui est un concept non-flou existant.

De plus dans $D_{\text{Cauchy}}(o)$ on peut identifier « ε rationnel strictement positif » avec « ε est élément de \mathbf{Q}^{*+} » qui représente un concept non-flou d'après l'Axiome 2.5.

De plus N est le concept associé à « o est élément de \mathbf{N} » et est donc un concept non-flou.

On peut identifier « i naturel supérieur à N » avec « i est le concept associé à « o est élément de \mathbf{N} et $\text{sub}(o, N)$ est élément de \mathbf{N} », sub étant le concept non-flou représentant la soustraction dans \mathbf{Z} , identifiant classiquement \mathbf{N} à \mathbf{Z}^+ . Donc d'après l'Axiome 2.5 et la Remarque 2.17A, i est un concept non-flou, et donc on peut identifier « i naturel supérieur à N » à un concept non-flou.

Enfin on peut remplacer l'expression « $|i(o)-j(o)|<\varepsilon$, où $i(o)$ est le $i^{\text{ème}}$ terme de o » par l'expression « $i(o)$ concept associé à $D(i(o)) : \langle (i,i(o)) \rangle$ est élément de o », $j(o)$ concept associé à $D(j(o))$ (analogue à $D(i(o))$) » et $\text{sub}(\text{abs}(\text{sub}(i(o),j(o)),\varepsilon))$ est élément de \mathbf{Q}^* », avec « sub » est un concept non-flou identifié à la soustraction dans \mathbf{Q} , et « abs » est un concept non-flou identifié à la valeur absolue.

On a donc, utilisant les Remarque 2.5Ac) et 2.17A)c), $D_{\text{Cauchy}}(o)$ est équivalente à une définition utilisant pour définir o seulement des concepts non-flous, et donc elle est non-floue d'après la l'Axiome 2.5.

De plus d'après la Remarque 2.12j), $D_{\text{Cauchy}}(o)$ est une définition générale.

Donc d'après l'Axiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou dont les éléments sont les suites de Cauchy qui est un concept général et qu'on identifiera à \mathbf{R} .

PROPOSITION 3.6 :

Si $O(1), \dots, O(n)$ sont des concepts particuliers non-flous, alors il existe un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O(1), \dots, O(n)$ qu'on peut identifier à $(O(1), \dots, O(n))$.

Preuve :

S'il n'y a qu'un concept particulier $O(1)$, on considère le concept particulier $\{(O(1),0)\}$, qui existe et est non-flou d'après l'Axiome 2.14e). (Identifiant 0 avec l'objet correspondant, c'est-à-dire l'ensemble vide).

S'il n'y a que 2 concepts particuliers, $O(1), O(2)$, on a d'après l'Axiome 2.5 l'existence du concept particulier non-flou $(O(1), O(2))$, défini uniquement en fonction de $O(1)$ et $O(2)$.

S'il y a au moins 3 concepts particuliers $O(1), \dots, O(n)$, on définit alors pour i dans $\{1, \dots, n\}$ le concept $\{(i, O(i))\}$, qui est un concept particulier existant non-flou d'après l'Axiome 2.14 et défini uniquement en fonction de $O(i)$.

On admettra toujours que $O(1), \dots, O(n)$ étant des concepts particuliers non-flous, il existe toujours des objets $O_0(1), \dots, O_0(n)$ pouvant être représentés simultanément par $O(1), \dots, O(n)$.

En effet, on définit toujours successivement des concepts particuliers non-flous c_1, \dots, c_r de la façon suivante :

On a des concepts généraux de base non-flous c_{b1}, \dots, c_{bk} (Par exemple c_{b1}, \dots, c_{bk} sont les concepts \mathbf{N}, \mathbf{Z} , « ensemble »..).

On définit alors successivement les concepts particuliers c_1, \dots, c_r de la façon suivante :

On définit d'abord le concept particulier non-flou c_1 en utilisant des concepts généraux parmi c_{b1}, \dots, c_{bk} . D'après la définition d'un concept particulier, c_1 peut au moins représenter un objet c_{i0} .

Puis, c_1, \dots, c_{i-1} étant des concepts particuliers non-flous définis et, c_1, \dots, c_{i-1} pouvant représenter simultanément c_{i0}, \dots, c_{i-10} , on définit c_i concept particulier non-flou ou bien en fonction de concepts parmi c_1, \dots, c_{i-1} , et donc d'après la Définition 2.11 c_1, \dots, c_{i-1} représentant simultanément c_{b10}, \dots, c_{i-10} , c_i peut représenter au moins un objet c_{i0} , ou bien en utilisant seulement des concepts généraux parmi c_{b1}, \dots, c_{bk} , et alors c_i peut au moins représenter un objet c_{i0} d'après la définition d'un concept.

Et donc c_1, \dots, c_i peuvent représenter simultanément c_{i0}, \dots, c_{i0} .

Ceci étant vrai pour tout i , on obtient bien c_1, \dots, c_r peuvent représenter simultanément au moins des objets c_{i0}, \dots, c_{r0} . On définira toujours des concepts non-flous de la façon précédente.

Si on définit des concepts généraux parmi c_1, \dots, c_r , on obtient le même résultat :

On définit un concept particulier c_i soit en fonction de concepts particuliers parmi c_1, \dots, c_{i-1} , en pouvant utiliser aussi des concepts généraux parmi $c_{b1}, \dots, c_{bk}, c_1, \dots, c_{i-1}$, soit en utilisant seulement des concepts généraux parmi $c_{b1}, \dots, c_{bk}, c_1, \dots, c_{i-1}$. Comme précédemment, si les concepts particuliers $c_{p1}, \dots, c_{ps(i)}$ parmi c_1, \dots, c_{i-1} représentent simultanément les objets $c_{p10}, \dots, c_{ps(i)0}$, alors $c_{p1}, \dots, c_{ps(i)}$, c_i peuvent représenter simultanément des objets c_{p10}, \dots, c_{i0} .

On rappelle aussi que d'après la Remarque 2.5A, si on a un concept général o_{IG} associé à une définition $D_1(o_1)$, on peut toujours utiliser dans une définition $D(o)$, un concept particulier O_1 associé à $D_1(o_1)$ à la place de o_G .

Donc il existe au moins des objets $O_0(1), \dots, O_0(n)$ pouvant être représentés simultanément par $O(1), \dots, O(n)$.

D'après l'Axiome 2.14, il existe donc un ensemble non-flou, $\{(1, O(1))\} \cup \dots \cup \{(n, O(n))\}$, (On montre facilement qu'il est défini uniquement en fonction de $O(1), \dots, O(n)$, (car $O(1), \dots, O(n)$ représentant $O_0(1), \dots, O_0(n)$, ses éléments sont $(1, O_0(1)), \dots, (n, O_0(n))$) et on identifiera ce concept à $(O(1), \dots, O(n))$.

Ceci justifie a posteriori la définition du concept (O_1, \dots, O_n) donné en 2.11d). On rappelle cependant qu'on peut toujours utiliser l'expression « O_{10}, \dots, O_{n0} pouvant être représentés (simultanément) par O_1, \dots, O_n » au lieu de « (O_{10}, \dots, O_{n0}) pouvant être représenté par (O_1, \dots, O_n) », car les 2 expressions précédentes sont équivalentes.

PROPOSITION 3.7 :

Des concepts non-flous pouvant être identifiés à des corps, à des espaces vectoriels de toute dimension existent.

Preuve :

On a vu l'existence d'un concept non-flou pouvant être identifié à \mathbf{Q} , de même que des concepts non-flous pouvant être identifiés à la multiplication et à l'addition dans \mathbf{Q} , qu'on notera \times et $+$.

Il en résulte que d'après la Proposition 3.6, il existe un concept non-flou $(\mathbf{Q}, +, \times)$, qui a les mêmes propriétés qu'un corps et donc qu'on peut identifier à un corps dans sa définition classique.

De même, utilisant la multiplication et l'addition dans \mathbf{Q} , on peut obtenir l'existence de concepts non-flous identifiés à la multiplication et l'addition dans \mathbf{R} . On peut ensuite obtenir l'existence de concepts non-flous identifiés à l'addition dans \mathbf{R}^n , identifié à $F(\{1, \dots, n\}, \mathbf{R})$ et à la multiplication par un scalaire, notée \cdot , application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ dans \mathbf{R}^n .

Alors d'après la proposition 3.6, il existe un concept non-flou $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$, qui a exactement les propriétés classiques d'un espace vectoriel de dimension n .

Remplaçant \mathbf{R}^n par $F(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, on obtient l'existence d'un concept non-flou ayant les propriétés d'un espace vectoriel de dimension infinie.

En procédant comme précédemment, on peut montrer théoriquement l'existence dans l'EMP de concepts non-flous pouvant être identifiés à n'importe quel concept mathématique classique.

4.CONCLUSION

Nous avons dans cet article exposé les bases d'une Théorie Logique Platonicienne (TLP). On a donné les méthodes permettant de justifier théoriquement que les concepts mathématiques classiques peuvent être identifiés à des objets mathématiques existant dans l'Espace Mathématique Platonique. On a donc justifié théoriquement l'existence Platoniste de ces concepts mathématiques classiques. Il est remarquable qu'on obtient l'existence de ces concepts mathématiques classiques à partir de l'ensemble vide. La TLP des ensembles apparaît consistante en évitant les Paradoxes de Cantor et de Russel grâce à l'Axiome 2.14e). On a introduit le concept fondamental de définition non-floue, et admis l' Axiome 2.5 permettant d'obtenir qu'une définition est non-floue. Une justification théorique complète de cet Axiome 2.5 sera donnée dans un second article.

La TLP donne donc une signification théorique Platoniste à l'ensemble des mathématiques classiques, ce qui n'est pas le cas dans les théories mathématiques actuelles de logique basées sur le formalisme. Elle est complètement nouvelle puisque bien qu'il existe beaucoup de théories philosophiques sur le Platonisme (voir les Références) et que la plupart des mathématiciens ont l'idée d'une signification réelle des mathématiques. Nous développerons la TLP dans un second article, où nous verrons comment la théorie mathématique de logique Platoniste (TLP) peut interpréter l'ensemble des mathématiques.

References

- 1.Nagel, Newman, Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
2. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionary (G.B, 1989)
3. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
4. Largeault, Logique Mathématiques, Armand Colin, (Paris ,1992)
5. P.Thiry, Notions de logique, Deboeck Université, (Bruxelles ,1998)
- 6..Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)
- 7.Thierry Delort, Théories d'or 2^{ème} édition, Editions Books on demand, Paris (2011), site web :www.theoriesdor.com

1. On peut montrer (par une double récurrence) que si O_1, \dots, O_n sont des concepts non-flous définis tels que dans la TMP, et si O_{10}, \dots, O_{n0} sont des objets quelconques, alors ou bien O_1, \dots, O_n peut représenter simultanément O_{10}, \dots, O_{n0} , ou bien O_1, \dots, O_n ne peut représenter simultanément O_{10}, \dots, O_{n0} , et on ne peut avoir à la fois O_1, \dots, O_n peut représenter simultanément O_{10}, \dots, O_{n0} et O_1, \dots, O_n ne peut représenter simultanément O_{10}, \dots, O_{n0} .

2. Si on a une définition non floue $D(o, O_1, \dots, O_n)$ telle qu'on l'a définie, on peut définir le concept général $O(O_1, \dots, O_n)$ par : $O(O_1, \dots, O_n)$ peut représenter l'objet O_0 s'il existe O_{10}, \dots, O_{n0} tels que O_1, \dots, O_n peut représenter simultanément O_{10}, \dots, O_{n0} et $O(O_{10}, \dots, O_{n0})$ peut représenter O_0 .

Utilisant 1. on peut montrer que le concept général $O(O_1, \dots, O_n)$ est un concept non-flou. (On commence par montrer la proposition pour la définition « o est identique à (O_1, \dots, O_n) »).

Il est souvent utile de considérer la définition « o est un représenté du concept général $O(O_1, \dots, O_n)$ ».

3. Il est utile et simplificateur d'admettre dans la TMP l'Axiome que si P et Q sont 2 propositions équivalentes (au sens « s'entraînent mutuellement »), alors $\text{Non}P$ et $\text{Non}Q$ s'entraînent mutuellement.

On peut alors montrer que si P entraîne Q , alors $\text{Non}Q$ entraîne $\text{non}P$ (considérant que $(P$ et $Q)$ est équivalente à P).

4. Il est utile de définir une fonction d'un concept général D dans un concept général A , comme un concept général non-flou F pouvant représenter seulement des couples d'objets (D_0, A_0) , avec D_0 représenté de D et A_0 représenté de A , et tel que pour tout représenté D_0 de D , il existe un et un seul représenté de F de premier terme D_0 .

Résumé :

Dans un premier article ⁽¹⁾, nous avons exposé les bases d'une Théorie mathématique Platoniste, la Théorie de Logique Platoniste (TLP), en montrant comment par cette théorie on pouvait obtenir l'existence au sens Platoniste des concepts mathématiques de base ($\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$, les espaces vectoriels...)

Dans ce second article, on montre comment la TLP permet d'interpréter l'ensemble des théories mathématiques de façon Platoniste. On montre aussi que la TLP donne des justifications théoriques au Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction qui sont des Lemmes de la TLP, à la consistance des théories mathématiques classiques ainsi qu'à un Axiome fondamental admis dans le premier article.

Nous voyons donc dans ce second article que la TLP permet d'interpréter l'ensemble des mathématiques.

Mots clés : Logique - Platonisme - Principe du Tiers-exclu - Principe de Non-contradiction.

1.INTRODUCTION

Dans un article précédent ⁽¹⁾, on a exposé les bases d'une théorie mathématique Platoniste (la Théorie de Logique Platonicienne(TLP)), de logique et des fondations des mathématiques.

Dans cet article, nous montrons comment la TLP peut interpréter l'ensemble des mathématiques, en donnant une interprétation Platoniste à toutes les théories mathématiques classiques ainsi qu'aux propositions usuelles et aux démonstrations mathématiques. Nous verrons que cette interprétation est totalement nouvelle et qu'elle donne une justification théorique nouvelle aux Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction, qui sont admis dans les théories classiques de logique basées sur le formalisme. Elle donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques.

On rappelle l'Axiome fondamental de la TLP :

AXIOME 1.1 :

- a)Un *Espace mathématique Platonique* (l'EMP), existe.
- b)Les *objets mathématiques* existent dans l'EMP.

On rappelle et on donne les définitions suivantes :

DEFINITION 1.2 :

(i)D'après l'article ⁽¹⁾, on rappelle que si on a une définition $D(o)$, et qu' O_0 est un objet mathématique tel qu'on ait « $D(O_0)$ est vraie », on dira que « O_0 correspond à la définition $D(o)$ ». Si O_0 est un objet mathématique tel qu'on ait « Non (« $D(O_0)$ est vraie »), on dira que « O_0 ne correspond pas à la définition $D(o)$ ».

On dira que O est un *symbole associé à une définition* $D(o)$ si :

« O peut représenter un objet O_0 » signifie « O_0 correspond à $D(o)$ », et « O ne peut pas représenter O_0 » signifie « O_0 ne correspond pas à $D(o)$ ».

(ii)Un symbole O associé à une définition $D(o)$ sera un *concept existant associé* à $D(o)$ s'il existe au moins un objet mathématique O_0 correspondant à $D(o)$, et que donc O peut représenter au moins un objet existant.

On distingue 2 sortes de concepts :

-Un *concept particulier* O associé à une définition $D(o)$ peut représenter tout objet correspondant à $D(o)$ mais représente le même objet partout où il est utilisé.

-Un *concept général* associé à une définition $D(o)$ peut représenter tout objet correspondant à $D(o)$ quels que soient les objets représentés par des concepts particuliers définis avant $D(o)$.

(iv) On rappelle qu'une définition $D(o)$ est *non-floue* si tout objet existant O_0 ou bien correspond à $D(o)$ ou bien ne correspond pas à $D(o)$ ($D(o)$ *binnaire*) et si pour aucun objet existant O_0 on a « O_0 correspond à $D(o)$ » et « O_0 ne correspond pas à $D(o)$ » ($D(o)$ *cohérente*).

Il en résulte que si un concept O est associé à une définition $D(o)$ non-floue (On dira alors O *non-flou*), pour tout objet O_0 on a ou bien « O_0 peut être représenté par O » ou bien « O_0 ne peut pas être représenté par O », et pour aucun objet O_0 on a « O peut représenter O_0 » et « O ne peut pas représenter O_0 ». Il faut donc que O soit non-flou pour que le concept « peut représenter » ait sa signification intuitive. On a établi dans l'article ⁽¹⁾ l'existence du concept non-flou (O_1, \dots, O_n) , O_1, \dots, O_n étant des concepts non-flous. Si O_{10}, \dots, O_{n0} sont des objets simultanément représentés par les concepts O_1, \dots, O_n , le concept (O_1, \dots, O_n) représente la séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) .

On a vu dans l'article ⁽¹⁾ que pour qu'une définition $D(o)$ pouvait être associée à un concept général, si les seuls concepts particuliers utilisés par $D(o)$ pour définir o étaient définis dans $D(o)$ à partir de concepts généraux ou étaient eux-mêmes des concepts généraux. On a appelé *définition générale* une telle définition. On admettra que « un objet mathématique », « un ensemble », et « l'EMP » sont des concepts généraux non-flous.

On rappelle qu'on exprime une définition $D(o)$ sous la forme $D(o, O_1, \dots, O_n)$, O_1, \dots, O_n étant des concepts particuliers si $D(o)$ définit o en utilisant seulement les concepts particuliers O_1, \dots, O_n , des concepts généraux et des concepts définis dans $D(o)$ à partir de O_1, \dots, O_n (et les concepts primitifs relationnels usuels).

Si O_G est un concept général, la définition $D(o)$: « o appartient à O_G » signifie « o est identique à l'un des objets pouvant être représenté par O_G . Il est évident que si O_G est un concept non-flou, alors $D(o)$ est non-floue.

On a aussi la définition :

DEFINITION 1.3 :

Si O est un symbole associé à une définition $D(o, O_1, \dots, O_n)$, O est un concept non-flou si : (i) O_1, \dots, O_n sont des concepts non-flous.

(ii) Pour tout (O_{10}, \dots, O_{n0}) pouvant être représentée par (O_1, \dots, O_n) :

- $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$ est non-floue.

- Il existe au moins un objet O_0 telle qu'on ait $D(O_0, O_{10}, \dots, O_{n0})$.

On dira alors que O est *un concept non-flou défini en fonction* de (O_1, \dots, O_n) , (ou de O_1, \dots, O_n) et on pourra écrire O sous la forme $O(O_1, \dots, O_n)$, avec si (O_{10}, \dots, O_{n0}) est représenté par (O_1, \dots, O_n) , $O(O_1, \dots, O_n)$ est le concept associé à $D(o, O_{10}, \dots, O_{n0})$.

Dans le cas général, on a des définitions du type $D(o_1, \dots, o_i)$, et alors seules les séquences de i objets existants (O_{10}, \dots, O_{i0}) peuvent correspondre à $D(o_1, \dots, o_i)$.

Dans l'article ⁽¹⁾, on a établi l'existence de concepts non-flous pouvant être identifiés avec \mathbf{N} , \mathbf{Q} .

2. THEORIE DE LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS

DEFINITION 2.1 :

a) Une *relation d'ordre de multiplicité* n est un lien qui peut exister ou ne pas exister entre les termes d'une séquence de n objets mathématiques existants (o_1, \dots, o_n) .

b) Si R est une relation d'ordre de multiplicité n et (o_1, \dots, o_n) est une séquence de n objets :

- La notation $R(o_1, \dots, o_n)$ signifiera que la relation R existe entre les termes de la séquence.

- La notation $\text{Non}(R(o_1, \dots, o_n))$ signifiera que la relation R n'existe pas entre les termes de la séquence.

AXIOME 2.2 :

On admettra qu'« une relation d'ordre de multiplicité n » est un concept général non-flou.

DEFINITION 2.3 :

a) Une relation R d'ordre de multiplicité n est *cohérente* s'il n'existe pas de séquence (o_1, \dots, o_n) d'objets existants tels qu'on ait $R(o_1, \dots, o_n)$ et $\text{Non}(R(o_1, \dots, o_n))$.

b) Une relation R d'ordre de multiplicité n est *binnaire* si pour toute séquence (o_1, \dots, o_n) d'objets existant on a ou bien $R(o_1, \dots, o_n)$ ou bien $\text{Non}(R(o_1, \dots, o_n))$.

c) Une relation R d'ordre de multiplicité n est *non-floue* si elle est binaire et cohérente.

REMARQUE 2.4 :

Une relation peut être d'ordre de multiplicité 1. Par exemple la relation R « est identique à », telle que $R(o)$ signifie « o est identique à o » est d'ordre de multiplicité 1. C'est aussi le cas si $R(o)$ exprime une relation entre o et l'EMP, ou entre o et des objets mathématiques complètement définis.

DEFINITION 2.5 :

Si R_1, \dots, R_k sont k relations d'ordre de multiplicité $n(1), \dots, n(k)$, on peut définir une *relation composée de R_1, \dots, R_k* $R_{(R_1, \dots, R_k)}$ d'ordre de multiplicité n_c (n_c naturel) telle que :

(i) $R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c})$, définie pour toute séquence d'objets (o_1, \dots, o_{n_c}) , signifie qu'on a k relations entre objets $R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)})$, ou pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$ et tout j dans $\{1, \dots, n(i)\}$, o_{ij} est un terme de la séquence (o_1, \dots, o_{n_c}) (Le choix de chaque o_{ij} définissant $R_{(R_1, \dots, R_k)}$).

(ii) Tout terme de la séquence (o_1, \dots, o_{n_c}) est utilisé dans une relation entre objets $R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)})$.

(iii) $\text{Non}(R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c}))$ signifie que pour au moins un i de $\{1, \dots, k\}$, on a $\text{Non}(R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)}))$.

LEMME 2.6 :

Si R_1, \dots, R_k sont des relations non-floues d'ordre de multiplicité $n(1), \dots, n(k)$, alors toute relation composée de R_1, \dots, R_k $R_{(R_1, \dots, R_k)}$ est non-floue.

Preuve :

On suppose donc R_1, \dots, R_k sont non-floues, et on conserve les notations de la Définition 2.5.

Si $R_{(R_1, \dots, R_k)}$ n'est pas binaire, il existe une séquence (o_1, \dots, o_{n_c}) telle qu'on ait ni $R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c})$ ni $\text{Non}(R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c}))$.

Le fait qu'on n'ait pas $R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c})$ signifie d'après la Définition 2.5(iii) que pour au moins une séquence $(o_{i1}, \dots, o_{in(i)})$ on n'a pas $R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)})$.

Le fait qu'on n'ait pas $\text{Non}(R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c}))$ signifie que pour aucun h dans $\{1, \dots, k\}$ on a $\text{Non}(R_h(o_{h1}, \dots, o_{hn(h)}))$.

Or ceci entraîne qu'on a ni $R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)})$ ni $\text{Non}(R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)}))$ ce qui est impossible puisque R_i est binaire.

Si $R_{(R_1, \dots, R_k)}$ n'est pas cohérente, il existe donc une séquence d'objets (o_1, \dots, o_{n_c}) telle qu'on ait $R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c})$ et $\text{Non}(R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c}))$.

En procédant comme précédemment, on obtient alors l'existence dans $\{1, \dots, k\}$ d'un i tel qu'on ait $R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)})$ et $\text{Non}(R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)}))$ ce qui est impossible puisque R_i est cohérente.

Donc on obtient donc que $R_{(R_1, \dots, R_k)}$ est cohérente et binaire et non-floue.

On remarque que même si on avait choisi dans la définition de $R_{(R_1, \dots, R_k)}$ au lieu de (iii) que pour avoir $\text{Non}(R_{(R_1, \dots, R_k)}(o_1, \dots, o_{n_c}))$ il soit nécessaire que pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$ ou bien $R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)})$ ou bien $\text{Non}(R_i(o_{i1}, \dots, o_{in(i)}))$, on aurait aussi obtenu que $R_{(R_1, \dots, R_k)}$ est non-floue si R_1, \dots, R_k sont non-floues.

On remarque qu'on a défini une relation composée du type « $R_1(\dots)$ et $R_2(\dots)$ et $R_k(\dots)$ ». « et » concept primitif ayant son sens habituel. On aurait pu de la même façon définir des relations composées du type « $R_1(\dots)$ ou \dots ou $R_k(\dots)$ », « ou » concept primitif habituel et $(\text{Non}(R_i))(\dots)$. On obtient de la même façon que dans le Lemme 2.6 que si R_1, \dots, R_k sont non-floues, alors ces relations composées sont non-floues. Il en sera de même pour les relations composées générales, obtenues à l'aide des concepts « ou », « et », « Non ».

DEFINITION 2.7 :

a) R étant une relation d'ordre de multiplicité n , on dira qu'un concept général non-flou (c_1, \dots, c_n) représentant des séquences de n objets est une *base de R* , si pour que o_1, \dots, o_n étant n objets R puisse exister (mais n'existe pas forcément) entre les termes de (o_1, \dots, o_n) , il soit nécessaire que (o_1, \dots, o_n) puisse être représenté par (c_1, \dots, c_n) .

b) on considèrera que toute relation R de multiplicité n a une base unique, qui définit partiellement R . Si R peut exister entre les objets de toute séquence d'objets (o_1, \dots, o_n) , alors on pourra considérer que (c_1, \dots, c_n) est le concept général associé à $D(o_1, \dots, o_n)$: « (o_1, \dots, o_n) appartient au concept « objet mathématique » chaque concepts ci est associé à la définition $D(o)$: « o est un objet mathématique existant dans l'EMP. »

REMARQUE 2.8 :

Par exemple on peut considérer que la relation R : « est élément de » a pour base (c_1, c_2) où c_1 est associé à « o est un objet mathématique et o est différent de l'EMP » et c_2 est associé à « o est un ensemble ».

DEFINITION 2.9 :

a) On appellera *proposition élémentaire Platoniste stable de type relation* une expression P du type $P : R(O_1, \dots, O_n)$ telle que :

- (i) R soit une relation non-floue d'ordre n .
- (ii) O_1, \dots, O_n soient des concepts existants non-flous (associés à des définitions).
- (iii) (O_1, \dots, O_n) est un concept existant *inclus* dans la base (c_1, \dots, c_n) de R , c'est-à-dire toute séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) pouvant être représentée par (O_1, \dots, O_n) peut être représentée par (c_1, \dots, c_n) .

On dira alors que P exprime toute les relations entre objets $R(O_{10}, \dots, O_{n0})$, où (O_{10}, \dots, O_{n0}) peut être représentée par (O_1, \dots, O_n) . Le fait que O_1, \dots, O_n soit non-flous entraîne que (O_1, \dots, O_n) est non-flou, et donc « peut représenter » a son sens intuitif (voir 1.Introduction).

b) P étant une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation :

- (i) On dira que « P est vraie » si pour toute séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) pouvant être représentée par (O_1, \dots, O_n) , on a $R(O_{10}, \dots, O_{n0})$.
- (ii) On dira que « P est fausse » si pour au moins une séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) pouvant être représentée par (O_1, \dots, O_n) , on a $\text{Non}(R(O_{10}, \dots, O_{n0}))$.

c) Si P est une proposition Platoniste stable de type relation, on dira que la *négation* de P , notée $\text{Non}(P)$ est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, avec « $\text{Non}(P)$ vraie » signifie « P fausse » et « $\text{Non}(P)$ » fausse signifie « P vraie ».

d) On appellera *proposition élémentaire Platoniste instable* de type relation une expression P du type $P : R(O_1, \dots, O_n)$ telle que :

- (i) R soit une relation d'ordre n .
- (ii) $R(O_1, \dots, O_n)$ ne soit pas une proposition élémentaire Platoniste stable.

REMARQUE 2.10 :

Par exemple si on a une proposition élémentaire Platoniste de type relation $P : R(O_1, \dots, O_n)$, où O_1 ne peut représenter aucun objet, alors O_1 n'est pas un concept existant et donc P est instable. Il en est de même si R est floue ou si l'un des O_i est un concept flou.

On voit que si P est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, on peut considérer que $\text{Non}(P)$ l'est aussi, car « $\text{Non}(P)$ est vraie » exprime tout comme « P est vraie » des relations complètement définies entre des objets de l'EMP.

DEFINITION 2.11 :

a) On définit une *définition* D par la donnée d'un couple (i, n) , où i est un naturel non nul et n est supérieur ou égal à i , d'une relation R d'ordre de multiplicité n et d'une séquence (o_{i+1}, \dots, o_n) de $n-i$ objets. On dira alors qu'une séquence (o_1, \dots, o_i) correspond à la définition D si on a $R(o_1, \dots, o_n)$, et qu'une séquence d'objets (o_1, \dots, o_i) ne correspond pas à D si on a $\text{Non}(R(o_1, \dots, o_n))$ et de tout objet qui n'est pas une séquence de i objets mathématiques qu'il ne correspond pas à D . On appellera le couple (i, n) l'*ordre de multiplicité* de D , et on dira que R et la séquence (o_i, \dots, o_{i+1}) sont associées à D .

On représentera D par :

$$D(o_1, \dots, o_i) \\ R(o_1, \dots, o_{i+1}, \dots, o_n).$$

b) Avec les notations précédentes, on dira que D est *cohérente* si pour aucune séquence (o_1, \dots, o_i) on a (o_1, \dots, o_i) correspond à D et (o_1, \dots, o_i) ne correspond pas à D .

On dira que D est *binnaire* si pour aucune séquence (o_1, \dots, o_i) , on a ni (o_1, \dots, o_i) correspond à D ni (o_1, \dots, o_i) ne correspond pas à D .

On dira que D est *non-floue* si D est binaire et cohérente.

On montre facilement le Lemme suivant :

LEMME 2.12 :

Si on a une définition D associée à une relation non-floue R , alors D est non-floue.

On montre facilement ce Lemme, supposant d'abord que D n'est pas binaire ou n'est pas cohérente, et on obtient une séquence (o_1, \dots, o_n) contredisant que R soit binaire ou cohérente.

DEFINITION 2.13 :

a) On appelle *Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition (particulière)* une expression du type :

P_{Def} :

$D(O_1, \dots, O_i)$

$R(O_1, \dots, O_n)$

Telle que :

- (i) R soit une relation d'ordre de multiplicité $n > i$.
- (ii) O_{i+1}, \dots, O_n sont des concepts existants non-flous associés à des définitions.
- (iii) Si (c_1, \dots, c_n) est la base de R, (O_{i+1}, \dots, O_n) est un concept existant inclus dans (c_{i+1}, \dots, c_n) , c'est à dire toute séquence $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ peut être représentée par (c_{i+1}, \dots, c_n) , où (c_{i+1}, \dots, c_n) peut représenter toutes les séquences $(c_{i+10}, \dots, c_{n0})$ telles qu'il existe une séquence (c_{10}, \dots, c_{i0}) telle que (c_1, \dots, c_n) peut représenter (c_{10}, \dots, c_{n0}) .

On dira alors que P_{Def} exprime les définitions :

$D(O_{10}, \dots, O_{i0})$

$R(O_{10}, \dots, O_{n0})$

Où (O_{i+1}, \dots, O_n) peut représenter $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$.

b) On appellera *Proposition élémentaire Platoniste instable de type définition (particulière)* une expression du type :

P_{Def} :

$D(O_1, \dots, O_i)$

$R(O_1, \dots, O_n)$

Telle que R est une relation d'ordre de multiplicité n et P_{Def} ne soit pas une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition.

c) On appellera *Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition générale* une expression du type :

$P_{DefGen} : Def_{Gen}(O_G, O_P)$

Avec O_P est un concept particulier non-flou associé à une définition générale. Alors O_G est le concept général pouvant représenter tous les objets pouvant être représenté par O_P .

d) On appellera *Proposition élémentaire Platoniste instable de type définition générale* une expression du type :

$P_{DefGen} : Def_{Gen}(O_G, O_P)$

qui n'est pas une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition générale.

Concernant 2.13a(iii), on a vu que (c_1, \dots, c_n) était une base de R impliquait par définition que (c_1, \dots, c_n) était un concept général non-flou représentant des séquences de n éléments.

On peut donc considérer que (c_{i+1}, \dots, c_n) est le concept général associé à la définition non-floue générale $D(O_{i+1}, \dots, O_n)$:

(O_1, \dots, O_n) est le concept particulier associé à la définition $D(O_{c_1}, \dots, O_{c_n})$: « $(O_{c_1}, \dots, O_{c_n})$ appartient au concept (c_1, \dots, c_n) »

(O_{i+1}, \dots, O_n) est identique à (O_{i+1}, \dots, O_n) .

Dans la définition précédente O_{i+1}, \dots, O_n sont définis en fonction du concept (O_1, \dots, O_n) .

$D(O_{i+1}, \dots, O_n)$ est générale car elle définit (O_{i+1}, \dots, O_n) à partir du concept général (c_1, \dots, c_n) .

Dans la suite, on obtiendra des propriétés de propositions élémentaires Platonistes stables de type définition. Pour établir ces propriétés, on considèrera seulement des propositions élémentaires de type définition particulière, car ces propriétés sont évidentes ou n'ont pas d'intérêt pour les propositions élémentaires de type définition générale.

DEFINITION 2.14 :

Si on a une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition :

P_{Def} :

$D(O_1, \dots, O_i)$

$R(O_1, \dots, O_n)$.

a) On dira qu'une séquence (O_{10}, \dots, O_{i0}) correspond à la définition P_{Def} pour $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représenté par (O_{i+1}, \dots, O_n) , si on a $R(O_{10}, \dots, O_{n0})$.
On dira que (O_{10}, \dots, O_{n0}) ne correspond pas à la définition P_{Def} pour $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) , si on a $\text{Non}(R(O_{10}, \dots, O_{n0}))$.

b) On dira que P_{Def} est *cohérente* si pour aucune séquence $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) , il existe une séquence (O_{10}, \dots, O_{i0}) telle qu'on ait (O_{10}, \dots, O_{i0}) correspond à P_{Def} et (O_{10}, \dots, O_{i0}) ne correspond pas à P_{Def} pour $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) .

c) On dira que P_{Def} est *binnaire* si pour aucune séquence $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) , il n'existe une séquence (O_{10}, \dots, O_{i0}) telle qu'on ait ni (O_{10}, \dots, O_{i0}) ne correspond pas à P_{Def} ni (O_{10}, \dots, O_{i0}) correspond à P_{Def} , pour $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) .

d) On dira que P_{Def} est *non-floue* si on a P_{Def} est binaire et cohérente.

On montre alors sans difficulté, procédant comme pour le Lemme 2.12 le Lemme suivant:

LEMME 2.15 :

Toute proposition élémentaire Platoniste stable de type définition est non-floue.

Pour montrer ce Lemme, on suppose qu'une proposition élémentaire stable Platoniste de type définition n'est pas binaire ou cohérente, et on obtient alors une séquence pour laquelle la relation associée à la définition n'est pas binaire.

DEFINITION 2.16 :

Si on a une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition $P_{Def} : D(O_1, \dots, O_i), R(O_{i+1}, \dots, O_n)$:

a)(i) On dira que « P_{Def} est vraie » si pour toute séquence $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ pouvant être représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) , il existe au moins une séquence (O_{10}, \dots, O_{i0}) telle qu'on ait $R(O_{10}, \dots, O_{n0})$.

(ii) Si P_{Def} est vraie, on dira que (O_1, \dots, O_i) est le *concept associé à la définition P_{Def} de paramètres fixes O_{i+1}, \dots, O_n* , si pour $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) , (c'est-à-dire O_{i+10}, \dots, O_{n0} représentés simultanément par O_{i+1}, \dots, O_n), (O_1, \dots, O_i) représente l'un des objets (O_{10}, \dots, O_{i0}) tel qu'on ait $R(O_{10}, \dots, O_{n0})$. On dira alors que le concept (O_1, \dots, O_i) est défini *en fonction* du concept (O_{i+1}, \dots, O_n) (ou de O_1, \dots, O_n).

(iii) Si pour $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) il n'y a qu'une seule séquence (O_{10}, \dots, O_{i0}) , on dira que (O_1, \dots, O_i) est défini *uniquement* en fonction de (O_{i+1}, \dots, O_n) .

b) On dira que « P_{Def} est fausse » s'il existe une séquence $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ pouvant être représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) telle qu'il n'existe aucune séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) telle qu'on ait $R(O_{10}, \dots, O_{n0})$.

c) De la même façon que pour une proposition élémentaire Platoniste de type relation, on définit et on note $\text{Non}(P_{Def})$ la négation d'une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition, avec « $\text{Non}(P_{Def})$ est vraie » signifie « P_{Def} est fausse » et « $\text{Non}(P_{Def})$ est fausse » signifie « P_{Def} est vraie ».

d) On dira que toute proposition élémentaire stable de type définition générale est vraie.

DEFINITION 2.17 :

a) On appelle *proposition Platoniste* P une séquence finie (P_1, \dots, P_k) de propositions élémentaires Platonistes, celles-ci pouvant utiliser des symboles représentant des objets correspondants à des définitions exprimées par des propositions élémentaires Platonistes de type définition parmi les propositions P_1, \dots, P_k . (Et donc des concepts définis par P_1, \dots, P_k).

b) Si P utilise des symboles représentant des objets associés à des définitions non définis par P_1, \dots, P_k , on dira que ceux-ci sont des *symboles prédéfinis* utilisés par P .

c) On dira qu'une proposition Platoniste $P : (P_1, \dots, P_k)$ est *stable* si P_1, \dots, P_k sont toutes stables, que P est *instable* si l'une des propositions P_1, \dots, P_k est instable, que P est *vraie* si P_1, \dots, P_k sont toutes vraies et que P est *fausse* si P est stable et qu'une des propositions P_1, \dots, P_k est fausse.

d) Si P est une proposition Platoniste stable, on définit la *négation* de P , notée $\text{Non}(P)$, telle que « $\text{Non}(P)$ est vraie » signifie « P est fausse », « $\text{Non}(P)$ est fausse » signifie « P est vraie ». On dira aussi que $\text{Non}(P)$ est une proposition Platoniste.

REMARQUE 2.18 :

a) D'après le Lemme 2.15, tout concept existant associé à une définition élémentaire Platoniste stable Platoniste est un concept non-flou, tel qu'on l'a défini dans le premier article et en introduction. En effet, s'il est défini en fonction de (O_{i+1}, \dots, O_n) , il existe pour tout $(O_{i+10}, \dots, O_{n0})$ représentée par (O_{i+1}, \dots, O_n) et de plus il est défini par une définition non-floue. Ceci est un résultat fondamental.

b) On voit que si $P(P_1, \dots, P_k)$ est stable, on peut exprimer $\text{Non}(P)$, utilisant le concept primitif « ou » par : « $\text{Non}(P_1)$ est vraie » ou..ou « $\text{Non}(P_k)$ est vraie ».

c) Il est évident que si on a la proposition « Pour tout O_1 concept associé à $D_1(o), \dots, O_n$ concept associé à $D_n(o)$, $R(O_1, \dots, O_n)$ », celle-ci peut être exprimée par la proposition élémentaire Platoniste, R étant une relation d'ordre de multiplicité n :

$P : R(O_1, \dots, O_n)$

Une proposition du type « Pour tout O_{i+1} concept associé à $D_1(o), \dots, O_n$ concept associé à $D_n(o)$, il existe des objets O_1, \dots, O_i tels qu'on ait $R(O_1, \dots, O_n)$ », R étant une relation peut être exprimée par la proposition élémentaire Platoniste de type définition:

$P : D(O_1, \dots, O_i)$

$R(O_1, \dots, O_n)$.

LEMME 2.19 :

a) Toute proposition élémentaire Platoniste stable est vraie ou fausse.

b) Aucune proposition élémentaire stable Platoniste n'est vraie et fausse.

c) Toute proposition élémentaire Platoniste est vraie ou n'est pas vraie.

d) Aucune proposition élémentaire Platoniste est vraie et n'est pas vraie.

Preuve :

Supposons qu'on ait une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation $P : R(O_1, \dots, O_n)$.

Si P est vraie et fausse, d'après la définition de telles propositions, on obtient l'existence d'une séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) telle qu'on ait $R(O_{10}, \dots, O_{n0})$ et $\text{Non}(R(O_{10}, \dots, O_{n0}))$.

ce qui est impossible puisque R est cohérente.

Si on a ni « P est vraie », ni « P est fausse », cela signifie que pour une séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) représentée par (O_1, \dots, O_n) on a $\text{Non}R(O_{10}, \dots, O_{n0})$ et que pour aucune séquence $(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ représentée par (O_1, \dots, O_n) on a $\text{Non}R(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ ce qui contredit $\text{Non}R(O_{10}, \dots, O_{n0})$ puisque R est binaire et est donc impossible.

On a donc montré a) et b) pour une proposition Platoniste stable de type relation.

En utilisant qu'une définition élémentaire stable Platoniste de type définition est non-floue, ou en procédant comme précédemment, on obtient que a) et b) sont aussi vrais pour une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition.

Par définition d'une proposition élémentaire Platoniste instable, toute proposition élémentaire Platoniste est ou bien stable ou bien instable. Toute proposition élémentaire Platoniste instable n'est pas vraie et d'après a) toute proposition élémentaire Platoniste stable est ou bien vraie ou bien n'est pas vraie.

On obtient donc c).

Si une proposition élémentaire Platoniste est vraie et n'est pas vraie alors elle est vraie et fausse ou elles est vraie et instable car toute proposition élémentaire Platoniste qui n'est pas vraie est fausse ou instable par définition. Or ceci est impossible d'après b) et parce qu'une proposition élémentaire Platoniste instable ne peut être vraie.

On a donc obtenu d).

LEMME 2.20 :

a) Toute proposition Platoniste stable est vraie ou fausse.

b) Toute proposition Platoniste stable ne peut être vraie et fausse.

c) Toute proposition Platoniste est vraie ou n'est pas vraie.

d) Aucune proposition Platoniste n'est vraie et n'est pas vraie.

Ce Lemme 2.20 est la conséquence immédiate du Lemme 2.19.

REMARQUE 2.21 :

On remarque qu'on pourrait appeler le a) des Lemmes 2.19 et 2.20 *Principes du Tiers exclu* pour les propositions élémentaires Platonistes stables et les propositions Platonistes stables et le c) des Lemmes 19 et Lemme 20 les Principes du tiers exclu pour les Propositions élémentaires Platonistes et les propositions Platonistes.

On pourrait aussi appeler le b) des Lemmes 2.19 et 2.20 *Principes de Non-contradiction* pour les propositions élémentaires Platonistes stables et les propositions Platonistes stables, et le d) des Lemmes 19 et Lemme 20 Principes de non-contradiction pour les propositions élémentaires Platonistes et les propositions Platonistes.

Cependant, ces Principes ne sont plus admis axiomatiquement comme dans les théories mathématiques de logique formelle, mais sont des Lemmes qui sont déduits des axiomes de la TLP. Nous adopterons pour eux les dénominations précédentes.

DEFINITION 2.22 :

(a) On appelle « *ensemble de symboles Platonistes* » un sous-ensemble fini S de \mathbf{Q}^2 (dont on a établi l'existence dans l'article ⁽¹⁾, dont l'ensemble vide appelé *symbole « blanc »*. Les éléments de S seront appelés *symboles* de S .

(b) On appellera *symbole composé* de S une séquence finie de symboles de S , qui peut contenir le symbole blanc.

DEFINITION 2.23 :

(a) S étant un ensemble de symboles Platonistes, on appelle *proposition sur S* une séquence finie de symboles de S , commençant et finissant par le symbole blanc.

(b) Si on a une proposition sur S $P(s_1, \dots, s_n)$, on dira pour toute séquence de k symboles successifs de P (s_j, \dots, s_{j+k-1}) telle que s_{j-1} et s_{j+k} soient les symboles blancs que P utilise le *symbole composé* (s_j, \dots, s_{j+k-1}) .

DEFINITION 2.24 :

(a) S étant un ensemble de symboles Platonistes, on appelle *Texte sur S* , une séquence finie de propositions sur S .

(b) Si $T(P_1, \dots, P_n)$ et $T'(Q_1, \dots, Q_r)$ sont des textes sur S , on pourra noter (T, Q_1, \dots, Q_r) ou (T, T') le texte $(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_r)$.

(c) Si on a un Texte $T(P_1, \dots, P_n)$, on pourra noter une proposition P_i de ce texte $P_i(T)$, car elle est définie uniquement en fonction de T et de i , avec i naturel et $0 < i < n+1$.

DEFINITION 2.25 :

On appelle *code Platoniste* C un couple (S, R_C) , S étant un concept non-flou pouvant représenter un unique ensemble de symboles Platonistes et R_C étant un concept non-flou représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 telle que :

(i) R_C peut exister ou bien entre une proposition P_i d'un texte sur S $T : (P_1, \dots, P_n)$ et une proposition Platoniste utilisant des symboles de S , notée $Pl_C(P_i)$, (Il peut donc exister plusieurs $Pl_C(P_i)$ possibles. On omettra le symbole « C » de Pl_C s'il n'y a qu'une seule code), ou bien entre P_i et l'ensemble vide, on écrira alors $Pl_C(P_i)$ est l'ensemble vide.

On dira alors que $Pl_C(P_i)$ est une *signification Platoniste de la proposition P_i* du texte T dans le code C . On dira que P_i a une *signification Platoniste vide* si $Pl_C(P_i)$ peut être l'ensemble vide.

$-Pl_C(P_i)$ représente toujours au moins un objet mathématique.

On considère donc que, $Pl(P_i)$ utilisant des objets mathématiques comme symboles, on peut la considérer comme pouvant représenter des objet mathématique. De plus, le fait que $P_i(T)$ est un concept non-flou et que R_C est non-floue entraîne que $Pl_C(P_i(T))$ est un concept non-flou.

(ii) C a la *propriété de linéarité*, c'est-à-dire que dans un texte sur S $T(P_1, \dots, P_n)$, $Pl(P_i)$ ne dépend que de P_i et des $Pl(P_j)$, avec $j < i$, et suppose que tous ces $Pl(P_j)$ sont vrais, pour $j < i$.

(iii) Pour que $Pl(P_i)$ soit différent de l'ensemble vide, il faut que :

- P_i utilise seulement ou bien des symboles composés définis en fonctions d'autres symboles composés appartenant à des propositions du texte T précédant P_i ou bien des symboles composés appelés *concepts primitifs du code C*, ces concepts primitifs dépendant de R_C .

-Tous les symboles composés utilisés dans le texte T qui ne sont pas des concepts primitifs soient définis dans des définitions élémentaires Platonistes de significations Platonistes $Pl(P_j)$ de propositions de T avec $j < i+1$.

(D'après ce qui précède, un symbole composé (s_j, \dots, s_{j+k}) d'une proposition P_i peut lui-même contenir des symboles composés. Il suffit cependant que seul (s_j, \dots, s_{j+k}) soit associé à une définition pour que P_i puisse l'employer en pouvant avoir une signification non vide).

(iv) Si on a dans un texte $T(P_1, \dots, P_n)$ on dira que les significations Platonistes $Pl(P_i)$ d'une proposition P_i de T sont équivalentes (dans le code C) si, $Pl_1(P_i)$ et $Pl_2(P_i)$ étant 2 significations Platonistes quelconques de P_i dans T , on a :

-Si $Pl_1(P_i)$ est vide ou une proposition Platoniste instable, alors $Pl_2(P_i)$ est vide ou une proposition Platoniste instable . On dira alors que $P_i(T)$ est *instable*.

-Si $Pl_1(P_i)$ est une proposition Platoniste stable alors $Pl_2(P_i)$ est une proposition Platoniste stable. On dira alors que $P_i(T)$ est *stable*.

-Si $Pl_1(P_i)$ est stable, alors les relations exprimées par « $Pl_1(P_i)$ vraie » (qui sont complètement définies) entraînent les relations exprimées par « $Pl_2(P_i)$ vraie », qui sont elles aussi complètement définies.

Et donc « $Pl_1(P_i)$ vraie » entraîne « $Pl_2(P_i)$ vraie ». Si c'est le cas, on dira $P_i(T)$ est *vraie*.

Supposant que les propriétés précédentes sont valides pour tout $Pl_1(P_i)$ et tout $Pl_2(P_i)$, on obtient donc la réciproque. « entraîne » est un concept primitif ayant son sens usuel.

(v) C étant un code Platoniste, on admettra par définition d'un code Platoniste que si on a un Texte $T(P_1, \dots, P_n)$ et que dans T P_1, \dots, P_{i-1} sont vraies dans C , alors les significations Platonistes de P_i dans T sont équivalentes. (On rappelle que $Pl(P_i)$ est obtenu en supposant $Pl(P_1), \dots, Pl(P_{i-1})$ vraies)

On doit donc supposer que toutes les P_1, \dots, P_{i-1} sont vraies pour déterminer si P_i est instable , stable ou vraie car sinon les significations Platonistes $Pl(P_i)$ de P_i ne sont pas forcément équivalentes. Et donc si on écrit que P_i est vraie, stable ou instable dans (P_1, \dots, P_n) , cela signifiera par définition que P_1, \dots, P_{i-1} sont vraies.

(vi) $T(P_1, \dots, P_n)$ étant un texte avec P_1, \dots, P_{i-1} vraies , si P_i est stable, $Pl_1(P_i)$ et $Pl_2(P_i)$ étant 2 significations Platonistes de P_i dans $T(P_1, \dots, P_n)$ (et donc stables d'après (iv)), si P_i emploie un symbole composé (O_1, \dots, O_i) défini par $Pl_1(P_i)$ en fonction des symboles O_{i+1}, \dots, O_n qui sont des symboles composés utilisés dans le texte (P_1, \dots, P_i) (et donc d'après (iii) associés à des définitions élémentaires Platonistes de certains $Pl(P_j)$ pour $j < i+1$) , alors (O_1, \dots, O_i) est aussi défini par $Pl_2(P_i)$ en fonction de (O_{i+1}, \dots, O_n) et de plus, supposant $Pl_1(P_i)$ vraie (et donc d'après (iv) $Pl_2(P_i)$ vraie), alors tout objet $(O_{i_0}, \dots, O_{i_0})$ pouvant être représenté par (O_1, \dots, O_i) , (O_{i+1}, \dots, O_n) représentant $(O_{i+1_0}, \dots, O_{n_0})$ d'après $Pl_1(P_i)$ peut l'être aussi d'après $Pl_2(P_i)$.

Le (vi) signifie donc que les définitions de symboles composés utilisés dans le Texte (P_1, \dots, P_i) sont équivalentes dans $Pl_1(P_i)$ et $Pl_2(P_i)$.

DEFINITION 2.26 :

Soit $C(S, R_C)$ un code Platoniste, et P_i une proposition d'un texte (P_1, \dots, P_n) .

a) Si P_i est stable et n'est pas vraie, on dira que P_i est *fausse*, ce qui équivaut donc à $P_i(T)$ stable et $Pl(P_i(T))$ fausse.

b) On désignera par « *Non* » un symbole composé employé par un code C , tel que, si P_i est une proposition stable d'un Texte (P_1, \dots, P_n) (Et donc avec P_1, \dots, P_{i-1} vraies), alors dans le texte $(P_1, \dots, Non(P_i), \dots, P_n)$, $Non(P_i)$ est stable et a pour signification Platoniste $Non(Pl(P_i))$.

D'après la définition de la négation d'une proposition Platoniste, on a alors « P_i est vraie » signifie « $Non(P_i)$ est fausse » et « P_i est fausse » signifie « $Non(P_i)$ est vraie ».

Une conséquence du Lemme 2.20 est le Lemme :

LEMME 2.27 :

Si on a une proposition P_i d'un texte $T(P_1, \dots, P_n)$ dans un code C :

- a) Si P_i est stable, P_i est vraie ou fausse.
- b) Si P_i est stable, P_i ne peut être vraie et fausse.
- c) P_i est vraie ou n'est pas vraie.
- d) On ne peut avoir P_i est vraie et P_i n'est pas vraie.

On voit que le Lemme 2.27 peut être considéré comme le Principe du Tiers exclu (avec 2 expressions possibles) et le Principe de Non-contradiction (avec 2 expressions possibles) pour les propositions dans la Théorie Platoniste.(TPL). Cependant, dans cette théorie ce sont des Lemmes justifiés théoriquement et conséquences des Axiomes de la TPL, alors qu'ils sont admis axiomatiquement dans les théories mathématiques de logique formelle.

DEFINITION 2.28 :

(S, R_C) étant un code Platoniste, on dira qu'un texte $T(P_1, \dots, P_n)$ est vrai (dans C) si pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ $P_i(T)$ est vraie.

REMARQUE 2.29 :

- a) Une proposition P_i d'un texte T étant un objet mathématique, on peut considérer que « est vraie » utilisé dans « $P_i(T)$ est vraie », exprime une relation entre $P_i(T)$, le code Platoniste C et l'EMP. Cette relation est non-floue d'après les Principes du Tiers exclu et de Non-contradiction du Lemme 2.27. Il en est de même dans « est vraie » utilisée dans « $Pl(P_i(T))$ est vraie ».
- b) Une conséquence immédiate du Lemme 2.27, est que dans un code C , tout texte T est ou bien vrai ou bien n'est pas vrai, et ne peut pas être vrai et n'être pas vrai.

DEFINITION 2.30 :

(S, R_C) étant un code Platoniste C , T étant un texte (P_1, \dots, P_n) , on dira que Q est une *déduction logique (relationnelle)* de $T(P_1, \dots, P_n)$ si on a d'après les relations exprimées par $Pl(P_1), \dots, Pl(P_n)$: « Q est vraie dans (P_1, \dots, P_n, Q) », et donc $Pl(P_1), \dots, Pl(P_n)$ vraies entraînent que $Pl(Q)$ est vraie dans ce texte .

REMARQUE 2.31 :

On voit d'après la définition 2.25 (v) que si Q est déduction logique de $T(P_1, \dots, P_n)$, alors (P_1, \dots, P_n) doit être un texte vrai, puisque Q est vraie.

Le concept primitif de *déduction logique relationnelle* est important car c'est toujours cette sorte de déduction logique qui est utilisé en mathématique.

DEFINITION 2.32

(S, R_C) étant un code Platoniste, et $T(P_1, \dots, P_n)$ un texte sur S , on dira que (Q_1, \dots, Q_k) est une démonstration sur T (dans C) si Q_1 est déduction logique de T (Ce qui suppose que T est un texte vrai), et pour tout i dans $\{2, \dots, k\}$, Q_i est déduction logique de (T, \dots, Q_{i-1}) .

D'après la définition d'une déduction logique donnée en 2.30, on a alors (T, Q_1, \dots, Q_k) est un texte vrai.

On peut cependant dans certains cas utiliser dans un texte T des propositions qui ne sont pas vraies:

DEFINITION 2.33

Si T est un texte (P_1, \dots, P_n) , on peut utiliser un concept dans le code C , noté « On suppose », qui a la définition suivante :

- (i) Si Q_i est stable dans $(P_1, \dots, P_{i-1}, Q_i)$ (Et donc on a alors (P_1, \dots, P_{i-1}) vrai), alors P_i : « On suppose Q_i » est vraie dans (P_1, \dots, P_i) .
- (ii) Il existe (un unique) $k > i$, telle que P_k est la proposition « On ne suppose plus Q_i » qui est vraie. (On considère le cas où pour $i < j < k$, P_j n'est pas de la forme P_j : « On suppose Q_j »)
- (iii) Pour $i < j < k$, P_j est telle que si dans le Texte $(P_1, \dots, Q_i, \dots, P_j)$, Q_i, \dots, P_{j-1} sont vraies, alors P_j est vraie dans (P_1, \dots, P_j) . (Et donc « $Pl(P_j)$ vraie » est entraînée par « $Pl(P_1)$ vraie », ..., « $Pl(Q_i)$ vraie », ..., « $Pl(P_{j-1})$ vraie »). On dira que P_j est une *déduction logique relationnelle conditionnelle* de (P_1, \dots, P_{j-1}) .
- (iv) Pour $j > k$, on ne tient plus compte des propositions P_i, \dots, P_k pour obtenir $Pl(P_j)$ et déterminer si P_j est vraie, stable ou instable, mais seulement des propositions $P_1, \dots, P_{i-1}, P_{k+1}, \dots, P_{j-1}$.

LEMME 2.34 :

Si on a un texte $T(P_1, \dots, P_n)$ et on a la proposition P_i : « On suppose Q_i », Q_i étant une proposition stable dans $(P_1, \dots, P_{i-1}, Q_i)$, alors avec les notations de la Définition 2.33, si on obtient une déduction logique conditionnelle P_j (donc avec $i < j < k$) de (P_1, \dots, P_{j-1}) telle qu'on ait une signification Platoniste $Pl(P_j)$ qui ne soit pas vraie (et donc fausse ou instable), alors Q_i n'est pas vraie dans (P_1, \dots, Q_i) , et donc $Non(Q_i)$ est vraie dans $(P_1, \dots, Non(Q_i))$.

Preuve :

Il résulte de la Définition 2.33 d'une déduction logique conditionnelle que si Q_i est vraie dans (P_1, \dots, Q_i) , alors P_{i+1}, \dots, P_{k-1} sont vraies dans le Texte (P_1, \dots, P_{k-1}) (Car Q_i est vraie entraîne P_{i+1} vraie..qui entraîne P_{k-1} vraie). Et donc si on obtient $Pl(P_j)$ qui n'est pas vraie pour $i < j < k$, on n'a pas P_j est vraie dans le Texte (P_1, \dots, P_k) , et donc il est impossible que Q_i soit vraie dans (P_1, \dots, Q_i) . Donc d'après la Principe du Tiers exclu, Q_i n'est pas vraie dans (P_1, \dots, Q_i) , et donc Q_i étant stable, $Non(Q_i)$ est vraie dans $(P_1, \dots, Non(Q_i))$

REMARQUE 2.35 :

a) Si on obtient $Pl(P_j)$ n'est pas vraie avec $i < j < k$, alors $Non(Q_i)$ peut être considérée comme déduction logique relationnelle de (P_1, \dots, P_{i-1}) . On prendra donc en général $P_{k+1} : Non(Q_i)$, et pour $h > k+1$, les P_h seront déductions logiques relationnelles de $(P_1, \dots, P_{i-1}, P_{k+1}, \dots, P_{h-1})$.

b) On remarque que les significations Platonistes de P_j ne sont plus forcément équivalentes entre elles pour $i < j < k$. En effet, si Q_i n'est pas vraie, la définition du code Platoniste n'entraîne plus que les P_j doivent avoir des significations Platonistes équivalentes pour $i < j < k$. Et donc il peut être nécessaire de choisir arbitrairement $Pl(P_{i+1}), \dots, Pl(P_{k-1})$, P_j étant déduction logique conditionnelle de P_1, \dots, P_{j-1} . Alors on détermine $Pl(P_j)$ en supposant vrais les $Pl(P_{i+1}), \dots, Pl(P_{j-1})$ choisis arbitrairement. Il suffit que pour un seul choix de $Pl(P_{i+1}), \dots, Pl(P_{j-1})$ on trouve qu'une signification Platoniste de $Pl(P_j)$ de P_j n'est pas vraie, pour qu'on obtienne que Q_i n'est pas vraie dans (P_1, \dots, Q_i) .

c) On aurait pu aussi définir de façon analogue à la définition 2.33 des preuves par l'absurde imbriquées, c'est-à-dire par exemple dans un texte (P_1, \dots, P_n) :

P_i : On suppose Q_i , P_{i+1} : On suppose Q_{i+1} , P_{i+2} : On suppose Q_{i+2} , avec

$P_{h(i)}$: On ne suppose plus Q_i , $P_{h(i+1)}$: On ne suppose plus Q_{i+1} , $P_{h(i+2)}$: On ne suppose plus Q_{i+2} avec $i+2 < h(i) < h(i+1) < h(i+2)$.

RELATIONS FONDAMENTALES 2.36 :

On peut obtenir des relations non-floues de la façon suivante :

(O_1, \dots, O_n) étant un concept général non-flou (représentant des séquences de n objets), on peut définir dans certains cas pour toute séquence (O_{10}, \dots, O_{n0}) pouvant être représentée par (O_1, \dots, O_n) une proposition Platoniste $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$.

On dira alors qu'on a une proposition Platoniste $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ définie *en fonction* de (O_1, \dots, O_n) .

On peut alors définir la relation R_P de base (O_1, \dots, O_n) et telle que $R_P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ signifie « $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie » et $Non(R_P(O_{10}, \dots, O_{n0}))$ signifie « $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ n'est pas vraie ».

D'après les Principes de Non-contradiction et du Tiers exclu pour les propositions Platonistes, on obtient facilement que R_P est non-floue.

Si on a 2 propositions $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ et $Q(O_{10}, \dots, O_{n0})$ définies en fonction de (O_1, \dots, O_n) , il est utile de considérer la relation $R_{C(P,Q)}$ de base (O_1, \dots, O_n) et telle que $R_{C(P,Q)}(O_{10}, \dots, O_{n0})$ signifie « « $Q(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie » ou « $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ n'est pas vraie » » (Ce qu'on peut écrire aussi « $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie » entraîne « $Q(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie ») et « $NonR_{C(P,Q)}(O_{10}, \dots, O_{n0})$ signifie « $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est vraie et $Q(O_{10}, \dots, O_{n0})$ n'est pas vraie ».

$R_{C(P,Q)}$ est non-floue comme composée de relations non-floues.

O'_1, \dots, O'_n étant n symboles associés à des définitions, on notera alors $Cond(P(O'_1, \dots, O'_n), Q(O'_1, \dots, O'_n))$ la proposition élémentaire Platoniste $R_{C(P,Q)}(O'_1, \dots, O'_n)$ définie précédemment.

Elle est donc stable si O'_1, \dots, O'_n sont des concepts non-flous inclus dans O_1, \dots, O_n , et elle est vraie si on a pour tout $(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ pouvant être représenté par (O'_1, \dots, O'_n) $P(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$ entraîne $Q(O'_{10}, \dots, O'_{n0})$.

On définit aussi $Eq(P(O'_1, \dots, O'_n), Q(O'_1, \dots, O'_n))$ comme la proposition Platoniste « $Cond(P(O'_1, \dots, O'_n), Q(O'_1, \dots, O'_n))$ et $Cond(Q(O'_1, \dots, O'_n), P(O'_1, \dots, O'_n))$ ».

Dans la définition d'une proposition Platoniste $P(O_{10}, \dots, O_{n0})$ définie pour O_1, \dots, O_n fixés représentant O_{10}, \dots, O_{n0} , on peut utiliser des propositions élémentaires Platonistes du type

Cond($Q(O'_{1,\dots,O'_k}), R(O'_{1,\dots,O'_k})$), mais dans $Q(O'_{1,\dots,O'_k})$ et $R(O'_{1,\dots,O'_k})$, si on utilise O_1,\dots,O_n , ceux-ci sont fixés et représentent $O_{10,\dots,O_{n0}}$.

Plus généralement si $Q(O_{GQ1},\dots,O_{GQn})$ est une proposition Platoniste définie en fonction de (O_{GQ1},\dots,O_{GQn}) et $R(O_{GR1},\dots,O_{GRp})$ est une proposition Platoniste définie en fonction de (O_{GR1},\dots,O_{GRp}) , on peut considérer la Proposition élémentaire Platoniste :

Cond($Q(O_{Q1},\dots,O_{Qn}), R(O_{R1},\dots,O_{Rp})$).

Cette proposition élémentaire Platoniste est stable si O_{Q1},\dots,O_{Rp} sont des concepts non-flous avec (O_{Q1},\dots,O_{Qn}) est inclus dans (O_{GQ1},\dots,O_{GQn}) et (O_{R1},\dots,O_{Rp}) est inclus dans (O_{GR1},\dots,O_{GRp})

Pour (O_{Q1},\dots,O_{Rp}) représentant (O_{Q10},\dots,O_{Rp0}) , la proposition Platoniste précédente exprime la relation :
« $R(O_{R10},\dots,O_{Rp0})$ est vraie » ou « Non($Q(O_{Q10},\dots,O_{Qn0})$ est vraie ».

Si on a une définition $D(o,O_1,\dots,O_n)$, alors on peut considérer la définition élémentaire Platoniste :

Def(A)

$R(A,O_1,\dots,O_n)$: A est l'ensemble dont les éléments correspondent à la définition $D(o,O_1,\dots,O_n)$ de paramètres fixes O_1,\dots,O_n .

D'après le précédent article ⁽¹⁾, si $D(o,O_1,\dots,O_n)$ est basique et non-floue, alors A est un concept existant non-flou défini uniquement en fonction de O_1,\dots,O_n . La définition précédente est alors vraie.

REMARQUE 2.37 :

a) On voit dans cet article une justification théorique à l'Axiome 2.5 fondamental de l'article précédent ⁽¹⁾ permettant d'obtenir qu'une définition est non-floue. En effet, on a vu dans l'Axiome 2.5 de cet article qu'une relation R_p composée de relations non-floues était une relation non-floue, de même qu'une relation définie dans la section précédente en utilisant une proposition $P(O_1,\dots,O_n)$ définie en fonction de O_1,\dots,O_n . On a vu aussi dans le Lemme 2.15 que si on utilisait seulement des relations non-floues et des concepts non-flous, on définissait des concepts non-flous. Il en résulte que si on considère seulement les définitions obtenues en utilisant les relations élémentaires non-floues définies en utilisant les concepts primitifs relationnels usuels ainsi que les concepts non-flous comme l'ensemble vide, les ensembles, l'EMP, on obtiendra seulement des concepts non-flous (ou des symboles ne représentant aucun objet). C'est aussi le cas si utilisant des définitions non-floues, on obtient l'existence de concepts ensembles en utilisant l'Axiome 2.14 d'existence d'ensemble de l'article précédent ⁽¹⁾. On peut aussi pour chaque définition $D(o)$ l'exprimer explicitement en utilisant des relations et des concepts non-flous, et donc prouver théoriquement qu'elle est non-floue.

b) On remarque que d'après la Définition 2.14, si on a une définition élémentaire Platoniste vraie :

Def(O_1,\dots,O_i)

$R(O_1,\dots,O_n)$

Alors (O_1,\dots,O_i) est un concept existant non-flou associé à une définition non-floue $D(o_1,\dots,o_i,O_{i+1},\dots,O_n)$, qui peut s'écrire $R(o_1,\dots,o_i,O_{i+1},\dots,O_n)$.

c) Si on a un concept général non-flou (c_1,\dots,c_n) , on utilisera souvent la définition élémentaire Platoniste non-floue et vraie:

Def(O_1,\dots,O_n)

$R(O_1,\dots,O_n)$: (O_1,\dots,O_n) appartient au concept général (c_1,\dots,c_n) .

DEFINITION 2.38 :

On dira que O_A est une fonction-concept définie sur un concept général non-flou (c_1,\dots,c_n) si, (O_1,\dots,O_n) étant définis par :

Def(O_1,\dots,O_n)

$R(O_1,\dots,O_n)$: (O_1,\dots,O_n) appartient au concept (c_1,\dots,c_n) .

On a une définition non-floue du type $D_A(o,O_1,\dots,O_n)$ telle que O_A soit un concept particulier existant associé à $D_A(o,O_1,\dots,O_n)$.

(c_1,\dots,c_n) et $D_A(o,O_1,\dots,O_n)$ définissent donc la fonction-concept O_A .

Alors si (O_{10}, \dots, O_{n0}) peut être représenté par (c_1, \dots, c_n) , $O_A(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est le concept associé à $D_A(o, O_1, \dots, O_n)$. On dira que $O_A(O_{10}, \dots, O_{n0})$ est l'*image* par la fonction-concept O_A de (O_{10}, \dots, O_{n0}) .

En général O_A sera défini uniquement en fonction de (O_1, \dots, O_n) .

Pour que O_A soit un concept associé à une définition non-floue $D_A(o, O_1, \dots, O_n)$, il suffit que O_A soit défini par une proposition Platoniste utilisant seulement les concepts particuliers O_1, \dots, O_n pour définir O_A , ainsi que des concepts particuliers obtenus à partir de O_1, \dots, O_n et de concepts généraux.

Par exemple, on peut considérer que F , défini sur le concept représentant tous les couples d'ensembles, et tel que $F(A, B)$ est l'ensemble des applications de A dans B est un concept-fonction. De même, (A, B) étant un couple d'ensemble, on peut considérer que $A \times B$ est l'image de (A, B) par une fonction-concept.

Nous allons maintenant donner des exemples illustrant les notions précédentes.

EXEMPLE 2.39 :

EXEMPLE 2.39A :

On peut par exemple donner la définition générale associée au concept général « équation dans \mathbf{R} » :

Def1(F)

R1(F, \mathbf{R}) : F est élément de $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. (Il est évident que $F(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est un concept général).

Def2(O_{eqR}) :

R(O_{eqR} , F) : O_{eqR} est identique à (Eq, F). (Ici « Eq » représente un couple de symboles déterminé).

On obtient immédiatement que F et O_{eqR} sont des concepts non-flous. Le concept général « une équation dans \mathbf{R} » peut représenter tous les objets pouvant être représentés par O_{eqR} . Il est donc non-flou. Il est défini par la proposition élémentaire Platoniste vraie de type définition générale :

Def_{Gen}(une équation dans \mathbf{R}, O_{eqR}).

EXEMPLE 2.39B :

On peut définir la fonction-concept Sol, sur le concept général « une équation dans \mathbf{R} », tel que si E est une équation dans \mathbf{R} , Sol(E) est l'ensemble des solutions de E.

Si E est défini par :

Def(E)

R(E) : E appartient au concept « une équation dans \mathbf{R} ».

Alors on définit le concept Sol par :

Def1(F)

R1(F, E) : (E est identique à (Eq, F))

Def2(Sol)

R2(Sol, F) : Sol est l'ensemble dont les éléments correspondent à la définition $D(x, F)$: « $F(x)=0$ ».

On obtient immédiatement que Sol est un concept non-flou associé à une définition du type $D(\text{Sol}, E)$, et donc on a bien défini une fonction-concept.

EXEMPLE 2.39C :

On supposera que les concepts « un groupe commutatif » et « un corps commutatif » sont des concepts généraux associés aux définitions usuelles de ces concepts. On peut obtenir une définition Platoniste de ces concepts totalement analogue à la définition Platoniste suivante d'un espace vectoriel.

On définit en effet le concept général « un espace vectoriel » par la Proposition Platoniste suivante Def_{EV}(O_{ev}):

Def_{EV}(O_{ev}) :

P_{EV}1: Def_{ev}1(E, +, K, +_K, ×, .)

P_{ev}1(E, +, K, +_K, ×, .)

$P_{EV2} : \text{Def}_{EV2}(O_{EV})$

$R_{EV2}(O_{EV}, E, +, \cdot) : O_{EV}$ est identique à $(E, +, \cdot)$

On aurait pu remplacer $R_{EV2}(O_{EV}, E, +, \cdot)$ par $R_{EV2}(O_{EV}, (E, +, K, +_K, \times, \cdot))$. O_{EV} est donc défini uniquement en fonction de $(E, +, \cdot)$, mais aussi de $(E, +, K, +_K, \times, \cdot)$.

P_{EV1} est une proposition Platoniste définie sur toute séquence de 6 objets $(E_0, +_0, K_0, +_{K0}, \times_0, \cdot_0)$ par :

$P_{EV1}(E_0, +_0, K_0, +_{K0}, \times_0, \cdot_0) :$

$P1 : \text{Def}1(E, +, K, +_K, \times, \cdot)$

$R1(E, +, K, +_K, \times, \cdot) : (E, +, K, +_K, \times, \cdot)$ est identique à $(E_0, +_0, K_0, +_{K0}, \times_0, \cdot_0)$

$P2 : R2(E, +) : (E, +)$ appartient au concept « un groupe commutatif ».

$P3 : R3(K, +_K, \times) : (K, +_K, \times)$ appartient au concept « un corps commutatif ».

$P4 : R4(\cdot, K, E) : \cdot$ est élément de $F(K \times E, E)$.

$P5 : \text{Def}5(x, y, \alpha, \beta) :$

$R5(x, y, \alpha, \beta, E, K) : (x, y)$ est élément de E^2 et (α, β) est élément de K^2 .

$P6 : R6(x, y, \alpha, \beta, +, K, +_K, \times, \cdot) : (1_K \cdot x$ est identique à x (1_K est l'élément neutre pour \times , qui existe toujours si $(K, +_K, \times)$ est un corps et peut donc être considéré comme l'image de $(K, +_K, \times)$ par une fonction-concept). et $((\alpha +_K \beta) \cdot x$ est identique à $\alpha \cdot x + \beta \cdot x$) et $\alpha \cdot (\beta \cdot x)$ est identique à $(\alpha \times \beta) \cdot x$) et $\alpha \cdot (x + y)$ est identique à $(\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$)

$P_{EV1}(E_0, +_0, K_0, +_{K0}, \times_0, \cdot_0)$ étant une proposition Platoniste, on peut considérer P_{EV1} comme une relation non-floue, et donc P_{EV1} définit un concept non-flou. Et donc O_{EV} est un concept non-flou, puisqu' on a vu dans le précédent article ⁽¹⁾ qu'il existait au moins un objet correspondant à la définition $\text{Def}_{EV}(O_{EV})$. Et donc « un espace vectoriel » est un concept général non-flou.

3. CONSISTANCE, COMPLETUDE ET PARADOXES

A) CONSISTANCE

On sait que toute théorie classique mathématique utilise des Axiome évidents. On peut modéliser mathématiquement une telle théorie par le TLP par les définitions suivantes :

DEFINITION 3.1 :

$C(S, R_C)$ étant un code Platoniste, on appelle *théorie mathématique Platoniste sur C* un couple (C, T_{AX}) , où T_{AX} est un texte vrai.

DEFINITION 3.2 :

(C, T_{AX}) étant une théorie mathématique Platoniste, on appelle *démonstration sur* (C, T_{AX}) tout texte sur S (P_1, \dots, P_n) telle que pour i dans $\{1, \dots, n\}$, P_i soit déduction logique relationnelle de $(T_{AX}, P_1, \dots, P_{i-1})$.

DEFINITION 3.3 :

On dira qu'une proposition Platoniste P_{p10} appartient à une *théorie mathématique Platoniste* (C, T_{AX}) s'il existe une démonstration (P_1, \dots, P_n) sur (C, T_{AX}) telle que P_{p10} soit équivalente à l'une des significations Platoniste $Pl(P_n)$ de P_n dans (T_{AX}, \dots, P_n) .

Une conséquence immédiate des définitions précédentes est le Lemme suivant de consistance :

LEMME 3.4 : (de consistance) :

a) Pour toute démonstration (P_1, \dots, P_n) sur une théorie (C, T_{AX}) , et pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, on a $Pl_C(P_i)$ est vraie. (Dans (T_{AX}, \dots, P_n)).

b) Toute proposition Platoniste P_{p10} appartenant à une théorie Platoniste est vraie.

c) Toute théorie mathématique Platoniste (C, T_{AX}) est consistante, c'est-à-dire qu'il est impossible d'obtenir 2 démonstrations (P_1, \dots, P_n) et (Q_1, \dots, Q_r) sur (C, T_{AX}) telle que $Pl(Q_r)$ (dans (T_{AX}, Q_r)) soit équivalente à $Non(Pl(P_n))$ (Pour P_n dans (T_{AX}, P_n)).

Preuve :

a) et b) sont la conséquence de la définition d'une déduction logique relationnelle.

Avec les hypothèses du c), on a d'après a) que $Pl(Q_r)$ est vraie et $Pl(P_n)$ est vraie (Q_r et P_n dans les textes considérés).

Donc $Non(Pl(P_n))$ est fausse, et donc puisque $Pl(Q_r)$ est équivalente à $Non(Pl(P_n))$, $Pl(Q_r)$ est vraie et fausse, ce qui est impossible d'après le Principe de non-contradiction des propositions Platonistes.

REMARQUE 3.5 :

Supposons qu'on ait k propositions Platonistes P_{p11}, \dots, P_{p1k} appartenant à une théorie mathématique Platoniste (C, T_{AX}) .

Il est souvent utile de considérer un texte $(T_{AX}, Q_1, \dots, Q_k)$, tel que dans ce texte, pour i dans $\{1, \dots, k\}$, Q_i ait pour signification Platoniste P_{pli} .

Il en résulte qu'on a alors dans le texte précédent Q_1, \dots, Q_k sont des propositions vraies et donc $(T_{AX}, Q_1, \dots, Q_k)$ est un texte vrai. De plus, on peut considérer que Q_i est déduction logique relationnelle de (T_{AX}, Q_{i-1}) (Puisque $Pl(Q_i)$ appartient à la théorie (C, T_{AX})).

Il en résulte, que pour toute démonstration (P_1, \dots, P_n) sur $(T_{AX}, Q_1, \dots, Q_k)$, P_n est vraie dans $(T_{AX}, Q_1, \dots, Q_k, P_1, \dots, P_n)$ et on peut considérer que $Pl(P_n)$ appartient à la théorie (C, T_{AX}) .

B) COMPLETUEDE

Pour étudier la complétude d'une théorie (C, T_{AX}) , on doit modéliser mathématiquement les déductions logiques relationnelles utilisées dans les théories mathématiques classiques. Dans ces théories, on utilise seulement celles qui sont « évidentes ». Il en résulte que seules certaines déductions logiques relationnelles peuvent être utilisées dans les démonstrations des théories mathématiques classiques. On doit les modéliser dans la TLP par des théories mathématiques Platonistes déductives :

DEFINITION 3.6 :

On appelle *théorie mathématique Platoniste déductive* un triplet (C, T_{AX}, R_D) , où (C, T_{AX}) est une théorie Platoniste et R_D est un concept non-flou représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité 2, qui peut exister entre une proposition P_n et un texte (P_1, \dots, P_{n-1}) , P_n étant toujours une déduction logique relationnelle de (P_1, \dots, P_{n-1}) . On dira alors que P_n est déduction logique de (P_1, \dots, P_{n-1}) dans la théorie Platoniste déductive (C, T_{AX}, R_D) .

On peut modéliser les théories classiques par des théories déductives, où R_D est telle que une déduction logique P_n de (P_1, \dots, P_{n-1}) dans (C, T_{AX}, R_D) est toute déduction logique relationnelle « évidente » de (P_1, \dots, P_{n-1}) . On peut aussi définir R_D à l'aide de règles de déduction analogues à celles utilisées dans les systèmes formels.

DEFINITION 3.7 :

On définit une *démonstration* sur une théorie Platoniste déductive, et qu'une proposition Platoniste appartient à une théorie Platoniste déductive de la même façon que pour une théorie Platoniste, en remplaçant « déduction logique relationnelle » par « déduction logique relationnelle dans la théorie déductive (C, T_{AX}, R_D) ».

On obtient alors pour une théorie déductive un *Lemme de consistance* totalement analogue au Lemme de consistance obtenu pour une théorie Platoniste.

On peut alors définir la complétude d'une théorie mathématique Platoniste déductive de la façon suivante :

DEFINITION 3.8 :

(C, T_{AX}, R_D) étant une théorie Platoniste déductive, on dira qu'une proposition Platoniste P_{p10} est *stable* dans (C, T_{AX}, R_D) s'il existe un texte (P_1, \dots, P_{n-1}) de propositions telles que dans ce texte, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, P_i est vrai et $Pl(P_i)$ appartient à (C, T_{AX}, R_D) , et qu'on ait une proposition P_n qui soit stable dans (P_1, \dots, P_n) , avec

$PI(P_n)$ équivalente à P_{p10} . (C'est-à-dire avec la définition donnée plus haut : $PI(P_n)$ stable entraîne P_{p10} stable (et réciproquement) et de plus « $PI(P_n)$ vraie » entraîne « P_{p10} vraie » (et réciproquement)).

DEFINITION 3.9 :

(C, T_{AX}, R_D) étant une théorie Platoniste déductive, on dira qu'elle est complète si pour toute proposition stable P_{p10} dans (C, T_{AX}, R_D) , ou bien P_{p10} appartient à (C, T_{AX}, R_D) ou bien $\text{Non}(P_{p10})$ appartient à (C, T_{AX}, R_D) .

A priori, il n'y a pas de raison qu'une théorie Platoniste déductive soit complète, puisque seules certaines déductions logiques relationnelles peuvent être utilisées pour obtenir des propositions Platonistes vraies appartenant à la théorie. Nous allons cependant dans la section suivante voir si le Théorème d'incomplétude de Godel obtenu pour les systèmes formels peut s'appliquer aux théories deductives Platonistes.

C) PARADOXES

Il est donc intéressant d'examiner si le théorème de Godel peut se généraliser aux théories mathématiques Platonistes deductives.

(C, T_{AX}, R_D) étant une théorie Platoniste déductive identifiée à une théorie classique, R_D ne permettant que les déductions logiques relationnelles évidentes, on considère la proposition :

P : « P n'est pas démontrable dans (C, T_{AX}, R_D) ».

Si on veut obtenir que P est vrai, procédant classiquement comme dans le Théorème de Godel, on suppose que P est fausse, alors P est démontrable, ce qui contredit P et est donc impossible, et donc P est vraie.

Cependant, cette démonstration est inacceptable pour justifier que P est vraie, car elle est une démonstration dans (C, T_{AX}, R_D) , n'utilisant que des déductions logiques évidentes, et donc si on l'accepte comme démonstration de P , P est contredite.

Donc P ne peut être fausse ni vraie.

Or ceci s'explique dans la TLP par le fait que P est instable : Il n'y a pas de propositions Platonistes stables qui soient signification Platoniste de P . Et donc le fait qu'on ne puisse démontrer P ne prouve pas l'incomplétude de (C, T_{AX}, R_D) .

On aurait pu supposer « P n'est pas vraie » au lieu de « P est fausse », mais si on veut alors utiliser la démonstration précédente, il faut que P soit stable, et que $\text{Non}(P)$ entraîne que « P est démontrable ». Et donc là encore la démonstration n'est pas valide si P est instable.

Il en est de même pour la proposition P : « P est vraie », le fait qu'elle ne soit ni vraie ni fausse se justifie si elle est instable.

On voit donc que le Théorème de Godel ne se généralise pas pour prouver l'incomplétude des théories mathématiques Platonistes deductives.

On peut utilisant une proposition Platoniste définir un système formel classique, et donc montrer qu'un système formel peut être identifié à un concept non-flou de la TLP. Dans certains cas on peut identifier un système formel avec une théorie Platonique déductive, et alors on peut lui appliquer le Lemme de consistance. Ainsi pour justifier théoriquement la consistance d'un système formel, il suffit de montrer qu'on peut l'identifier à une théorie Platoniste déductive (C, T_{AX}, R_D) , C étant un code Platoniste (S, R_C) .

4. EXEMPLES

Il est évident qu'on peut identifier les symboles usuels aux éléments d'un ensemble de symboles Platonistes. On utilise dans les mathématiques usuels des symboles superposés par exemple pour représenter des quotients de fonction ou des intégrales. Il est évident qu'on peut définir un code équivalent n'utilisant que des symboles successifs. De plus, on peut considérer que la syntaxe usuelle définit un code Platoniste. Pour illustrer ceci, nous allons montrer dans des exemples simples comment expliciter la signification Platoniste de théorèmes classiques. Ceci est à priori possible pour toute proposition utilisée en mathématique. Pour définir les relations et les concepts utilisés dans les propositions Platonistes utilisées, on emploiera des concepts primitifs, ainsi que des concepts prédéfinis, correspondants aux concepts basiques fondamentaux utilisés en mathématique.

P étant une des propositions (théorèmes) dont on va donner une signification Platoniste, on la considère dans un texte (T, P) , où T est un texte vrai définissant les concepts basiques usuels en mathématiques, qu'on pourra utiliser pour obtenir les concepts prédéfinis de P .

EXEMPLE 4.1 :

Soit par exemple le Théorème de Bezout :

« p et q sont 2 naturels premiers entre eux si et seulement si il existe u, v dans \mathbf{Z} tels que $pu+qv=1$ ».

On définit d'abord la proposition $\text{Pr}(p,q)$: « (p,q) sont 2 naturels premiers entre eux », utilisant comme concepts généraux ayant leur signification usuelle « divise » (relation définie entre 2 entiers), \mathbf{N} , \mathbf{Z} , « est identique », « est élément de » et « Cond » (définie dans la section 2.36).

La proposition $\text{Pr}(p,q)$ entre 2 naturels p et q fixés, est définie par :

$\text{Pr}(p,q)$:

$\text{Pr1} : \text{Def1}(d)$

$\text{R1}(d, \mathbf{N})$: « d est élément de \mathbf{N} ».

Pr2 :

$\text{Cond}(\text{P2A}(d), \text{P2B}(d))$

Avec $\text{P2A}(d)$:

$\text{R2A}(d,p,q)$: « d divise p et d divise q »

Et $\text{P2B}(d)$:

$\text{R2B}(d,1)$: « d est identique à 1 »

On exprime alors le Théorème de Bezout par, utilisant comme concepts prédéfinis \mathbf{Z} , $+$, \times (dans \mathbf{Z}), et la relation « Eq », définie en 2.36 :

$\text{P1} : \text{Def1}(p,q)$

$\text{R1}(p,q, \mathbf{N})$: « p est élément de \mathbf{N} et q est élément de \mathbf{N} »

$\text{P2} : \text{Eq2}(\text{PA}(p,q), \text{PB}(p,q))$

Avec

$\text{P2A}(p,q) : \text{Pr}(p,q)$

$\text{P2B}(p,q)$:

$\text{Def2B}(u,v)$

$\text{R2B}(u,v,p,q, \mathbf{Z})$: « u est élément de \mathbf{Z} et v est élément de \mathbf{Z} et $uv+pq=1$ »

EXEMPLE 4.2 :

Considérons le théorème permettant d'obtenir les solutions d'une équation réelle du second degré. :

« Si on a l'équation à coefficients réels du second degré ax^2+bx+c , alors, si $\Delta=b^2-4ac$:

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune racine réelle, si $\Delta = 0$, l'équation a une unique racine réelle $-b/2a$, et si $\Delta > 0$ l'équation a 2 racines réelles $r_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2a$ et $r_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/2a$. »

On utilise alors les mêmes concepts généraux prédéfinis que dans l'exemple précédent, l'addition, la multiplication, la division dans \mathbf{R} et les racines carrées d'un réel positif, ainsi que, F étant une fonction d'un ensemble A dans \mathbf{R} , l'équation (Eq,F) définie dans l'exemple 2.39A et la définition de $F(A,B)$, ensemble des applications de A dans B , qui on l'a vu peut être considérée comme l'image de (A,B) par une fonction-concept.

On rappelle que dans l'article ⁽¹⁾, on a donné un Axiome permettant dans certains cas d'obtenir l'existence d'un ensemble $A(O_1, \dots, O_n)$ dont les éléments sont les objets correspondant à la définition $D(x, O_1, \dots, O_n)$. Comme on l'a vu dans la section 2.36, on définit A par la proposition élémentaire Platoniste suivante :

$\text{Def}(A)$

$\text{R}(A, O_1, \dots, O_n)$: « A est l'ensemble dont les éléments correspondent à la définition $D(x, O_1, \dots, O_n)$ ».

Cette proposition élémentaire Platoniste est stable si O_1, \dots, O_n sont des concepts non-flous et si $D(x, O_1, \dots, O_n)$ est une définition non-floue (ce qui est équivalent au fait que le concept X associé à $D(x, O_1, \dots, O_n)$ est non-flou). Si de plus cette définition est basique, d'après l'Axiome d'existence d'ensemble donné dans le précédent article ⁽¹⁾, alors la définition Platoniste de A est vraie et A est un concept non-flou défini uniquement en fonction de (O_1, \dots, O_n) .

Le théorème a alors la signification Platoniste :

P1 :Def1(a,b,c)

R1(a,b,c,R) : « (a,b,c) est élément de \mathbf{R}^3 , et a est différent de 0 ».

P2 :Def2(F)

R2(F,a,b,c) : « F est élément de $F(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et si x est élément de \mathbf{R} , $F(x)=ax^2+bx+c$ ».

On peut donc aussi représenter F par F(a,b,c), F étant défini uniquement en fonction de (a,b,c) .

P3 :Def3(E)

R3(E,F) : « E est identique à l'équation dans \mathbf{R} (Eq,F) »

On peut donc aussi représenter E par E(a,b,c) puisque F est défini uniquement en fonction de (a,b,c) et E est défini uniquement en fonction de F.

P4 :Def4(S)

R4(S,F) : « S est l'ensemble de dont les éléments correspondent à la définition D(x,F): $F(x)=0$ »

On peut donc représenter S par S(a,b,c), puisque S est défini uniquement en fonction de F.

P5 :Def5(Δ)

R5(Δ ,a,b,c) : « $\Delta=b^2-4ac$ »

On peut donc écrire Δ sous la forme $\Delta(a,b,c)$.

P6 :Cond (P6A(a,b,c),P6B(a,b,c))

Avec P6A(a_B, b_B, c_B) P6B(a_B, b_B, c_B) sont des propositions Platonistes définies en fonction de (a_B, b_B, c_B) pouvant représenter tous les triplets de réels (a,b,c), avec a non nul.

(a,b,c) étant 3 réels, avec a non nul, on a :

P6A(a,b,c) : R6A(a,b,c) : « $\Delta(a,b,c)<0$ »

P6B(a,b,c) : « R6B(a,b,c) : « S(a,b,c) est identique à l'ensemble vide ».

P7 :Cond (P7A(a,b,c),P7B(a,b,c))

Avec:

P7A(a,b,c) :R7A(a,b,c) : « $\Delta(a,b,c)=0$ »

P7B(a,b,c) :R7B(a,b,c) : « $S(a,b,c)=-b/2a$ »

P8 :Cond (P8A(a,b,c),P8B(a,b,c))

Avec P8A(a,b,c) : R8A(a,b,c): « $\Delta(a,b,c)>0$ »

P8B(a,b,c) :

Def8B(i)(r_1, r_2)

R8B(i)(r_1, r_2, a, b, c) : « $r_1(a,b,c)=(-b+\sqrt{\Delta(a,b,c)})/2a$ et $r_2(a,b,c)=(-b-\sqrt{\Delta(a,b,c)})/2a$ »

R8B(j)(a,b,c) : « $S(a,b,c)=\{r_1(a,b,c), r_2(a,b,c)\}$ ».

(On aurait pu aussi définir la fonction-concept «Sol » définie dans l'Exemple 2.39B)

EXEMPLE 4.3

Considérons le Théorème de Cailey-Hamilton :

« n étant un naturel et A une matrice de $M_n(\mathbf{C})$, $X_A(x)$ étant le polynome caractéristique de A, on a $X_A(A)=0$ »

On utilise comme concepts généraux prédéfinis \mathbf{N} , $M_n(\mathbf{C})$ (n étant un naturel, $M_n(\mathbf{C})$ peut être considérée comme l'image de n par une fonction-concept ou par un concept général représentant une fonction définie entre 2 ensembles), les éléments Id_{M_n} et 0_{M_n} de $M_n(\mathbf{C})$ (qui peuvent être considérés comme les images de n par des fonctions représentées par des concepts généraux), la fonction $\text{Det}(M)$, M étant une matrice carrée

complexe (Det peut être considérée comme une fonction-concept ou comme une fonction définie entre 2 ensembles), et $P(x)$ étant un polynôme de $\mathbf{C}(x)$ et M étant une matrice de $M_n(\mathbf{C})$, la matrice $P(M)$, $(P(M))$ peut être considéré comme l'image de (P, M) par une fonction-concept ou par une fonction définie entre 2 ensembles).

Le théorème précédent a alors la signification Platoniste suivante :

P1 : Def1 (n)

R1(n, \mathbf{N}^*) : n est un élément de \mathbf{N}^* .

P2 : Def2(A)

R2(A, n): A est un élément de $M_n(\mathbf{C})$.

P3 : Def3(X_A)

R3(X_A, A, \mathbf{C}, n) : « X_A est élément de $F(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ et $X_A(x) = \det(A - xId_{M_n})$ » (X_A est donc un polynôme à coefficients dans \mathbf{C}).

P4 : R4(X_A, A, n) : « $X_A(A) = 0_{M_n}$ ».

Dans les 3 exemples précédents, on aurait pu obtenir, utilisant l'article précédent ⁽¹⁾ et les exemples présentés dans la section 2.39, les propositions Platonistes définissant les concepts prédéfinis qu'on a utilisés. On aurait aussi pu définir toutes les relations qu'on a utilisées par des propositions Platonistes n'utilisant que des relations élémentaires, et donc justifier ainsi qu'elles sont des relations non-floues.

EXEMPLE 4.4 :

On démontre facilement l'Axiome du choix dans la TLP :

On rappelle cet Axiome :

« Si on a un ensemble E dont les éléments A sont des ensembles disjoints non vides, alors il existe un ensemble ayant exactement un élément de chaque ensemble. »

Preuve :

Soit E un concept non-flou représentant un unique ensemble dont les éléments sont des ensembles disjoints non vides.

D'après l'Axiome 2.14e) donné dans l'article précédent, il existe un ensemble non-flou unique $F = U_E(A)$ dont les éléments sont les éléments des ensembles A appartenant à E. (On définit $B(A) = A$, défini par une définition non-floue uniquement en fonction de A).

D'après le premier article ⁽¹⁾, il existe donc un concept non-flou $F(E, F)$ dont les éléments sont toutes les applications de E dans F.

De plus il est évident d'après l'hypothèse qu'il existe au moins une application de E dans F qui à tout élément A de E donne pour image un élément de A.

Donc il existe au moins un objet correspondant à la définition :

D(o) : « o est élément de $F(E, F)$ et pour tout A élément de E, il existe un élément a de A (associé à la définition D(a) : « a est élément de A » tel que (A, a) est élément de o ».

Or d'après l'Axiome 2.5 de l'article précédent cette définition est non-floue et elle est évidemment basique, donc il existe un ensemble G dont les éléments correspondent à la définition D(o) précédente et on a vu que G est non-vide.

On considère alors la définition de paramètre fixe g, concept associé à « o est élément de g » (C'est-à-dire on le rappelle pour g fixé).

D(o, g) : « o est élément de F et il existe un élément A de E tel que g(A) est identique à o »

Cette définition étant basique et non-floue, d'après l'Axiome 2.14 de l'article précédent, il existe pour tout g dans G un unique ensemble noté classiquement g(E) dont les éléments correspondent à la définition D(o, g) précédente, g étant fixé.

Il est évident que tout g(E) convient, et qu'il en existe au moins un puisque G est non vide.

5.CONCLUSION :

On a donc vu dans cet article que la TLP est une théorie mathématique de logique pouvant interpréter l'ensemble des mathématiques classiques . Cette théorie mathématique est entièrement nouvelle et donne une justification théorique au Principe de Non-contradiction et au Principe du Tiers exclu qui sont admis axiomatiquement dans les théories actuelles de logique formelle. On a vu aussi que la TLP donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques. La TLP fait apparaître une analogie remarquable entre la construction de toutes les théories mathématiques classiques ainsi qu'entre la construction de toutes les propositions mathématiques et les démonstrations utilisées en mathématiques. La TLP modélise en effet toutes les théories mathématiques classiques ainsi que les propositions et démonstrations qu'elles utilisent à l'aide d'un code Platoniste.

Ainsi la TLP apparaît comme une théorie mathématique fondamentale permettant de comprendre le sens profond des mathématiques.

Références :

- 1.T.Delort, Introduction à la logique Platonicienne- Théorie des ensembles (2010), Extrait du livre Théories d'or, Editions Books on Demand, Paris (2011).
- 2.Nagel, Newman,Gödel, Girard: Le théorème de Gödel, Seuil, Paris 1992
3. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionary (G.B, 1989)
4. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
5. Largeault, Logique Mathématiques, Armand Colin,(Paris ,1992)
6. P.Thiry, Notions de logique,Deboeck Université,(Bruxelles ,1998)
- 7.Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)

III.THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.

Auteur :Thierry DELORT.

Date :23Juin 2010.

1^{er} article : **THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE I :CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH.**

2^{ième} article :**THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE II :CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.**

TABLES DES MATIERES.

1^{er} article : **THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES- PARTIE I : CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH.**

1. INTRODUCTION.

2. THEORIE.

3. APPLICATIONS.

4. CONCLUSION.

2^{ème} article : **THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES- PARTIE II : CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS Jumeaux.**

1. INTRODUCTION.

2. THEORIE (RAPPELS).

A) RAPPELS T.A.N.

B) RAPPELS THEORIE DES PROBABILITES.

3. DECIMALES D'IRRATIONNELS.

4. ENSEMBLES ESTIMES.

A) THEORIE.

B) EXEMPLES.

4.B.6. CONJECTURE FORTE DE GOLDBACH.

4.B.7 CONJECTURE FORTE DES NOMBRES PREMIERS Jumeaux.

5. CONCLUSION.

Résumé :

Nous avons présenté en 2 articles (Théorie Aléatoire des Nombres (T.A.N) Parties I et II) une théorie mathématique étudiant le hasard en théorie des nombres, dont l'importance est fondamentale. Cette théorie fait apparaître que certaines propositions en théorie des nombres ont une explication théorique basée sur le hasard, sans que rien n'indique qu'elles aient en plus une démonstration classique, c'est-à-dire utilisant seulement les Axiomes classiques de la théorie des nombres. Au contraire, on peut penser que leur seule explication mathématique théorique est basée sur le hasard.

Nous avons appelé Théorie Aléatoire des Nombres cette théorie très générale permettant d'étudier ces propositions, elle est basée sur un Axiome fondamental, l'Axiome du Hasard, et aussi sur un nouveau type de proposition appelées pseudo-Axiomes aléatoires, propres à cette théorie et admis sans démonstration comme les Axiomes et dont la nécessité est la conséquence de l'Axiome du Hasard. Ainsi, la TAN permet d'obtenir des explications théoriques aléatoires, c'est-à-dire basées sur le hasard, à certaines propositions qui n'ont pas de démonstration classique.

Dans ce premier article (T.A.N-Partie I) nous présentons les plus simples Axiomes et pseudo-Axiomes de cette théorie, et nous verrons qu'ils permettent malgré leur simplicité d'obtenir des explications théoriques basées sur le hasard (appelées *explications aléatoires*) pour la Conjecture faible de Goldbach et pour l'aspect général de la Comète de Goldbach. Dans la seconde partie (T.A.N-Partie II), nous développerons cette théorie pour obtenir des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres premiers jumeaux.

1.INTRODUCTION

La T.A.N (Théorie Aléatoire des Nombres) est une théorie destinée à étudier le hasard en théorie des nombres. Elle est basée sur l'Axiome fondamental suivant :

AXIOME 1 : (Axiome du Hasard)

Des modèles statistiques non-certains expriment les propriétés des nombres.

On dira qu'un modèle statistique est *non-certain* si on ne peut démontrer classiquement son existence, c'est-à-dire en utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres.

On justifie l'Axiome du Hasard d'une part parce qu'il n'y a pas de raison pour lesquelles des modèles statistiques n'existeraient pas en Théorie des Nombres, et s'ils existent on devrait s'attendre à ce qu'ils soient définis en utilisant la Théorie des probabilités. Or dans la Théorie des Nombres classiques, il n'y a aucun exemple dans lequel on utilise la théorie des probabilités pour obtenir une proposition.

Il est évident que si l'Axiome du Hasard est vrai, on ne pourra jamais le démontrer classiquement, comme toute proposition P vraie exprimant qu'une proposition Q est vraie mais qu'il est impossible de démontrer classiquement Q.(Car il est alors évident que pour démontrer classiquement P on doit démontrer classiquement Q , ce qui est impossible si P est vraie.) Et donc si l'Axiome du Hasard est vrai, on ne peut l'obtenir que de façon axiomatique.

On voit que la conséquence de l'Axiome du Hasard, si on le suppose vrai, est qu'il est nécessaire d'utiliser une logique nouvelle, différente de celle utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres, pour obtenir des modèles non-certains. On appellera *logique du hasard* une telle logique. On verra que la Théorie Aléatoire des Nombres est fondamentale car elle permet de donner des *explications aléatoires*, c'est-à-dire des explications théoriques basées sur le hasard à de très nombreuses conjectures jamais démontrées, et en particuliers aux Conjectures fortes et faibles de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

La T.A.N, basée sur l'Axiome du Hasard précédent, étudie les modèles statistiques non-certains et leurs conséquences. Elle utilise des propositions d'un type nouveau, qu'on a appelé pseudo-Axiome aléatoires, qui sont analogues aux Axiomes classiques, c'est-à-dire qu'ils sont de formulation simple et qu'ils peuvent être justifiés par des arguments intuitifs évidents ou sont évidents. Ces pseudo-Axiomes aléatoires constituent la logique du hasard en théorie des nombres que nous avons défini précédemment. Ainsi, ils expriment l'existence, dans des cas particuliers complètement définis, de modèles statistiques exprimant les propriétés des nombres, et définis en utilisant la théorie des probabilités.

De plus une conséquence de l'Axiome du Hasard et de l'existence de modèles statistiques est qu'on obtient des propositions modélisées par des événements non-certains. On verra qu'un pseudo-Axiome de la T.A.N permet d'obtenir dans certains cas des propositions classiques si elles sont modélisées par des événements de probabilité proche de 1. La T.A.N n'est utile que si on utilise des modèles statistiques non-certains, car il est évident que tout modèle statistique certain ne nécessite pas la T.A.N pour être justifié.

Nous présentons dans ce premier article (T.A.N-PARTIE I:Conjecture faible de Goldbach) une application très simple et fondamentale de cette théorie, on voit qu'elle permet de donner une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication mathématique théorique utilisant seulement les Axiomes et pseudo-Axiomes de la T.A.N, à la Conjecture faible de Goldbach ainsi qu'à l'aspect général de la Comète de Goldbach. (On rappelle que la Comète de Goldbach est le graphe de points $(k,r(k))$ où k est un nombre pair et $r(k)$ est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k . Ce graphe a l'aspect d'une Comète d'où son nom.).

Ces explications théoriques aléatoires présentées dans ce premier article sont les premières justifications mathématiques théoriques de la Conjecture faible de Goldbach et de l'allure de la Comète de Goldbach.

Il y a déjà eu des approches probabilistes pour expliquer la Conjecture de Goldbach, mais celles-ci étaient purement intuitives, et n'envisageaient pas ni ne montraient que celle-ci pouvait être expliquée par le hasard d'une façon théorique.

Ainsi, par exemple, Hardy et Littlewood ⁽⁶⁾ ont proposé une formule empirique estimant pour tout nombre pair n le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n :

$$r(n) \cong 2\Pi_2 \left(\prod_{p|n, p \geq 3} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{n}{\ln(n)^2}$$

où $\Pi_2 \approx 0,66016$

Cette conjecture est obtenue par des arguments purement intuitifs, elle est appelée Conjecture forte (ou « étendue ») de Goldbach et n'a jamais été démontrée tout comme la Conjecture faible de Goldbach (Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers).

Il est important de constater que ce premier article ne consiste pas à obtenir par des arguments intuitifs que le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n est de l'ordre de $n/\ln^2(n)$, ce qui a donc déjà été fait, et de manière beaucoup plus précise par Hardy et Littlewood. En fait, il présente une théorie permettant de montrer que le hasard et ses lois expliquent la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres qui n'ont pas de démonstration classique. Une telle théorie du hasard et de ses lois en théorie des nombres, basée sur l'Axiome du Hasard et utilisant les pseudo-Axiomes et les définitions de concepts fondamentaux que nous proposons, est totalement nouvelle. En particulier nous définissons les concepts nouveaux et fondamentaux de propositions *modélisées*, ou *modélisées exactement* par des événements ainsi que de *lois numériques aléatoires*.

En résumé, l'idée que le hasard puisse être à l'origine et la seule explication existante de la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres et l'Axiome du Hasard exprimant cette idée, et la Théorie du hasard dans les nombres proposée basée sur l'Axiome du Hasard, d'un formalisme nouveau et utilisant des pseudo-Axiomes et de nouvelles définitions, et son application à la Conjecture faible de Goldbach, apparaissent comme étant 3 éléments nouveaux et fondamentaux de la théorie des nombres présentée dans cet article. On présente dans ce premier article les plus simples pseudo-Axiomes ainsi que les concepts fondamentaux comme ceux de propositions *modélisées* par des événements ainsi que celui de *loi numérique aléatoire*, mais la Théorie Aléatoire des Nombres peut être développée. Ceci sera fait dans le second article, T.A.N-Partie II, où nous donnerons notamment une explication aléatoire aux Conjectures fortes Goldbach (Très proche de celle proposée par Hardy et Littlewood) et des nombres premiers jumeaux (Identique à celle proposée par Hardy et Littlewood).

2.THEORIE

Nous allons étudier dans la T.A.N une catégorie de propositions particulière que nous avons appelées *loi numérique aléatoire*.

DEFINITION 2.1 :

Les expressions mathématiques utilisées dans la T.A.N « *est modélisée* » ou « *est modélisée exactement* » ou « *est modélisée presque exactement* » sont utilisées pour représenter certaines propriétés statistiques de propositions.

a) L'expression « *est modélisée exactement* » est définie de la façon suivante :

-Si une proposition P est modélisée exactement par un événement Ev d'un Espace probabilisable, alors P se comporte comme si elle avait la probabilité $p(Ev)$ d'être vraie.

-Si $P1$ et $P2$ sont 2 propositions, et que $Ev1$ et $Ev2$ sont 2 événements d'un même espace probabilisable, et si on a :

$P1$ est modélisée exactement par $Ev1$.

$P2$ est modélisée exactement par $Ev2$.

Alors :

La proposition « $P1$ et $P2$ » est modélisée exactement par l'évènement « $Ev1$ et $Ev2$ ».

La proposition « $P1$ ou $P2$ » est modélisée exactement par l'évènement « $Ev1$ ou $Ev2$ ».

La proposition $\text{Non}(P1)$ est modélisée exactement par l'évènement $\text{Non}(Ev1)$.

On appellera *propriété de correspondance* la propriété fondamentale précédente.

L'expression « *est modélisée presque exactement* » est définie de la façon suivante :

Si une proposition P est modélisée presque exactement par un événement Ev , alors, elle se comporte comme si elle avait la probabilité $p(Ev')$ d'être vraie avec $p(Ev') \approx p(Ev)$.

b) L'expression « *est modélisée* » est utilisée pour représenter certaines propriétés statistiques de propositions, mais de façon moins précise que l'expression « *est modélisée exactement* ». On la définit comme suit :

-Si $P1$ et $P2$ sont 2 propositions, et que $Ev1$ et $Ev2$ sont 2 événements d'un même espace probabilisable, et si on a :

$P1$ est modélisée par $Ev1$ et $P2$ est modélisée par $Ev2$.

Alors :

La proposition « $P1$ et $P2$ » est modélisée par l'évènement « $Ev1$ et $Ev2$ ».

La proposition « $P1$ ou $P2$ » est modélisée par l'évènement « $Ev1$ ou $Ev2$ ».

La proposition $\text{Non}(P1)$ est modélisée par l'évènement $\text{Non}(Ev1)$.

On appellera comme en a) *propriété de correspondance* la propriété fondamentale précédente. Elle est naturelle si on considère que « P est modélisée par Ev » signifie que « Ev représente de façon partielle (définie par la T.A.N) les propriétés statistiques de P », et « P est modélisée exactement par Ev » signifie « Ev représente de façon complète les propriétés statistiques de P ».

-De plus si une proposition P est modélisée par un événement Ev , alors dans certains cas d'application de certains pseudo-Axiomes aléatoires (pseudo-Axiome 2.3 du modèle exact) de la T.A.N, P est modélisé exactement par Ev ou P est modélisée presque exactement par Ev .

c) Si $f(k)$ est une fonction d'un sous-ensemble F de \mathbf{N} dans \mathbf{R} , on appellera *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :

« $f(k)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf(k)$ »

où $Xf(k)$ est une variable aléatoire réelle définie ou dont on a défini certaines propriétés.

Par définition, cela signifie que, pour tout k dans F , $f(k)$ est à valeur dans un ensemble fini $F(k)$ de \mathbf{N} , que $Xf(k)$ est une variable aléatoire à valeur dans $F(k)$ et que pour tout i_k de $F(k)$, la proposition « $f(k)=i_k$ » est modélisée par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».

d) Si on a une loi numérique aléatoire, on dira qu'elle est *exacte* si, avec les notations précédentes du c) on a toujours la proposition « $f(k)=i_k$ » est modélisée exactement par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».

En réalité, pour que la T.A.N soit intéressante, on doit être dans l'un des 2 cas suivants :

-Ou bien F est infini, mais pour tout k appartenant à F , on connaît un nombre fini d'étapes permettant d'obtenir $f(k)$ (utilisant dans la pratique un ordinateur).

-Ou bien F est fini (en général, F aura un seul élément, par exemple $F=\{1\}$), mais pour au moins un élément k de F on ne connaît pas un nombre fini d'étapes permettant d'obtenir $f(k)$.

Dans l'article, on supposera qu'on est toujours dans l'un de ces cas.

REMARQUE 2.2 :

La T.A.N permet d'obtenir toutes sortes de propositions classiques, mais elle n'est intéressante que pour obtenir des propositions qu'on n'a jamais démontrées classiquement et qui de plus sont illustrées et en accord avec tous les tests réalisés, un test étant un nombre fini d'opérations.

Par exemple, on sait que si, à l'aide d'un ordinateur, on vérifie pour des naturels pairs s s'ils sont la somme de 2 nombres premiers, on trouvera toujours que c'est le cas. Ils vérifient donc la loi générale « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers », c'est-à-dire la Conjecture de Goldbach qui est donc à la fois illustrée et en accord avec tous les tests réalisés et de plus n'a jamais été démontrée classiquement. Elle fait donc partie des propositions classiques intéressantes à obtenir par la T.A.N d'après la Remarque 2.2.

Supposons maintenant qu'on ait obtenu la loi numérique aléatoire sur $F=\{1\}$ suivante, $t(P)$ étant une fonction à valeur dans $F(1)=\{0,1\}$:

« $t(P)(1)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xt(P)(1)$ ».

avec $p(\ll Xt(P)(1)=1 \gg) > 1-10^{-5}$. (Pour simplifier, on identifiera parfois $t(P)(1)$ avec $t(P)$, puisque F n'a qu'un élément. En général, P sera une proposition et $t(P)$ sera la fonction vérité de P , c'est-à-dire : Si P est vraie, $t(P)(1)=1$, sinon $t(P)(1)=0$).

Alors, si « $t(P)(1)=1$ » est modélisée exactement ou presque exactement par « $Xt(P)=1$ » (Définition 2.1b) (on dira alors que la loi est exacte ou presque exacte), « $t(P)(1)=1$ » se comportera comme si elle avait une probabilité très proche de 1 d'être vraie. Si on est dans ce cas, il est évident qu'on pourra alors avoir comme conséquence que $t(P)(1)=1$.

Cette conséquence ne sera pas toujours vraie puisque pour l'obtenir, on a supposé que « $t(P)(1)=1$ » était modélisée exactement ou presque exactement par « $Xt(P)(1)=1$ », ce qui n'est pas nécessairement vrai, et d'autre part, même dans ce cas, « $t(P)(1)=1$ » se comporte comme un événement Ev de probabilité très proche de 1, et donc ceci n'entraîne pas forcément que « $t(P)(1)=1$ ».

Comme la conséquence $t(P)(1)=1$ n'est pas toujours vraie, on l'obtient par un pseudo-Axiome, le *pseudo-Axiome 2.3 du modèle exact* exposé ci-après, et admis sans démonstration comme un Axiome :

Pseudo Axiome 2.3 (du modèle exact):

Si P est une proposition classique et si on a une loi numérique aléatoire sur un ensemble $F=\{1\}$ « $t(P)(1)$ est modélisée par $Xt(P)(1)$ » avec $t(P)(1)$ à valeurs dans $\{0,1\}$ et $p(\ll Xt(P)(1)=1 \gg) \approx 1$, alors lorsque le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact est valide pour la loi numérique aléatoire précédente, on obtient $t(P)(1)=1$.

En fait la T.A.N utilise 2 sortes de pseudo Axiomes aléatoires. Le premier pseudo Axiome est le pseudo Axiome du modèle exact. La seconde sorte de pseudo Axiomes permet d'obtenir des modèles statistiques représentant des caractéristiques de fonctions numériques $f(k)$. Ces modèles statistiques permettront d'obtenir des lois numériques aléatoires concernant $f(k)$.

En fait, dans la T.A.N, tous les modèles statistiques sont obtenus par des pseudo Axiomes aléatoires. La raison en est qu'il apparaît qu'un modèle statistique peut être valide dans un cas et invalide dans un autre cas tout à fait analogue. Donc les propositions permettant de les obtenir ne sont pas toujours valides et sont donc des pseudo Axiomes.

Le second pseudo Axiome aléatoire de la T.A.N introduit le modèle le plus simple : le modèle équiprobable.

Nous allons tout d'abord justifier ce pseudo Axiome aléatoire :

Cette justification intuitive donnée ci-après est assez simple. On peut en fait admettre sans démonstration ce pseudo-Axiome car il est à la fois très simple et évident, de la même façon qu'on admet les Axiomes dans les Théories mathématiques.

Supposons qu'on ait un ensemble E contenant n éléments, et qu'on sache qu'un sous-ensemble de E noté A contient un nombre a d'éléments.

On considère la proposition : P : « x est élément de A », et on suppose qu'on ignore si P est vraie ou fausse. On considère alors seulement que x est un élément d'un ensemble contenant a éléments, lui-même sous-ensemble d'un ensemble contenant n éléments.

On peut alors considérer que x est fixé, et que A peut alors être n'importe quel sous-ensemble de E avec a éléments, avec équiprobabilité pour chaque sous-ensemble. On obtient alors de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est égale à a/n .

Si par contre on considère que A est fixé, et que x peut être n'importe quel élément de E avec équiprobabilité, on obtient aussi de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est aussi égale à a/n .

On obtient aussi la même probabilité (que P soit vraie) en considérant que (x,A) peut être avec équiprobabilité n'importe quel couple dont le premier terme est un élément de E et le second terme est un sous-ensemble de E contenant a éléments.

Les résultats précédents ne sont valables que si, dans la proposition P : « x est un élément de A », on peut considérer seulement que x est un élément d'un ensemble contenant a éléments, lui-même sous-ensemble d'un ensemble contenant n éléments, et qu'on ignore de plus si P est vraie ou fausse.

Ainsi d'après ce qui précède si on a une proposition de la forme $P(A_k, \Omega_k)$: « x_k est élément de A_k », où A_k est un sous-ensemble fini d'un ensemble Ω_k , connaissant le nombre d'éléments de A_k et de Ω_k , si on considère seulement dans la proposition précédente le fait que x_k est un élément d'un ensemble A_k contenant $\text{Card}(A_k)$ éléments, lui-même sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k contenant $\text{Card}(\Omega_k)$ éléments, alors si de plus on ignore si $P(A_k, \Omega_k)$ est vraie ou fausse, $P(A_k, \Omega_k)$ se comporte comme si elle avait la probabilité d'être vraie de l'évènement $\text{Ev}(A_k, \Omega_k)$: « $x_{(k)}$ est élément de A_k » de l'espace probabilisable équiprobable $(\Omega_k, P(\Omega_k, p_{\text{eq}\Omega_k})$, où $p_{\text{eq}\Omega_k}$ représente la probabilité équiprobable sur l'Univers Ω_k .

Supposons maintenant qu'on ait plusieurs propositions $P(A_{ki})$: « x_k est élément de A_{ki} », où i varie de 1 à n . On note $\text{Ev}(A_{ki})$ l'évènement « $x_{(k)}$ est élément de A_{ki} » de l'espace équiprobable Ω_k .

On obtient alors, i, j appartenant à $\{1, \dots, n\}$:

« « x_k est élément de A_{ki} » et « x_k est élément de A_{kj} » est équivalent à « x_k est élément de $A_{ki} \cap A_{kj}$ ».

D'après ce qui précède, si dans la proposition précédente on considère seulement le fait que x_k appartient à un sous-ensemble de Ω_k contenant $\text{Card}(A_{ki} \cap A_{kj})$ éléments on obtient :

« x_k est élément de $A_{ki} \cap A_{kj}$ » se comporte comme si elle avait la probabilité de l'évènement « $x_{(k)}$ est élément de $A_{ki} \cap A_{kj}$ » de l'espace équiprobable Ω_k .

On obtient donc immédiatement que :

« « x_k est élément de A_{ki} » et « x_k est élément de A_{kj} » » se comporte comme si elle avait la probabilité de l'évènement « « $x_{(k)}$ est élément de A_{ki} » et « $x_{(k)}$ est élément de A_{kj} » » de l'espace équiprobable Ω_k .

En procédant comme précédemment, on obtient de même :

« $P(A_{ki})$ ou $P(A_{kj})$ » se comporte comme si elle avait la probabilité de l'évènement « $\text{Ev}(A_{ki})$ ou $\text{Ev}(A_{kj})$ ».

Et $\text{Non}(P(A_{ki}))$ se comporte comme si elle avait la probabilité de l'évènement $\text{Non}(\text{Ev}(A_{ki}))$.

Ce qui précède justifie intuitivement que dans certains cas, avec les notations précédentes on ait $P(A_{ki})$ est modélisée exactement par $\text{Ev}(A_{ki})$.

On pourrait donc prendre comme pseudo-Axiome aléatoire, (qui rappelons-le n'est pas toujours valide contrairement aux Axiomes classiques, mais qui doit être simple et dont on doit pouvoir justifier la validité dans les cas où on peut l'appliquer), que si on a une proposition $P(A_{ki})$: « x_k est élément de A_{ki} », (les A_{ki} étant des sous-ensembles de Ω_k) alors dans le cas d'application du pseudo-Axiome aléatoire, $P(A_{ki})$ est modélisée exactement par l'évènement $\text{Ev}(A_{ki})$ « $x_{(k)}$ est élément de A_{ki} » défini plus haut.

Cependant, comme on l'a vu dans la Définition 2.1, quand une proposition P est modélisée exactement par un évènement Ev , alors P est modélisée par l'évènement Ev . Il en résulte que ce qui précède justifie aussi que $P(A_{ki})$ est modélisée par $\text{Ev}(A_{ki})$.

C'est ce qu'exprime le pseudo-Axiome du modèle équiprobable suivant.

Ainsi, ce qui précède est la justification intuitive du pseudo Axiome aléatoire suivant, permettant d'obtenir de nombreuses lois numériques aléatoires:

Pseudo Axiome 2.4 :(modèle équiprobable) :

Si on a une proposition P_k : « x_k est élément de A_k », où A_k est un ensemble fini dont on connaît le nombre d'éléments, qui est un sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k dont on connaît aussi le nombre d'éléments, alors lorsque le *pseudo-Axiome du modèle équiprobable* est valide pour (x_k, A_k, Ω_k) :

La proposition P_k : « x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace probabilisable $(\Omega_k, P(\Omega_k), p_{eq\Omega_k})$ où pour tout ensemble Ω la probabilité $p_{eq\Omega}$ désigne la probabilité équiprobable sur Ω .

On appellera plus simplement l'espace probabilisable $(\Omega_k, P(\Omega_k), p_{eq\Omega_k})$ « espace équiprobable Ω_k » .

REMARQUE 2.5 :

On a choisi la notation « $x_{(k)} \in A_k$ » plutôt que « A_k » ou « $x \in A_k$ » pour représenter l'évènement modélisant « x_k appartient à A_k » car il est clair que cet évènement est différent d'un évènement modélisant « y_k appartient à A_k » où $y_k \neq x_k$. De plus cette notation indique que l'évènement représente une propriété statistique de x_k . On pourra néanmoins s'il n'y a pas ambiguïté représenter cet évènement par « A_k ».

Il est clair qu'avec ce modèle :

$$p_{eq\Omega_k}(x_{(k)} \in A_k) = \frac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega_k)}$$

en général, on appliquera ce pseudo Axiome pour (x_k, A_k, Ω_k) , avec A_k appartenant à un sous-ensemble A de $P(\Omega_k)$. On écrira alors qu'on a supposé que le pseudo Axiome du modèle équiprobable était valide pour (x_k, A, Ω_k) . Nous allons montrer qu'on peut toujours considérer que A est une tribu (sigma-algèbre):

REMARQUE 2.6 :

On rappelle d'après la Définition 2.1a) et b) la *propriété de correspondance* :

Si la proposition X est modélisée (ou est modélisée exactement) par EvX et la proposition Y par EvY , EvX et EvY appartenant au même espace probabilisable alors :

- La proposition $\text{Non}(X)$ est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement $\text{Non}(EvX)$.
- La proposition « X et Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement « EvX et EvY »
- La proposition « X ou Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement « EvX ou EvY »

Il en résulte que si X_1, \dots, X_n sont des propositions modélisées (ou modélisées exactement) par des évènements Ev_1, \dots, Ev_n d'un même espace probabilisable, alors toute proposition $P(X_1, \dots, X_n)$ construite à partir de X_1, \dots, X_n , utilisant seulement des « et », des « ou » et des « non » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement $P(Ev_1, \dots, Ev_n)$ (qui est aussi un évènement de l'espace probabilisable). Ceci est obtenu car « et », « ou », « non » ont les mêmes propriétés utilisés avec des propositions ou utilisés avec des évènements d'un espace probabilisable (commutativité, associativité, distributivité...)

On a alors le Théorème :

THEOREME 2.7 :

(i) Si le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k, A_k, Ω_k) et (x_k, B_k, Ω_k) , alors il est valide pour $(x_k, A_k \cup B_k, \Omega_k)$, pour $(x_k, A_k \cap B_k, \Omega_k)$ et pour $(x_k, \Omega_k / A_k, \Omega_k)$.

(ii) L'ensemble B_k des sous-ensembles A_k de Ω_k tels que l'Axiome du modèle équiprobable soit valide pour (x_k, A_k, Ω_k) est une tribu.

Démonstration :

Si l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k, A_k, Ω_k) , alors la proposition « x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k .

D'après la propriété de correspondance, $\text{Non}(\ll x_k \text{ appartient à } A_k \gg)$ est modélisée par l'évènement $\text{Non}(\ll x_{(k)} \in A_k \gg)$

Ceci est équivalent à :

$\ll x_k \text{ appartient à } \Omega_k/A_k \gg$ est modélisée par $\ll x_{(k)} \in \Omega_k / A_k \gg$.

Donc l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour $(x_k, \Omega_k/A_k, \Omega_k)$.

Si l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k, A_k, Ω_k) et pour (x_k, B_k, Ω_k) :

La proposition $\ll x_k \text{ appartient à } A_k \gg$ est modélisée par l'évènement $\ll x_{(k)} \in A_k \gg$ de l'espace équiprobable Ω_k .

La proposition $\ll x_k \text{ appartient à } B_k \gg$ est modélisée par l'évènement $\ll x_{(k)} \in B_k \gg$ de l'espace équiprobable Ω_k .

Donc en utilisant la propriété de correspondance:

La proposition $\ll \ll x_k \text{ appartient à } A_k \gg \text{ et } \ll x_k \text{ appartient à } B_k \gg \gg$ est modélisée par l'évènement $\ll x_{(k)} \in A_k \text{ et } x_{(k)} \in B_k \gg$, ce qui est équivalent à :

La proposition : $\ll x_k \text{ appartient à } A_k \cap B_k \gg$ est modélisée par l'évènement $\ll x_{(k)} \in A_k \cap B_k \gg$ de l'espace équiprobable Ω_k .

Ce qui signifie exactement que l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour $(x_k, A_k \cap B_k, \Omega_k)$.

On montre de même qu'il est valide pour $(x_k, A_k \cup B_k, \Omega_k)$.

On a donc montré le Théorème 2.7a), qui entraîne le Théorème 2.7b).

On a donc montré le Théorème 2.7.

On verra que le pseudo Axiome aléatoire du modèle équiprobable a de nombreuses applications dans la T.A.N. Il permet en effet d'obtenir de nombreux modèles statistiques.

En général, si on obtient une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :

$\ll f(k)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf(k)$ »

on ne peut pas en obtenir des propositions classiques. Cependant il semble évident que dans certains cas, on peut considérer que les variables aléatoires $Xf(k)$ sont indépendantes entre elles. Comme ceci n'est pas toujours vrai, on l'obtient par un pseudo-Axiome très simple, le pseudo-Axiome des variables indépendantes :

Pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes :

Si on a une loi numérique aléatoire sur F $\ll f(k)$ est modélisée par $Xf(k)$ » alors lorsque le pseudo-Axiome des variables indépendantes est valide pour cette loi, on obtient la loi numérique aléatoire $\ll f(k)$ est modélisée par $Xf(k)$ », où les variables aléatoires sont indépendantes entre elles, définies sur un Univers infini si F est infini.

REMARQUE 2.9 :

En réalité, si on obtient une loi numérique aléatoire $\ll f(k)$ est modélisée par $Xf(k)$ » en utilisant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable, on peut en général obtenir qu'un nombre fini des variables aléatoires $Xf(k)$ sont indépendantes entre elles, par application du modèle équiprobable sur un produit fini d'Univers associés aux variables aléatoires.

Ceci s'obtient en utilisant que si on a des Univers finis $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, et des ensembles A_1, \dots, A_n avec pour tout i A_i est inclus dans Ω_i , alors :

$$\frac{\text{Card} (A_1 \times \dots \times A_n)}{\text{Card} (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n)} = \frac{\prod_{i=1}^n \text{Card} (A_i)}{\prod_{i=1}^n \text{Card} (\Omega_i)}$$

Il en résulte que dans l'espace probabilisable équiprobable d'Univers $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, les évènements « $x_{(i)}$ est élément de A_i » sont indépendants entre eux.

En généralisant ceci à un Univers produit infini, on obtient comme dans le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes précédents que les variables aléatoires $X_f(k)$ sont indépendantes sur un Univers infini.

Cette Remarque 2.9 constitue aussi une justification intuitive du pseudo-Axiome précédent des variables indépendantes.

Ainsi la T.A.N présentée dans cet article repose sur le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact, le pseudo Axiome du modèle équiprobable et le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes.

On utilise ces Axiomes et pseudo Axiomes pour obtenir des lois numériques aléatoires et des propositions classiques. Comme on l'a dit dans la Remarque 2.2, seules les propositions classiques qui n'ont jamais été démontrées classiquement mais qui sont illustrées et en accord

avec tous les tests réalisés sont intéressants. On verra notamment qu'on peut obtenir la Conjecture de Goldbach et des propositions classiques en accord et illustrées par les tests définissant la Comète de Goldbach obtenue par ordinateur.

DEFINITION 2.10 :

- a) On appellera *pseudo-preuve aléatoire* d'une loi numérique aléatoire ou d'une proposition classique son obtention utilisant les Axiomes et pseudo-Axiomes de la T.A.N, ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.
- b) Si une proposition classique a une pseudo-preuve aléatoire et que de plus on n'a jamais pu la démontrer ni sa négation, on dira qu'elle a une *explication aléatoire*.

La T.A.N permet de mettre en évidence que le hasard et ses lois expliquent la validité de certaines propositions (propositions, lois numériques aléatoires exacte). Il n'y a aucune raison a priori pour que ces propositions aient en plus une démonstration classique : Il est très possible que certaines de ces propositions aient uniquement le hasard comme origine de leur validité. De plus on peut s'attendre à ce que seules certaines propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire soient en accord et illustrées par tous les tests réalisés et donc aient une explication aléatoire intéressante.

REMARQUE 2.11 :

a) On rappelle $t(P)=1$ si P vraie et $t(P)=0$ si P fausse. Si $P(k)$ est une proposition dépendant d'un naturel k, on considérera souvent la fonction $t(P(k))$ en vue d'obtenir des lois numériques aléatoires.

b) Si une proposition classique a une explication aléatoire (Déf 2.10), alors le fait qu'elle concerne une infinité de naturels est nécessaire pour qu'on ne puisse la démontrer classiquement ni sa négation. Ceci justifie les 2 types de lois numérique aléatoires considérées, sur un ensemble F fini ou infini.

c) Nous allons montrer que la Conjecture de Goldbach a une explication aléatoire, sa pseudo-preuve aléatoire utilisant les pseudo-Axiomes très simples de la T.A.N présentées dans cet article, et que la T.A.N permet d'obtenir des propositions classiques ayant une explication aléatoire en accord et illustrées par les tests obtenus par ordinateur définissant la Comète de Goldbach.

d) Si on montre qu'une proposition classique a une explication aléatoire, on n'a pas prouvé qu'elle est vraie mais on a prouvé trois aspects essentiels de la proposition considérée:

- Elle a une explication théorique basée sur le hasard, obtenue à partir d'Axiomes et de pseudo-Axiomes de la T.A.N, qui sont simples et ont un caractère d'évidence tout comme les Axiomes classiques.

- Cette explication théorique basée sur le hasard et ses lois, appelée *explication aléatoire*, montre qu'elle peut être la conséquence de modèles statistiques qui sont complètement déterminés et dont on connaît l'origine de la validité en considérant les pseudo Axiomes utilisés pour les obtenir.

- Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la proposition n'a pas de preuve classique, et qu'il est tout à fait possible qu'elle soit la pure conséquence du hasard et de ses lois et n'ait donc pas de preuve classique.

3.APPLICATIONS

Nous allons établir que la Conjecture de Goldbach a une explication aléatoire, ainsi que certaines propositions classiques illustrées par la Comète de Goldbach obtenue par ordinateur. On rappelle que la représentation obtenue par ordinateur du graphe $(k, r(k))$ où k est un naturel pair inférieur à 100000 et où $r(k)$ est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k donne une forme ayant l'allure d'une comète, appelée Comète de Goldbach.

Ainsi, d'après ce qui précède, on va démontrer que la Conjecture de Goldbach a une explication rationnelle basée sur le hasard et mettre en évidence les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence, ainsi que ceux expliquant certaines propriétés générales de la Comète de Goldbach.

On rappelle la Conjecture de Goldbach :

« Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers ».

APPLICATION 3.1 :

k étant un naturel pair, on considère la proposition $P(k)$:

$P(k)$: « k est la somme de 2 nombres premiers ».

On définit les ensembles :

$E(k)$ est l'ensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k .

$A(k)$ est l'ensemble de paires de nombres premiers inférieurs à k .

$B(k)$ est l'ensemble de paires de naturels impairs dont la somme donne k .

On note $a(k), b(k), e(k)$ le nombre d'éléments de $A(k), B(k), E(k)$.

Dans ce qui suit, i, j, k représenteront toujours des naturels pairs.

On considère la fonction $f(k) = t(P(k))$.

On pose :

$\Omega(k) = \{(A_k, B_k) \mid A_k \text{ et } B_k \text{ sous-ensembles de } E(k) \text{ ayant } a(k) \text{ et } b(k) \text{ éléments}\}$

$C^*(k) = \{(A_k, B_k) \text{ tels que } (A_k, B_k) \text{ appartient à } \Omega(k) \text{ et } A_k \text{ et } B_k \text{ ont au moins un élément en commun}\}$.

Alors, on remarque que $P(k)$ s'exprime :

$P(k)$: « $(A(k), B(k))$ appartient à $C^*(k)$ »

Donc, on suppose que le pseudo-Axiome 2.4 du modèle équiprobable est valide pour $((A(k), B(k)), C^*(k), \Omega(k))$.

On obtient alors :

$P(k)$ est modélisée par l'évènement « $C^*(k)$ » (ou « $(A_k, B_k) \in C^*(k)$ ») de l'espace équiprobable $\Omega(k)$.

On rappelle la définition formelle d'une loi numérique aléatoire :

DEFINITION 3.1.1 :

Si $f(k)$ est une fonction définie sur un sous-ensemble F de \mathbb{N} et que pour tout k appartenant à F , $f(k)$ appartienne à un ensemble fini de réels $\{x_{k,1}, \dots, x_{k,n(k)}\}$, alors on aura la loi numérique aléatoire sur F « $f(k)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf(k)$ » si pour tout k appartenant à F , $Xf(k)$ soit à valeurs dans $\{x_{k,1}, \dots, x_{k,n(k)}\}$ et la proposition « $f(k) = x_{k,i}$ » soit modélisée par l'évènement « $Xf(k) = x_{k,i}$ », $Xf(k)$ étant pour tout k une variable aléatoire définie ou partiellement définie.

REMARQUE 3.1.2 :

Une application immédiate de cette Définition est le cas où pour k appartenant à un sous-ensemble F de \mathbb{N} , on a une proposition $P(k)$ qui est modélisée par un évènement $Ev(k)$ d'un espace probabilisable $(\Omega_k, \mathcal{B}, p_k)$, identifié avec Ω_k .

On définit alors la variable aléatoire $XtP(k)$ sur l'espace probabilisable Ω_k , à valeur dans $\{0,1\}$, et telle que l'évènement $Ev(k)$ est identifié à l'évènement « $XtP(k) = 1$ ». Alors comme $P(k)$ est équivalente à « $t(P(k)) = 1$ », on obtient la loi numérique aléatoire « $t(P(k))$ est modélisée par la variable aléatoire $XtP(k)$ » avec $p(XtP(k) = 1) = p_k(Ev(k))$

On obtient donc d'après cette remarque la loi numérique aléatoire :

$H(P(k))$ « $t(P(k))$ est modélisée par la variable aléatoire $XtP(k)$ avec :

$$p(XtP(k) = 1) = p_{eq\Omega(k)}(C^*(k)) = \frac{Card(C^*(k))}{Card(\Omega(k))} \gg.$$

On pose alors :

$C(k)(0) = \{(A_k, B_k) / (A_k, B_k) \text{ appartient à } \Omega(k) \text{ et } A_k \text{ et } B_k \text{ ont } 0 \text{ éléments en commun}\}$.
 Il est alors évident : $C^*(k) = \Omega(k) / C(k)(0)$

En utilisant les formules classiques de dénombrement on obtient :

$$\text{Card}(\Omega(k)) = C_{e(k)}^{a(k)} C_{e(k)}^{b(k)}$$

$$\text{Card}(C(k)(0)) = C_{e(k)}^{b(k)} C_{e(k)-b(k)}^{a(k)}$$

Donc :

$$p_{\text{eq}\Omega(k)}(C(k)(0)) = \left(\frac{e(k)-b(k)}{e(k)}\right) \left(\frac{e(k)-b(k)+1}{e(k)-1}\right) \dots \left(\frac{e(k)-b(k)-a(k)+1}{e(k)-a(k)+1}\right)$$

donc :

$$p_{\text{eq}\Omega(k)}(C(k)(0)) = \left(1 - \frac{b(k)}{e(k)}\right) \left(1 - \frac{b(k)}{e(k)-1}\right) \dots \left(1 - \frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1}\right)$$

On pose :

$$p(a(k), b(k), e(k)) = p_{\text{eq}\Omega(k)}(C(k)(0)).$$

On a donc :

$$p_{\text{eq}\Omega(k)}(C^*(k)) = 1 - p(a(k), b(k), e(k))$$

On cherche une approximation de $p(a(k), b(k), e(k))$.

On a :

$$\left(1 - \frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1}\right)^{a(k)} \leq p(a(k), b(k), e(k)) \leq \left(1 - \frac{b(k)}{e(k)}\right)^{a(k)}$$

De plus on peut écrire:

$$\left(1 - \frac{b(k)}{e(k)}\right)^{a(k)} = \exp\left(a(k) \text{Log}\left(1 - \frac{b(k)}{e(k)}\right)\right)$$

On verra plus loin en calculant les expressions de $a(k), b(k), e(k)$ que pour k tendant vers l'infini on a $a(k)/e(k)$ et $b(k)/e(k)$ tendent vers 0 et $a(k)b(k)/e(k)$ tend vers l'infini.

Dans la suite, la notation $\varepsilon_1(k)$ désignera toujours une fonction tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini.

En utilisant que si $\varepsilon_1(k)$ tend vers 0 pour k tend vers l'infini, alors il existe une fonction $\varepsilon_2(k)$ tendant aussi vers 0 pour k tendant vers l'infini telle que $\text{Log}(1+\varepsilon_1(k)) = \varepsilon_1(k) (1+\varepsilon_2(k))$, on arrive facilement à :

$$p(a(k), b(k), e(k)) = \exp\left(-\frac{a(k)b(k)}{e(k)}(1+\varepsilon(k))\right)$$

où $\varepsilon(k)$ est une fonction tendant vers 0 pour k tend vers l'infini.

Calculons maintenant $a(k), b(k), e(k)$.

$E(k)$ est l'ensemble des paires $\{x, y\}$ de naturels impairs inférieurs à k . $e(k)$ est le nombre d'éléments de $E(k)$.

Si k est pair, $k=2p$, il y a p naturels impairs inférieurs à k : $\{1, \dots, 2p-1\}$.

Donc $e(k) = (p^2-p)/2$, car il y a p^2 couples (x, y) mais p^2-p couples (x, y) avec $x \neq y$.

On a donc $e(k) = (p^2-p)/2 \approx k^2/8$

On emploiera la notation $f(k) \approx g(k)$ si il existe une fonction $\varepsilon(k)$ tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini avec $f(k) = g(k)(1+\varepsilon(k))$.

Il nous suffit d'étudier $P(k)$ pour k supérieur à 10000 car utilisant un ordinateur on a déjà montré que $P(k)$ était vrai pour k inférieur à 10000.

$A(k)$ est l'ensemble de paires $\{x, y\}$ de nombres premiers inférieurs à k , et on sait qu'une estimation du nombre de nombres premiers inférieurs à k est égale à $k/\text{Log}(k)$.

Il en résulte que le nombre d'éléments $a(k)$ de $A(k)$ est estimé par:

$$a(k) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\text{Log}(k)} \right)^2$$

Enfin B(k) est l'ensemble des paires {x,y} de nombres impairs tels que x+y=k.

On a (si k= 2p) pour x l'ensemble des valeurs {1,...,2p-1}, soit p valeurs, et alors y est complètement déterminé.

Il en résulte qu' une estimation de b(k) le nombre d'éléments de B(k) est :

$$b(k) \approx p/2 = k/4.$$

On obtient donc :

$$\frac{a(k)b(k)}{e(k)} \approx \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

D'où :

$$p(a(k), b(k), e(k)) = \exp\left(- \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} (1 + \varepsilon(k)) \right)$$

Et donc on a obtenu la loi numérique aléatoire, k étant un naturel pair supérieur à 10000 :

H(P(k)) : « t(P(k)) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(k)) avec :

$$p(Xt(P(k)) = 1) = 1 - p(a(k), b(k), e(k)) = 1 - \exp\left(- \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} (1 + \varepsilon(k)) \right) \gg$$

On calcule que prenant k = 10000, cette probabilité p(a(k),b(k),e(k)) est de l'ordre de 10⁻⁵².

APPLICATION 3.2 :

On considère la proposition P :

P : « Pour tout naturel k supérieur à 10000, k est la somme de 2 nombres premiers (distincts). »

On cherche à modéliser t(P) par une variable aléatoire Xt(P).

Si on applique le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes à H(P(k)), on obtient une loi numérique aléatoire H_{ind}(P(k)) identique à H(P(k)) mais dans laquelle les variables aléatoires X_{ind}t(P(k)) sont indépendantes. (On rappelle d'après la Remarque 2.9 que ceci peut aussi s'obtenir par application du pseudo-Axiome du modèle équiprobable, car on a obtenu H(P(k)) en utilisant ce pseudo-Axiome.)

Pour obtenir des propositions classiques à partir d'une loi numérique aléatoire, on utilise la Propriété de correspondance généralisée suivante :

Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 :

A) On a vu dans la Remarque 2.6 (utilisant la propriété de correspondance (Définition 2.1)) que si on avait des modélisations : « Pi est modélisée par l'évènement Evi », Evi évènement d'un Espace probabilisable (Ω, B, p_Ω), alors toute proposition P(P1,...,Pn) utilisant un nombre fini de Pi, de « ou », de « et » de « non », était modélisée par l'évènement P(Ev1,...,Evn).

On remarque que dans P(Ev1,...,Evn), on peut remplacer « et » par « ∩ », « ou » par « U », et « non » par « (Ω/) ».

On généralise cette proposition au cas où on a une infinité de modélisations « Pi est modélisée (ou est modélisée exactement) par Evi », i appartenant à un ensemble infini F et les Evi appartenant au même espace

probabilisable. Alors, par généralisation de la définition de « est modélisée » (ou de « est modélisée exactement ») dans ce cas :

La proposition $\bigcap_{i \in F} P_i$ est modélisée par l'évènement $\bigcap_{i \in F} E_{v_i}$.

On a la même propriété remplaçant l'intersection infinie par une union infinie.

Evidemment, $\bigcap_{i \in F} P_i$ signifie que pour tout i dans F , P_i est vraie, et $\bigcup_{i \in F} P_i$ signifie qu'au moins une proposition P_i est vraie, pour i dans F .

On appellera la Propriété de correspondance généralisée la propriété précédente.

B) Plus généralement, supposons dans B) qu'on ait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini « $f(k)$ est modélisée (ou modélisée exactement) par $Xf(k)$ », les variables aléatoires $Xf(k)$ étant définies sur le même espace probabilisable infini, et pour tout k $f(k)$ prenant un nombre fini de valeurs.

Supposons que les naturels $1, \dots, n$ appartiennent à F et qu'on ait une proposition $P(f(1), \dots, f(n))$ dont la véracité dépende seulement des valeurs prises par $f(1), \dots, f(n)$, c'est-à-dire que $P(f(1), \dots, f(n))$ est vraie ou fausse suivant les valeurs de $f(i)$, i appartenant à $\{1, \dots, n\}$.

Alors $P(f(1), \dots, f(n))$ est équivalent à une proposition de la forme :

« « $f(1)=a_{11}$ » et... et « $f(n)=a_{1n}$ » » ou... « $f(1)=a_{k1}$ » et... et « $f(n)=a_{kn}$ » »

Dans cette proposition la valeur des a_{ki} dépendent seulement de la proposition $P(f(1), \dots, f(n))$.

Appliquant la Propriété de correspondance (Définition 2.1) ou la Remarque 2.6, on obtient que $P(f(1), \dots, f(n))$ est modélisée (ou modélisée exactement) par l'évènement $P(Xf(1), \dots, Xf(n))$.

Ceci est vrai pour un nombre fini de $f(i)$, mais comme en A), on généralise cette Propriété avec une infinité de $f(i)$:

Si on a une proposition $P((f(i))_F)$ (avec donc F infini), dont la véracité dépende seulement de $(f(i))_F$, c'est-à-dire $P((f(i))_F)$ est vraie ou fausse suivant les valeurs de $f(i)$, i appartenant à F , alors on admettra, en généralisant la propriété précédente établie pour F fini, et donc en généralisant la propriété de correspondance, que $P((f(i))_F)$ est modélisée (ou est modélisée exactement) par $P(Xf(i))_F$.

On appellera aussi Propriété de correspondance généralisée la Propriété précédente, de laquelle on peut obtenir le A), considérant les propositions :

« Pour tout i de F , $t(P(i))=1$ » ou « Il existe i dans F , tel que $t(P(i))=1$ ».

D'après la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 précédente, i étant toujours un nombre pair, la

proposition $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "t(P(i)) = 1"$ est modélisée par $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "X_{ind} t(P(i)) = 1"$.

La proposition précédente étant équivalente à P et les variables $X_{ind}t(P(i))$ étant indépendantes, on a donc obtenu la loi numérique aléatoire $H(P)$:

$H(P)$: « $t(P)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xt(P)$ avec :

$$p(Xt(P) = 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=10000}^k (1 - \exp(-\frac{k}{(\text{Log}(k))^2} (1 + \varepsilon(k)))) \gg$$

En exprimant l'expression précédente en somme de logarithmes et en utilisant $\text{Log}(1+\varepsilon(x)) \approx \varepsilon(x)$, remarquant qu'on a des termes positifs et décroissant on peut approximer l'expression précédente par une intégrale. On obtient alors qu'elle est de l'ordre ou inférieure à 10^{-39} .

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :

$H(P)$: « $t(P)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xt(P)$ avec :

$p(Xt(P)=1)$ supérieur ou de l'ordre de $1-10^{-39}$ »

En utilisant alors le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact, on obtient $t(P)=1$, c'est-à-dire P qui est exactement la Conjecture de Goldbach. On rappelle que la Conjecture de Goldbach est une proposition illustrée et en accord avec tous les tests réalisés. Puisque P n'a jamais été contredite ni prouvée classiquement, on obtient donc que P a une explication aléatoire. (Déf 2.10)

On a donc montré :

- a) La conjecture de Goldbach a une explication théorique basée sur le hasard.
- b) Elle peut en effet être déduite de modèles statistiques complètement déterminés et dont on connaît l'origine de la validité (Les pseudo-Axiomes utilisés).
- c) Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la Conjecture de Goldbach n'a jamais été prouvée classiquement, il est donc très possible qu'elle soit seulement la conséquence du hasard et n'ait donc pas de preuve classique.

Donner une explication aléatoire à la Conjecture de Goldbach était l'objectif principal de cet article. Dans ce qui suit, on va donner une explication aléatoire à d'autres propositions liées à la Conjecture de Goldbach, notamment des propositions générales prévoyant que la Comète de Goldbach est une Comète et donnant la définition mathématique des courbes constituant cette Comète. Les propositions ayant une explication aléatoire qu'on va obtenir dans les 2 applications suivantes ne sont pas très précises pour décrire les propriétés générales de la Comète de Goldbach. Cependant, il est très possible qu'en affinant la T.A.N présentée dans cet article on obtienne des propositions beaucoup plus précises. Elles sont aussi les seules obtenues à ce jour exprimant des propriétés générales de la Comète de Goldbach qui soient justifiées et expliquées par une théorie mathématique. De plus, les 2 applications suivantes montrent comment utiliser la T.A.N pour obtenir d'autres types de propositions classiques ou de lois numériques aléatoires.

APPLICATION 3.3.

Nous allons maintenant obtenir des lois numériques aléatoires permettant de prédire certaines propriétés générales de la Comète de Goldbach.

On rappelle que $r(k)$ est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k .

On conservera les notations des 2 applications précédentes. Soit k un naturel pair et h un naturel inférieur à $\inf(a(k), b(k))$.

Considérons la proposition:

$\Pr(k)(h) : \ll r(k)=h \gg$.

Si on définit l'ensemble $C(k)(h)$ par :

$C(k)(h) = \{ (A_i, B_i) / (A_i, B_i) \text{ appartiennent à } \Omega(i) \text{ et } A_i \text{ et } B_i \text{ ont } h \text{ éléments en commun} \}$

Alors il est clair que $\Pr(k)(h)$ s'écrit :

$\Pr(k)(h) : \ll (A(k), B(k)) \text{ appartient à } C(k)(h) \gg$.

Si alors on considère que le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour $((A(k), B(k)), C(k)(h), \Omega(k))$, alors on obtient :

$\Pr(k)(h)$ est modélisée par l'évènement $C(k)(h)$ de l'espace équiprobable $\Omega(k)$.

Ce qui s'exprime aussi par la loi numérique aléatoire :

HPr(k) : La fonction $r(k)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xr(k)$ avec :

$p(Xr(k)=h) = p_{eq\Omega(k)}(C(k)(h)) \gg$

On obtient facilement en utilisant les formules de dénombrement :

$$Card(C(k)(h)) = C_{e(k)}^{a(k)} C_{a(k)}^h C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}$$

Donc :

$$p_{eq\Omega(i)}(C(k)(h)) = \frac{C_{a(k)}^h C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}}{C_{e(k)}^{b(k)}}$$

En appliquant le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes, on obtient une loi d'expression identique avec HPr(k), notée Hr_{ind} , mais dans lesquelles les variables aléatoires $Xr_{ind}(k)$ sont indépendantes.

Hr_{ind} : « Pour k naturel pair supérieur à 1000, $r(k)$ est modélisé par la variable aléatoire $Xr_{ind}(k)$, où les $Xr_{ind}(k)$ sont des variables aléatoires indépendantes (Sur un Univers infini) ayant les mêmes propriétés numériques que les $Xr(k)$. »

On cherche à obtenir par la TAN une estimation de $r(k)$. Considérons le cas général où l'on recherche une estimation par la TAN d'une fonction $f(k)$ définie sur un sous-ensemble infini de \mathbf{N} :

ETUDE THEORIQUE D'UNE FONCTION PAR LA TAN 3.3.1 :

On ne considèrera que 2 cas :

Dans le premier cas, on obtient par la TAN en utilisant un modèle statistique M1 une fonction F(k), telle que la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire :

$$P1 : \ll \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{f(k)}{F(k)} \right) = 1 \gg .$$

Dans le 2^{ème} cas, on obtient par la TAN, en utilisant un modèle statistique M2 une fonction F(k), deux fonctions $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ positives et tendant vers 0 telle que, posant $I(k)=[1-\varepsilon_1(k), 1+\varepsilon_2(k)]$, une proposition du type de la proposition suivante P2 a une pseudo-preuve aléatoire :

P2 : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times t \left(\frac{f(i)}{F(i)} \in I(i) \right) \geq p$ (En général on ne connaît pas explicitement F(n), mais on a F(n) équivalente à une fonction $F_A(n)$ connue)»

Dans la proposition précédente, p est un rationnel proche de 1 (p=0.98 par exemple). On a supposé que f(k) était définie sur N. Dans le cas général f(k) est définie sur un sous-ensemble infini F de N, et la sommation ne porte que sur les éléments de F. On divise alors par le nombre d'éléments de F inférieurs à n. P2 exprime qu'il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N la proportion des naturels k appartenant à F et inférieurs à n tels que f(k)/F(k) appartiennent à I(k) est supérieure à p.

Dans certains cas P1 et P2 sont illustrées par des tests et donc on obtient une estimation de r(k) donnée par ces propositions. Pour voir si P1 ou P2 sont illustrées par des tests, on trace les points (k, f(k)/F(k)) (ou (k, f(k)/F_A(k))) pour k aussi grand que possible. Si il apparaît que ces points (pour P1), ou un pourcentage proche de 1 de ces points (pour P2) tendent vers la droite d'équation y=1, alors P1 ou P2 sont illustrées par les tests. Dans certains cas, P1 ou P2 tout en étant vraies ne sont pas illustrées par les tests. C'est le cas quand on ne peut pas réaliser les tests (C'est-à-dire calculer f(k)/F(k) ou f(k)/F_A(k)) pour k assez grand, à cause de limites comme la puissance maximale des ordinateurs. Si il apparaît que les points (k, f(k)/F(k)) (ou (k, F_A(k))) sont proches de 1 et s'en rapprochent quand k augmente, on pourra considérer que P1 ou P2 sont *partiellement* illustrées par les tests, même si ceux-ci ne font pas apparaître que les points (k, f(k)/F(k)) (ou (k, F_A(k))) tendent vers la droite d'équation y=1. Dans ces cas, on doit essayer d'obtenir une fonction $F_B(k)$ plus précise que F(k) ou F_A(k) pour estimer f(k).

Cependant, P1 et P2 ne sont vraies que dans certains cas où les modèles M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2 sont valides avec une très bonne approximation. Un cas beaucoup plus général est le cas où M1 et M2, tout en étant valides avec une bonne approximation, ne le sont pas avec une qualité suffisante pour que les propositions du type P1 ou P2 qu'ils entraînent soient vraies. On remarque que toute proposition Q1 ou Q2 entraînée par P1 ou P2 a une pseudo-preuve aléatoire d'après la Définition 2.10. Cependant, pour que de telles propositions Q1 ou Q2 soient intéressantes, il faut d'une part qu'elles soient illustrées par des tests, mais aussi qu'elles illustrent la validité avec la meilleure qualité possible des modèles statistiques M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2. Ceci est vrai si les propositions Q1 ou Q2 sont les plus proches possible de P1 ou P2 qui correspondent à la meilleure qualité des modèles M1 ou M2. Ce sera le cas si les paramètres de Q1 ou Q2 sont le plus proche possible des paramètres de P1 ou P2.

Ainsi, dans le premier cas on considèrera que seules les propositions du type Q1 suivant ont une pseudo-preuve aléatoire intéressante :

$$Q1_A : \ll \text{Il existe un réel } L > 0 \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{f(k)}{F(k)} \right) = L \gg$$

On pourra aussi considérer la proposition $Q1_B$ plus générale que $Q1_A$:

$Q1_B$: « Il existe 2 réels strictement positifs α et β et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N, f(n)/F(n) appartienne à $[\alpha, \beta]$ »

Dans le 2^{ème} cas on considèrera que seules les propositions du type Q2 suivantes ont une pseudo-preuve aléatoire intéressante :

Q2 : « Il existe 2 réels strictement positifs α et β , et il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times t\left(\frac{f(i)}{F_A(i)} \in [\alpha, \beta]\right) \geq p - 0.01$$

Il est évident que si de telles propositions sont illustrées par des tests, elles illustrent la validité avec une bonne approximation des modèles M1 ou M2, car elles sont très proches des propositions P1 ou P2 (à cause du paramètre qui est la fonction F(k)).

On peut aussi considérer que plus L est proche de 1, meilleure est la qualité du modèle M1, et plus α et β sont proches de 1, meilleur est la qualité du modèle M2. Pour exprimer ceci, on peut dans la proposition Q1_A borner (au sens large) par un réel B1 la distance |L-1|, et dans la proposition Q2 ou Q1B borner par 2 réels B1 et B2 les distances $|\beta-1|+|\alpha-1|$ et $|\beta-\alpha|$. On obtient alors les propositions notées Q1_A(B1), Q2(B1,B2) et Q1_B(B1,B2).

Il est évident que si Q1_A(B1) ou Q2(B1,B2) sont illustrées par des tests, plus B1 et B2 sont proches de 0, meilleure est illustrée la qualité des modèles M1 ou M2. En effet, P1 est exactement Q1_A(0) et P2 entraîne que Q2(B1,B2) est vraie pour tous réels B1,B2 strictement supérieurs à 0.

Si on obtient que de telles propositions du type Q1 ou Q2 précédentes sont illustrées par des tests on peut s'attendre à ce qu'en améliorant le modèle statistique permettant de les obtenir, on puisse obtenir des propositions beaucoup plus précises du type P1 ou P2 pour estimer la fonction f(k). Cela sera le cas dans l'étude de la fonction r(k).

Il est clair qu'il peut exister a priori d'autres propositions que celles du type Q1 ou Q2 précédentes ayant une pseudo-preuve aléatoire et donnant une estimation d'une fonction f(k). Mais dans cet article, on ne considèrera que les propositions simples de ce type.

Appliquons l'Etude théorique précédente 3.3.1 à la fonction r(k), utilisant la loi numérique aléatoire Hr_{ind}.

On définit, pour k supérieur à 1000 l'intervalle de confiance minimum à 99% $J(k)=[m(k)-\varepsilon_G(k), m(k)+\varepsilon_G(k)]$ de $X_{r_{ind}}(k)$. $m(k)$ étant l'espérance de $X_{r_{ind}}(k)$, $\varepsilon_G(k)$ étant une fonction positive. $J(k)$ est un intervalle de confiance minimum à 99% de $X_{r_{ind}}(k)$ signifie :

$p(\ll X_{r_{ind}}(k) \text{ est élément de } J(k) \gg) \geq 0.99$ avec $\varepsilon_G(k)$ minimal (En fait dans ce qui suit, il suffit de supposer que $\varepsilon_G(k)$ tend vers 0).

On obtient d'après la théorie des probabilités, $m(k)=a(k)b(k)/e(k)$ ($a(k)$, $b(k)$, $e(k)$ ayant été précédemment définies). Donc $m(k) \approx R(k)=k/(\text{Log}(k))^2$.

On définit alors la variable aléatoire :

$Y(k)=t(\ll X_{r_{ind}}(k) \text{ est élément de } J(k) \gg)$.

Il est évident que les $Y(k)$ sont indépendantes (puisque les $X_{r_{ind}}(k)$ le sont) et de plus, les $Y(k)$ sont des lois binaires (prenant les valeurs 1 ou 0), et d'après la définition des intervalles $J(k)$: $p(\ll Y(k)=1 \gg) \geq 0.99$.

On rappelle la Loi Forte des Grands Nombres de Khintchine⁽⁵⁾ :

Si $(X_i)_N$ sont des variables aléatoires indépendantes, X_i ayant une espérance m_i et une variance σ_i^2 , les variances étant uniformément variées ($\sigma_i^2 < c$ pour tout i), alors $\left| \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n (X_i - m_i) \right|$ converge presque sûrement

vers 0 (La probabilité de l'évènement $\left| \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n (X_i - m_i) \right|$ tend vers 0 est égale à 1.

Appliquant la Loi de Khintchine précédente, on obtient que la probabilité de l'évènement suivant Ev(Y) est égale à 1 :

Ev(Y) : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\left(\sum_{i=1000}^n \frac{Y(i)}{(n-1000)/2+1} \right) \geq 0.98 \text{ (i naturel pair) } \gg$$

Or d'après la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1, la proposition suivante P(Y) est modélisée par l'évènement Ev(Y), et donc a une pseudo-preuve aléatoire:

P(Y) : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\left(\sum_{i=1000}^n \frac{t("r(i) \in J(i)")}{(n-1000)/2+1} \right) \geq 0.98 \gg$$

De plus on a « r(k) est élément de J(k) » est équivalent à « r(k)/m(k) est élément de $[1-\varepsilon_G(k))/m(k)$, $1+\varepsilon_G(k))/m(k)$ », ce qui est équivalent à ce qu'on ait, $\varepsilon(k)$ étant la fonction $\varepsilon_G(k)/m(k)$, et I(k) étant

l'intervalle $[1-\varepsilon(k), 1+\varepsilon(k)]$: « $r(k)/m(k)$ est élément de $I(k)$ ». On admettra $\varepsilon(k)=\varepsilon_G(k)/m(k)$ tend vers 0, ce qui est un pur problème de probabilité.

On a donc obtenu que la proposition suivante $P2_{eq}(r(k))$ a une pseudo-preuve aléatoire :

$P2_{eq}(r(k))$: « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\left(\sum_{i=1000}^n \frac{1}{(n-1000)/2+1} \times t\left(\frac{r(i)}{m(i)} \in I(i)\right) \right) \geq 0.98 \text{ , avec } m(i) \approx i/(\text{Log}(i))^2 \gg$$

La proposition $P2_{eq}(r(k))$ précédente est exactement du type de celle du 2^{ème} cas considéré dans l'Etude d'une fonction par la TAN 3.3.1. D'après l'aspect de la Comète de Goldbach, elle n'est pas illustrée par des tests (Sinon le graphe montrerait que les points $(k, r(k))$ se rapprochent tangentiellement de la courbe $(k, R(k))$. Ceci nous permet de conclure que le modèle équiprobable utilisé pour obtenir $X_{r_{ind}}(k)$ n'est pas exact.

Cependant d'après l'aspect de la Comète de Goldbach, la proposition $Q2_{eq}(r(k))$ suivante est illustrée par des tests :

$Q2_{eq}(r(k))$: « Il existe 2 réels α, β strictement positifs et il existe N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\left(\sum_{i=1000}^n \frac{1}{(n-1000)/2+1} \times t\left(\frac{r(i)}{R(i)} \in [\alpha, \beta]\right) \right) \geq 0.97 \text{ , avec } R(i) = i/(\text{Log}(i))^2 \gg$$

Or on a vu dans le chapitre 3.3.1 qu'une telle proposition avait une pseudo-preuve aléatoire et était intéressante. Elle apparaît comme étant vérifiée pour $\alpha=0.7$ et $\beta=2$. On voit que α et β sont de l'ordre de l'unité ce qui on l'a vu illustre la bonne qualité du modèle équiprobable considéré. On obtient donc que la proposition $Q2_{eq}(r(k), B1, B2)$ définie en 3.3.1 prenant $B1=B2=1.3$ a une pseudo-preuve aléatoire intéressante. Remarquant que la proposition précédente entraîne que le graphe $(k, r(k))$ a l'aspect d'une Comète, on voit donc que le modèle équiprobable considéré justifie l'aspect de la Comète de Goldbach, donnant la forme des équations des courbes $r_{min}(k)$ et $r_{Max}(k)$ (de la forme $Ck/(\text{Log}(k))^2$) délimitant cette Comète.

On a vu :

$$m(k) \approx \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

On obtient :

$$m(3000) \approx 48, \quad m(10000) \approx 117, \quad m(50000) \approx 427, \quad m(60000) \approx 496, \quad m(75000) \approx 595, \quad m(90000) \approx 691, \\ m(100000) \approx 756.$$

On peut vérifier que les points $(i, R(i))$ sont à l'intérieur de la Comète de Goldbach et que les courbes d'équation $r_{min}(k)=0.7k/(\text{Log}(k))^2$ et $r_{Max}(k)=2k/(\text{Log}(k))^2$ la délimitent.

On remarque aussi que les bandes observées sur la Comète de Goldbach ne sont pas prédites par la loi numérique aléatoire $H_{r_{ind}}$. Ceci est dû au fait que comme on l'a vu, cette loi numérique aléatoire n'est pas exacte. Nous verrons dans un second article qu'une estimation plus précise de la fonction $r(k)$ permet d'obtenir ces bandes.

Pour obtenir une autre loi aléatoire intéressante, on montre le Théorème suivant :

THEOREME 3.3.2 :

Si $f_1(k_1), \dots, f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis If_1, \dots, If_n et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_1(k_1), \dots, Xf_n(k_n)$ définies sur le même espace probabilisable (k_1, \dots, k_n) étant des naturels quelconques, et f_1, \dots, f_n des fonctions. $Xf_i(k_i)$ est donc à valeurs dans If_i , alors pour toute fonction $F(f_1(k_1), \dots, f_n(k_n))$ à valeur dans $\{h_1, \dots, h_m\}$, et pour tout l dans $\{1, \dots, m\}$:

« $F(f_1(k_1), \dots, f_n(k_n))=h_l$ » est modélisée par l'évènement « $F(Xf_1(k_1), \dots, Xf_n(k_n))=h_l$ ».

Démonstration :

D'après l'hypothèse, les $f_i(k_i)$ prennent un nombre fini de valeurs dans l'ensemble fini If_i :

Donc l'équation : « $F(x_1, \dots, x_n) = h_1$ pour x_i appartient à If_i » admet un nombre fini de solutions. Soit s ce nombre.

On peut donc écrire ces solutions sous la forme :

$(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{s1}, \dots, a_{sn})$.

Alors on a : « $F(f_1(k_1), \dots, f_n(k_n)) = h_1$ » est équivalent à la proposition:

« « $f_1(k_1) = a_{11}$ et... et $f_n(k_n) = a_{1n}$ » ou... ou « $f_1(k_1) = a_{s1}$ et et $f_n(k_n) = a_{sn}$ » ».

Alors en utilisant la Remarque 2.6 et que « $f_i(k_i) = a_{ji}$ » est modélisée par « $Xf_i(k_i) = a_{ji}$ », on obtient :

« $F(f_1(k_1), \dots, f_n(k_n)) = h_1$ » est modélisé par l'évènement :

« $Xf_1(k_1) = a_{11}$ et et $Xf_n(k_n) = a_{1n}$ » ou... ou « $Xf_1(k_1) = a_{s1}$ et et $Xf_n(k_n) = a_{sn}$ »

Or il est clair que cet évènement est équivalent à :

« $F(Xf_1(k_1), \dots, Xf_n(k_n)) = h_1$. » (puisque les variables aléatoires $Xf_i(k_i)$ sont à valeurs dans If_i).

On a donc montré :

« $F(f_1(k_1), \dots, f_n(k_n)) = h_1$ » est modélisée par « $F(Xf_1(k_1), \dots, Xf_n(k_n)) = h_1$ ».

Ceci étant vrai pour tout h_1 dans $\{h_1, \dots, h_m\}$, on a donc le corollaire immédiat :

COROLLAIRE 3.3.3 :

Si $f_1(k_1), \dots, f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_1(k_1), \dots, Xf_n(k_n)$ définies dans le même espace probabilisable, alors toute fonction $F(f_1(k_1), \dots, f_n(k_n))$ est modélisée par la variable aléatoire : $F(Xf_1(k_1), \dots, Xf_n(k_n))$.

Il est évident qu'on peut remplacer dans ce qui précède « est modélisée » par « est modélisée exactement », puisque comme on l'a utilisé dans la Remarque 2.6, la propriété de correspondance est valide dans les 2 cas. De plus, on aurait pu aussi prendre $k_1 = \dots = k_n = k$, puisque les k_i sont des naturels quelconques, ou remplacer $f_i(k_i)$ par $f(k_i)$ puisque les f_i sont des fonctions quelconques (à valeur dans des ensembles finis).

Appliquant ce Corollaire, on obtient la loi numérique aléatoire (prenant pour « $f_i(k_i)$ » les « $r(i)$ »):

H_{moyr} : « Si on considère $k = 220p$, où p naturel supérieur à 50, et si $f_{moy}(k)$ est définie pour $k = 220p$ par :

$$f_{moy}(k) = \frac{1}{101} \times \sum_{i=k-100}^{i=k+100} r(i)$$

alors $f_{moy}(k)$ est modélisée par la variable aléatoire :

$$Xf_{moy}(k) = \frac{1}{101} \times \sum_{i=k-100}^{i=k+100} Xr_{ind}(i) \text{ »}$$

Les $Xr_{ind}(i)$ ayant été définis précédemment. On rappelle qu'on a défini ces variables aléatoires sur le même espace probabilisable, et de plus plus généralement on peut considérer par définition que des variables aléatoires indépendantes doivent être définies sur le même espace probabilisable. On est donc dans le cas d'application du Corollaire 3.3.3.

L'intérêt de la loi numérique aléatoire précédente est que d'une part les $Xf_{moy}(k)$ sont indépendants, et que d'autre part si on considère que pour i dans $[k-100, k+100]$ la moyenne $m(i)$ et la variance $v(i)$ de $Xr_{ind}(i)$ varient peu et sont proches de $m(k)$ et $v(k)$, on peut s'attendre en procédant comme pour obtenir la loi faible des grands nombres à ce que $Xf_{moy}(k)$ soit proche de $m(k) \approx R(k) = k / (\text{Log}(k))^2$.

Pour étudier la fonction $f_{moy}(k)$, on doit procéder comme dans l'étude de l'Exemple précédent étudiant $r(k)$. On obtient donc des intervalles de confiance à 99% $I(k)$ de la variable aléatoire $Xf_{moy}(k) / (E(Xf_{moy}(k)))$.

On obtient alors des propositions illustrées par des tests ayant une pseudo-preuve aléatoires $Q2_{eq}(f_{moy}(k))$ et $Q2_{eq}(f_{moy}(k), B1, B2)$ analogues aux propositions $Q2_{eq}(r(k))$ et $Q2_{eq}(r(k), B1, B2)$ obtenues dans l'Exemple précédent.

4. CONCLUSION

On a donc présenté une théorie aléatoire des nombres (T.A.N), basée sur des nouvelles Définitions et pseudo-Axiomes introduisant les lois du hasard dans la Théorie des nombres, qui apparaît comme étant fondamentale pour proposer une solution à des problèmes qui n'ont jamais été résolus comme par exemple la

Conjecture faible de Goldbach. On a vu que la T.A.N était basée sur l'Axiome du Hasard, cette Axiome du Hasard entraînant la nécessité d'une nouvelle logique, logique du hasard constituée par les pseudo-Axiomes. On peut penser avec quasi certitude que de nombreuses propositions vraies en théorie des nombres n'ont pas d'autres explications théoriques qu'une explication théorique aléatoire, c'est-à-dire basée sur le hasard. La T.A.N peut être considérée comme la théorie permettant l'étude de ces propositions. On peut s'attendre qu'on ne puisse pas montrer qu'une proposition en théorie des nombres ait une *démonstration* basée sur le hasard d'une part car cela n'a jamais été fait pour aucune proposition et d'autre part parce que les Axiomes classiques de la Théorie des nombres n'introduisent pas le hasard contrairement aux pseudo-Axiomes de la T.A.N.

Le fait qu'une proposition ait une explication aléatoire est fondamental car cela signifie :

- a) Qu'on a montré qu'elle a une explication théorique basée sur le hasard.
- b) Qu'on a déterminé précisément les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence et l'origine de la validité de ces modèles.
- c) Que cette explication est fondamentale puisque la proposition n'a pas de preuve classique, et qu'il est tout à fait possible que celle-ci n'existe pas si la seule origine de la validité de la proposition est le hasard et ses lois concernant les nombres.

On a donc vu que les pseudo Axiomes étaient fondamentaux en T.A.N, puisqu'ils introduisaient des modèles statistiques. Le fait qu'ils ne soient pas toujours valides est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides ou invalides dans des situations totalement analogues.

En fait, il semble exclu qu'une théorie du hasard en Théorie des nombres existe sans contenir des pseudo-Axiomes et Axiomes analogues à ceux que nous avons présentés dans cet article. Nous avons proposé dans cet article l'application de la T.A.N à la Conjecture faible de Goldbach parce que c'est l'application simple la plus intéressante, mais il existe des applications beaucoup plus simples et évidentes.

Par exemple on obtient facilement en utilisant les Axiomes et pseudo-Axiomes présentés dans cet article les propriétés statistiques des décimales de nombreux réels ($\pi..$). Ces exemples sont les plus simples et évidentes applications de la T.A.N, et constituent la plus évidente preuve de sa validité et de son importance, et en particulier de la validité du pseudo-Axiome du modèle équiprobable présenté dans cet article. On obtient dans ces exemples des modèles statistiques exacts (Déf.2.1), et donc des lois numériques aléatoires exactes, et des explications théoriques aléatoires à de nombreuses propositions exprimant les propriétés statistiques des décimales de réels.

Comme toutes les propositions ayant une explication aléatoire, si on arrivait à prouver classiquement la Conjecture faible de Goldbach ou les propriétés générales de la Comète de Goldbach qu'on a obtenues dans cet article, alors leur explication théorique basée sur la T.A.N perdrait son intérêt. Cependant, cela fait plus de 2 siècles qu'on essaie sans succès de les démontrer, alors qu'on a déjà montré (par Vinogradov) toutes les formules analogues prouvant que tout nombre pair est la somme de $2n$ nombres premiers, avec n supérieur à 2, et une explication serait que la Conjecture faible et forte de Goldbach aient une origine purement due au hasard, sans preuve classique.

En fait, il est certain qu'il existe d'autres pseudo-Axiomes aléatoires que ceux présentés dans cet article, mais ils doivent nécessairement avoir un caractère d'évidence et de simplicité. Nous verrons dans un second article (T.A.N-Partie II) qu'il est possible d'obtenir par la TAN la Conjecture Forte de Goldbach, c'est-à-dire une estimation de $r(k)$ très proche de la Conjecture de Hardy et Littlewood ⁽⁶⁾. Ceci est cependant plus complexe que l'obtention de la Conjecture faible de Goldbach ($r(k) > 0$ pour tout k pair). Nous verrons aussi dans ce second article qu'il est possible d'obtenir la Conjecture Forte des nombres premiers jumeaux qui est exactement celle proposée par Hardy et Littlewood. C'est aussi un très grand succès de la TAN.

References :

- 1.E.J Borowski, J.M Borwein, *Mathematics, Collins Dictionnary* (GB 1984).
- 2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Belin (Paris 2000)
- 3.M.R Spiegel, J.S Schiller, R.Srinivasan, *Probability and Statistics*, McGraw Hill (2000)
4. P.Roger, *Probabilités statistiques et processus stochastiques*, Pearson (France 2004).
- 5.O.Rioul, *Théorie des probabilités*, Lavoisier, (Paris 2008).
- 6.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta mathematica (1923).

Titre : THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES- PARTIE II : CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.

Auteur :Thierry DELORT

Date : 31 Octobre 2011

Résumé :

Dans un premier article ⁽⁵⁾ (Théorie aléatoire des nombres- Partie I : Conjecture de Goldbach), nous avons présenté les bases d'une théorie aléatoire des nombres, permettant de donner une explication basée sur le hasard à de nombreuses propositions qui semblent vraies mais n'ont pas de preuve classique. Nous avons appelé *explications aléatoires* de telles explications rationnelles basées sur le hasard. C'était en particulier le cas pour la Conjecture faible de Goldbach, et pour des propositions décrivant l'aspect général de la Comète de Goldbach.

Dans cet article, nous développons la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN), et il apparaît qu'elle donne aussi des explications aléatoires à des propositions concernant les décimales d'irrationnels ou concernant un certain type de sous-ensembles infinis de \mathbf{N} , les *ensembles estimés*, qui sont des ensembles dont on a une estimation du nombre d'éléments inférieurs à n .

Nous donnons aussi des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

1.INTRODUCTION

Dans un premier article ⁽⁵⁾ (Théorie aléatoire des nombres- Partie I :Conjecture faible de Goldbach), on a présenté une Théorie Aléatoire des Nombres permettant de donner des explications théoriques mathématiques basées sur le hasard à de nombreuses propositions qui n'ont pas de démonstration dans la Théorie des nombres classiques. On a défini complètement ces explications théoriques mathématiques basées sur le hasard qu'on a appelées *explications aléatoires*. On a vu en particulier que tel était le cas pour la Conjecture faible de Goldbach, et que la Théorie Aléatoire des Nombres permettait de lui donner non seulement une explication aléatoire, mais aussi d'en donner à des propositions décrivant l'aspect général de la Comète de Goldbach. Ceci était fondamental puisque ni la Conjecture faible de Goldbach ni ces propositions décrivant l'aspect général de la Comète de Goldbach n'ont de démonstration classique.

On rappelle que la T.A.N est basée sur l'Axiome du Hasard exprimant l'existence de modèles statistiques non-certains (c'est-à-dire non démontrable classiquement) exprimant des propriétés des nombres. On a vu que cet Axiome entraînait la nécessité d'introduire une nouvelle logique du hasard utilisant des pseudo-Axiomes aléatoires, qui sont des propositions particulières propres à la TAN, définies dans le premier article ⁽⁵⁾, exprimant notamment la validité de modèles statistiques dans certains cas. Ces pseudo-Axiomes aléatoires sont analogues à des Axiomes classiques. Leur particularité est qu'ils ne sont pas toujours valides : Les modèles statistiques qu'ils permettent d'obtenir peuvent être valides dans un cas et invalides dans un cas complètement analogue. Cependant, tout comme les Axiomes classiques, ils sont simples et on peut les justifier par des arguments intuitifs évidents. Tout comme les Axiomes classique, ils n'ont cependant pas de démonstration.

Dans cet article, on présente de nouvelles applications de la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN). La première application présentée dans ce 2^{ème} article est aussi la plus simple de la TAN . Elle permet d'étudier les propriétés des décimales de nombreux irrationnels. Là encore non seulement on montre que des propositions prévoyant qu'elles ont un nombre infini de répétitions de chiffres ont des explications aléatoires, mais que c'est aussi le cas pour des propositions prévoyant la fréquence d'apparition de ces répétitions de chiffres. Là encore ces *explications aléatoires* (c'est-à-dire donc basées sur le hasard) sont fondamentales puisque ces propositions n'ont pas de démonstration classique.

La deuxième application présentée dans ce 2^{ème} article permet l'étude des *ensembles estimés* c'est-à-dire des sous-ensembles infinis de \mathbf{N} dont on a une estimation de leur nombre d'éléments inférieurs à n pour n tendant vers l'infini.

Comme troisième applications de la T.A.N, on a donné une explication aléatoire à la Conjecture Forte de Goldbach, donnant une expression de $r(k)$, nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k .

$$r(n) \cong \Pi_2 \left(\prod_{p/n, p \geq 3} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{n}{\ln(n)^2} \text{ où } \Pi_2 \approx 0,66016$$

Cette expression diffère d'un facteur 2 de l'expression proposée par Hardy et Littlewood ⁽⁷⁾ mais elle est en bien meilleur accord avec la Comète de Godbach obtenue par ordinateur.

On donnera aussi une explication aléatoire à la Conjecture Forte des Nombres Premiers jumeaux qui est exactement l'expression proposée par Hardy et Littlewood.

2.THEORIE (RAPPELS)

A)RAPPELS THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES

On a vu ⁽⁵⁾ que la TAN permettait d'étudier le hasard dans la Théorie des nombres. Elle était basée sur des *pseudo-Axiomes aléatoires* qui sont des propositions simples introduisant le hasard sous la forme de modèles statistiques, mais qui contrairement aux Axiomes ne sont pas toujours valides. Ceci est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides dans un cas et non valides dans d'autres cas complètement analogues.

On a dans le premier article ⁽⁵⁾ défini le concept qu'une proposition P est *modélisée* (resp. *modélisée exactement*) par un événement Ev . Dans cette définition, on avait la *propriété de correspondance*. Cette propriété fondamentale exprimait que si on avait une proposition $P1$ modélisée (resp. modélisée exactement) par un événement $Ev1$, et qu'une autre proposition $P2$ était modélisée (resp. modélisée exactement) par un événement $Ev2$, alors on avait $\text{Non}(P1)$ était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement $Ev1$, et si $Ev1$ et $Ev2$ appartenaient au même espace probabilisable, la proposition « $P1$ et $P2$ » était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement « $Ev1$ et $Ev2$ », et la proposition « $P1$ ou $P2$ » était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement « $Ev1$ ou $Ev2$ ».

Nous avons généralisé cette propriété au cas où on avait une infinité de propositions P_i , i appartenant à un sous-ensemble E de \mathbf{N} , modélisées (resp. modélisées exactement) par des événements Ev_i appartenant au même espace probabilisable, d'Univers infini. Alors la propriété de correspondance généralisée exprimait que la proposition $\bigcap (P_i)_E$ (qui était par définition équivalente à la proposition « Pour tout i dans E , P_i est vraie ») était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement $\bigcap (Ev_i)_E$. Et une propriété analogue pour l'union.

De plus, d'après la Définition, si $P1$ est modélisée exactement par un événement $Ev1$, alors $P1$ se comporte comme si elle avait la probabilité $p(Ev1)$ d'être vraie. Si la proposition $P1$ est modélisée par l'évènement $Ev1$, alors dans certains cas particuliers $P1$ est modélisée exactement par $Ev1$, et dans d'autres cas particuliers $P1$ se comporte comme si elle avait la probabilité $p1$ d'être vraie, avec $p1 \approx p(Ev1)$.

Dans le cas où $P1$ se comporte comme si elle avait la probabilité $p1$ d'être vraie, avec $p1 \approx p(Ev1)$, on dira que $P1$ est *modélisée presque exactement* par $Ev1$.

Ainsi dans la TAN, les concepts « est modélisée », « est modélisée presque exactement », ou « est modélisée exactement » permettent de représenter de façon plus ou moins complète les propriétés statistiques de propositions.

Un deuxième concept fondamental de la TAN était celui de propositions particulières appelées *lois numériques aléatoires*.

DEFINITION 2.A.1 :

a) Si $f(k)$ est une fonction d'un sous-ensemble F de \mathbf{N} dans \mathbf{N} , on appelle *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :

« $f(k)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf(k)$ »

Par Définition, cela signifie que pour tout k dans F , $f(k)$ est à valeur dans un sous-ensemble fini $F(k)$ de \mathbf{R} , que $Xf(k)$ est une variable aléatoire aussi à valeur dans $F(k)$, et que pour tout i_k dans $F(k)$, la proposition « $f(k)=i_k$ » est modélisée par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».

b) Si on a la loi numérique aléatoire définie précédemment, on dira qu'elle est *exacte* si on a toujours « $f(k)=i_k$ » est modélisée exactement par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».

On dira alors aussi que « $f(k)$ est *modélisée exactement* par la variable aléatoire $Xf(k)$ ».

On a généralisé aussi la propriété de correspondance dans le cas où on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini, et que toutes les variables aléatoires étaient définies sur le même espace probabilisable. Cette propriété de correspondance généralisée exprime qu'avec les hypothèses précédentes, si on a une proposition $P(f(k)_F)$ dont la validité dépend seulement de la suite $(f(k))_F$, alors la proposition $P(f(k)_F)$ est modélisée par l'évènement $P((Xf(k))_F)$, lorsque $P((Xf(k))_F)$ est un évènement. On avait montré ceci lorsque F était fini, en utilisant la propriété de correspondance, et on l'avait généralisé dans le cas où F était infini. Une conséquence de la propriété de correspondance était donc, utilisant ce qui précède, que si on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F : « $f(k)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf(k)$ », les $Xf(k)$ étant définies sur le même espace probabilisable, alors pour tout multiplet (i_1, \dots, i_n) de F^n , et pour toute fonction $G(x_1, \dots, x_n)$ de \mathbf{N}^n dans \mathbf{R} , alors la fonction $G(f(i_1), \dots, f(i_n))$ était modélisée par la variable aléatoire

$G(Xf(i_1), \dots, Xf(i_n))$. (C'est-à-dire que pour toute valeur h prise par $G(f(i_1), \dots, f(i_n))$, « $G(f(i_1), \dots, f(i_n))=h$ » est modélisée par l'évènement « $G(Xf(i_1), \dots, Xf(i_n))=h$ »).

On a vu que par Définition de « est modélisée », si une proposition P est modélisée par un évènement Ev , alors dans certains cas particuliers P est modélisée exactement par Ev et dans d'autres P est modélisée presque exactement par Ev . A cause de cela, on a un pseudo-Axiome aléatoire fondamental, la *pseudo-Axiome du modèle exact*, qu'on utilise toujours pour obtenir qu'une proposition classique a une explication aléatoire :

PSEUDO-AXIOME 2.A.2 (du modèle exact):

Si P est une proposition classique et si on a la loi numérique aléatoire sur un ensemble $F=\{1\}$:

« $t(P)(1)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xt(P)(1)$ »

($t(P)$ étant classiquement la fonction vérité de P , à valeurs dans $\{0,1\}$), et qu'on a de plus $p(Xt(P)(1)=1) \approx 1$, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle exact est valide pour cette loi numérique aléatoire précédente, on a $t(P)=1$. (Et donc P est vraie).

Il est évident que si on a la proposition « $t(P)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xt(P)$ », on peut identifier cette proposition à une loi numérique aléatoire sur un ensemble $F=\{1\}$, et donc appliquer le pseudo-Axiome précédent si on a $p(Xt(P)=1) \approx 1$.

Dans le précédent article ⁽⁵⁾, les modèles statistiques étaient basées sur des espace probabilisables équiprobables. On a utilisé de tels modèles pour donner des explications aléatoires à la Conjecture de Goldbach ou à des propositions décrivant les propriétés de la Comète de Goldbach. Ces modèles étaient obtenus par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable suivant :

PSEUDO-AXIOME 2.A.3 (du modèle équiprobable) :

Si on a une proposition P_k : « x_k est élément de A_k », A_k étant un ensemble fini dont on connaît le nombre d'éléments, sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k dont on connaît aussi le nombre d'éléments, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k, A_k, Ω_k) , la proposition P_k : « x_k est élément de A_k » est modélisée par l'évènement Ev_k : « $x_{(k)}$ est élément de A_k » de l'espace probabilisable équiprobable $(\Omega_k, P(\Omega_k), p_{eq\Omega_k})$, qu'on appellera plus simplement espace équiprobable Ω_k .

La probabilité dans cet espace de Ev_k est donc égale à $Card(A_k)/Card(\Omega_k)$.

En fait le pseudo-Axiome du modèle équiprobable précédent, ainsi comme on le verra les pseudo-Axiomes donnant un modèle statistique aux ensembles estimés, permettent d'obtenir des lois numériques aléatoires, mais dans lesquelles les variables aléatoires ne sont pas définies sur le même espace probabilisable. Or la seule possibilité d'obtenir des résultats intéressants est que ces variables aléatoires non seulement soient définies sur le même espace probabilisable mais aussi soient indépendantes.

On doit donc utiliser un pseudo-Axiome permettant d'obtenir que ces variables aléatoires sont indépendantes, le *pseudo-Axiome des variables indépendantes* ce qui est possible car on a vu que l'application d'un pseudo-Axiome aléatoire n'est pas toujours valide, contrairement à un Axiome, puisque les modèles statistiques qu'il introduit ne sont pas toujours valides.

PSEUDO-AXIOME 2.A.4 (des variables indépendantes) :

Si on a une loi numérique aléatoire sur F « $f(k)$ est modélisée par $Xf(k)$ », alors lorsque le pseudo-Axiome des variables aléatoires est valide pour cette loi, on obtient la loi précédente dans laquelle les variables aléatoires $Xf(k)$ sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes.

Si une proposition admet une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication rationnelle basée sur le hasard obtenue par la TAN, cette explication est différente d'une preuve classique basée sur les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres. En effet, elle est basée sur l'existence de certains modèles statistiques, obtenus par des pseudo-Axiomes, qui ne sont pas toujours valides. On définit donc de la façon suivante une *explication aléatoire* :

DEFINITION 2.A.5 :

- a) On appelle *pseudo-preuve aléatoire* d'une loi numérique aléatoire ou d'une proposition classique son obtention utilisant certains pseudo-Axiomes de la TAN ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.

- b) Si une proposition classique ou une loi numérique aléatoire a une pseudo-preuve aléatoire et que de plus on ne l'a jamais montré classiquement ni sa négation, alors on dira qu'elle a une *explication aléatoire*.

Comme on l'a vu dans l'article ⁽⁵⁾, c'est surtout pour les propositions illustrées par de nombreux tests (résultats obtenus par des nombres finis d'opérations, éventuellement par un ordinateur) qu'il est le plus intéressant d'obtenir une explication aléatoire. Ceci était notamment le cas pour la Conjecture de Goldbach et les autres propositions obtenues décrivant la Comète de Goldbach.

B.RAPPELS :THEORIE DES PROBABILITES

On rappelle les éléments basiques mais fondamentaux de la théorie des probabilités :

THEOREM 2.B.1 :

Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires :

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

THEOREM 2.B.2 :

Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes, $v(X_i)$ étant la variance de X_i :

$$v\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n v(X_i)$$

DEFINITION 2.B.3 :

Si X est une variable aléatoire avec les 2 événements « $X=1$ » et « $X=0$ » alors X est une loi binomiale.

THEOREM 2.B.4 :

Si X est une loi binomiale de loi p ($p(X=1)=p$), alors :

$$E(X)=p \text{ et } v(X)=p(1-p)$$

DEFINITION 2.B.5 :

Si $(X_i)_N$ est une suite de variables aléatoires définie sur un espace probabilisable (Ω, B, p) , alors la suite $(X_i)_N$ converge en probabilité vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon, \delta) / \forall n \geq N(\varepsilon, \delta), p(" |X_i - a| \leq \varepsilon") \geq 1 - \delta$$

DEFINITION 2.B.6 :

Si $(X_i)_N$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisable (Ω, B, p) , la suite $(X_i)_N$ converge presque sûrement vers a si « $\lim_{n \rightarrow \infty} X_i = a$ » est un événement de la tribu B de probabilité égale à 1.

On écrira aussi ceci :

$$p(" \lim_{n \rightarrow \infty} X_i = a") = 1$$

Il est aussi intéressant d'introduire la notion de convergence absolue en probabilité.

DEFINITION 2.B.7 :

$(X_i)_N$ étant une suite de variable aléatoire, la suite $(X_i)_N$ converge absolument en probabilité vers a (a réel) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon, \delta) / \forall n \geq N(\varepsilon, \delta), p\left(\bigcap_{i=N(\varepsilon, \delta)}^n " |X_i - a| \leq \varepsilon" \right) \geq 1 - \delta$$

On a évidemment que si la suite $(X_i)_N$ converge absolument en probabilité vers a , alors elle converge en probabilité vers a . On montre de plus le Théorème :

THEOREM 2.B.8 :

Si la suite de variables aléatoires $(Y_i)_N$ définie sur un espace probabilisable (Ω, B, p) converge absolument en probabilité vers a , alors elle converge presque sûrement vers a .

(On donne la démonstration de ce Théorème à car il pourrait permettre de démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée que nous définirons plus loin).

Démonstration :

On suppose $a=1$ (si $a \neq 1$ on considère Y_i/a).

D'après la définition de la convergence absolue en probabilité :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon, \delta) / \forall n > N(\varepsilon, \delta), p\left(\bigcap_{i=N(\varepsilon, \delta)}^n |Y_i - 1| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \delta$$

On veut prouver:

$$p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1\right) = 1$$

où « $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1$ » représente l'évènement de Ω pour lequel la suite $(Y_n)_N$ tend vers 1.

Soit $\delta > 0$, on définit la suite de naturels N_k par, pour k dans N^* :

$$N_k = N(1/k, \delta).$$

Ceci signifie:

$$\forall n \geq N_k, p\left(\bigcap_{i=N_k}^n |Y_i - 1| \leq 1/k\right) \geq 1 - \delta$$

On définit alors les évènements E_k par :

$$E_k: \ll \exists M_k / \forall n \geq M_k, |Y_n - 1| \leq 1/k \gg$$

Si on considère l'évènement: $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

Il est évident que :

$$" \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1 " \subset " (Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k " \text{ et } " (Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k " \subset " \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1 "$$

Donc les 2 évènements précédents sont identiques.

De plus la suite d'évènements E_k est décroissante donc :

$$p\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{p \rightarrow \infty} p(E_p)$$

De plus, il est évident que:

$$\bigcap_{i=N_p}^{\infty} |Y_i - 1| \leq 1/p \subset E_p$$

Et donc:

$$p(E_p) \geq p\left(\bigcap_{i=N_p}^{\infty} |Y_i - 1| \leq 1/p\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\bigcap_{i=N_p}^n |Y_i - 1| \leq 1/p\right) \geq 1 - \delta$$

Et donc:

$$p\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{p \rightarrow \infty} p(E_p) \geq 1 - \delta$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$:

$$p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1\right) = p\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$$

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres et la Loi Forte des Grands Nombres:

Loi Faible des Grands nombres 2.B.9:

Si on a une suite $(X_i)_N$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors la suite

$$Y_n = \sum_{i=0}^n \frac{X_i}{n} \text{ converge simplement vers } \mu = E(X_i). \text{ (Si } \mu \text{ est fini).}$$

Loi Forte des Grands Nombres 2.B.10 :

Avec les hypothèses et les notations précédentes, la suite $(Y_n)_N$ converge presque sûrement vers μ .

On a vu que la convergence absolue en probabilité entraînait la convergence presque sûre. Il est donc intéressant de considérer la Loi Forte des Grands Nombres 2^{ième} forme :

Loi Forte de Grands Nombres 2^{ième} forme 2.B.11:

Avec les hypothèses et notations précédentes la suite $(Y_n)_N$ converge absolument en probabilité vers μ .

On utilisera aussi l'Inégalité de Chebyshev :

THEOREM 2.B.12 :

Si Y est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2 , si ε est un réel strictement positif :

$$P(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

On rappelle aussi le résultat utilisé dans l'article ⁽⁵⁾ :

THEOREM 2.B.13 :

Si E est un ensemble à n éléments, E(a) et E(b) étant les ensembles des sous-ensembles de E ayant a et b éléments, si X_I est la variable aléatoire définie sur l'espace équiprobable $E(a) \times E(b)$ donnant le nombre d'éléments communs de A et B pour (A,B) dans $E(a) \times E(b)$, on a alors :

$$E(X_I) = \frac{ab}{n}$$

3.DECIMALES D'IRRATIONNELS

La TAN permet d'obtenir très simplement de nombreux résultats sur les décimales d'irrationnels dont on peut vérifier la validité en utilisant des ordinateurs mais qui n'ont jamais été prouvés classiquement. Nous allons en proposer 2 exemples :

EXEMPLE 3.1

Montrons comme premier exemple que la proposition :

P : « $\sqrt{3}$ a dans ses décimales une infinité de fois le nombre 5 » a une explication aléatoire, c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir en utilisant les pseudo-Axiomes de la TAN, alors qu'on ne l'a jamais démontrée classiquement. La méthode suivante est générale, on aurait pu remplacer $\sqrt{3}$ par π , $\sqrt{2}$, $\text{Log}(5)$... et 5 par n'importe quel autre chiffre.

La proposition P admet la pseudo-preuve aléatoire suivante :

On note $f(i)$ la fonction donnant la valeur de la i^{ème} décimale de $\sqrt{3}$.

On a donc :

$f(i)$ appartient à $A_i = \{0, 1, \dots, 9\}$.

En appliquant le pseudo-Axiome 2.A.3 du modèle équiprobable, on obtient que la proposition « $f(i)$ est élément de $\{5\}$ » est modélisé par un évènement de probabilité $\text{Card}(\{5\})/\text{Card}(A_i) = 1/10$.

Si on pose pour tout i dans \mathbf{N}^* , $g(i) = t(\ll f(i)=5 \gg)$, c'est-à-dire $g(i)=1$ si $f(i)=5$, et $g(i)=0$ sinon, on obtient la loi numérique aléatoire sur \mathbf{N}^* :

« $g(i)$ est modélisée par $Xg(i)$ », avec $p(\ll Xg(i)=1 \gg) = 1/10$.

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variables indépendantes à la loi numérique aléatoire précédente, on peut alors supposer que les $Xg(i)$ sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes. i étant un naturel non nul quelconque, on cherche à modéliser par un évènement la proposition : P_i : « Il existe au moins un naturel $k(i)$ supérieur ou égal à i tel que la $k(i)^{\text{ème}}$ décimale soit égale à 5 ». Il est évident que P_i est équivalente à : « Il existe $k(i)$ supérieur ou égal à i tel que $g(k(i))=1$ ».

On définit alors F_i comme étant le sous-ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ (suites comportant seulement des 0 et des 1), ayant au moins un terme égal à 1 après le $i^{\text{ème}}$ terme (au sens large). Alors il est évident que P_i est équivalente à : « $((g(j))_{\mathbb{N}^*})$ est élément de F_i ».

D'après la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, P_i est donc modélisée par l'évènement $Ev(P_i)$: « $((Xg(j))_{\mathbb{N}^*})$ est élément de F_i ». Or il est évident que l'évènement $Non(Ev(P_i))$ est l'évènement : $Non(Ev(P_i))$: « Pour tout j supérieur ou égal à i , $Xg(j)=0$ ».

Or comme les $Xg(j)$ sont indépendantes, la probabilité de $Non(Ev(P_i))$ est égale à :

$$p(Non(Ev(P_i))) = \prod_{j=1}^{\infty} p("Xg(j) = 0") = \prod_{j=1}^{\infty} (9/10) = 0$$

On a donc $p(Non(Ev(P_i)))=0$ et $p(Ev(P_i))=1$.

D'autre part il est évident que la proposition P : « Il existe une infinité de décimales égales à 5 dans les décimales de $\sqrt{3}$ » est équivalente à : « Pour tout i dans \mathbb{N}^* , P_i est vrai ».

D'après la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, la proposition précédente est modélisée par l'évènement :

« Pour tout i dans \mathbb{N}^* , $Ev(P_i)$ »

Or il est évident que pour tout i $Ev(P_{i+1})$ entraîne $Ev(P_i)$, c'est-à-dire $Ev(P_{i+1})$ est inclus dans $Ev(P_i)$.

On a donc :

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (Ev(P_i))\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\bigcap_{i=1}^n Ev(P_i)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(Ev(P_n)) = 1$$

puisqu'on a obtenu $p(Ev(P_n))=1$ pour tout n .

Donc P est modélisée par un évènement de probabilité 1.

Appliquant alors le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient donc P .

Puisque P n'a jamais été démontrée classiquement (ni sa négation), P a donc une explication aléatoire (Définition 2.A.5).

EXEMPLE 3.2 :

Comme 2^{ème} exemple, on peut montrer qu'une autre proposition, beaucoup plus précise que P , et pouvant être illustrée par de nombreux tests, a une explication aléatoire.

Cette proposition est la proposition Q :

$$Q : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n g(i)}{n} = 1/10$$

Dans cette expression, $G(n)$ indique le nombre de décimales égales à 5, parmi les n premières décimales.

En effet, les $Xg(i)$ étant indépendantes et de même loi, d'après la Loi Forte des Grands Nombres :

$$p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n Xg(i)}{n} = 1/10\right) = 1$$

De plus d'après la propriété de correspondance généralisée (rappelée dans RAPPELS TAN 2.A) Q est modélisée par l'évènement de l'expression précédente de probabilité égale à 1.

Donc Q est modélisée par un évènement de probabilité 1, et si on applique le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient Q.

Puisque Q n'a jamais été démontrée classiquement, Q a donc une explication aléatoire.

Q serait illustrée par des tests si on calculait $G(n)/n$ pour plusieurs valeurs de n, et qu'on observait que $G(n)/n$ semble tendre vers 1/10.

La loi numérique aléatoire :

« g(i) est modélisée par $Xg(i)$ »

où les $Xg(i)$ sont indépendantes et définies plus haut, pourrait être un exemple de loi numérique aléatoire exacte. Pour vérifier ceci il faudrait réaliser des tests statistiques.

4.ENSEMBLES ESTIMES

Le but de cette partie est d'étudier par la TAN les propriétés des *ensembles estimés*, c'est à dire des sous-ensembles de \mathbf{N} dont on connaît une estimation de leur nombre d'éléments inférieurs à n. On verra que comme dans le domaine précédemment exposé de la TAN, la TAN permet de donner des explications aléatoires à de très nombreuses propositions qui n'ont jamais été prouvées classiquement.

4.A THEORIE

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres Généralisée :

Loi Faible des Grands Nombres Généralisée 4.A.1 (Lfgn généralisée):

Si on a une suite $(X_i)_N$ de lois binomiales indépendantes avec $p(X_i=1)=p(i)$ et que la série $\sum p(i)$ diverge, alors, si on définit la suite $(Y_n)_N$ de variables aléatoire par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=0}^n X_i}{\sum_{i=0}^n p(i)}, \text{ la suite } (Y_n)_N \text{ converge en probabilité vers 1.}$$

Démonstration :

La démonstration généralise la démonstration de la Loi Faible des Grands Nombres classiques.

On pose $S_n=X_0+\dots+X_n$

D'après l'hypothèse, X_i est une loi binomiale associée à $p(i)$. En utilisant les rappels 2.B, l'Espérance μ_i et la variance σ_i^2 de X_i sont :

$v(X_i)=\sigma_i^2=p(i)(1-p(i))$ et $\mu_i=p(i)$

$$E(S_n) = \sum_{i=0}^n E(X_i) = \sum_{i=0}^n p(i)$$

et donc $E(Y_n)=1$.

De plus, les lois X_i étant indépendantes :

$$v(Y_n) = v\left(\frac{S_n}{E(S_n)}\right) = \frac{v(S_n)}{(E(S_n))^2} = \frac{\sum_{i=0}^n \sigma_i^2}{\left(\sum_{i=0}^n \mu_i\right)^2}$$

Si on applique l'inégalité de Chebyshev :

$$p(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

mais on a :

$$\sum_{i=0}^n \sigma_i^2 = \sum_{i=0}^n p(i)(1-p(i)) \leq \sum_{i=0}^n p(i) = \sum_{i=0}^n \mu_i$$

et donc :

$$\frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{i=0}^n \mu_i}$$

Mais par hypothèse $\sum \mu_i = \sum p(i)$ est divergeant, il en résulte que $v(Y_n)/\varepsilon^2$ tend vers 0 pour n tend vers l'infini et donc $(Y_n)_N$ converge en probabilité vers 1.

On admettra que de la même façon, on peut généraliser la Loi Forte des Grands nombres 1^{ière} et 2^{ième} forme pour obtenir les 2 lois :

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2(LFGN généralisée):

Avec les notations et les hypothèses de la Loi Faible des Grands nombres généralisée, la suite $(Y_n)_N$ converge presque sûrement vers 1.

REMARQUE 4.A.2.a)

Même si cette loi n'était valable que pour $p(i)$ suite monotone, cela suffirait pour tous les exemples classiques de la TAN des ensembles estimés, notamment tous ceux présentés dans cet article.

En fait, si on a pour n assez grand $\sum_{i=1}^n p(i) > an$, a étant une constante strictement positive, la Loi

Forte des Grands Nombres Généralisée (LFGN généralisée) est une conséquence immédiate de la LFGN de Khintchine⁽⁶⁾, dont on rappelle la formulation :

Si $(X_i)_{N^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, X_i étant d'espérance m_i et les variances étant uniformément bornées ($\sigma_i^2 < c$ pour tout i), alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m_i)$ converge presque sûrement vers 0.

Cependant dans le cas général où $p(i)$ tend vers 0, ce qui est le cas dans la plupart des Exemples donnés dans cet article, on ne peut pas généraliser la LFGN de Khintchine pour obtenir la LFGN généralisée.

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 2^{ième} forme 4.A.3:

Avec les notations et hypothèses précédentes, la suite $(Y_n)_N$ converge absolument en probabilité vers 1.

On rappelle qu'on a prouvé dans le Théorème 2.B.8 que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée 2^{ième} forme entraînait la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée.

Ce qui précède va permettre par la TAN l'étude des ensembles estimés correspondant à la définition suivante :

DEFINITION 4.A.4: (*Ensembles estimés*)

On appelle *ensemble estimé d'estimation* $a(n)$ un sous-ensemble infini A de \mathbf{N} tel que, si $A(n) = \{i/ i \leq n \text{ et } i \text{ appartient à } A\}$, on ait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}(A(n))}{a(n)} = 1$$

Soit A un ensemble estimé d'estimation $a(n)$. On cherche à modéliser la fonction caractéristique de A $f_A(i)$, i étant un naturel assez grand, c'est-à-dire supérieur à un naturel N_A . Le plus simple modèle statistique de $f_A(i)$ est celui défini par le *pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés* suivant, que nous allons justifier par des arguments intuitifs.

PSEUDO-AXIOME 4.A.5 (du modèle des ensembles estimés) :

Si A est un ensemble estimé d'estimation $a(n)$ avec $a(n)$ croissante, alors :

a) Lorsque le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés est valide pour $(A, a(n))$, il existe un naturel N_A tel que pour tout i supérieur ou égal à N_A , « $f_A(i)=1$ » est modélisée par l'évènement « $x_{iA}=1$ » de l'espace probabilisable d'Univers $\Omega_{iA}=\{0,1\}$, avec $p(\ll x_{iA}=1 \gg)=p_{iA}=a(i)-a(i-1)$.

b) On verra dans la première justification intuitive de ce pseudo-Axiome aléatoire que pour que le modèle soit meilleur, il faut que pour n supérieur ou égal à 1, $a(n)$ soit une bonne approximation de $\text{Card}(A(n))$. On pourra donc choisir une valeur de N_A tel que ce soit le cas, par exemple choisir N_A tel que pour n supérieur à N_A , $0,9 < \text{Card}(A(n))/a(n) < 1,1$.

Alors on dira qu'on a supposé que le pseudo-Axiome était valide pour $(A, a(n), N_A)$

On voit donc que dans l'application du pseudo-Axiome précédent, on peut choisir ou non la valeur de N_A .

En fait, on verra qu'en général, notamment dans la 2^{ème} justification intuitive, que les propositions obtenues utilisant le modèle statistique de ce pseudo-Axiome ne dépendent que du comportement à l'infini de p_{iA} . Il en résulte qu'on peut alors les obtenir en choisissant n'importe quelle valeur de N_A (choisie assez grande, puisqu'on sait que plus N_A est grand meilleur est le modèle). On peut donc restreindre ou non le choix de N_A , dans l'application du pseudo-Axiome précédent pour $(A, a(n), N_A)$.

Choisir une valeur de N_A permet d'obtenir des propositions illustrées par des tests qui ne le seraient pas si N_A était inconnu.

1^{ère} justification intuitive :

i étant un naturel assez grand, on sait qu'une estimation du nombre de naturels appartenant à A strictement inférieurs à i est $a(i-1)$, et qu'une estimation du nombre de naturels inférieurs ou égaux à i appartenant à A est $a(i)$. Il s'ensuit qu'on peut approximer la probabilité que i appartienne à A par $p_{iA} = a(i)-a(i-1)$. (Cette approximation est a priori d'autant meilleure que l'estimation $a(n)$ de $\text{Card}(A(n))$ est précise).

Ceci signifie que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée presque exactement par un évènement de probabilité p_{iA} . D'après la définition de « est modélisée », on peut donc considérer que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA} . Ceci justifie donc intuitivement la validité dans certains cas du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.

2^{ème} justification intuitive :

Supposons qu'on ait un sous-ensemble A de \mathbf{N} dont la fonction caractéristique soit modélisée comme le modèle du a) du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.

C'est-à-dire qu'on ait un naturel N_A et une fonction $a(n)$ croissante telle que pour i supérieur ou égal à N_A , $f_A(i)$ soit modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$.

Si on définit la variable aléatoire X_{iA} sur l'espace probabilisable du a) d'Univers Ω_{iA} par : $X_{iA}=x_{iA}$, alors on obtient la loi numérique aléatoire :

« Pour i supérieur à N_A , $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} ».

Si on applique alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes, on obtient la loi précédente avec des X_{iA} variables indépendantes.

Appliquant alors la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2, on obtient :

$$p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=NA}^n X_{iA}}{n} = 1\right) = 1$$

Il en résulte que d'après la propriété de correspondance généralisée, la proposition :

$$p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=NA}^n f_A(i)}{n} = 1\right), \text{ est modélisée par un évènement de probabilité } 1.$$

En appliquant le pseudo-Axiome du modèle exact, on obtient donc que cette proposition est vraie. Or il est évident que cette proposition est équivalente à « A est un ensemble d'estimation a(n) ». (Car dans l'expression numérique précédente, $\sum p_{iA} = a(n) - a(N_A - 1)$)

On voit donc que le modèle statistique défini dans le pseudo-Axiome a), permet d'obtenir que la proposition « A est un ensemble estimé d'estimation a(n) » a une explication aléatoire.

Il apparaît donc que le modèle statistique proposé est le meilleur modèle statistique pour modéliser un ensemble estimé d'estimation a(n).

On voit dans cet exemple, comme dans la Remarque suivant le pseudo-Axiome, que la proposition obtenue dans la 2^{ème} justification est indépendante du choix de N_A .

Le pseudo-Axiome précédent du modèle des ensembles estimés introduit la Définition suivante :

DEFINITION 4.A.6 (évaluation probabiliste) :

Si A est un sous-ensemble de \mathbf{N} (fini ou non), tel qu'il existe un naturel N_A tel que l'on ait la loi numérique aléatoire, f_A étant la fonction caractéristique de A :

« Pour i supérieur à N_A , $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} »

Avec $p(X_{iA}=1) = p_{iA}$,

On dira alors que A est un ensemble d'évaluation probabiliste p_{iA} , pour i supérieur à N_A .

De plus dans la 2^{ème} justification intuitive du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on a établi un résultat fondamental, exprimé dans le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.7:

Si A est un ensemble ayant une évaluation probabiliste p_{iA} , pour i supérieur à N_A , et que $\sum p_{iA}$ diverge, alors la proposition :

« A est un ensemble estimé d'estimation $a(n) = \sum_{i=N_A}^n p_{iA}$ » a une pseudo-preuve aléatoire.

On a vu que pour obtenir ce Théorème 4.A.7 on utilisait la LFGN généralisée 4.A.2.

Comme on l'a vu cependant la LFGN généralisée 4.A.2 de même que sa variante 4.A.3 ne se démontrent pas aussi facilement que la LFGN (qui n'était déjà pas évidente). Or, en utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 que l'on a démontrée, on peut obtenir aussi une évaluation de la fonction $S(n) = \sum_{[N_A, n]} f_A(i)$.

En effet, on rappelle l'étude théorique d'une fonction par la TAN, donnée dans l'article ⁽⁵⁾ (Chapître 3.3) :

ETUDE THEORIQUE D'UNE FONCTION PAR LA TAN 4.A.7a)

On ne considèrera que 2 cas :

Dans le premier cas, on obtient par la TAN en utilisant un modèle statistique M1 une fonction F(k), telle que la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire :

$$P1 : \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{f(k)}{F(k)} \right) = 1 \right\rangle .$$

Dans le 2^{ème} cas, on obtient par la TAN, en utilisant un modèle statistique M2 une fonction F(k), deux fonctions $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ positives et tendant vers 0 telle que, posant $I(k) = [1 - \varepsilon_1(k), 1 + \varepsilon_2(k)]$, une proposition du type de la proposition suivante P2 a une pseudo-preuve aléatoire :

P2 : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times t \left(\frac{f(i)}{F(i)} \in I(i) \right) \geq p$ (En général on ne connaît pas explicitement F(n), mais on a F(n) équivalente à une fonction $F_A(n)$ connue)»

Dans la proposition précédente, p est un rationnel proche de 1 (p=0.98 par exemple). On a supposé que f(k) était définie sur \mathbf{N} . Dans le cas général f(k) est définie sur un sous-ensemble infini F de \mathbf{N} , et la sommation

ne porte que sur les éléments de F. On divise alors par le nombre d'éléments de F inférieurs à n. P2 exprime qu'il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N la proportion des naturels k appartenant à F et inférieurs à n tels que $f(k)/F(k)$ appartiennent à I(k) est supérieure à p.

Dans certains cas P1 et P2 sont illustrées par des tests et donc on obtient une estimation de $r(k)$ donnée par ces propositions. Pour voir si P1 ou P2 sont illustrées par des tests, on trace les points $(k, f(k)/F(k))$ (ou $(k, f(k)/F_A(k))$) pour k aussi grand que possible. Si il apparaît que ces points (pour P1), ou un pourcentage proche de 1 de ces points (pour P2) tendent vers la droite d'équation $y=1$, alors P1 ou P2 sont illustrées par les tests. Dans certains cas, P1 ou P2 tout en étant vraies ne sont pas illustrées par les tests. C'est le cas quand on ne peut pas réaliser les tests (C'est-à-dire calculer $f(k)/F(k)$ ou $f(k)/F_A(k)$) pour k assez grand, à cause de limites comme la puissance maximale des ordinateurs. Si il apparaît que les points $(k, f(k)/F(k))$ (ou $(k, F_A(k))$) sont proches de 1 et s'en rapprochent quand k augmente, on pourra considérer que P1 ou P2 sont *partiellement* illustrées par les tests, même si ceux-ci ne font pas apparaître que les points $(k, f(k)/F(k))$ (ou $(k, F_A(k))$) tendent vers la droite d'équation $y=1$. Dans ces cas, on doit essayer d'obtenir une fonction $F_B(k)$ plus précise que $F(k)$ ou $F_A(k)$ pour estimer $f(k)$.

Cependant, P1 et P2 ne sont vraies que dans certains cas où les modèles M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2 sont valides avec une très bonne approximation. Un cas beaucoup plus général est le cas où M1 et M2, tout en étant valides avec une bonne approximation, ne le sont pas avec une qualité suffisante pour que les propositions du type P1 ou P2 qu'ils entraînent soient vraies. On remarque que toute proposition Q1 ou Q2 entraînée par P1 ou P2 a une pseudo-preuve aléatoire d'après la Définition 2.10. Cependant, pour que de telles propositions Q1 ou Q2 soient intéressantes, il faut d'une part qu'elles soient illustrées par des tests, mais aussi qu'elles illustrent la validité avec la meilleure qualité possible des modèles statistiques M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2. Ceci est vrai si les propositions Q1 ou Q2 sont les plus proches possible de P1 ou P2 qui correspondent à la meilleure qualité des modèles M1 ou M2. Ce sera le cas si les paramètres de Q1 ou Q2 sont le plus proche possible des paramètres de P1 ou P2.

Ainsi, dans le premier cas on considèrera que seules les propositions du type Q1 suivant ont une pseudo-preuve aléatoire intéressante :

$$Q1_A : \ll \text{Il existe un réel } L > 0 \text{ tel que } \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{f(k)}{F(k)} \right) = L \gg$$

On pourra aussi considérer la proposition $Q1_B$ plus générale que $Q1_A$:

$Q1_B$: « Il existe 2 réels strictement positifs α et β et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N, $f(n)/F(n)$ appartienne à $[\alpha, \beta]$ »

Dans le 2^{ième} cas on considèrera que seules les propositions du type Q2 suivantes ont une pseudo-preuve aléatoire intéressante :

$Q2$: « Il existe 2 réels strictement positifs α et β , et il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times t \left(\frac{f(i)}{F_A(i)} \in [\alpha, \beta] \right) \geq p - 0.01$$

Il est évident que si de telles propositions sont illustrées par des tests, elles illustrent la validité avec une bonne approximation des modèles M1 ou M2, car elles sont très proches des propositions P1 ou P2 (à cause du paramètre qui est la fonction $F(k)$).

On peut aussi considérer que plus L est proche de 1, meilleure est la qualité du modèle M1, et plus α et β sont proches de 1, meilleur est la qualité du modèle M2. Pour exprimer ceci, on peut dans la proposition $Q1_A$ borner (au sens large) par un réel B1 la distance $|L-1|$, et dans la proposition Q2 ou $Q1_B$ borner par 2 réels B1 et B2 les distances $|\beta-1|+|\alpha-1|$ et $|\beta-\alpha|$. On obtient alors les propositions notées $Q1_A(B1)$, $Q2(B1, B2)$ et $Q1_B(B1, B2)$.

Il est évident que si $Q1_A(B1)$ ou $Q2(B1, B2)$ sont illustrées par des tests, plus B1 et B2 sont proches de 0, meilleure est illustrée la qualité des modèles M1 ou M2. En effet, P1 est exactement $Q1_A(0)$ et P2 entraîne que $Q2(B1, B2)$ est vraie pour tous réels B1, B2 strictement supérieurs à 0.

Si on obtient que de telles propositions du type Q1 ou Q2 précédent sont illustrées par des tests on peut s'attendre à ce qu'en améliorant le modèle statistique permettant de les obtenir, on puisse obtenir des propositions beaucoup plus précises du type P1 ou P2 pour estimer la fonction $f(k)$. Cela sera le cas dans l'étude de la fonction $r(k)$.

Il est clair qu'il peut exister à priori d'autres propositions que celles du type Q1 ou Q2 précédentes ayant une pseudo-preuve aléatoire et donnant une estimation d'une fonction $f(k)$. Mais dans cet article, on ne considèrera que les propositions simples de ce type.

REMARQUE 4.A.7b) :

On peut, utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 qu'on a démontrée, obtenir une estimation de la fonction $S(n)$ du type de celles présentées dans le Chapitre précédent. On rappelle :

$$S(n) = \sum_{i=N_A}^n f_A(i)$$

On suppose donc qu'un ensemble A a une évaluation probabiliste p_{iA} pour i supérieur à N_A , et que $\sum p_{iA}$ diverge.

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variable indépendantes, on obtient que pour i supérieur à N_A , $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire binaire $Xf_A(i)$, avec $p(\ll Xf_A(i)=1 \gg) = p_{iA}$ et les $Xf_A(i)$ sont indépendantes.

Procédant alors comme dans la démonstration de la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1, on obtient pour tout n supérieur à N_A :

$$p\left(\left|\frac{1}{\sum_{i=N_A}^n p_{iA}} \times \sum_{i=N_A}^n Xf_A(i) - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{i=N_A}^n p_{iA}}$$

On définit alors pour n supérieur à N_A la fonction $\varepsilon(n)$:

$$\frac{1}{\varepsilon(n)^2 \sum_{i=N_A}^n p_{iA}} = 0.01$$

On remarque que $\varepsilon(n)$ est une fonction positive tendant vers 0.

Alors, posant $I(n) = [1 - \varepsilon(n), 1 + \varepsilon(n)]$, la définition précédente de $\varepsilon(n)$ entraîne :

$$p\left(\frac{\sum_{i=N_A}^n Xf_A(i)}{\sum_{i=N_A}^n p_{iA}} \in I(n)\right) \geq 1 - 0.01 = 0.99$$

C'est-à-dire, d'après la définition de $S(n)$:

$$p\left(\frac{XS(n)}{\sum_{i=N_A}^n p_{iA}} \in I(n)\right) \geq 0.99$$

Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes aux variables aléatoires $XS(n)$, on peut supposer qu'elles sont indépendantes.

Définissant alors la variable aléatoire $Y(n)$:

$$Y(n) = t\left(\frac{XS(n)}{\sum_{i=N_A}^n p_{iA}} \in I(n)\right)$$

On obtient, procédant exactement comme notre estimation de $r(k)$ dans l'article précédent ⁽⁵⁾ (Chapitre 3.3) que la proposition suivante $P2(S(n))$ a une pseudo-preuve aléatoire :

$P2(S(n))$: Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\frac{1}{n - N_A + 1} \times \sum_{i=N_A}^n t\left(\frac{S(n)}{\sum_{i=N_A}^n p_{iA}}\right) \in I(n) \geq 0.98$$

On est donc dans le 2^{ème} cas de l'Etude théorique d'une fonction par la TAN 4A.7a). On peut donc obtenir les fonctions Q2(S(n)), ou Q2(S(n),B1,B2)) définie dans l'Etude théorique 4A7a), et donnant une estimation de S(n).

On voit cependant que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée permet d'obtenir plus simplement le Théorème 4A.7, et permet d'obtenir la proposition suivante P1(S(n)) (Correspondant au premier cas de l'Etude théorique 4.A.7a)), qui est clairement plus intéressante car plus précise que la proposition précédente P2(S(n)) :

$$P1(S(n)) : \ll \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S(n)}{\sum_{i=N_A}^n p_{iA}} \right) = 1$$

Si A et B sont 2 ensembles estimés d'estimation a(n) et b(n), on cherche à obtenir une évaluation probabiliste de A ∩ B, ce qui permettra soit d'obtenir que la proposition « A ∩ B est un ensemble estimé d'estimation i(n) (que l'on va déterminer) », soit la proposition « A ∩ B est fini. » ont une pseudo-preuve aléatoire.

Pour obtenir un tel modèle statistique de A ∩ B, on doit tout d'abord appliquer la pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et à B, pour obtenir une évaluation probabiliste de A et de B. Puis, obtenant que A et B on une évaluation probabiliste p_{iA} (avec i supérieur à N_A) et p_{iB} (avec i supérieur à N_B), on applique le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés suivant, permettant d'obtenir une évaluation probabiliste de A ∩ B :

PSEUDO-AXIOME 4.A.8 (de l'intersection des ensembles estimés-1^{ère} forme) :

Si A et B sont 2 ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB}, avec respectivement i supérieur (au sens large) à N_A et i supérieur à N_B, alors lorsque le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 1^{ère} forme est valide pour (A,B,I), (avec I=A ∩ B), I est un ensemble d'estimation probabiliste p_{iI}=p_{iA}p_{iB}, pour i supérieur à N_I=sup(N_A,N_B).

Nous allons donner 2 justifications intuitives à ce pseudo-Axiome :

On doit donc justifier qu'avec les hypothèses précédentes pour A et B, « f_i(i)=1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iI}=p_{iA}p_{iB}, pour i supérieur à N_I=sup(N_A,N_B).

1^{ère} justification intuitive :

Cette première justification est basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3. On rappelle que le premier article ⁽⁵⁾ était basé sur ce modèle équiprobable.

Supposons qu'on ait un ensemble E={1,...,n}.

Soient A et B deux sous-ensembles de E, pour lesquels on connaisse le nombre d'éléments a et b.

D'après le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i,A,E), i étant un élément de E, si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}=a/n.

De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i,B,E), on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iB}=b/n.

f_A et f_B étant les fonctions caractéristiques de A et B, on a donc pour tout i dans E:

« f_A(i)=1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}=a/n, et

« f_B(i) =1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iB}=b/n.

Les 2 modélisations précédentes sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, remplaçant E par l'ensemble des naturels supérieurs à N_I=sup(N_A,N_B), et prenant p_{iA}=a/n et p_{iB}=b/n.

Considérons maintenant l'ensemble :

$\Omega_{AB} = \{(A', B'), A' \text{ et } B' \text{ sous-ensembles de } E \text{ ayant respectivement } a \text{ et } b \text{ éléments}\}$.

i étant un élément de E , on définit l'ensemble :

$I_{AB}(i) = \{(A', B') \text{ appartenant à } \Omega_{AB}, \text{ avec } i \text{ appartient à } A' \text{ et } B'\}$

Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à $((A, B), I_{AB}(i), \Omega_{AB})$, on obtient que « (A, B) est élément de $I_{AB}(i)$ » est modélisée par l'évènement « (A', B') est élément de $I_{AB}(i)$ » de l'espace équiprobable Ω_{AB} .

Remarquant que la proposition « (A, B) est élément de $I_{AB}(i)$ » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec $I = A \cap B$) », et qu'on obtient que $\text{Card}(I_{AB}(i)) / \text{Card}(\Omega_{AB}) = ab/n^2 = p_{iA}p_{iB}$, on obtient :

« $f_I(i) = 1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI} = p_{iA}p_{iB}$, pour i appartenant à E .

Ceci constitue donc une première justification intuitive du pseudo-Axiome.

2^{ème} justification intuitive :

On suppose que A et B sont 2 ensembles quelconques parmi tous les ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} avec respectivement i supérieur à N_A et i supérieur à N_B .

On a donc, pour i supérieur à $\sup(N_A, N_B)$, « $f_A(i) = 1$ » est modélisée par un évènement $Ev_A(i)$ de probabilité p_{iA} et « $f_B(i) = 1$ » est modélisée par un évènement $Ev_B(i)$ de probabilité p_{iB} .

Puisque A et B sont quelconques d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} , il est évident que, i étant supérieur à $N_I = \sup(N_A, N_B)$, la proposition « $f_A(i) = 1$ » (qui est équivalente à « i est élément de A ») est totalement indépendante de la proposition « $f_B(i) = 1$ » (qui est équivalente à « i est élément de B »).

Or on peut admettre intuitivement que si on a les modélisations :

« La proposition $P1$ est modélisée par l'évènement $Ev1$ » et « La proposition $P2$ est modélisée par l'évènement $Ev2$ », alors si $P1$ et $P2$ sont complètement indépendantes, on peut considérer que $Ev1$ et $Ev2$ appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.

On obtient donc qu'on peut considérer que $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.

Donc « $f_I(i) = 1$ » (qui est équivalent à la proposition « $f_A(i) = 1$ » et « $f_B(i) = 1$ ») est modélisée par un évènement $Ev_I(i)$ de probabilité $p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I = \sup(N_A, N_B)$.

Souvent, on ne peut pas considérer que A et B sont 2 ensembles quelconques d'estimation $a(n)$ et $b(n)$, car on sait qu'ils appartiennent tous les 2 à un ensemble estimé C d'estimation $c(n)$, avec $a(n), b(n), c(n)$ connues.

On peut alors obtenir un modèle statistique bien meilleur qu'en appliquant le pseudo-Axiome précédent de l'intersection des ensembles estimés 1^{ère} forme.

On emploie en effet alors le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2^{ème} forme suivant :

PSEUDO-AXIOME 4.A.9 (de l'intersection des ensembles estimés 2^{ème} forme) :

Si A, B, C sont des ensembles ayant respectivement des évaluations probabilistes p_{iA}, p_{iB}, p_{iC} , pour i respectivement supérieur à N_A, N_B, N_C , alors, lorsque le pseudo-Axiome 4.A.9 de l'intersection des ensembles estimés 2^{ème} forme est valide pour (A, B, C, I) (avec $I = A \cap B$), I est un ensemble d'évaluation probabiliste $p_{iI} = p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$, pour i supérieur à $N_I = \sup(N_A, N_B, N_C)$.

Nous allons donner 2 justifications intuitives à la 2^{ème} forme de ce pseudo-Axiome qui sont analogues et généralisent celles de la 1^{ère} forme.

On doit donc justifier qu'avec les hypothèses précédentes pour A, B et C « $f_I(i) = 1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI} = p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ pour i supérieur à $\sup(N_A, N_B, N_C)$.

1^{ère} justification intuitive :

Cette première justification est aussi basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3.

Supposons qu'on ait toujours un ensemble $E = \{1, \dots, n\}$.

Soient A, B, C trois sous-ensembles de E , pour lesquels on connaisse le nombre d'éléments a, b et c , et tels que A et B soient inclus dans C .

D'après le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i, A, E) , i étant un élément de E , si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA} = a/n$.

De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i, B, E) , on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB} = b/n$.

De même, « i est élément de C » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.

f_A, f_B et f_C étant les fonctions caractéristiques de A, B et C , on a donc pour tout i dans E :

-« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.

-« $f_B(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.

-« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.

Les modélisations précédentes, ainsi que la proposition « A et B sont inclus dans C » sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, en remplaçant E par l'ensemble des naturels supérieurs à $\sup(N_A, N_B, N_C)$.

Considérons maintenant l'ensemble :

$\Omega_{ABC} = \{(A', B', C'), A', B' \text{ et } C' \text{ sous-ensembles de } E \text{ ayant respectivement } a, b \text{ et } c \text{ éléments, avec } A' \text{ et } B' \text{ inclus dans } C'\}$.

i étant un élément de E , on définit l'ensemble :

$I_{ABC}(i) = \{(A', B', C') \text{ appartenant à } \Omega_{ABC}, \text{ avec } i \text{ appartient à } A' \text{ et } B' \text{ (et donc à } C')\}$

Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à $((A, B, C), I_{ABC}(i), \Omega_{ABC})$, on obtient que « (A, B, C) est élément de $I_{ABC}(i)$ » est modélisée par l'évènement « (A', B', C') est élément de $I_{ABC}(i)$ » de l'espace équiprobable Ω_{ABC} .

Remarquant que la proposition « (A, B, C) est élément de $I_{ABC}(i)$ » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec $I = A \cap B$) », et qu'on obtient que $\text{Card}(I_{ABC}(i))/\text{Card}(\Omega_{ABC}) = ab/nc = p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ on obtient que pour i dans E :

« $f_I(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI} = p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$.

Ceci constitue une 1^{ère} justification intuitive de la 2^{ème} forme du pseudo-Axiome considéré.

2^{ème} justification intuitive :

On considère que (A, B, C) est un triplet quelconque parmi tous les triplets (A', B', C') tels que A', B', C' ont des évaluations probabilistes p_{iA}, p_{iB}, p_{iC} , pour i respectivement supérieur à N_A, N_B, N_C , et tels que A' et B' soient inclus dans C' .

On a donc, pour i supérieur à $N_I = \sup(N_A, N_B, N_C)$, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_A(i)$ de probabilité p_{iA} , « $f_B(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_B(i)$ de probabilité p_{iB} , et « $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_C(i)$ de probabilité p_{iC} .

On ne peut plus considérer que la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B », puisque A et B sont tous 2 inclus dans C . Cependant, il est clair que la proposition « i est élément de A » entraîne « i est élément de C », et de même pour la proposition « i est élément de B ».

Or il est logique intuitivement, si on a 2 modélisations « La proposition $P1$ est modélisée par l'évènement $Ev1$ » et « La proposition $P2$ est modélisée par l'évènement $Ev2$ », et que la proposition $P1$ entraîne la proposition $P2$, de considérer que $Ev1$ entraîne $Ev2$, c'est-à-dire que $Ev1$ et $Ev2$ appartiennent au même espace probabilisable et que $Ev1$ est inclus dans $Ev2$.

On peut donc considérer d'après ce qui précède, pour i supérieur à N_I , $Ev_A(i), Ev_B(i)$ et $Ev_C(i)$ appartiennent au même espace probabilisable et $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$.

De plus, généralisant le propriété de correspondance (utilisée pour définir le concept « est modélisée par »), on peut considérer que la proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est modélisée par l'évènement « $Ev_A(i)$ sachant $Ev_C(i)$ » (noté conventionnellement $Ev_A(i)/Ev_C(i)$).

De même, la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » » est modélisée par l'évènement $Ev_B(i)/Ev_C(i)$.

Or, C étant un ensemble d'évaluation probabiliste p_{iC} (i supérieur à N_C) quelconque, on peut considérer que A et B sont 2 sous-ensembles quelconques de C , d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} (pour i supérieur à N_A et N_B).

On peut donc considérer que sachant « i est élément de C », alors la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B ».

Ceci s'écrit aussi:

La proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est indépendante de la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » »

En appliquant la même remarque que pour la 2^{ème} justification intuitive de la première forme du pseudo-Axiome, on obtient que l'évènement $Ev_A(i)/Ev_C(i)$ est indépendant de l'évènement $Ev_B(i)/Ev_C(i)$.

Puisque $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ appartiennent au même espace probabilisable, on obtient donc :

« « $f_A(i)=1$ » et « $f_B(i)=1$ » » (qui est équivalente à « $f_I(i)=1$ ») est modélisée par l'évènement « $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ ».

Or dans l'espace probabilisable de $Ev_A(i), Ev_B(i), Ev_C(i)$ on obtient :

$$p(Ev_A(i) \text{ et } Ev_B(i)) = p((Ev_A(i) \text{ et } Ev_B(i)) / Ev_C(i)) p(Ev_C(i))$$

$$p(Ev_A(i) \text{ et } Ev_B(i)) = p((Ev_A(i) / Ev_C(i)) \text{ et } (Ev_B(i) / Ev_C(i))) p(Ev_C(i))$$

$$p(Ev_A(i) \text{ et } Ev_B(i)) = \frac{p(Ev_A(i))}{p(Ev_C(i))} \times \frac{p(Ev_B(i))}{p(Ev_C(i))} \times p(Ev_C(i)) = \frac{P_{iA} P_{iB}}{P_{iC}}$$

où on a utilisé que $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$, et que $Ev_A(i)/Ev_C(i)$ et $Ev_B(i)/Ev_C(i)$ sont indépendants.

On a donc donné une 2^{ième} justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2^{ième} forme.

Nous allons maintenant présenter certains Théorèmes et notions importantes permettant d'obtenir des estimations de certains sous-ensembles de \mathbf{N} .

DEFINITION 4.10 : (ensembles image- fonction ordonnée)

Si A est un sous-ensemble infini de \mathbf{N}^* et est l'image d'une fonction numérique $f_A(i)$, strictement croissante sur \mathbf{N}^* , alors on dira que A est l'ensemble image de f_A sur \mathbf{N}^* , et que f_A est une fonction ordonnée sur \mathbf{N}^* . (On pourrait généraliser cette définition en remplaçant \mathbf{N}^* par un sous-ensemble infini quelconque de \mathbf{N}^*).

On remarque que si A est un sous-ensemble quelconque infini de \mathbf{N}^* , on peut définir :

$f_A(1)$ comme le premier élément de A ,

$f_A(2)$ comme le 2^{ième} élément de A

et pour tout n $f_A(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ élément de A .

Donc il existe toujours une fonction ordonnée f_A dont A est l'ensemble image (sur \mathbf{N}^*).

Réciproquement, si A est l'ensemble image de f_A sur \mathbf{N}^* , on a nécessairement :

$f_A(1)$ est le premier élément de A , et par une récurrence immédiate $f_A(n)$ est le $n^{\text{ième}}$ élément de A .

On a donc le Théorème :

THEOREME 4.A.11 :

Pour tout sous-ensemble estimé A de \mathbf{N}^* , il existe une et unique fonction f_A dont A est l'ensemble image sur \mathbf{N}^* .

DEFINITION 4.A.12:

Si A est l'ensemble image d'une fonction f_A sur \mathbf{N}^* , alors, pour toute fonction f_{Abij} de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R}^+ , continue, strictement croissante, telle que $f_{Abij}(0)=0$ et pour tout i dans \mathbf{N}^* , $f_{Abij}(i)=f_A(i)$, on dira que f_{Abij} est une bijection (numérique) ordonnée sur \mathbf{R}^+ , et que A est l'ensemble image de la bijection ordonnée f_{Abij} . (Car il est évident que f_{Abij} est nécessairement une bijection).

Puisque f_{Abij} coïncide partout avec f_A sur \mathbf{N}^* , on emploiera la même notation f_A pour désigner l'une ou l'autre fonction, sauf en cas d'ambiguïté.

REMARQUE 4.A.13 :

Il est évident que pour toute fonction f_A définie sur \mathbf{N}^* , il existe une infinité de bijections f_{Abij} pouvant convenir. On verra en fait que seul le comportement à l'infini de f_{Abij} sera important pour déterminer l'estimation $a(n)$ de l'ensemble A , et donc il suffira de connaître $f_{Abij}(x)$ (noté aussi $f_A(x)$) pour x supérieur à un naturel quelconque N_A .

On a alors le Théorème important :

THEOREME 4.A.14 :

Si A est l'ensemble image d'une bijection ordonnée f_A sur \mathbf{R}^+ alors A est un ensemble estimé d'estimation $f_A^{-1}(n)$.

(Puisque f_A est strictement croissante et tend vers l'infini, il en est de même pour f_A^{-1})

Démonstration :

On rappelle que $A(n)$ est l'ensemble des éléments de A inférieurs à n . (On emploiera toujours les termes « inférieurs » ou « supérieurs » au sens large.)

D'après l'hypothèse, tout élément de A s'écrit $f_A(i)$, ou i appartient à \mathbf{N}^* .

On a donc $A(n) = \{f_A(i) / f_A(i) \leq n \text{ et } i \text{ appartient à } \mathbf{N}^*\}$.

Or, $f_A(i) \leq n$ est équivalent à $i \leq f_A^{-1}(n)$, puisque f_A est une bijection strictement croissante.

Donc $\text{Card}(A(n)) = E(f_A^{-1}(n))$, donc $\text{Card}(A(n)) \approx f_A^{-1}(n)$ pour n tend vers l'infini ce qui signifie que A est un ensemble estimé d'estimation $f_A^{-1}(n)$.

Si A est l'ensemble image d'une bijection ordonnée f_A définie sur \mathbf{R}^+ , dans de nombreux cas f_A^{-1} est très difficile à obtenir. Par contre, en général, on connaît une fonction g_A , à valeur dans \mathbf{R}^{*+} , strictement croissante définie pour x assez grand, continue, et telle que f_A soit équivalente à g_A à l'infini et qu'on connaisse g_A^{-1} , pour x assez grand.

On peut alors en général utiliser le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.15 :

Si f est une fonction strictement positive et continue, définie pour x supérieur à un réel strictement positif Kf , strictement croissante, telle qu'il existe une fonction g strictement positive et continue, définie pour x assez grand (x supérieur à Kf), strictement croissante et que l'on ait :

(i) f est équivalente à g à l'infini.

(ii) On connaît g^{-1} , et pour toute fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 à l'infini :

$g^{-1}(x(1+\varepsilon(x)))$ est équivalente à $g^{-1}(x)$ à l'infini.

Alors $f^{-1}(x)$ est équivalente à $g^{-1}(x)$ à l'infini.

Démonstration :

Puisque g est équivalente à f , pour x supérieur à Kf , on a une fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 pour x tend vers l'infini avec : $g(x) = f(x)(1+\varepsilon(x))$.

De plus pour x supérieur à Kf :

$$x = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(f(x)(1+\varepsilon(x)))$$

Pour x supérieur à Kf , on pose $f(x) = X$. Donc $x = f^{-1}(X)$.

On obtient, pour $f^{-1}(X)$ supérieur à Kf , soit X supérieur à $f(Kf)$:

$$f^{-1}(X) = g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X))))$$

Donc :

$$\frac{g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X))))}{f^{-1}(X)} = 1$$

Pour montrer que f^{-1} est équivalente à g^{-1} à l'infini, il suffit de montrer que :

$g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X))))$ est équivalente à $g^{-1}(X)$.

Ceci est vrai car $f^{-1}(X)$ tend vers l'infini pour X tend vers l'infini et d'après (ii).

On a donc montré le Théorème.

La condition (ii) sera en général vérifiée, dans le cas où f est une fonction ordonnée sur \mathbf{N}^* , car comme on le verra, les estimations s'expriment comme fonctions simples des fonctions $\text{Log}(x)$, x et de leurs puissances réelles. Il en sera de même en général de la fonction g^{-1} , et comme on a toujours, pour tout réel α et pour toute fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 à l'infini, $\text{Log}(x(1+\varepsilon(x)))^\alpha$ est équivalente à l'infini à $(\text{Log}(x))^\alpha$, et $(x(1+\varepsilon(x)))^\alpha$ est équivalente à x^α , on aura en général $g^{-1}(x(1+\varepsilon(x)))$ est équivalente à $g^{-1}(x)$ à l'infini.

REMARQUE 4.A.16 :

Le Théorème précédent peut aussi être utilisé dans certains cas où on ne connaît pas de fonction g équivalente à f_A , connaissant g^{-1} , mais qu'on peut encadrer f_A par de telles fonctions f_{A1} et f_{A2} , équivalentes à g_1 et g_2 , et dont on connaît g_1^{-1} et g_2^{-1} .

En effet, supposant qu'on ait une fonction $f_A(x)$, et 2 fonctions f_{A1} et f_{A2} définies pour x assez grand et strictement positives, telles que f_{A1} et f_{A2} soient strictement croissantes, tendent vers l'infini et :

$$f_{A2}(x) < f_A(x) < f_{A1}(x)$$

Remarque que si f et g sont 2 fonctions strictement croissantes définies pour x supérieur (au sens large) à K , strictement positives, tendant vers l'infini, telles que pour tout x supérieur ou égal à K : $f(x) < g(x)$.

On obtient que f et g ont des fonctions réciproques f^{-1} et g^{-1} avec :

Pour $f(x)$ supérieur à K :

$$f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(g(x)), \text{ soit } x < f^{-1}(g(x))$$

Et pour $g^{-1}(x)$ supérieur à K (c'est-à-dire x supérieur à $g(K)$) :

$$g^{-1}(x) < f^{-1}(x).$$

Il en résulte que pour x assez grand :

$$f_{A_1}^{-1}(x) < f_A^{-1}(x) < f_{A_2}^{-1}(x).$$

Si on a $f_{A_1}(x)$ est équivalente à une fonction $g_1(x)$ et $f_{A_2}(x)$ est équivalente à une fonction $g_2(x)$ telles qu'on puisse dans les 2 cas appliquer le Théorème précédent et que de plus, à l'infini

$g_2^{-1}(x)$ soit équivalente à $g_1^{-1}(x)$, on obtient alors $f_A^{-1}(x)$ est équivalente à l'infini à $g_1^{-1}(x)$.

Par exemple considérons la fonction ordonnée sur \mathbf{N}^* :

$$f_A(n) = E(\exp(n) + \text{Log}(n) + n^{1/2}).$$

Il est évident qu'on peut définir une bijection ordonnée sur \mathbf{R}^+ $f_{\text{Abij}}(x)$ coïncidant avec f_A sur \mathbf{N}^* . On suppose que f_{Abij} est l'une de ces bijections ordonnées.

Il est difficile de trouver une fonction $g(x)$ équivalente à $f_{\text{Abij}}(x)$, car $f_A(n)$ n'est pas équivalente à $f_A(n+1)$.

Par contre on peut définir :

$$f_{A_2}(x) = \exp(x-2) + \text{Log}(x-2) + (x-2)^{1/2}.$$

$$f_{A_1}(x) = \exp(x+2) + \text{Log}(x+2) + (x+2)^{1/2}.$$

On obtient alors, pour x assez grand :

$$f_{A_2}(x) < f_{\text{Abij}}(x) < f_{A_1}(x).$$

On obtient l'expression précédente remarquant que pour n supérieur à 5, si on considère l'intervalle $I(n) = [n-1, n]$, d'après la définition de f_{Abij} , on a pour tout x dans $I(n)$, $f_A(n-1)$ est inférieur (au sens large) à $f_{\text{Abij}}(x)$ qui est inférieur à $f_A(n)$.

Or il est évident, d'après l'expression de $f_A(n)$, que pour tout x dans $I(n)$, on a $f_{A_2}(x) < f_A(n-1)$ et $f_{A_1}(x) > f_A(n)$.

On obtient donc l'expression précédente, pour x supérieur à 5.

Appliquant le Théorème précédent A.15, on obtient que $f_{A_1}^{-1}$ est équivalente à la fonction $g_{A_1}^{-1}(x)$, $f_{A_2}^{-1}(x)$ est équivalente à $g_{A_2}^{-1}(x)$, avec $g_{A_1}^{-1}(x)$ et $g_{A_2}^{-1}(x)$ équivalentes à $\text{Log}(x)$.

On en déduit donc $f_{\text{Abij}}^{-1}(x)$ est équivalente à $\text{Log}(x)$.

REMARQUE 4.A.17 :

Il est clair que si A est un ensemble estimé d'estimation $a(n)$, on peut trouver une infinité d'autres estimations de A , qui sont toutes les fonctions équivalentes à $a(n)$ et qui peuvent être très compliquées. L'intérêt de la TAN et qu'on ne considère que les expressions les plus simples de $a(n)$, parce que ce sont elles les plus régulières et qu'elles sont celles susceptibles de donner les meilleurs modèles statistiques.

Ainsi, on dira qu'une fonction d'estimation $a(n)$ est *régulière* si on a :

a) $a(x)$ est infiniment dérivable pour x assez grand.

b) Toutes les dérivées de $a(x)$ sont monotones pour x assez grand, et $a'(x)$ inférieur à 1 pour x assez grand. De plus $p_{iA} = a(i) - a(i-1)$ est équivalente à $a'(i)$ à l'infini.

c) $a(x)$ est une fonction simple des fonctions x , $\text{Log}(x)$ et de leurs puissances réelles.

En général, les estimations les plus simples sont *régulières* pour les raisons suivantes :

On remarque que le fait qu'en général, la dérivée $a'(x)$ d'une estimation est inférieure à 1 est dû au fait qu'on a $a(n) - a(n-1) = a'(x)$, avec x dans $[n-1, n]$, qu'on a en général $a(n) - a(n-1)$ est inférieur à 1 et que la fonction $a'(x)$ est monotone pour x assez grand.

Une conséquence de ceci est qu'en général $a(x)$ n'est pas fonction de $\exp(x)$, dont la dérivée tend vers l'infini à l'infini. De même, $a(x)$ ne doit pas s'exprimer avec des parties entières, car alors a ne serait plus vérifié.

C'est pourquoi on peut et on doit être dans le cas c).

Le fait que $a(x)$ est une fonction simple des fonctions x et $\text{Log}(x)$, et que $a(i) - a(i-1) = a'(x)$ où x appartient à $[i-1, i]$, entraîne que $a(i) - a(i-1)$ est équivalente à $a'(i)$. (C'est-à-dire le b))

Si $a(n)$ est une fonction régulière, d'après c) $a'(x)$ est aussi fonction simple des fonctions x et $\text{Log}(x)$, de même que la dérivée de $a(x)$ à tout ordre.

Considérons un ensemble estimé A d'estimation $a(n)$ et $b(n)$, avec $a(x)$ est donc équivalente à $b(x)$ et de plus $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions d'estimation régulières.

Montrons que si on a $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$ et $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$, on a en général p_{iA} est équivalente à p_{iB} à l'infini.

En effet d'après b), p_{iA} est équivalente à $a'(i)$ et p_{iB} est équivalente à $b'(i)$. $a'(x)$ et $b'(x)$ étant monotone pour x assez grand, il suffit donc de montrer que $a'(x)$ est équivalente à $b'(x)$ à l'infini.

Or d'après c), la fonction $r(x)=a'(x)/b'(x)$ est aussi une fonction simple des fonctions $\text{Log}(x)$ et x , de même que sa dérivée $r'(x)$. Il en résulte que $r'(x)$ est équivalente à l'infini à une fonction strictement positive ou strictement négative, et donc $r(x)$ est monotone pour x assez grand et donc $r(x)$ a une limite l , éventuellement infinie.

Montrons que cette limite l est nécessairement égale à 1 :

En effet, supposons $l > 1$.

Donc il existe $\varepsilon > 0$, tel qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout t supérieur à K , $r(t) > 1 + \varepsilon$, c'est-à-dire $a'(t) > b'(t)(1 + \varepsilon)$.

En intégrant entre K et x , x étant supérieur à K , on obtient :

$$a(x) - a(K) > (1 + \varepsilon)(b(x) - b(K)).$$

Et donc pour x supérieur à K :

$$a(x)/b(x) > 1 + \varepsilon + a(K)/b(x) - (1 + \varepsilon)b(K)/b(x).$$

Il est évident que le 2^{ième} terme de cette inégalité tend vers $1 + \varepsilon > 0$, et est incompatible avec l'hypothèse que $a(x)/b(x)$ tend vers 1 pour x tend vers l'infini.

Il est donc impossible qu'on ait $l > 1$, et de même on montre qu'il est impossible qu'on ait $l < 1$. Donc $l = 1$, et on a bien p_{iA} est équivalente à p_{iB} .

Le résultat précédent est important car A, B, C étant 3 ensembles estimés, appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A, B, C puis le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés, on obtient des résultats équivalents quels que soient les fonctions d'estimation utilisées de A, B, C , du moment qu'elles soient régulières.

Pour obtenir la remarque précédente, on utilise le résultat important que si $a(n), b(n), c(n)$ sont des estimations régulières, avec $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$, $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$, $p_{iC}=c(i)-c(i-1)$, alors la convergence à l'infini de la série $\sum p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ est équivalente à la convergence à l'infini de l'intégrale $\int a'(x)b'(x)/c'(x)dx$, et de plus si elles divergent, on a pour tout naturel N :

$$\int_N^n \frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)} dx \approx \sum_{i=N}^n \frac{p_{iA} p_{iB}}{p_{iC}}.$$

On utilisera aussi le fait que si f et g sont 2 fonctions strictement positives et monotones, définie pour x supérieur à K , avec f équivalente à g en l'infini, alors la convergence à l'infini de l'intégrale $\int f$ est équivalente à celle de l'intégrale $\int g$, et si elles divergent :

$$\int_K^x f(t) dt \approx \int_K^x g(t) dt$$

En utilisant exactement la même méthode que dans la partie 3.DECIMALES d'IRRATIONNELS, pour obtenir que la proposition « Il existe une infinité de chiffres égaux à 5 dans les décimales de $\sqrt{3}$ », considérant en particulier les mêmes ensembles F_i , on obtient le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.18 :

Si on a un ensemble A d'évaluation probabiliste p_{iA} , pour i supérieur à N_A , alors :

a) Si la série $\sum p_{iA}$ diverge, la proposition « A a une infinité d'éléments » a une pseudo-preuve aléatoire.

b) Si la série $\sum p_{iA}$ converge, la proposition « A a un nombre fini d'éléments » a une pseudo-preuve aléatoire.

On rappelle que dans le cas a), le Théorème 4.A.7 permet d'obtenir que A est un ensemble estimé dont on obtient une estimation $a(n)$ par une pseudo-preuve aléatoire.

B.EXEMPLES

EXEMPLE 4.B.1 :

Soit à étudier l'ensemble I des nombres premiers pouvant s'écrire $k=10^p+3$.

On va montrer que les 2 propositions P1 :« I est infini » et P2 :« Si I est un ensemble estimé d'estimation

$$i(n) = F(n) = \int_{10}^n \frac{2}{x \text{Log}(x) \text{Log}(10)} dx. \gg \text{ ont des pseudo-preuves aléatoires.}$$

Il faudrait effectuer des tests en calculant pour de nombreuses valeurs $r(n)=I(n)/i(n)$ ($I(n)$ étant le nombre d'éléments de I inférieurs à n), et vérifier que $r(n)$ semble tendre vers 1, pour obtenir que P1 et P2 ont des explications aléatoires intéressantes c'est-à-dire illustrées par de nombreux tests, à condition que ni P1, ni P2, ni leur négation n'aient été démontrées classiquement.

Démonstration :

(On ne démontre pas les propositions P1 et P2, mais on démontre qu'elles ont des pseudo-preuves aléatoires.)

Soit A l'ensemble des naturels k s'écrivant : $k=10^p+3$, avec p dans \mathbf{N}^* .

A est donc l'ensemble image de la fonction ordonnée sur \mathbf{N}^* $f_A(p)=10^p+3$.

On peut alors définir la fonction f_{Abij} , continue et strictement croissante sur \mathbf{R}^+ , avec pour x supérieur à 1, $f_{Abij}(x)=10^x+3$. f_{Abij} est donc une bijection ordonnée coïncidant avec f_A sur \mathbf{N}^* telle qu'on l'a définie en 4.A.12, et donc qu'on désignera aussi par f_A .

On obtient pour k supérieur à $10+3=13$, si $f_A(x)=k$, $f_A^{-1}(k)=x = \log(k-3)$, donc d'après le Théorème 4.A.14, A est un ensemble estimé d'estimation $a(k)=\log(k)$.

Si B est l'ensemble des nombres premiers, on sait que B est un ensemble estimé d'estimation $b(k)=k/\text{Log}(k)$.

De plus, A et B sont inclus dans C l'ensemble des nombres impairs qui est un ensemble estimé d'estimation $c(k)=k/2$.

Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A,B,C, on obtient que A,B,C ont des évaluations probabilistes $p_A(i)=a(i)-a(i-1)$, $p_B(i)=b(i)-b(i-1)$, $p_C(i)=c(i)-c(i-1)$, pour i supérieur (respectivement) à N_A, N_B, N_C .

Il en résulte, si on applique le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2^{ième} forme 4.A.9, I étant l'intersection de A et B, I a une évaluation probabiliste $p_I(i)=p_A(i)p_B(i)/p_C(i)$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A, N_B, N_C)$.

On obtient:

$$\frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)} = \frac{2}{x \text{Log}(10)} \times \frac{\text{Log}(x) - 1}{(\text{Log}(x))^2}$$

Comme l'intégrale $\int 2/(x \text{Log}(10) \text{Log}(x)) dx$ est équivalente à une intégrale de Bertrand qui diverge, il en résulte d'après la Remarque 4.A.17 que la série $\sum p_{iA} p_{iB} / p_{iC}$ diverge et que de plus :

$$\sum_{i=N_I}^n \frac{p_{iA} p_{iB}}{p_{iC}} \approx \int_{N_I}^n \frac{2}{x \text{Log}(x) \text{Log}(10)} dx$$

On peut alors utiliser le Théorème 4.A.18 pour obtenir que P1 : « I est infini » a une pseudo-preuve aléatoire.

Si on applique le Théorème 4.A.7, on obtient que la proposition :

$$\ll \text{ I est un ensemble estimé d'estimation } i(n) = \sum_{i=N_I}^n p_{ii} \gg$$

a une pseudo-preuve aléatoire.

On obtient alors immédiatement que cette proposition est équivalente à P2, et donc P2 a bien une pseudo-preuve aléatoire.

EXEMPLE 4.B.2 :

Etudions maintenant l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire $k=2x^r + 1$, où r est un naturel supérieur à 2.

On obtient exactement les mêmes résultats que précédemment, avec ici :

$$F(n) = \int_{10}^n \frac{2^{1-1/r}}{rx^{1-1/r} \text{Log}(x)} dx$$

On procède exactement comme dans l'exemple précédent, avec $a(k)=k^{1/r}/2^{1/r}$, $b(k)$ et $c(k)$ demeurant inchangés. Comme dans l'exemple précédent, il faudrait calculer et tracer $I(n)/F(n)$ pour vérifier que P2 est illustrée par de nombreux tests et donc a une explication aléatoire intéressante, si on ne l'a jamais démontrée classiquement ni sa négation.

EXEMPLE 4.B.3 :

Etudions l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire $k=6 \cdot 10^p+1$.

On obtient les mêmes résultats que pour les 2 premiers exemples, avec ici :

$$F(n) = \int_{10}^n \frac{24}{x \text{Log}(x) \text{Log}(10) N_c} dx$$

où N_c est le nombre de naturels modulo 24 dont le carré est égal à 1 modulo 24.

Pour obtenir les résultats de cet Exemple, on obtient comme dans le premier exemple que A est un ensemble estimé d'estimation $a(k)=\log(k)$.

L'ensemble B et l'estimation $b(k)$ restent inchangés ;

Cependant, on remarque que les éléments de A et de B peuvent s'écrire $\sqrt{(24n+1)}$ où n est un naturel.

On doit donc prendre pour C l'ensemble des naturels $k=\sqrt{24n+1}$.

Pour obtenir $c(k)$, on considère la table des carrés modulo 24, si N_c est le nombre de naturels dont le carré est égal à 1 (modulo 24), il est évident que $c(k)=k(N_c/24)$.

On procède alors comme précédemment pour obtenir la propositions « I est infini » et la proposition donnant l'estimation $i(n)$ de I.

EXEMPLE 4.B.4 :

Etudions l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire : $k=24x^r+1$, r étant un naturel supérieur à 2.

On obtient les mêmes résultats que pour les exemples précédents, avec :

$$i(n) = F(n) = \int_{10}^n \frac{24^{1-1/r}}{rx^{1-1/r} \text{Log}(x) N_c} dx$$

Pour obtenir ces résultats, on procède comme dans l'Exemple précédent, en conservant $b(k)$ et $c(k)$, et en prenant $a(k)=(k/24)^{1/r}$.

REMARQUE 4.B.5:

Il est clair que les pseudo-Axiomes de la TAN que nous avons donné permettent aussi d'étudier l'intersection d'un nombre d'ensembles estimés arbitraire, en donnant des estimations de ces ensembles estimés.

Dans les exemples précédents, on a proposé seulement des intersections infinies, car ce sont les seules qui peuvent être illustrées par des tests et donc ont les explications aléatoires les plus intéressantes. Il est cependant clair qu'on aurait pu proposer de nombreux exemples où le fait que l'intersection de 2 ensembles estimés est finie a une explication aléatoire.

Il n'est pas sûr en outre que les propositions des exemples précédents aient des explications aléatoires car il est possible qu'on puisse les démontrer classiquement ou leurs négations. On rappelle que par Définition seules les propositions qui n'ont pas de démonstration classique ni leur négation ont une explication aléatoire. Car sinon, leur pseudo-preuve aléatoire est inutile.

On peut donc s'attendre que comme dans les exemples précédents, de très nombreuses propositions en Théorie des Nombres aient une explication aléatoire, et donc tout en ayant une explication rationnelle basée sur le hasard n'aient pas de démonstration classique ni leur négation.

A et B étant 2 ensembles estimés, on peut obtenir dans certains cas un autre modèle de la fonction caractéristique $f_I(i)$, avec $I=A \cap B$.

Ainsi, supposons que A soit l'image d'une fonction ordonnée g_A sur \mathbf{N}^* , et que B soit un ensemble estimé d'estimation $b(n)$.

Si on applique à B le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on obtient qu'il existe un naturel N_B tel que pour i supérieur à N_B , $f_B(i)=1$ soit modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$ (f_B étant la fonction caractéristique de B).

On obtient alors immédiatement la modélisation :

« Pour j tel que $g_A(j)$ soit supérieur à N_B , $f_i(g_A(j))=1$ (qui est équivalent à $f_B(g_A(j))=1$) est modélisée par un évènement de probabilité $p_{g_A(j)I}=p_{g_A(j)B}=b(g_A(j))-b(g_A(j)-1)$. »
 (Il est évident que si i ne s'écrit pas $g_A(j)$ pour un naturel j , alors $f_i(i)=f_A(i)=0$, f_A fonction caractéristique de A).

Cette 2^{ème} modélisation est plus précise que celle obtenue en appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et B , puisque dans cette 2^{ème} modélisation, on ne modélise pas f_A la fonction caractéristique de A , mais on l'utilise directement. Cependant, cette 2^{ème} modélisation conduit à des estimations de I équivalentes à celles obtenues par la 1^{ère} modélisation, si $b(x)$ est une fonction régulière et que g_{Abij} étant une bijection ordonnée de classe C^2 sur \mathbf{R}^+ associée à g_A (qui existe toujours de façon évidente) $g_A^{-1}(x)$ (qui on le rappelle donne une estimation de A) est équivalente à une fonction régulière.

EXEMPLE 4.B.6 :

On peut donner une explication aléatoire à la Conjecture de Goldbach, et à des propositions exprimant des propriétés de la Conjecture de Goldbach, en utilisant la modélisation des ensembles estimés présentée dans cet article, et non plus le modèle équiprobable comme dans l'article (5). Il est possible que cette 2^{ème} modélisation conduise, en étant éventuellement affinée, à des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach plus précises que celles obtenues en utilisant le modèle équiprobable.

ETUDE DE $r(k)$ PAR LE MODELE SIMPLE MI 4.B.6A) :

Soit A l'ensemble des nombres premiers. On sait que A est un ensemble estimé d'estimation $a(n)=n/\text{Log}(n)$.

Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A , on obtient qu'il existe un naturel N_A tel que pour i supérieur (toujours au sens large si on ne précise pas) à N_A , « $f_A(i)=1$ » soit modélisée par un évènement « $Xf_A(i)=1$ » de probabilité $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$. (f_A fonction caractéristique de A) On sait qu'on peut appliquer ce pseudo-Axiome en choisissant N_A assez grand, et on choisira $N_A=501$.

On obtient :

$$p_{iA} = \frac{i}{\text{Log}(i)} - \frac{i-1}{\text{Log}(i-1)} = \frac{1}{\text{Log}(i)}(1 + \varepsilon(i))$$

Où la fonction $\varepsilon(i)$, complètement déterminée, tend vers 0 pour i tend vers l'infini. (On rappelle qu'une estimation plus précise de $a(n)$ est $\int_{[3,n]} (1/\text{Log}(x))dx$, qui donne la même expression)

On a donc la loi numérique aléatoire :

« Pour i supérieur à $N_A=501$, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_A(i)$, avec $p(\ll Xf_A(i)=1 \gg)=p_{iA}$. »
 Cependant, comme tous les nombres premiers sont impairs, on peut considérer seulement les naturels i impairs. On obtient alors un meilleur modèle statistique:

Ainsi, considérons 2 ensembles estimés A et C , avec A inclus dans C , et pour i appartenant à C , on cherche à modéliser $f_A(i)=1$, que l'on écrira $f_{A/C}(i)=1$. On cherche donc à modéliser $f_{A/C}(i)$.

On l'obtient par le pseudo-Axiome suivant, de l'inclusion des ensembles estimés, qui se justifie de la même façon que le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2^{ème} forme:

Pseudo-Axiome 4.B .6.Aa) de l'inclusion des ensembles estimés :

Si A et C sont 2 ensembles d'estimation probabiliste p_{iA} et p_{iC} , pour i supérieur à N_A et N_C (On suppose $N_A=N_C$), avec A inclus dans C , alors lorsque le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés est valide pour (A,C) , pour tout i dans C , $f_A(i)$ (notée $f_{A/C}(i)$) est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA/C}=p_{iA}/p_{iC}$.

1^{ère} justification intuitive :

Cette justification est basée sur le modèle équiprobable :

Supposons qu'on ait un ensemble $E=\{1,...,n\}$, et que A et C soient 2 sous-ensembles de E ayant a et c éléments, avec A inclus dans C .

Appliquant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3 à (i,A,E) puis à (i,C,E) , on obtient pour i dans E :

« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.

« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.

Si maintenant, sachant i appartient à C , on applique le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à (i, A, C) (car A est inclus dans C par hypothèse), on obtient :

« $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité a/c , avec $a/c=p_{iA}/p_{iC}$.

Ceci est donc une première justification.

2^{ième} justification intuitive :

Supposons que (A, C) soit un couple d'ensembles quelconques parmi tous les couples (A', C') tels que A' et C' sont 2 ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iC} pour i supérieur à N_A , et A' est inclus dans C' .

On a donc pour i supérieur à N_A :

« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iA} de probabilité p_{iA} .

« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iC} de probabilité p_{iC} .

De plus comme dans la 2^{ième} justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2^{ième} forme, on peut en premier lieu considérer puisque A est inclus dans C que Ev_{iA} et Ev_{iC} appartiennent au même espace probabilisable et de plus que Ev_{iA} est inclus dans Ev_{iC} , pour i supérieur à N_A .

On peut aussi en second lieu généraliser la propriété de correspondance, en admettant que la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est modélisée par l'évènement « Ev_{iA} sachant Ev_{iC} . (Ev_{iA}/Ev_{iC}).

Or la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est équivalente à « $f_{A/C}(i)=1$ » tel qu'on a défini $f_{A/C}(i)$.

Il en résulte que « $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par l'évènement Ev_{iA}/Ev_{iC} de probabilité p_{iA}/p_{iC} .

On a donc donné une 2^{ième} justification intuitive du pseudo-Axiome.

I étant l'ensemble des naturels impairs, puisque A est inclus dans I , appliquant le pseudo-Axiome précédent à (A, I) , on obtient que pour i naturel impair supérieur à 501, $f_{A/I}(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}(i)$ avec $p(\langle Xf_{A/I}(i)=1 \rangle) = p_{iA/I} = p_{iA}/p_{iI} = 2p_{iA}$. (avec $p_{iI}=1/2$).

Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes on obtient la même loi numérique aléatoire, mais avec des variables $Xf_{A/I}(i)$ définies sur le même espace probabilisable et indépendantes.

Si on définit pour tout n pair ($n=2p$) la proposition :

$P(n)$: « $n=2p$ est la somme de 2 nombres premiers (distincts) »,

On considère les naturels $n=2p$, avec p supérieur à $N_A=501$.

Il est évident alors que « $t(P(n)=0)$ » est équivalente à :

« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » et « $f_{A/I}(3)f_{A/I}(n-3)=0$ » et... et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »,

où p' est le plus grand naturel impair strictement inférieur à p .

On écrit cette proposition :

« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » et... et « $f_{A/I}(499)f_{A/I}(n-499)=0$ » et « $f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)=0$ » et... et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »

La proposition précédente fait intervenir des naturels $n-j$ avec j inférieur à p' (2^{ième} terme de chaque produit). Il en résulte $n-j$ est supérieur à $n-p'=2p-p'>p$. (puisque par hypothèse p' est strictement inférieur à p). Donc comme p est supérieur à $N_A=501$, $n-j$ est toujours supérieur à N_A , et donc $f_{A/I}(n-j)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}(n-j)$.

D'après la propriété de correspondance (donnée dans les Rappels 2.A), la proposition précédente équivalente à $t(P(n)=0)$ est donc modélisée par l'évènement « $Xt(P(n)=0)$ » de probabilité :

« $f_A(1)Xf_{A/I}(n-1)=0$ » et... et « $f_A(499)Xf_{A/I}(n-499)=0$ » et « $Xf_{A/I}(N_A)Xf_{A/I}(n-N_A)=0$ » et... et

« $Xf_{A/I}(p')Xf_{A/I}(n-p')=0$ ».

Et donc utilisant que les $Xf_{A/I}(i)$ sont indépendantes, la probabilité de l'évènement précédent est égal au produit des probabilités de chaque évènement. Si on définit $P(N_A)$ l'ensemble des nombres premiers strictement inférieurs à N_A , on a pour tout i strictement inférieur à N_A , si i est dans $P(N_A)$, $f_A(i)=1$, sinon $f_A(i)=0$, et donc la probabilité de l'évènement précédent est égale à :

$$p("Xt(P(n)) = 0") = \prod_{j \in P(N_A)} (1 - p_{jA/I}) \prod_{p' \geq j \geq N_A} (1 - p_{jA/I} p_{(n-j)A/I})$$

(j représente toujours un naturel impair dans l'expression précédente).

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :

« Pour $n=2p$ supérieur à $2N_A=1002$, $t(P(n))$ est modélisée par la variable aléatoire $Xt(P(n))$ définie précédemment ».

Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes à la loi précédente, on obtient la même loi avec les $Xt(P(n))$ indépendantes.

On peut alors en procédant exactement comme dans l'article ⁽⁵⁾ obtenir que la proposition :

« Pour tout n naturel pair supérieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers distincts », qui est équivalente à « Pour tout n pair supérieur à 1002, t(P(n))=1 », a une pseudo-preuve aléatoire. Et il est évident que cette proposition est équivalente à la Conjecture de Goldbach.

(Puisqu'on vérifie que pour n pair inférieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers).

Avec toujours n=2p naturel pair tel que p supérieur à N_A=501, on définit r(n) comme étant le nombre de paires de nombres premiers distincts dont la somme donne n.

On obtient :

$$r(n)=f_A(1)f_{A/I}(n-1)+\dots+f_A(499)f_{A/I}(n-499)+f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)+\dots+f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')$$

Or on a vu dans les Rappels 2.A, comme conséquence de la propriété de correspondance, que si on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :

« f(i) est modélisée par la variable aléatoire Xf(i) »,

alors si les Xf(i) sont définies sur le même espace probabilisable, pour tous k₁,...,k_n appartenant à F, et pour toute fonction G(x₁,...,x_n) définie sur Rⁿ, la fonction G(f(k₁),...,f(k_n)) était modélisée par la variable aléatoire G(Xf(k₁),...,Xf(k_n)).

Il en résulte que la fonction r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n), avec :

$$Xr(n) = \sum_{j \in P(N_A)} Xf_{A/I}(n-j) + \sum_{p' \geq j \geq N_A, j \in I} Xf_{A/I}(j) Xf_{A/I}(n-j)$$

On obtient donc la loi numérique aléatoire :

« Pour n pair supérieur à 2N_A=1002, r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n) définie précédemment ».

On remarque qu'on peut facilement obtenir la moyenne et la variance de Xr(n), les Xf_{A/I}(j) étant indépendantes. On peut aussi appliquer le pseudo-Axiome des variables indépendantes pour obtenir la même loi que précédemment, mais avec les Xr(n) indépendantes, et obtenir alors des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach.

On remarque tout d'abord qu'on peut montrer que E(Xr(k)) est équivalente à E(X_{eq}r(k)), X_{eq}r(k) étant la variable aléatoire obtenue utilisant le modèle équiprobable modélisant r(k) dans le premier article, c'est-à-dire que E(Xr(k)) est équivalente à k/(Log(k))².

Utilisant l'inégalité de Chebychev exactement de la même façon que dans la Remarque 4.A.7b), on peut obtenir des intervalles de confiance à 99% I(k)=[1-ε(k),1+ε(k)] de Xr(k)/E(Xr(k)), ε(k) étant une fonction positive tendant vers 0.

Procédant alors exactement comme dans l'estimation de r(k) dans l'article précédent ⁽⁵⁾ (Chapitre 3.3), on obtient que la proposition suivante P_{2MI}(r(k)) a une pseudo-preuve aléatoire :

P_{2MI}(r(k)) : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\frac{1}{(n-2N_A)/2+1} \times \sum_{i=2N_A}^n t\left(\frac{r(i)}{E(Xr(i))} \in I(i)\right) \geq 0.98 \text{ (avec } i \text{ pair et } E(Xr(i)) \approx i/(\text{Log}(i))^2)$$

On est donc exactement dans le même cas que le modèle équiprobable de l'article précédent ⁽⁵⁾, (où on avait obtenu dans le Chapitre 3.3 la proposition P_{2eq}(r(k))) on obtient que MI n'est pas valide avec une suffisamment bonne approximation pour que la proposition précédente P_{2MI}(r(k)) qu'il entraîne soit vraie. Cependant, comme dans le modèle équiprobable, le modèle indépendant MI donne une explication théorique à l'aspect de la Comète de Goldbach, c'est à dire au fait qu'elle soit délimitée par des courbes d'équation de la forme y(k)=Ak/(Log(k))².

On remarque qu'il est très possible a priori qu'on puisse obtenir des variables aléatoires Xr(n) représentant les propriétés statistiques de r(n) de façon beaucoup plus précises que celles obtenues dans les modèles équiprobables et indépendants exposés précédemment. Cependant, ceci doit nécessiter d'utiliser des propriétés des nombres premiers plus complexes que les 2 seules qu'on a utilisées, c'est-à-dire que les nombres premiers constituent un ensemble estimé d'estimation n/Log(n) inclus dans l'ensemble des naturels impairs. Trouver une loi numérique aléatoire dont on puisse déduire les principales propriétés de la Comète de Goldbach, constitue l'objectif suivant de la TAN, comme on l'a remarqué dans l'Etude théorique d'une fonction par la TAN 4.A.7a).

ETUDE DE LA FONCTION r(k) PAR LE MODELE MI(k)π(p₁,...,p_n) 4.B.6B)

On remarque qu'on peut grandement améliorer la qualité des modèles présentés, indépendants et équiprobable, de la façon suivante :

On a vu qu'on a amélioré la qualité du modèle indépendant en utilisant que A l'ensemble des nombres premiers était inclus dans I l'ensemble des nombres impairs.

Plus généralement, supposons qu'on ait un naturel pair k, et que p_{1k}, \dots, p_{nk} soient les diviseurs premiers de k autres que 2 et k/2 (si k/2 premier), avec $p_{1k} < \dots < p_{nk}$. On peut alors considérer que A est inclus dans l'ensemble $I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$ qui est l'ensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de p_{1k}, \dots, p_{nk} , à l'exception de p_{1k}, \dots, p_{nk} eux-mêmes. On remarque qu'on a toujours $p_{ik} < k/2$. Afin de simplifier le modèle, on pourrait considérer seulement les nombres premiers p_{ik} inférieurs à P=500. (Il est très possible qu'on obtienne un bon modèle prenant P égal à une valeur beaucoup plus petite que 500).

Remarquant que si j appartient à $I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$, avec $j > 500$, on a alors k-j appartient à $I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$, on peut procéder exactement comme dans le modèle indépendant précédent, remplaçant I par $I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$. Il est clair que cette modélisation est plus précise, et qu'elle conduit aussi à l'existence de bandes correspondant aux naturels pairs ayant certains diviseurs premiers en commun. Il est cependant très possible que cette modélisation ne soit pas assez précise pour décrire complètement ou avec une très bonne approximation les propriétés de la Comète de Goldbach.

(On peut affiner le modèle équiprobable étudié dans l'article précédent ⁽⁵⁾ de la même façon, en remplaçant E(k) l'ensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k par l'ensemble des paires de naturels inférieurs à k appartenant à $I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$ privé de p_{1k}, \dots, p_{nk} , B(k) l'ensemble des paires de naturels $\{i, k-i\}$, i étant impair par l'ensemble des paires de naturels $\{i, k-i\}$, où i appartient à $I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$ privé de p_{1k}, \dots, p_{nk} (Car il est évident qu'on a toujours pour j dans $\{1, \dots, n\}$ k-p_{jk} est un multiple de p_{jk} et n'est pas premier), et A(k) l'ensemble des paires de naturels premiers inférieurs à k par l'ensemble des paires de naturels premiers inférieurs à k et différents de p_{1k}, \dots, p_{nk} . On notera $M_{eq}I_{\pi}(p_1, \dots, p_n)$ ce modèle équiprobable analogue au modèle $MI_{\pi}(p_1, \dots, p_n)$.)

En réalité, on voit que les modèles précédents ne sont pas assez bons pour décrire avec une très bonne approximation la Comète de Goldbach. :

On note MI le modèle indépendant étudié précédemment en considérant seulement que A est inclus dans I, et MI(k) le modèle indépendant plus précis décrit précédemment où on considère plus précisément que A est inclus dans $I(k) = I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$.

En effet, on obtient $I(k) = I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$ en considérant l'ensemble des naturels modulo $\pi(k) = p_{1k} \times \dots \times p_{nk}$. On obtient alors des nombres modulo $\pi(k)$ qui appartiennent tous à I(k). Si n(k) est le nombre de naturels modulo $\pi(k)$ qui appartiennent tous à I(k) alors il vient immédiatement que I(k) est un ensemble estimé d'estimation $i_{I(k)}(n) = p_{I(k)}n$, avec $p_{I(k)} = n(k)/\pi(k)$.

En procédant alors comme dans le modèle MI, on obtient dans le modèle MI(k) que (avec des notations évidentes) $m_{I(k)}(k)$ est équivalent à $(p_i/p_{I(k)})m_I(k)$, c'est-à-dire $m_{I(k)}(k)$ est équivalent à $(p_i/p_{I(k)})k/(\text{Log}(k))^2$.

Comme on a toujours p_i supérieur à $p_{I(k)}$, on devrait donc trouver d'après le modèle MI(k) que tous les points $(k, r(k))$ doivent être au dessus de la courbe $(k, m_{I(k)}(k))$. Or cela n'est visiblement pas le cas, la plupart des points $(k, r(k))$ sont au dessous de la courbe. (C'est une remarque analogue qui permettait d'invalider la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood ⁽⁵⁾.)

On peut cependant améliorer encore le modèle MI(k) de la façon suivante :

Considérons un naturel k pair n'ayant aucun autre diviseur premier que 2. ($k=2^n$). On a vu que dans le modèle MI, on a utilisé l'expression:

$$r_1(k) = f_A(1)f_A(k-1) + \dots + f_A(499)f_A(k-499) + f_A(N_A)f_A(k-N_A) + \dots + f_A(p')f_A(k-p')$$

, avant d'appliquer la propriété de correspondance permettant de modéliser r(k) par la variable aléatoires $X_{I_r}(k)$.

On peut donc écrire aussi :

$$r_1(k) = C_1(k) + S_1(k), \text{ avec } C_1(k) \text{ est majorée par une constante } (C_1(k) = f_A(1)f_A(k-1) + \dots + f_A(499)f_A(k-499)), \text{ et } S_1(k) = f_A(N_A)f_A(k-N_A) + \dots + f_A(p')f_A(k-p').$$

Dans cette expression, on sait que certains termes de la forme $f_A(i)f_A(k-i)$ sont nuls, par exemple tous les termes tels que i est multiple de 3, 5... Nous allons introduire un nouveau modèle $MI_{\pi}(3)$, améliorant la modèle MI, dans lequel on utilise que tout multiple de 3 (sauf 3), n'est pas premier. On peut réécrire $S_1(k)$ sous la forme $S_{I_{\pi}(3)}(k)$ suivante, $I_{\pi}(3)$ ayant été précédemment défini comme l'ensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de 3 :

$$S_{I_{\pi}(3)}(k) = \sum_{i \in I_{\pi}(3)} f_A(i) f_A(k-i), \text{ avec } 500 < i < k/2.$$

On sait que i appartient à $I_{\pi}(3)$ signifie i congru à 1 ou 5 modulo 6, et in a vu que i appartient à I signifie i congru à 1, 3 ou 5 modulo 6. On a donc $p_{i \in I_{\pi}(3)} = 1/3$ et $p_{i \notin I_{\pi}(3)} = 1/2$.

De plus il est évident que $S_{I\pi(3)}(k)$ contient les 2/3 des termes de $S_I(k)$ (c'est-à-dire $p_{i\pi(3)}/p_{ii}$, puisque la proportion des éléments de $\{1, \dots, k/2-1\}$ tels que i appartient à I est égale à p_{ii} (ou plutôt tend vers p_{ii}), et la proportion de ceux tels que i appartient à $I\pi(3)$ est égale à $p_{i\pi(3)}$.

De plus, si on considère un terme de la somme $S_{I\pi(3)}(k) f_A(i)f_A(k-i)$, on sait que i appartient à $I\pi(3)$, et donc on peut écrire $f_A(i)$ sous la forme $f_{A/I\pi(3)}(i)$.

D'autre part par hypothèse k est pair et n'est pas divisible par 3, donc k est congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6. Or dans $S_{I\pi(3)}(k)$ les termes sont congrus alternativement à 1 ou 5 modulo 6. On a donc alternativement $k-i$ congru à 1 ou 3 modulo 6, et donc un terme sur 2 de la somme $S_{I\pi(3)}(k)$ est nul ($k-i$ étant multiple de 3).

Pour chaque terme non nul, $k-i$ est congru à 1 modulo 6, donc $k-i$ appartient à $I\pi(3)$, et on peut écrire $f_A(k-i)$ sous la forme $f_{A/I\pi(3)}(k-i)$. (on vérifie qu'on obtient le même résultat si k congru à 4 modulo 6).

On a donc obtenu les 3 points fondamentaux suivants, k n'ayant aucun autre diviseur premier que 2:

a) La somme $S_{I\pi(3)}(k)$ contient les 2/3 (c'est-à-dire $p_{i\pi(3)}/p_{ii}$) des termes de $S_I(k)$.

b) 1 terme sur 2 de $S_{I\pi(3)}(k)$ est nul.

c) Chaque terme non nul de $S_{I\pi(3)}(k)$ s'écrit $f_{A/I\pi(3)}(i) f_{A/I\pi(3)}(k-i)$, et est donc modélisée par la variable aléatoire $X_{f_{A/I\pi(3)}(i)} X_{f_{A/I\pi(3)}(k-i)}$ définie dans le Pseudo-Axiome 4.B.6a) de l'inclusion des ensembles estimés.

Utilisant la loi numérique aléatoire modélisant $f_{A/I\pi(3)}(i)$, on obtient donc que chaque terme non nul de $S_{I\pi(3)}(k)$ a une probabilité $p_{iA} p_{k-iA} / (p_{i\pi(3)})^2$ d'être égal à 1.

Utilisant les 3 propriétés précédentes, on obtient que dans le modèle $MI\pi(3)$, $r(k)$ est modélisée par une variable aléatoire $X_{I\pi(3)}(k)$ d'espérance mathématique telle que :

$$E(X_{I\pi(3)}(k)) \approx \frac{p_{i\pi(3)}}{p_{ii}} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{p_{ii}}{p_{i\pi(3)}}\right)^2 \times E(X_I r(k)) \approx \frac{1}{2} \times \frac{p_{ii}}{p_{i\pi(3)}} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I\pi(3)}(k)) \approx \frac{3}{4} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = C_{I\pi(3)}(k) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

On obtient donc un équivalent de $E(X_{I\pi(3)}(k))$ en multipliant $E(X_I(k))$, (ou $k/(\text{Log}(k))^2$) par $3/4$, c'est-à-dire 0.75.

On remarque $CI\pi(3)(k)=0.75$ est proche de $C_2 \approx 0.66$, où C_2 est la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood⁽⁵⁾⁽⁷⁾.

On voit donc que dans le nouveau modèle $MI\pi(3)$, on doit s'attendre à trouver des bandes situées en dessous de la courbe $(k, k/(\text{Log}(k))^2)$, contrairement aux modèles MI et $MI(k)$, et effectivement on observe que la courbe $(k, k/(\text{Log}(k))^2)$ est très voisine de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach (légèrement au dessus).

On pourrait se demander ce que donnerait le modèle $MI\pi(5)$ analogue au modèle $MI\pi(3)$, utilisant l'ensemble $I\pi(5)$ de la même façon qu'on a utilisé l'ensemble $I\pi(3)$.

En procédant de la même façon que précédemment, considérant un naturel k n'ayant aucun diviseur premier autre que 2, on obtient que k doit être congru à 2,4,6 ou 8 modulo 10. De plus les éléments de $I\pi(5)$ sont ceux congrus à 1,3,7,9 modulo 10.

Si par exemple k est congru à 2 modulo 10, on obtient que pour i dans $I\pi(5)$, $k-i$ est congru à 1,9,5,3 modulo 10, et donc un terme sur 4 de la somme $S_{I\pi(5)}(k)$ (exactement analogue à $S_{I\pi(3)}(k)$) est nul (ceux tels que $k-i$ est congru à 5 modulo 10). (On vérifie qu'on obtient le même résultat si k congru à 4,6 ou 8 modulo 10).

On obtient donc des propriétés complètement analogues à celles a)b)c) du modèle $MI\pi(3)$, et donc :

$$E(X_{I\pi(5)}(k)) \approx \frac{3}{4} \times \frac{p_{ii}}{p_{i\pi(5)}} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = \frac{15}{16} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

L'effet de correction du modèle $MI\pi(5)$ est donc moindre que celui de $MI\pi(3)$.

Si on veut tenir compte des 2 modèles $MI\pi(3)$ et $MI\pi(5)$, on considère le modèle $MI\pi(3,5)$, utilisant l'ensemble $I\pi(3,5)$, qu'on a défini comme l'ensemble des naturels impairs ni multiples de 3 ni multiple de 5.

Procédant comme précédemment, on considère un naturel k tel que k n'ait aucun diviseur premier autre que 2. Donc k est congru à un des naturels 2,4,8,14,16,22,24,26 ou 28 modulo 30. Prenons par exemple k congru à 28 modulo 30.

De plus, $I_{\pi}(3,5)$ contient les naturels congrus à un des naturels 1,7,11,13,17,19,23 ou 29 modulo 30. Donc $p_{iI_{\pi}(3,5)}=8/30$.

Pour i dans $I_{\pi}(3,5)$, on obtient donc $k-i$ congru à un des naturels 27,21,17,15,11,9,5,29. Donc $5/8$ des termes de $S_{I_{\pi}(3,5)}(k)$ s'annulent. (Ceux pour lesquels $k-i$ est congru à 27,21,15,9 et 5 modulo 30).

Il en résulte que $5/8$ des termes de $S_{I_{\pi}(3,5)}(k)$ s'annulent. Utilisant donc des propriétés analogues aux propriétés a)b)c) du modèle $MI_{\pi}(3)$, on obtient avec des notations analogues :

$$E(X_{I_{\pi}(3,5)}(k)) \approx \frac{3}{8} \times \frac{30}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = \frac{90}{128} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

On remarque :

$$E(X_{I_{\pi}(3,5)}(k)) \approx \frac{90}{128} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = (1 - \frac{1}{(3-1)^2})(1 - \frac{1}{(5-1)^2}) \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} \cong C_{I_{\pi}(3,5)}(k) \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

avec $C_{I_{\pi}(3,5)}(k)$ très proche de C_2 , C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On rappelle que d'après cette Conjecture ⁽⁵⁾⁽⁷⁾ :

$$r(k) \approx 2C_2 \prod_{p/k, p \geq 3} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}, \text{ avec :}$$

$$C_2 = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \cong 0,66, \text{ p désignant un nombre premier dans les expressions précédentes.}$$

On a vu en introduction qu'elle était fautive, mais il semble que sa variante obtenue en supprimant le facteur 2 soit vraie, et puisse être extrêmement approchée par les propositions obtenues par la TAN concernant la modélisation statistique de $r(k)$.

Considérons maintenant le modèle dans lequel k a plusieurs diviseurs mais n'est pas divisible par 3. On note alors $I(k)\pi(3)$ l'ensemble $I(k) \cap I_{\pi}(3)$, et $MI(k)\pi(3)$ le modèle analogue au modèle $MI_{\pi}(3)$ s'appliquant aux naturels k pairs non divisibles par 3.

Dans le modèle $MI(k)$, on a écrit $r(k)$ sous la forme, de façon analogue au modèle MI :

$r(k) = C_{I(k)}(k) + S_{I(k)}(k)$, avec :

$$S_{I(k)}(k) = \sum_{i \in I(k), 500 < i < k/2} f_A(i) f_A(k-i) .$$

Dans le modèle $MI(k)\pi(3)$, de façon analogue au modèle $MI_{\pi}(3)$, on considère seulement les termes de $SI(k)\pi(3)$ qui ne sont pas multiples de 3. On obtient la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$:

$$S_{I(k)\pi(3)}(k) = \sum_{i \in I(k)\pi(3), 500 < i < k/2} f_A(i) f_A(k-i) .$$

Considérant l'ensemble $I(k)\pi(3)$, on obtient comme précédemment que la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ ne comporte que la proportion $p_{iI(k)\pi(3)}/p_{iI}$ des termes de $S_I(k)$.

D'autre part, puisque k n'est pas divisible par 3, on a toujours k congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6.

Supposons $I(k) = I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{nk})$. On a alors $I(k)\pi(3) = I_{\pi}(3, p_{1k}, \dots, p_{nk})$. Soit $n_1(k,3)/n(k,3)$ la proportion des éléments de $\mathbf{N}/6p_{1k} \dots p_{nk} \mathbf{N}$ congrus à 1 modulo 6, et $n_5(k,3)/n(k,3)$ la proportion de ceux congrus à 5 modulo 6. On obtient alors que la proportion $n_5(k,3)/n(k,3)$ des termes de $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ sont nuls, car pour i congru à 5 modulo 6, alors $k-i=2-5$ congru à 3 modulo 6 et donc n'est pas premier. Dans tous les exemples considérés, on aura :

$$\frac{n_1(k,3)}{n(k,3)} = \frac{n_5(k,3)}{n(k,3)} = \frac{1}{2}$$

De plus, si on considère un terme non nul de cette somme correspondant à i , on sait que i appartient à $I(k)\pi(3)$, et donc on peut écrire $f_A(i)$ sous la forme $f_{A/I(k)\pi(3)}(i)$. De plus on sait que $k-i$ appartient à $I(k)$ (car i appartient à $I(k)$), et $k-i$ appartient à $I_{\pi}(3)$. (Puisque $k-i$ est congru à 1 modulo 6). Il en résulte que $k-i$ appartient à $I(k)\pi(3)$, et donc on peut écrire tout terme non nul de la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ sous la forme $f_{A/I(k)\pi(3)}(i) f_{A/I(k)\pi(3)}(k-i)$.

Il en résulte qu'on obtient des propriétés totalement analogues aux propriétés a)b)c) du modèle $MI_{\pi}(3)$, dont on déduit que le modèle $MI(k)\pi(3)$ prévoit que $r(k)$ est modélisé par la variable aléatoire $X_{I(k)\pi(3)} r(k)$, avec :

$$E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx \frac{P_{i(k)\pi(3)}}{p_i} \times \frac{n_1(k,3)}{n(k,3)} \times \left(\frac{p_i}{P_{i(k)\pi(3)}}\right)^2 \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = \frac{1}{2} \times \frac{p_i}{P_{i(k)\pi(3)}} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

D'après l'expression d'un équivalent de $E(X_{I(k)} r(k))$, on voit qu'on obtient un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(3)} r(k))$ en multipliant $E(X_{I(k)} r(k))$ par le coefficient $c_{I(k)\pi(3)}(k) = 0.5 \cdot p_{i(k)}/P_{i(k)\pi(3)}(k)$.

Car on a vu :

$$E(X_{I(k)} r(k)) \approx \frac{p_i}{P_{i(k)}} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Donnons quelques exemples numériques :

Dans le cas où $I(k)=I_\pi(5)$ (k n'a que 5 et 2 pour diviseurs premiers.), on obtient que $I_\pi(5)$ contient l'ensemble des naturels congrus à 1,3,7,9 modulo 10, et donc on a alors $p_{i(k)}=4/10$.

On a alors $I(k)\pi(3)=I_\pi(3,5)$, et donc $I(k)\pi(3)$ contient les naturels congrus à 1,7,11,13,17,19,23,29 modulo 30, donc $p_{i(k)\pi(3)}=8/30$.

On obtient le coefficient :

$$c_{I(k)\pi(3)}(k) = \frac{1}{2} \times \frac{P_{i(k)}}{P_{i(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{8} \times \frac{2}{5} = 0.75$$

On obtient donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx \frac{3}{4} \times \frac{p_i}{P_{i(k)}} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(5) \times \left(\frac{5-1}{5-2}\right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(5) = \left(1 - \frac{1}{(3-1)^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(5-1)^2}\right) \cong C_2$$

La prédiction du modèle $MI(k)\pi(3)$ dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Dans le cas où $I(k)=I_\pi(7)$, on obtient que $I_\pi(7)$ contient les naturels congrus à 1,3,5,9,11,13 modulo 14, donc $p_{i(k)}=6/14$.

$I(k)\pi(3)=I_\pi(3,7)$ contient les naturels congrus à 1,5,11,13,17,19,23,25,29,31,37,41 modulo 42, et donc $p_{i(k)\pi(3)}=12/42$.

On obtient le coefficient :

$$\frac{1}{2} \times \frac{P_{i(k)}}{P_{i(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2} \times \frac{42}{12} \times \frac{6}{14} = 0.75$$

On obtient en procédant comme dans l'exemple précédent :

$$E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(7) \times \left(\frac{7-1}{7-2}\right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(7) = \left(1 - \frac{1}{(3-1)^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(7-1)^2}\right) \cong C_2$$

La prédiction du modèle $MI(k)\pi(3)$ dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On voit que le modèle $MI(k)\pi(3)$ a la même prédiction que le modèle $MI\pi(3)$ dans le cas où k n'a aucun autre diviseur premier que 2 (On a alors $I(k)=1$). Le coefficient était alors de 0.75, et on voit donc qu'en général ce coefficient $c_{I(k)\pi(3)}(k)$ semble être égal à 0.75.

Dans le cas où k est divisible par 3, le modèle $MI(k)\pi(3)$ n'apporte aucune amélioration, car alors $I(k)$ est inclus dans $I\pi(3)$ et de plus k est congru à 0 modulo 6. On peut donc considérer que $MI(k)\pi(3)$ coïncide dans ses prévisions avec $MI(k)$ lorsque k est divisible par 3.

On observe que la courbe $(k, 0.75/(\text{Log}(k))^2)$ (obtenue dans le modèle $MI(k)\pi(3)$ dans le cas où k a 2 pour seul diviseur premier) semble être très proche de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach, par exemple:

$$m_{I(k)\pi(3)}(10000) \approx 88, m_{I(k)\pi(3)}(50000) \approx 320, m_{I(k)\pi(3)}(75000) \approx 446, m_{I(k)\pi(3)}(90000) \approx 518.$$

$$\text{Avec } m_{I(k)\pi(3)}(k) = E(X_{I(k)\pi(3)} r(k))$$

Pour vérifier la validité de $MI(k)\pi(3)$, on peut considérer les nombres de la forme 2^n , avec n grand. On devrait obtenir $r(2^n) \approx m_{I(k)\pi(3)}(2^n) \approx 0.75 \times 2^n / (n \text{Log}(2))^2$.

On pourrait ensuite étudier les naturels de la forme 2^{ns} , (avec $s > 1$) qui n'ont que 3 pour seul diviseur premier autre que 2, et donc dont on peut facilement estimer $m_{I(k)\pi(3)}(k)$ qui est alors identique à $m_{I(k)}(k)$ comme on l'a vu.

Ce cas d'ailleurs est très intéressant : En effet, d'après ce qui précède, pour $I(k)=I\pi(3)$:

$$m_{I(k)}(k) \approx \pi_1 / \pi_{I(k)} k / (\text{Log}(k))^2 = 1.5k / (\text{Log}(k))^2.$$

On obtient alors utilisant cette expression :

$$m_{I(k)}(50000) \approx 640, m_{I(k)}(75000) \approx 892, m_{I(k)}(90000) \approx 1037.$$

On remarque dans le cas précédent:

$$E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx \frac{3}{2} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = \left(\frac{3-1}{3-2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(3-1)^2}\right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(3) \times \left(\frac{3-1}{3-2}\right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Avec $C_{I(k)\pi(3)}(3)$ très proche de C_2 . On retrouve que la prédiction dans cet exemple du modèle $MI(k)\pi(3)$ est très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On observe que les points $(k, m_{I(k)}(k))$ pour $k=2^{n3^s}$ se trouvent très proches de l'une des bandes les plus froncées de la Comète de Goldbach, ce qui donc tend à confirmer la validité du modèle $MI(k)$ (coïncidant $MI(k)\pi(3)$ puisque k est divisible par 3). On rappelle qu'on peut aussi le tester en calculant $r(2^{n3^s})$ pour certaines valeurs de s et de n , et en les comparant avec l'estimation de $MI(k)$ donnée précédemment.

On voit donc que le modèle $MI(k)\pi(3)$ conduit à obtenir pour tout k supérieur à 1002, que la fonction $r(k)$ est modélisée par la variable aléatoire $X_{I(k)\pi(3)} r(k)$ définie précédemment. Ceci constitue une loi numérique aléatoire, qui est illustrée apparemment par certains tests.

Le modèle $MI(k)\pi(3)$ prévoit notamment l'existence de bandes d'équation $f(k)=C_k k / (\text{Log}(k))^2$, comme on en observe sur la Comète de Goldbach. Ceci est dû aux 2 propriétés suivantes de $X_{I(k)\pi(3)} r(k)$:

a) $E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx C_k k / (\text{Log}(k))^2$, où C_k est une constante dépendant des diviseurs premiers de k .

b) On obtient utilisant l'inégalité de Chebychev que les intervalles de confiance minimaux à 95% (ou de façon évidente 99,9%) de $X_{I(k)\pi(3)} r(k)$, notés $[miG_{I(k)\pi(3)}(k), MaG_{I(k)\pi(3)}(k)]$ sont tels que $(MaG_{I(k)\pi(3)}(k) - miG_{I(k)\pi(3)}(k)) / E(X_{I(k)\pi(3)} r(k))$ tend vers 0 pour k tend vers l'infini.

Il apparaît donc que le modèle $MI(k)\pi(3)$ entraîne des prédictions remarquables concernant l'aspect de la Comète de Goldbach. De la même façon qu'on a défini les modèles $MI(k)\pi(3)$ et $MI(k)\pi(3,5)$, on peut définir le modèle $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ où p_1, \dots, p_n sont les n premiers nombres premiers consécutifs après 2. Il est évident que dans tout modèle $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$, on peut obtenir par des pseudo-preuves aléatoires des propositions $P(I_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(k), q)$ analogues aux propositions $P(I(k), q)$ obtenues dans le modèle MI . Comme on l'a remarqué en considérant les modèles $MI(k)\pi(3)$ et $MI(k)\pi(3,5)$, il semble que les modèles $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ permettent d'obtenir des propositions qui tendent quand n tend vers l'infini vers la variante

de la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood, obtenue en supprimant un facteur 2 dans la Conjecture initiale.

On pourrait montrer ceci explicitement, en montrant que si $I(k)=I_{\pi}(p_{1k}, \dots, p_{sk})$, alors dans le modèle $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$, on obtient :

$$E(X_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(p_{1k}, \dots, p_{sk}) \prod_{i=1}^s \left(\frac{p_{ik} - 1}{p_{ik} - 2} \right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

avec $C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(p_{1k}, \dots, p_{sk})$ tend vers C_2 quand n tend vers l'infini. On a vérifié que ceci était en accord avec tous les exemples numériques considérés. Ceci se ramène donc apparemment à un problème résoluble par la Théorie des nombres classiques.

Pour le montrer, on utilisera le Théorème :

THEOREME 4.B.6Ba) :

Si p_1, \dots, p_n sont n naturels premiers et $A(p_1, \dots, p_n) = \{1, \dots, 2p_1 \dots p_n\}$ (C'est-à-dire A est l'ensemble des naturels de $[1, 2p_1 \dots p_n]$), si $p(A(p_1, \dots, p_n)) = \{i \text{ appartenant à } A(p_1, \dots, p_n) \text{ tel que } i \text{ n'est divisible par aucun des nombres } 2, p_1, \dots, p_n\}$ alors :

$$\text{Card}(p(A(p_1, \dots, p_n))) = (p_1 - 1) \times \dots \times (p_n - 1).$$

Démonstration (par récurrence) :

Si $n=1$:

$$A(p_1) = \{1, \dots, 2p_1\}.$$

Les éléments de $A(p_1)$ non divisibles par 2 sont les éléments de $\{1, \dots, 2p_1 - 1\}$ au nombre de p_1 . Parmi ceux-ci, seul le naturel p_1 est divisible par p_1 .

$$\text{Donc Card}(p(A(p_1))) = p_1 - 1.$$

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $n-1$. Soit alors p_1, \dots, p_n n nombres premiers.

On définit alors $p(A(p_1, \dots, p_{n-1})) = \{h_{1,n-1}, \dots, h_{s,n-1}\}$, avec $s = \text{Card}(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$.

Les éléments de $A(p_1, \dots, p_n)$ qui ne sont pas divisibles par $2, p_1, \dots, p_{n-1}$ sont ceux congrus à $h_{1,n-1}, \dots, h_{s,n-1}$ modulo $2p_1 \dots p_{n-1}$, et donc sont les éléments de l'ensemble : $\{h_{1,n-1}, \dots, h_{s,n-1}, 2p_1 \dots p_{n-1} + h_{1,n-1}, \dots, 2p_1 \dots p_{n-1} + h_{s,n-1}, \dots, 2p_1 \dots p_{n-1}(p_n - 1) + h_{1,n-1}, \dots, 2p_1 \dots p_{n-1}(p_n - 1) + h_{s,n-1}\}$.

L'ensemble précédent a de façon évidente $p_n \text{Card}(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$ éléments.

De plus les éléments de l'ensemble précédent divisibles par p_n sont de la forme ap_n , avec a n'est pas divisible par $2, p_1, \dots, p_{n-1}$, c'est-à-dire a appartient à $p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))$. Il y en a donc un nombre égal à $\text{Card}(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$.

Il en résulte que $p(A(p_1, \dots, p_n))$ qui est l'ensemble précédent privé de ses éléments divisibles par p_n a un nombre d'éléments égal à $(p_n \text{Card}(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))) - \text{Card}(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$ c'est-à-dire $(p_n - 1) \text{Card}(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$.

On a donc montré par récurrence le Théorème.

Une conséquence immédiate de ce Théorème est le Corollaire :

COROLLAIRE 4.B.6Bb) :

Si on a $I(k) = I_{\pi}(p_1, \dots, p_n)$, alors :

$$p_{ii(k)} = \frac{1}{2} \times \prod_{j=1}^n \left(\frac{p_j - 1}{p_j} \right).$$

La démonstration est immédiatement conséquence du Théorème précédent si on considère les naturels modulo $2p_1 \dots p_n$.

REMARQUE 4.B.6Bc) :

On a vu que dans le modèle $MI(k)$ on avait :

$$E(X_{I(k)} r(k)) \approx \frac{p_{ii(k)}}{p_{ii(k)}} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Utilisant le Corollaire précédent, on obtient, si $I(k) = I_{\pi}(p_1, \dots, p_n)$:

$$\frac{p_{ii}}{p_{ii(k)}} = \prod_{j=1}^n \frac{p_j}{(p_j - 1)} = \prod_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j - 2} \times \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{(p_j - 1)^2}\right)$$

On voit que cette expression est proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Ce qui précède permet de comparer les prédictions du modèle MI(k) avec la variante de la Conjecture d Hardy et Littlewood. Pour comparer celle-ci avec le modèle plus précis MI(k) $\pi(p_1, \dots, p_n)$, on procède comme suit :

Montrons le Théorème :

THEOREME 4.B.6Bd) :

Si k est un naturel pair de $A(p_1, \dots, p_n)$ (défini plus haut de même que $p(A(p_1, \dots, p_n))$), divisible par aucun des nombres premiers p_1, \dots, p_n , si on pose :

$$d_k(p(A(p_1, \dots, p_n))) = \{i/ i \text{ et } k-i \text{ n'est divisible par aucun des naturels } p_1, \dots, p_n\}$$

$$\text{Alors Card}(d_k(p(A(p_1, \dots, p_n)))) = (p_1 - 2) \dots (p_n - 2).$$

Démonstration (Par récurrence) :

Montrons d'abord le Lemme :

LEMME 4.B.6Be) :

k étant un élément quelconque de $A(p_1, \dots, p_n)$, l'ensemble des éléments de $A(p_1, \dots, p_n)$ congrus à k modulo p_n , contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbb{N}/(2p_1 \dots p_{n-1})\mathbb{N}$, et est égal à l'ensemble de ces représentants.

Démonstration :

Soit k dans $A(p_1, \dots, p_n)$. (On rappelle $A(p_1, \dots, p_n) = \{1, \dots, 2p_1 \dots p_n\}$)

On suppose k congru à k_n modulo p_n , avec k_n dans $\{1, \dots, p_n\}$.

L'ensemble des naturels de $A(p_1, \dots, p_n)$ congrus à k modulo p_n est donc l'ensemble des naturels $k_n + ap_n$ avec a naturel appartenant à $[0, 2p_1 \dots p_{n-1} - 1]$. Il a donc $2p_1 \dots p_{n-1}$ éléments.

Supposons qu'un de ces naturels $k_n + ap_n$ différent de k_n soit congru à k_n modulo $2p_1 \dots p_{n-1}$.

Alors on a $ap_n = 2\lambda p_1 \dots p_{n-1}$. (Avec $\lambda > 0$).

Comme p_n est premier avec $2, \dots, p_{n-1}$, p_n divise λ , donc $\lambda = sp_n$, s étant un naturel non nul, et donc $a = 2sp_1 \dots p_{n-1}$.

Ceci est impossible car $a < 2p_1 \dots p_{n-1}$.

Donc aucun des naturels de la forme $k_n + ap_n$ de $A(p_1, \dots, p_n)$ n'est congru à k_n modulo $2p_1 \dots p_{n-1}$.

Il est évident qu'on arrive de la même façon au même résultat pour tout naturel $k_n + ap_n$ de $A(p_1, \dots, p_n)$, c'est-à-dire qu'aucun des naturels $k_n + bp_n$ de $A(p_1, \dots, p_n)$ n'est congru à $k_n + ap_n$ modulo $2p_1 \dots p_{n-1}$ si $a \neq b$.

Or on sait que le nombre d'éléments de $\mathbb{N}/2p_1 \dots p_{n-1}\mathbb{N}$ est égal à $2p_1 \dots p_{n-1}$, c'est-à-dire au nombre de naturels s'écrivant $k_n + ap_n$ de $A(p_1, \dots, p_n)$.

Il en résulte que l'ensemble des éléments de $A(p_1, \dots, p_n)$ congrus à k modulo p_n (C'est-à-dire des naturels de la forme $k_n + ap_n$) contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbb{N}/2p_1 \dots p_{n-1}\mathbb{N}$, et est égal à l'ensemble de ces représentants.

On a donc démontré le Lemme.

Montrons le Théorème pour $n=1$:

On a p_1 étant un nombre premier, $A(p_1) = \{1, \dots, 2p_1\}$.

$p(A(p_1)) = \{1, \dots, 2p_1 - 1\}$ (sans p_1), et a $p_1 - 1$ éléments.

Si k est un naturel pair de $A(p_1)$ non divisible par p_1 , on a $k = 2s$, avec $s \neq p_1$, et ou bien $1 < k < p_1$, ou bien $p_1 < k < 2p_1$.

Si j appartient à $p(A(p_1))$, $k - j = 2s - j$ est impair et donc n'est pas divisible par 2.

De plus $k - j$ est divisible par p_1 si $k - j = \alpha p_1$, α étant un entier, c'est-à-dire $j = k - \alpha p_1$.

Si $1 < k < p_1$, il y a une seule solution j dans $p(A(p_1))$: $j = k + p_1$.

Si $p_1 < k < 2p_1$, il y a une seule solution j dans $p(A(p_1))$: $j = k - p_1$.

Puisqu'on a défini $d_k(p(A(p_1)))$ comme l'ensemble des naturels i de $p(A(p_1))$ tels que $k - i$ non divisible par 2 ni par p_1 , on a donc :

$$\text{Card}(d_k(p(A(p_1)))) = p_1 - 2. \text{ (Car } d_k(A(p_1))) \text{ est constitué de } p(A(p_1)) \text{ privé de } j).$$

On a donc démontré le Théorème pour $n=1$.

Supposons qu'on ait démontré le Théorème pour $d_k(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$.

On a vu qu'on pouvait écrire :

$$p(A(p_1, \dots, p_{n-1})) = \{h_{1,n-1}, \dots, h_{s,n-1}\}, \text{ avec } s = (p_1 - 1) \dots (p_{n-1} - 1).$$

On a vu que $p(A(p_1, \dots, p_n))$ était constitué de l'ensemble B défini par :

$$B = \{h_{1,n-1}, \dots, h_{s,n-1}, \dots, 2p_1 \cdot p_{n-1}(p_{n-1}) + h_{1,n-1}, \dots, 2p_1 \cdot p_{n-1}(p_{n-1}) + h_{s,n-1}\}$$

privé des naturels de la forme ap_n , avec a dans $p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))$.

k étant un naturel pair de $A(p_1, \dots, p_n)$ divisible par aucun des naturels p_1, \dots, p_n , on rappelle que $d_k(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$ est l'ensemble des éléments i de $p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))$ tel que k-i n'est divisible par aucun des naturels p_1, \dots, p_{n-1} .

Soit $d_k(p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))) = \{t_{1,n-1}, \dots, t_{r,n-1}\}$, avec $r = (p_1 - 2) \dots (p_{n-1} - 2)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\text{Soit } C = \{t_{1,n-1}, \dots, t_{r,n-1}, \dots, 2p_1 \cdot p_{n-1}(p_{n-1}) + t_{1,n-1}, \dots, 2p_1 \cdot p_{n-1}(p_{n-1}) + t_{r,n-1}\}.$$

C est donc l'ensemble des éléments i de B tel que k-i ne soit pas divisible par un des naturels p_1, \dots, p_{n-1} .

Il est évident $\text{Card}(C) = p_n r = p_n (p_1 - 2) \dots (p_{n-1} - 2)$.

On a défini $d_k(p(A(p_1, \dots, p_n)))$ comme étant l'ensemble des naturels i de $p(A(p_1, \dots, p_n))$ tel que k-i ne soit divisible par aucun des naturels premiers p_1, \dots, p_n .

Donc $d_k(p(A(p_1, \dots, p_n)))$ est inclus dans C, car tout élément i de $d_k(p(A(p_1, \dots, p_n)))$ appartient à B et est tel que k-i n'est divisible par aucun des naturels $2, p_1, \dots, p_{n-1}$.

De plus tout élément i de C tel que :

-i n'est pas de la forme ap_n , avec a dans $p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))$.

-k-i n'est pas divisible par p_n .

est tel que i appartient à $d_k(p(A(p_1, \dots, p_n)))$, car alors i appartient à $p(A(p_1, \dots, p_n))$ et k-i n'est divisible par aucun des naturels p_1, \dots, p_n .

Donc si on définit les ensembles D et E par :

$$D = \{i / i \text{ appartient à } C \text{ et } k-i \text{ est divisible par } p_n\}$$

$$E = \{i / i \text{ appartient à } C \text{ et } i \text{ est de la forme } ap_n, \text{ avec } a \text{ dans } p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))\}$$

On a alors $d_k(p(A(p_1, \dots, p_n))) = C / (D \cup E)$.

De plus si i appartient à E, alors i n'appartient pas à D puisque k n'est pas divisible par p_n . Donc D et E ont une intersection vide, et donc :

$$\text{Card}(C / (D \cup E)) = \text{Card}(C) - \text{Card}(D) - \text{Card}(E).$$

Or D est l'ensemble des naturels i de $A(p_1, \dots, p_n)$ congrus à k modulo p_n , tel que i ne soit pas divisible par p_1, \dots, p_{n-1} et que de plus k-i ne soit pas divisible par p_1, \dots, p_{n-1} .

Appliquant le Lemme 4B6Be) et d'après l'hypothèse de récurrence, le nombre d'éléments de D est donc :

$$\text{Card}(D) = \text{Card}(d_k(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))) = (p_1 - 2) \dots (p_{n-1} - 2).$$

De même, E est l'ensemble des naturels i de $A(p_1, \dots, p_n)$ congrus à p_n modulo p_n et tel que i soit divisible par aucun des nombres p_1, \dots, p_{n-1} de même que k-i. Appliquant le Lemme 4B6Be) et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(d_k(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))) = (p_1 - 2) \dots (p_{n-1} - 2).$$

Finalement, on obtient :

$$\text{Card}(d_k(p(A(p_1, \dots, p_n)))) = p_n (p_1 - 2) \dots (p_{n-1} - 2) - (p_1 - 2) \dots (p_{n-1} - 2) - (p_1 - 2) \dots (p_{n-1} - 2).$$

$$\text{Donc } \text{Card}(d_k(p(A(p_1, \dots, p_n)))) = (p_1 - 2) \dots (p_n - 2).$$

On a donc démontré le Théorème 4.B6Bd).

On peut à partir du Théorème précédent obtenir une expression donnant un équivalent de $E(Xr(k))$ prédite par tout modèle $MI_\pi(p_1, \dots, p_n)$, qui on l'a vu prédit la même expression que $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ lorsque k a 2 pour unique diviseur premier. On obtient cette expression dans l'exemple suivant :

EXEMPLE 4.B6Bf) :

Soit p_1, \dots, p_n n nombres premiers consécutifs après 2, et k un naturel n'ayant aucun diviseur autre que 2 ($I(k) = I$).

On a vu que dans le modèle $MI_\pi(p_1, \dots, p_n)$ (qui dans ce cas avait la même prédiction que le modèle $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$), on obtenait, généralisant le modèle $MI_\pi(3)$:

$$E(X_{I_\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k)) \approx \frac{n_{dk}(p_1, \dots, p_n)}{n(p_1, \dots, p_n)} \times \frac{p_i}{p_{i\pi(p_1, \dots, p_n)}} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

avec $n_{dk}(p_1, \dots, p_n)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{N}/2p_1 \dots p_n \mathbf{N}$ tels que k-i ne soit divisible par aucun des nombres p_1, \dots, p_n , et $n(p_1, \dots, p_n)$ est le nombre d'éléments de $\mathbf{N}/2p_1 \dots p_n \mathbf{N}$.

D'après les Théorèmes 4.B6Ba)b)d), on obtient :

$$E(X_{I\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k)) \approx \prod_{j=1}^n \frac{(p_j - 2)}{(p_j - 1)} \times \prod_{j=1}^n \frac{(p_j - 1)}{(p_j - 2)} \times \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{(p_j - 1)^2}\right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k)) \approx \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{(p_j - 1)^2}\right) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}$$

Cette expression tend bien vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Pour obtenir l'expression générale donnant un équivalent de $E(Xr(k))$ prédite par un modèle $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$, on utilise aussi le Théorème suivant :

THEOREME 4B6Bg) :

Si p_1, \dots, p_n sont n nombres premiers et q_1, \dots, q_r sont r nombres premiers différents de p_1, \dots, p_n , k étant un naturel pair non divisible par p_1, \dots, p_n alors le nombre d'éléments de l'ensemble $d_{k(p_1, \dots, p_n)}(p(A(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_r)))$ dont les éléments sont les éléments i de $p(A(p_1, \dots, q_r))$ tels que $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n est égal à $(q_1-1) \dots (q_r-1)(p_1-2) \dots (p_n-2)$.

(Et donc la proportion des éléments i de $p(A(p_1, \dots, q_r))$ tels que $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n est la même que celle des éléments j de $p(A(p_1, \dots, p_n))$ tels que $k-j$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n , d'après les Théorèmes 4B6Ba) et 4B6Bd).

Démonstration (Par récurrence) :

Soit k , naturel pair non divisible par p_1, \dots, p_n .

On suppose $r=1$.

Soit $p(A(p_1, \dots, p_n)) = \{h_{1,n}, \dots, h_{s,n}\}$.

L'ensemble des éléments de $A(p_1, \dots, p_n, q_1)$ non divisibles par p_1, \dots, p_n est donc :

$B = \{h_{1,n}, \dots, h_{s,n}, p_1 \dots p_n + h_{1,n}, \dots, p_1 \dots p_n + h_{s,n}, \dots, p_1 \dots p_n(q_1-1) + h_{1,n}, \dots, p_1 \dots p_n(q_1-1) + h_{s,n}\}$

Parmi ceux-ci, d'après le Théorème 4B6Bd), il y a $q_1(p_1-2) \dots (p_n-1)$ éléments i tels que $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n .

Soit C l'ensemble de ces éléments.

L'ensemble $d_{k(p_1, \dots, p_n)}(p(A(p_1, \dots, p_n, q_1)))$ est donc constitué des éléments i de C tels que :

a) i n'est pas divisible par q_1 .

b) $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n .

La condition b) est vérifiée pour tous les éléments de C .

De plus, utilisant le Lemme 4B6Be), si $D = \{i/ i \text{ appartient à } C \text{ et } i = aq_1 \text{ pour un naturel } a\}$, on sait que l'ensemble des naturels de $A(p_1, \dots, p_n, q_1)$ congrus à aq_1 modulo q_1 contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbb{N}/2p_1 \dots p_n \mathbb{N}$, et est constitué de ces représentants, et donc D est constitué de chaque représentant i appartenant à $p(A(p_1, \dots, p_n))$ et tel que $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n . D'après le Théorème 4B6Bd), ce nombre est égal à $(p_1-2) \dots (p_n-2)$.

On a donc :

$\text{Card}(d_{k(p_1, \dots, p_n)}(p(A(p_1, \dots, p_n, q_1)))) = \text{Card}(C) - \text{Card}(D) = (q_1-1)(p_1-2) \dots (p_n-2)$.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $d_{k(p_1, \dots, p_n)}(p(A(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_{r-1})))$.

On procède alors exactement comme dans le cas $r=1$:

Soit $p(A(p_1, \dots, q_{r-1})) = \{h_{1,n,r-1}, \dots, h_{s,n,r-1}\}$

L'ensemble des éléments de $A(p_1, \dots, q_r)$ non divisibles par p_1, \dots, q_{r-1} est donc :

$B = \{h_{1,n,r-1}, \dots, h_{s,n,r-1}, p_1 \dots p_n q_1 \dots q_{r-1} + h_{1,n,r-1}, \dots, p_1 \dots p_n q_1 \dots q_{r-1} + h_{s,n,r-1}, \dots, p_1 \dots p_n q_1 \dots q_{r-1}(q_r-1) + h_{1,n,r-1}, \dots, p_1 \dots p_n q_1 \dots q_{r-1}(q_r-1) + h_{s,n,r-1}\}$

Parmi ceux-ci, d'après l'hypothèse de récurrence il y a $q_r(q_1-1) \dots (q_{r-1}-1)(p_1-2) \dots (p_n-1)$ éléments i tels que $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n .

Soit C l'ensemble de ces éléments.

L'ensemble des éléments i de $p(A(p_1, \dots, q_r))$ tels que $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n (C'est à dire les éléments de $d_{k(p_1, \dots, p_n)}(p(A(p_1, \dots, p_n, \dots, q_r)))$ est donc constitué des éléments i de C tels que :

a) i n'est pas de la forme aq_r .

b) $k-i$ n'est pas divisible par p_1, \dots, p_n .

Comme dans le cas $r=1$, la condition b) est toujours vérifiée.

Si on pose $D=\{i \text{ appartenant à } C, \text{ et } i=a_{q_r}\}$, on obtient exactement comme dans le cas $r=1$ utilisant le Lemme 4B6Be) que le nombre d'éléments de D est égal à, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\text{Card}(D)=\text{Card}(d_{k(p_1, \dots, p_n)}(p(A(p_1, \dots, p_n, \dots, q_{r-1})))=(q_1-1)\dots(q_{r-1}-1)(p_1-2)\dots(p_n-1).$$

Finalement :

$$\text{Card}(d_{k(p_1, \dots, p_n)}(p(A(p_1, \dots, p_n, \dots, q_r)))=\text{Card}(C)-\text{Card}(D)=(q_1-1)\dots(q_r-1)(p_1-2)\dots(p_n-2).$$

On a donc montré le Théorème.

D'après ce qui précède, on obtient facilement l'expression donnant un équivalent de $E(X_{r(k)})$ prédite par un modèle quelconque $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$, avec $I(k)=I_\pi(t_1, \dots, t_r)$, c'est-à-dire t_1, \dots, t_r sont les diviseurs premiers de k autres que 2. De même qu'on a vu que si k était divisible par 3 la prédiction de $MI(k)\pi(3)$ était la même que celle de $MI(k)$, on peut considérer que si k a t_1, \dots, t_r pour facteurs premiers autres que 2, alors la prédiction de $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ est celle de $MI(k)\pi(q_1, \dots, q_s)$, où q_1, \dots, q_s sont les éléments de $\{p_1, \dots, p_n\}$ différents de t_1, \dots, t_r .

On obtient alors facilement la prédiction de $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$, utilisant les résultats de la Remarque 4B6Bc), ceux de l'Exemple 4B6Bf) et le Théorème 4B6Bg) :

$$E(X_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(t_1, \dots, t_r) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}, \text{ avec :}$$

$$C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(t_1, \dots, t_r) = \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{(q_i - 1)^2}\right) \times \prod_{j=1}^r \left(\frac{t_j - 1}{t_j - 2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(t_j - 1)^2}\right)$$

On voit donc que cette expression tend asymptotiquement vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On obtient alors, procédant exactement comme dans l'Etude de la fonction $r(k)$ par le modèle simple MI 4B6A) une proposition $P2_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(r(k))$ analogue à la proposition $P2_{MI}(r(k))$ donnant une estimation de $r(k)$ obtenue par le modèle $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$. Dans cette proposition la fonction $r(k)$ est définie sur le sous-ensemble $F(t_1, \dots, t_r)$ de \mathbb{N} contenant les multiples pairs de t_1, \dots, t_n supérieurs à $2N_A=1002$. Et on a dans cette proposition :

$$E(X_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(t_1, \dots, t_r) k / (\text{Log}(k))^2.$$

Il faudrait vérifier si cette variante est bien en accord avec la Comète de Goldbach. Si tel n'était pas le cas, cela signifierait qu'il faut trouver des modèles plus précis que les modèles du type $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$. Il est très vraisemblable qu'on ne puisse jamais démontrer, utilisant seulement la Théorie des Nombres classiques des propositions analogues à celles qu'on obtient par la TAN décrivant la Comète de Goldbach utilisant les modèles $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ et donc en particulier la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood, tout comme la Conjecture faible de Goldbach.

De la même façon que le modèle MI est analogue au modèle équiprobable $M_{eq}I$ exposé dans l'article ⁽⁵⁾, et qu'on a défini un modèle $M_{eq}I\pi(p_1, \dots, p_n)$ analogue au modèle indépendant $MI\pi(p_1, \dots, p_n)$, on peut définir un modèle équiprobable $M_{eq}I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ analogue au modèle indépendant $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$. On obtient facilement en procédant comme pour le modèle $M_{eq}I$, que chaque modèle indépendant et son analogue équiprobable ont une espérance équivalente quand k tend vers l'infini.

En réalité, la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood ne représente qu'approximativement les propriétés de la Comète de Goldbach pour k dans $[5000, 100000]$. En effet d'après cette variante, on devrait trouver sur la Comète des points se rapprochant tangentiellement une de la courbe $(k, r_{\min}(k))$ avec $r_{\min}(k)=0.66k/(\text{Log}(k))^2$ correspondant aux naturels ayant 2 pour seul diviseur premier ou 2 et quelques autres diviseurs premiers grands. Or sur la comète de Goldbach, la courbe minimale observée présente une ordonnée nettement plus élevée que la courbe $y(k)=0.66k/(\text{Log}(k))^2$ (environ 15% en plus). On pourrait en conclure que le modèle $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ n'est pas assez précis puisqu'il conduit à obtenir la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood qui n'est pas illustrée par la Comète de Goldbach. Cependant, on peut interpréter cette différence de 15% d'une autre façon:

Comme on l'a vu dans l'Etude d'une fonction par la TAN 4A7a), on peut considérer que les tests illustrent partiellement la proposition $P2_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(r(k))$, prenant $E(X_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)} k / (\text{Log}(k))^2$. Ainsi, on peut penser que les tests effectués ne déterminent pas $r(k)$ pour k assez grand pour que soit illustrée la proposition $P2_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(r(k))$ bien que celle-ci soit vraie.

Ainsi, on remarque que pour k dans $[10000, 90000]$, $1/\text{Log}(k)$ est de l'ordre de 10%. De plus pour obtenir la variante de Hardy et Littlewood, on a obtenu un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)} r(k))$ en utilisant :

$$\sum_{i=500}^{k/2} \frac{1}{\text{Log}(k)\text{Log}(k-i)} \approx \frac{k/2}{(\text{Log}(k))^2}$$

Or pour obtenir cette équivalence, on utilise l'inégalité :

$$\sum_{i=500}^{k/2} \frac{1}{\text{Log}(k)\text{Log}(k-i)} \geq \frac{k/2 - 500}{(\text{Log}(k))^2}$$

Et donc il est possible qu'un équivalent plus précis de $E(X_{I_{\pi(p_1, \dots, p_n)}} r(k))$ soit, utilisant une meilleure approximation du terme de gauche de l'inégalité précédente :

$$E(X_{I_{\pi(p_1, \dots, p_n)}} r(k)) \approx \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} \times \left(1 + \frac{\alpha}{\text{Log}(k)} + \frac{\beta}{(\text{Log}(k))^2}\right).$$

α et β étant 2 réels.

(On rappelle que pour obtenir $p_{iA} = 1/\text{Log}(i)$ on utilise que A est un ensemble estimé d'estimation $a(n) = \int_{[2, n]} (1/\text{Log}(t)) dt$, qui est la meilleure estimation simple de $P(n)$, nombre de nombres premiers inférieurs à n).

Il est clair que pour k tend vers l'infini, $1/\text{Log}(k)$ tend vers 0, et donc on obtient bien une expression très proche de la variante de Conjecture de Hardy et Littlewood.

D'après ce qui précède, on peut obtenir une meilleure estimation de $E(X_{I_{(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}}(r(k)))$ en remplaçant dans la proposition précédente $P_{I_{(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}}(r(k))$ donnant un équivalent de $E(X_{I_{(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}}(r(k))) k/(\text{Log}(k))^2$ par l'intégrale $2 \int_{[3, k/2]} (1/(\text{Log}(x)\text{Log}(k-x))) dx$. (Ceci se justifie simplement si on a considéré que l'ensemble A des nombres premiers avait une évaluation probabiliste $p_{iA} = 1/\text{Log}(i)$ pour i supérieur à $N_A = 3$ au lieu de $N_A = 501$) Pour évaluer cette intégrale, on calcule la dérivée :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\text{Log}(x)\text{Log}(k-x)} \right)$$

, et on intègre ensuite les 2 termes de l'égalité obtenue.

EXEMPLE 4.B.7

Etudions la Conjecture des nombres premiers jumeaux. Soit G l'ensemble des nombres p premiers tels que $(p, p+2)$ soit un couple de nombres premiers. A étant l'ensemble des nombres premiers, on a pour tout naturel i, $f_G(i) = f_A(i) f_A(i+2)$. On sait de plus que A est inclus dans I l'ensemble des naturels impairs, mais plus précisément A est inclus dans K1 l'ensemble des naturels dont le carré est congru à 1 modulo 24.

On définit donc les ensembles suivants, i représentant toujours un naturel:

$$A = \{i / i \text{ premier}\}$$

$$H = \{i / i+2 \text{ premier}\}$$

On a donc $G = A \cap H$.

K1 est l'ensemble des naturels i tels que i^2 est congru à 1 modulo 24. On a donc :

$K1 = \{i / i^2 \text{ congru à 1 modulo 24}\}$. K1 est donc l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K1} , avec :

$$B_{K1} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

On a donc A inclus dans K1.

De même :

$K'1 = \{i / (i+2)^2 \text{ congru à 1 modulo 24}\}$. K'1 est donc l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de $B_{K'1}$, avec :

$$B_{K'1} = \{3, 5, 9, 11, 15, 17, 21, 23\}$$

On définit alors K2 :

$K2 = \{i / i^2 \text{ et } (i+1)^2 \text{ sont congrus à 1 modulo 24}\}$. On a donc $K2 = K1 \cap K'1$. K2 est l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K2} , avec :

$$B_{K2} = \{5, 11, 17, 23\}. (\text{Donc } B_{K2} = B_{K1} \cap B_{K'1}).$$

Appliquant le pseudo-Axiome des ensembles estimés à A, comme dans l'exemple précédent, on obtient la modélisation :

Pour i supérieur à 501, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $X_{f_A}(i)$, avec $p(\ll X_{f_A}(i) = 1 \gg) = p_{iA} = 1/\text{Log}(i)(1 + \varepsilon(i))$.

Il en résulte :

Pour i supérieur à 501, $f_H(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $X_{f_H(i)}$, avec $p(\ll X_{f_H(i)}=1 \gg) = p_{iH} = p_{i+2A}$.
 On sait que si i n'appartient pas à K_2 , $f_G(i)=0$ car G est inclus dans $K_2=K_1 \cap K'1$.
 Si i appartient à K_2 , par définition de $f_{A/C}$, A et C étant 2 sous-ensembles de N , on a :
 $f_{G/K_2}(i) = f_{A \cap K_2/K_2}(i) f_{H \cap K_2/K_2}(i)$.

Utilisant le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés appliqué à (A, K_2, K_1) , puis le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés à $(A \cap K_2, K_2)$, on obtient :

Pour i supérieur à 501, $f_{A \cap K_2/K_2}(i)$ est modélisée par $X_{A \cap K_2/K_2}(i)$, avec :

$$p(\ll X_{A \cap K_2/K_2}(i)=1 \gg) = p_{iA} / p_{iK_1} = 3p_{iA}$$

De même, en procédant de la même façon pour H et $K'1$:

Pour i supérieur à 501, $f_{H \cap K_2/K_2}(i)$ est modélisée par $X_{H \cap K_2/K_2}(i)$, avec :

$$p(\ll X_{H \cap K_2/K_2}(i)=1 \gg) = p_{iH} / p_{iK'1} = 3p_{i+2A}$$

Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes au couple $(X_{A \cap K_2/K_2}(i), X_{H \cap K_2/K_2}(i))$, on obtient que ces variables aléatoires peuvent être considérées comme définies sur le même espace et indépendantes, et appliquant la propriété de correspondance on obtient :

Pour i appartenant à K_2 , $\ll f_{G/K_2}(i)=1 \gg$ est modélisée par l'évènement $\ll X_{f_{G/K_2}(i)}=1 \gg$, de probabilité $p_{iG/K_2} = 9p_{iA}p_{i+2A}$.

(On aurait pu obtenir le même résultat en écrivant :

$G = G \cap K_2 = (A \cap K_2) \cap (H \cap K_2)$, puis en appliquant le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2^{ème} forme à $(A \cap K_2, H \cap K_2, K_2)$, ce qui permet d'obtenir $p_{iG} = p_{iA \cap K_2} p_{iH \cap K_2} / p_{iK_2}$ puis à (A, K_2, K_1) , $(H, K_2, K'1)$, ce qui permet d'obtenir $p_{iA \cap K_2} = p_{iA} p_{iK_2} / p_{iK_1}$ et $p_{iH \cap K_2} = p_{iH} p_{iK_2} / p_{iK'1}$ puis le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés à (G, K_2) , ce qui permet d'obtenir $p_{iG/K_2} = p_{iG} / p_{iK_2}$, et finalement $p_{iG/K_2} = p_{iA} p_{iH} / (p_{iK_1} p_{iK'1})$.

Il en résulte, écrivant $G(n) = \sum_{i=1}^{499} f_G(i) + \sum_{i=501, i \in K_2}^n f_G(i)$ et utilisant une variante immédiate du Théorème 4.A.7,

que la proposition:

$P(\alpha(3))$: « G est un ensemble estimé d'estimation :

$$g(n) = \sum_{i=501, i \in K_2}^n 9 p_{iA} p_{i+2A} \approx 9 p_{iK_2} \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2} = \alpha(3) \times \frac{k}{(\text{Log}(k))^2}, \text{ avec } \alpha(3) = 3/2 \gg$$

a une pseudo-preuve aléatoire. (On justifiera plus loin la notation $P(\alpha(3))$).

Nous verrons qu'il existe des modèles beaucoup plus précis que celui qu'on a utilisé.

Or on a montré plus généralement (On est dans le cas 1 de l'Etude d'une fonction par la TAN 4A7a)) que la proposition:

$Q(\alpha(3))$: « Il existe β tel que G est un ensemble estimé d'estimation $g(n)$, avec:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g(n)}{\alpha(3)(n / (\text{Log}(n))^2)} \right) = \beta \gg$$

a une pseudo-preuve aléatoire. Si cette proposition est illustrée par des tests, elle a une explication aléatoire intéressante car elle n'a jamais été démontrée classiquement. Comme on l'a vu dans l'Etude théorique 4.A7a), plus proche est la valeur observée β de 1, valeur prédite par le modèle supposé exact, meilleur est la qualité du modèle et plus intéressante est l'explication aléatoire. On remarque que $Q(\alpha(3))$ entraîne la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux (G est infini) tout en étant illustrée par des tests si elle est vraie, et donc si $Q(\alpha(3))$ est illustrée par des tests (traçant $g(k)/(k/(\text{Log}(k))^2)$), la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire intéressante, et aussi une explication aléatoire puisqu'elle n'a jamais été prouvée classiquement. On rappelle aussi qu'on peut définir une proposition $Q(\alpha(3), B1)$ plus précise que $Q(\alpha(3))$, en bornant le distance $|\beta-1|$ par $B1$).

On peut généraliser et améliorer le modèle présenté ici en l'améliorant en remarquant que K_1 est l'ensemble des naturels congrus à 1 ou 5 modulo 6, c'est-à-dire l'ensemble $I_\pi(3)$ introduit dans l'Exemple 4.B.6 précédent. Ceci justifie la notation $P(\alpha(3))$, avec $\alpha(3) = 3/2$. Il est évident qu'on peut obtenir une estimation de $g(n)$ de façon analogue en remplaçant K_1 par $I_\pi(p_1, \dots, p_n)$ où p_1, \dots, p_n sont les n nombres premiers consécutifs

après 3. On obtient dans ce nouveau modèle une constante $\alpha(p_1, \dots, p_n)$, telle que les propositions $P(\alpha(p_1, \dots, p_n))$ et $P(\alpha(p_1, \dots, p_n), \varepsilon)$ ont des pseudo-preuve aléatoires.

On rappelle que la Conjecture de Hardy et Littlewood concernant les nombres premiers jumeaux peut s'exprimer sous la forme $P(2C_2)$:

$P(2C_2)$: « G est un ensemble estimé d'estimation $g(n) \approx 2C_2 n / (\log(n))^2$ », C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Goldbach proposée par Hardy et Littlewood (voir Exemple 4.B6 précédent, $C_2 \approx 0.66$). Il en résulte, si les tests illustrent la validité de cette Conjecture, que la modèle $MI\pi(3)$ est de très bonne qualité considérant sa simplicité puisque 1.5 est très proche de 1.32. (On remarque que ceci est encore plus manifeste si on écrit :

$$\frac{3}{2} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{(3-1)^2}\right) \cong 2C_2$$

On peut donc conjecturer que la constante $\alpha(p_1, \dots, p_n) = \alpha_n$ définie plus haut tend vers la limite $2C_2$ (pour n tend vers l'infini). Si ceci est confirmé par des tests, ou est démontré utilisant la Théorie des Nombres classiques, il est clair que la Conjecture de Hardy et Littlewood pourra être approchée asymptotiquement par des propositions $P(\alpha_n)$ (C'est-à-dire α_n tend vers $2C_2$) ayant une pseudo-preuve aléatoire. On pourra obtenir explicitement la Conjecture elle-même en utilisant le pseudo-Axiome suivant :

Pseudo-Axiome 4.B.7a)(de la limite) :

Si on obtient des propositions $P(\alpha_i)$ ayant des pseudo-preuves aléatoires, $P(\alpha_i)$ dépendant seulement du réel α_i , et tel que la suite α_i tende vers la limite α_p , alors lorsque le pseudo-Axiome de la limite est valide pour la suite $(P(\alpha_i))$, alors $P(\alpha_p)$ est vrai.

Justification intuitive :

Ce pseudo-Axiome de la limite est évident intuitivement car d'après ses hypothèses on peut approcher d'aussi près qu'on veut $P(\alpha_p)$ par des propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire.

On utilisera ce pseudo-Axiome de la limite quand les modèles M_i permettant d'obtenir les propositions $P(\alpha_i)$ sont de plus en plus précis.

En utilisant ce pseudo-Axiome de la limite, on voit que pour obtenir que la Conjecture des nombres premiers jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire, il suffit de montrer classiquement que $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ tend vers $2C_2$ quand n tend vers l'infini. Ceci se ramène à un problème classique de la Théorie des nombres concernant les ensembles $\mathbb{N}/p\mathbb{N}$.

Pour résoudre ce problème, on peut montrer que le modèle $MI_\pi(p_1, \dots, p_n)$, obtenu en remplaçant $K1$ par $I_\pi(p_1, \dots, p_n)$ conduit à obtenir $\alpha_n = \alpha(p_1, \dots, p_n)$ tendant vers $2C_2$ de la façon suivante :

On pose maintenant :

$K1 = I_\pi(p_1, \dots, p_n)$.

$K'1 = \{i \text{ dans } \mathbb{N} \text{ tel que } i+2 \text{ appartient à } K1\}$

$K2 = K1 \cap K'1$

En procédant exactement comme dans l'Exemple précédent avec $K1 = I_\pi(3)$, on obtient que le modèle $MI_\pi(p_1, \dots, p_n)$ conduit à obtenir que la proposition:

$$P(\alpha_n) : \ll g(n) \approx \alpha_n k / (\log(k))^2, \text{ avec } : \alpha_n = \frac{P_{ik2}}{(P_{ik1})^2} = \frac{1}{P_{ik1}} \times \frac{P_{ik2}}{P_{ik1}} \gg$$

a une pseudo-preuve aléatoire.

On a déjà obtenu p_{iK1} dans le Corollaire 4B6Bb).

Pour calculer p_{iK2} , on doit calculer le nombre d'éléments i de $p(A(p_1, \dots, p_n))$ (défini dans l'Exemple précédent) tel que i+1 appartienne aussi à $p(A(p_1, \dots, p_n))$, identifiant $A(p_1, \dots, p_n)$ avec $\mathbb{N}/2p_1 \dots p_n \mathbb{N}$.

Montrons alors le Théorème suivant :

THEOREME 4B7b) :

p_1, \dots, p_n étant n nombres premiers consécutifs après 2, le nombre d'éléments i de $p(A(p_1, \dots, p_n))$ tel que i+2 appartient à $p(A(p_1, \dots, p_n))$ est égal à $(p_1-2) \dots (p_n-2)$. (Identifiant $A(p_1, \dots, p_n)$ avec $\mathbb{N}/2p_1 \dots p_n \mathbb{N}$)

On notera $j_1(p(A(p_1, \dots, p_n))) = \{i \text{ appartenant à } p(A(p_1, \dots, p_n)) \text{ tel que } i+2 \text{ appartient à } p(A(p_1, \dots, p_n))\}$ et $j_2(p(A(p_1, \dots, p_n))) = \{i \text{ appartenant à } p(A(p_1, \dots, p_n)) \text{ tel que } i-2 \text{ appartient à } p(A(p_1, \dots, p_n))\}$.

Démonstration (par récurrence) :

Dans le cas où $n=1$, on est dans l'Exemple précédent, où on a vu :
 $\text{Card}(j_1(p(A(3)))=\text{Card}(\{5\})=1=3-2$.
 Donc le Théorème est vrai pour $n=1$.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))$.

On pose $j_1(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))=\{h_{1,n-1}, \dots, h_{s,n-1}\}$

L'ensemble des éléments i de $A(p_1, \dots, p_n)$ tels que ni ni $i+2$ ne sont divisibles par p_1, \dots, p_{n-1} est donc :

$B=\{h_{1,n-1}, \dots, h_{s,n-1}, \dots, 2p_1 \dots p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1}, \dots, 2p_1 \dots p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$\text{Card}(B)=p_n(p_1-1) \dots (p_{n-1}-1)$.

$j_1(p(A(p_1, \dots, p_n)))$ est constitué des éléments i de B tels que ni ni $i+2$ ne sont divisibles par p_n , c'est-à-dire les éléments i de B qui :

- a) ne sont pas de la forme $i=ap_n$ (a dans $A(p_1, \dots, p_{n-1})$)
- b) ne sont pas tels que $(i+2) = ap_n$.

Si on pose :

$C=\{i \text{ appartenant à } B \text{ tel que } i=ap_n, a \text{ naturel}\}$

$D=\{i \text{ appartenant à } B \text{ tel que } (i+2)=ap_n\}$

On a donc : $j_1(p(A(p_1, \dots, p_n)))=B/(C \cup D)$.

De plus il est évident que C et D ont une intersection vide.

D'autre part C est l'ensemble des naturels i de $A(p_1, \dots, p_n)$ congrus à p_n modulo p_n , et tels que i n'est pas divisible par p_1, \dots, p_{n-1} ni $i+2$.

Et on a vu dans le Lemme 4B6Be) que l'ensemble des naturels congrus à p_n modulo p_n dans $A(p_1, \dots, p_n)$ contenait exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1 \dots p_{n-1}\mathbf{N}$ et était égal à l'ensemble de ces représentants. C correspond donc à l'ensemble des naturels ap_n dont le représentant appartient à $j_1(p(A(p_1, \dots, p_{n-1})))$.

On en déduit $\text{Card}(C)=\text{Card}(j_1(p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))))=(p_1-2) \dots (p_{n-1}-2)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

De même $\text{Card}(D)=\text{Card}(j_2(p(A(p_1, \dots, p_{n-1}))))=(p_1-2) \dots (p_{n-1}-2)$

On obtient bien :

$\text{Card}(j_1(p(A(p_1, \dots, p_n)))=\text{Card}(B)-\text{Card}(C)-\text{Card}(D)=(p_1-2) \dots (p_n-2)$.

On déduit du Théorème précédent, pour $K1=I_n(p_1, \dots, p_n)$:

$$p_{iK2} = \frac{(p_1 - 2) \dots (p_n - 2)}{2 p_1 \dots p_n}$$

Et donc d'après le Corollaire 4B6Bb) donnant l'expression de p_{iK1} et celle donnée par la Remarque 4B6Bc) :

$$\alpha_n = \frac{p_{iK2}}{p_{iK1}} \times \frac{1}{p_{iK1}} = 2 \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(p_i - 1)^2}\right)$$

On obtient bien que α_n tend vers $2C_2$ pour n tend vers l'infini.

On voit donc qu'il est très possible que la Conjecture des nombres premiers jumeaux (forte et faible) ne puisse pas être prouvée de façon classique, mais seulement en utilisant la TAN comme pour la Conjecture de Goldbach.

REMARQUE 4.B.7c) :

On peut obtenir des résultats très intéressants en utilisant la Pseudo-Axiome 4.B.7a) de la limite. En effet supposons qu'on ait montré que pour tout réel p tel que $0 < p < 1$ la proposition suivante P2(p) (analogue à une des propositions de l'Etude d'une fonction par la TAN 4.A.7a))ait une explication aléatoire :

P2(p) : « Il existe 2 fonctions positives $\varepsilon_{1p}(k)$ et $\varepsilon_{2p}(k)$ définies sur \mathbf{N}^* et tendant vers 0 et il existe un naturel N_p tel que pour tout n supérieur à N_p , $I_p(k)$ étant l'intervalle $[1-\varepsilon_{1p}(k), 1+\varepsilon_{2p}(k)]$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times t\left(\frac{f(i)}{F(i)} \in I_p(i)\right) \geq p$$

(La fonction $F(i)$ étant définie sur \mathbf{N}^* , et $F(i) \approx F_A(i)$, $F_A(i)$ étant une fonction connue) ».

On remarque que si P2(p) est vraie, si on redéfinit les intervalles $I_p(k)$ pour k inférieur à N_p , l'expression précédente est vraie pour tout n , c'est à dire qu'on peut prendre $N_p=1$.

Considérant alors une suite p_i tendant vers 1 et appliquant le pseudo-Axiome 4.B.7a) de la limite à la suite de propositions $(P2(p_i))_{N^*}$, on obtient que la proposition P2(1) est vraie. Or on obtient immédiatement que la proposition P2(1) est équivalente à :

« Il existe 2 fonctions positives $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ définies sur N^* et tendant vers 0 telle que pour tout i dans N^* , définissant $I(k)=[1-\varepsilon_1(k),1+\varepsilon_2(k)]$:

$$\frac{f(i)}{F(i)} \in I(i)$$

Il est donc immédiat qu'on obtient la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire:

$$P1 : \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{f(i)}{F(i)} \right) = 1$$

Appliquant ce qui précède à la proposition P2(S(n)) de la Remarque 4.A.7b), remarquant qu'on aurait pu dans cette proposition remplacer 0.98 par n'importe quel réel p avec $0 < p < 1$, on obtient que la proposition suivante, c'est à dire P1(S(n)) a une pseudo-preuve aléatoire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S(n)}{n} \right) = 1$$

$$\sum_{i=NA} p^{iA}$$

On obtient donc alors le Théorème 4.A.7) sans utiliser la Loi Forte des Grands Nombres généralisée.

De même, on remarque que dans la proposition P2_{MI}(r(k)) (Etude de la fonction r(k) par le modèle simple indépendant MI), on aurait pu remplacer 0.98 par n'importe quel réel p tel que $0 < p < 1$. D'après ce qui précède, on obtient donc que la proposition suivante P2_{MIlim}(r(k)) a une pseudo-preuve-aléatoire :

$$P2_{MIlim}(r(k)) : \ll \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{r(i)}{(i / (\text{Log}(i))^2)} \right) = 1 \gg$$

Appliquant le même raisonnement à la proposition P2_{I(k) $\pi(p_1, \dots, p_n)$} (r(k)) (Etude de la fonction r(k) par le modèle indépendant MI(k) $\pi(p_1, \dots, p_n)$) (On rappelle p_1, \dots, p_n sont les n premiers nombres premiers différents de 2), on obtient, i appartenant à l'ensemble $F(t_1, \dots, t_r)$ contenant les naturels pairs ayant pour autres diviseurs premiers que 2 t_1, \dots, t_r , que la proposition suivante a une pseudo-preuve aléatoire:

$P_{MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)lim}(r(k)) : \ll$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{r(i)}{C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(t_1, \dots, t_r) (i / (\text{Log}(i))^2)} \right) = 1 \gg.$$

Or on a vu :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}(t_1, \dots, t_r)) = C_2 \prod_{j=1}^r \left(\frac{t_j - 1}{t_j - 2} \right)$$

On obtient donc, appliquant à nouveau le pseudo-Axiome 4.B7b) de la limite aux propositions $P_{MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)}$ pour n tend vers l'infini, que la proposition suivante P_{H.L.G} a une pseudo-preuve aléatoire :

$$P_{H.L.G} : \ll r(i) \approx C_2 \prod_{j=1}^r \frac{t_j - 1}{t_j - 2} \times \frac{i}{(\text{Log}(i))^2} \gg$$

5.CONCLUSION

Ainsi on a montré comment la TAN permettait de montrer que des propositions concernant les décimales d'irrationnels ou des sous-ensembles de N avaient des explications aléatoires, c'est-à-dire des explications rationnelles basées sur le hasard, sans avoir été démontrées classiquement ni leur négation.

Il semble certain que bien que souvent ces explications aléatoires soient très simples, ces propositions n'aient pas de démonstration classique. Par exemple si on considère la proposition « Si I est l'ensemble des naturels i inférieurs à n tels que la $i^{\text{ème}}$ décimale de $\text{Log}(3), \sqrt{5}, \pi$ coïncide, alors I est infini », il semble impossible de prouver cette proposition en utilisant les Axiomes classiques de la Théorie des nombres, alors que cette proposition peut être obtenue très simplement par la TAN, qui permet d'obtenir aussi l'estimation $i(n)$ de I .

Comme dans l'étude de la Conjecture faible de Goldbach ⁽⁵⁾, on a vu que la TAN permettait non seulement de prévoir que certains ensembles étaient finis, infinis, vides ou non vides, mais aussi de prévoir certaines de leurs caractéristiques, par exemple leur estimation. Il semble impossible d'obtenir ces caractéristiques si particulières sans utiliser les modèles statistiques obtenus par la TAN.

Il reste à réaliser des tests, afin de vérifier l'importance et la validité de la TAN concernant les décimales d'irrationnels et les ensembles estimés. En particulier, il faudrait vérifier en effectuant des tests la validité de la variante de la Conjecture forte de Goldbach de Hardy et Littlewood, et celle concernant les nombres premiers jumeaux dont on a donné une pseudo-preuve aléatoire dans cet article. Si tel n'était pas le cas, il faudrait trouver des modèles plus précis que ceux présentés dans cet article.

Il reste aussi à démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée qu'on a conjecturée, mais ceci est un problème classique de probabilité. Il faudrait aussi comme on l'a vu étudier les prédictions des modèles $MI(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$, et $M_{eq}I(k)\pi(p_1, \dots, p_n)$ pour les faibles valeurs de k (k dans $[1000, 100000]$) et vérifier si elles permettent de justifier l'aspect de la Comète de Goldbach pour ces faibles valeurs.

Un résultat extrêmement intéressant obtenu dans cet article est d'avoir donné une explication aléatoire à des propositions comme la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood concernant la Conjecture forte de Goldbach et la Conjecture forte des nombres premiers jumeaux.

Références :

- 1.E.J Borowski, J.M Borwein, *Mathematics, Collins Dictionnary* (GB 1984)
- 2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Belin (Paris 2000)
- 3.M.R Spiegel, J.S Schiller, R.Srinivasan, *Probability and statistics*, McGraw Hill (2000)
- 4.P.Roger, *Probabilités statistiques et processus stochastiques*, Pearson (France 2004)
- 5.T.Delort, *Théorie Aléatoire des Nombres-Partie I : Conjecture faible de Goldbach.* , Extrait du livre Théories d'or, Editions Books on Demand, Paris (2010)
- 6.O.Rioul, *Théorie des probabilités*, Lavoisier (2008), Paris.
- 7.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta mathematica, (1923).

NOTES 1

NOTES 2

NOTES 3