



**HAL**  
open science

# Les inégalités de SP-partition pour le problème du sous-graphe $k$ -arête connexe

Ibrahima Diarrassouba, Lise Slama

► **To cite this version:**

Ibrahima Diarrassouba, Lise Slama. Les inégalités de SP-partition pour le problème du sous-graphe  $k$ -arête connexe. 2007. hal-00678359

**HAL Id: hal-00678359**

**<https://hal.science/hal-00678359>**

Submitted on 12 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Les inégalités de SP-partition pour le  
problème du sous-graphe  $k$ -arête connexe**

Ibrahima Diarrassouba<sup>1</sup> Lise Slama<sup>2</sup>

Research Report LIMOS/RR-07-13

3 juillet 2007

<sup>1</sup>diarrass@isima.fr

<sup>2</sup>lise.slama@isima.fr

## Abstract

A graph  $G = (V, E)$  is called  $k$ -edge connected, where  $k$  is a positive integer, if there are at least  $k$  edge-disjoint paths between any pair of nodes  $i, j \in V$ . Given a weight function  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , the  $k$ -edge connected subgraph problem ( $k$ ECSP for short) is to find a minimum weight  $k$ -edge connected spanning subgraph of  $G$ . We denote by  $k$ ECSP( $G$ ) the convex hull of the solutions of this problem. In this paper, we consider the so-called SP-partition inequalities. They are valid for  $k$ ECSP and are defined by partitions which induce series-parallel graphs. We study the conditions on the graph  $G$  under which the SP-partition inequalities define facet of  $k$ ECSP( $G$ ). First we look at outerplanar graphs using some existing results (Chopra [3], Didi Biha [1], and Didi Biha and Mahjoub [2]). We give new necessary conditions and then deduce necessary and sufficient conditions for the SP-partition inequalities to be facet defining when  $G$  is outerplanar. We then show that if  $G$  is series-parallel and the partition which defines the SP-partition inequality induces a non-outerplanar but series-parallel graph, then the SP-partition inequality does not define a facet. Finally we give some considerations about the case of any graphs.

**Keywords:** Series-parallel graphs, outerplanar graphs, SP-partition inequalities, facet

## Résumé

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit  $k$ -arête connexe, avec  $k$  un entier positif, s'il existe au moins  $k$  chaînes arête-disjointes entre chaque paire de sommets  $i, j \in V$ . Etant donnée une fonction de poids  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , le problème du sous-graphe  $k$ -arête connexe de poids minimum, noté  $k$ ECSP, consiste à trouver un sous-graphe couvrant  $k$ -arête connexe de  $G$  de poids minimum. On note  $k$ ECSP( $G$ ) l'enveloppe convexe des solutions de ce problème. Dans ce rapport, on s'intéresse aux contraintes dites de SP-partition qui sont valides pour  $k$ ECSP. Elles sont définies pour des partitions induisant des graphes série-parallèles. Nous étudions les conditions sous lesquelles ces contraintes définissent des facettes de  $k$ ECSP( $G$ ). Dans un premier temps, nous nous intéressons aux graphes outerplanaires en nous appuyant sur les résultats de Chopra [3], de Didi Biha [1], et de Didi Biha et Mahjoub [2]. On donne des conditions nécessaires supplémentaires qui nous permettent de déduire des conditions nécessaires et suffisantes de facette des contraintes de SP-partition pour les graphes outerplanaires. Nous montrons ensuite qu'une contrainte de SP-partition, dans le cas où  $G$  est série-parallèle et la partition induit un graphe série-parallèle et non outerplanaire, ne définit pas une facette. Enfin nous donnons quelques éléments de réflexion dans le cas où le graphe est quelconque.

**Mots clés :** Graphes série-parallèle, graphes outerplanaires, contraintes de SP-partition, facette

# 1 Introduction

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit  $k$ -arête connexe, avec  $k$  un entier positif, s'il existe au moins  $k$  chaînes arête-disjointes entre chaque paire de sommets  $i, j \in V$ . Étant donnée une fonction de poids  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , le problème du sous-graphe  $k$ -arête connexe de poids minimum, noté  $k$ ECSP, consiste à trouver un sous-graphe couvrant  $k$ -arête connexe de  $G$  de poids minimum.

Soit  $W \subseteq V$  un sous-ensemble de sommets. L'ensemble des arêtes qui ont une extrémité dans  $W$  et l'autre dans  $\overline{W} = V \setminus W$  est appelé *coupe* et est noté  $\delta(W)$ . Si  $W = \{u\}$ , pour un sommet  $u$  de  $V$ , on écrit  $\delta(u)$  pour  $\delta(\{u\})$ . Étant donné un point  $x \in \mathbb{R}^E$  et un sous-ensemble d'arêtes  $F \subseteq E$ , on définit  $x(F) = \sum_{e \in F} x(e)$ . Le problème  $k$ ECSP est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant

$$\text{Min} \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

$$x(\delta(W)) \geq k \quad \forall W \subset V, W \neq V, W \neq \emptyset, \quad (1)$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E, \quad (2)$$

$$x(e) \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E. \quad (3)$$

Les inégalités (1) sont appelées *inégalités de coupe* et les inégalités (2) sont appelées *inégalités triviales*. L'enveloppe convexe des solutions du  $k$ ECSP est appelée *polytope des sous-graphes  $k$ -arête connexes* et sera notée  $k$ ECSP( $G$ ). On désigne par  $P(G, k)$  le polytope décrit par les inégalités (1) et les inégalités (2).

Lorsque  $k = 1$ , le problème  $k$ ECSP n'est rien d'autre que le problème de l'arbre couvrant de poids minimum et peut être résolu en temps polynomial. Lorsque  $k \geq 2$ , le problème est NP-difficile. Il a été étudié pour certaines classes de graphes, en particulier dans la classe des graphes *outerplanaires*, c'est-à-dire non contractible ni à  $K_4$  ni à  $K_{3,2}$ , et dans celle des graphes *série-parallèles*, c'est-à-dire non contractible à  $K_4$ . Notons que la classe des graphes outerplanaires est une sous-classe de la classe des graphes série-parallèles. Une définition équivalente d'un graphe outerplanaire est qu'on peut disposer tous ses sommets sur la face extérieure.

Soit  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 2$ , une partition de  $V$ . On note  $\delta(V_1, \dots, V_p)$  l'ensemble des arêtes ayant leurs extrémités dans deux éléments différents de  $\pi$ . La contrainte suivante

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1 \quad (4)$$

est appelée contrainte de *SP-partition*. Les inégalités de SP-partition ont été introduites par Chopra [3] (qui les appelle contraintes de OP-partition) qui considère  $k$ ECSP lorsque chaque arête du graphe peut être utilisée plus d'une fois et lorsque le graphe est outerplanaire. Il montre que ces contraintes sont valides pour ce problème lorsque  $k$  est impair. Il montre aussi qu'avec les contraintes de non négativité, elles caractérisent le polytope du problème. Didi Biha et Mahjoub étendent dans [2] les résultats de Chopra

au  $k$ ECSP et pour des graphes série-parallèles. Ils montrent également que, dans cette classe de graphes,  $k$ ECSP( $G$ ) est complètement décrit par les contraintes de coupe et les contraintes triviales lorsque  $k$  est pair. Enfin, ils montrent que lorsque  $k$  est impair,  $k$ ECSP( $G$ ) est complètement décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe et les contraintes de SP-partition.

Dans ce rapport, nous étudions les propriétés de facette des contraintes de SP-partition. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux graphes outerplanaires en nous appuyant sur les résultats de Chopra [3], de Didi Biha [1], et de Didi Biha et Mahjoub [2]. Nous donnons des conditions nécessaires supplémentaires qui nous permettent de déduire des conditions nécessaires et suffisantes de facette des contraintes (4) pour les graphes outerplanaires. Nous montrons ensuite que si le graphe est série-parallèle et que la partition  $\pi$  induit un graphe série-parallèle non outerplanaire, alors la contrainte de SP-partition induite par  $\pi$  n'est pas une facette. Enfin nous donnons quelques éléments de réflexion pour le cas où le graphe est quelconque.

Le reste de cette section est consacré à quelques notations qui seront utilisées tout au long de ce rapport. Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Pour un sous-ensemble de sommets  $W \subseteq V$ , on note par  $E(W)$  l'ensemble des arêtes de  $E$  dont les deux extrémités sont dans  $W$  et par  $G[W] = (W, E(W))$  le sous-graphe de  $G$  induit par  $W$ . Étant donnée une arête  $e = uv \in E$ , l'opération de contraction de l'arête  $e$  consiste à supprimer  $e$  et à identifier les sommets  $u$  et  $v$  tout en conservant les arêtes adjacentes à  $u$  et  $v$ . On note  $G - e$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant  $e$ . Étant donné un ensemble de sommets  $W \subseteq V$ , contracter  $W$  consiste à supprimer les arêtes de  $E(W)$  et à identifier tous les sommets de  $W$  tout en conservant les arêtes adjacentes aux sommets de  $W$ . Pour une partition  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 2$ , donnée, on note  $E_\pi = \delta(V_1, \dots, V_p)$ . On désigne aussi par  $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant chaque élément  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Si  $U$  et  $W$  sont deux sous-ensembles disjoints de sommets, on note par  $[U, W]$  l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans  $U$  et l'autre dans  $W$ . Étant donnée une solution  $\bar{x} \in \mathbb{R}^E$ , l'inégalité  $ax \geq \alpha$  est dite *serrée* pour  $\bar{x}$  si  $a\bar{x} = \alpha$ .

## 2 Les graphes outerplanaires

Dans cette section, on étudie les propriétés de facette des contraintes de SP-partition pour  $k$ ECSP, avec  $k$  impair, lorsque le graphe est outerplanaire et 2-sommet connexe.

Ici  $G = (V, E)$  désignera un graphe outerplanaire et 2-sommet connexe et on supposera que  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 2$ . Sous ces conditions, les sommets de  $G$  peuvent être disposés sur un cycle élémentaire. On peut aussi supposer, sans perte de généralité, que les sommets  $v_1, \dots, v_n$  sont indicés de telle manière que deux sommets consécutifs sur le cycle ont des indices consécutifs, modulo  $n$ . Dans un premier temps, nous nous intéressons à une partition particulière  $\pi_0$  constituée d'ensembles contenant exactement un sommet c'est-à-dire  $\pi_0 = (\{v_1\}, \dots, \{v_n\})$ . Puis nous généralisons les résultats obtenus pour des partitions quelconques.

## 2.1 Partition $\pi_0 = (\{v_1\}, \dots, \{v_n\})$

Considérons l'inégalité de SP-partition suivante induite par  $\pi_0$

$$\sum_{e \in E} x(e) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil n - 1. \quad (5)$$

Didi Biha et Mahjoub [2] ont montré le lemme suivant.

**Lemme 2.1** [2] *Soit  $x$  une solution de  $P(G, k)$ .*

*Si  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$  est une partition de  $V$  serrée pour  $x$ , alors*

$$x([V_i, V_j]) \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \text{ pour tout } i, j \in \{1, \dots, p\}. \quad (6)$$

*De plus, si  $x$  vérifie (6) à l'égalité pour  $i$  et  $j$  avec  $i < j$  alors la partition  $\pi' = (V'_1, \dots, V'_p)$  telle que*

$$\begin{aligned} V'_t &= V_t && \text{pour } t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1 \\ V'_i &= V_i \cup V_j \\ V'_t &= V_{t+1} && \text{pour } t = j, \dots, p \end{aligned}$$

*est aussi serrée pour  $x$ .*

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que (5) définisse une facette. Avant cela, nous faisons les remarques suivantes. Comme  $G$  est un graphe outerplanaire, et donc série-parallèle, et 2-sommet connexe, il existe un sommet  $t$  adjacent à exactement 2 sommets  $t_1$  et  $t_2$ . Si  $x \in k\text{ECSP}(G)$  alors on a  $x([t, t_1]) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$  ou  $x([t, t_2]) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ . Supposons par exemple que l'on a  $x([t, t_1]) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ . Alors, si de plus  $x$  vérifie la contrainte (5) à l'égalité, d'après le lemme 2.1 on a  $x([t, t_1]) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ .

**Lemme 2.2** *Si la contrainte (5) définit une facette de  $k\text{ECSP}(G)$  différente des facettes induites par les contraintes triviales alors on a  $|[v_i, v_{i+1}]| \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ ,  $i = 1, \dots, n$  (modulo  $n$ ).*

**Preuve.** Supposons le contraire c'est-à-dire que (5) définit une facette différente de celles définies par les inégalités triviales et qu'il existe  $i \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $|[v_i, v_{i+1}]| < \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$  ( $i$  est pris modulo  $n$ ). Soient  $e_i^* \in [v_i, v_{i+1}]$  et  $\mathcal{F}_0 = \{x \in k\text{ECSP}(G) \mid x \text{ vérifie la contrainte (5) à l'égalité}\}$ . Comme la contrainte (5) est différente de la contrainte  $x(e_i^*) \leq 1$ , il existe  $x \in \mathcal{F}_0$  tel que  $x(e_i^*) = 0$ . Nous distinguons deux cas.

**Cas 1.**  $v_i$  ou  $v_{i+1}$  est adjacent à exactement 2 sommets. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $v_i$  est adjacent à  $v_{i-1}$  et  $v_{i+1}$  uniquement. Dans ce cas, on a  $x([v_i, v_{i+1}]) \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 2$  et  $x([v_{i-1}, v_i]) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1$ , ce qui contredit le lemme 2.1.

**Cas 2.**  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont adjacents à au moins 3 sommets. Comme  $G$  est outerplanaire (et donc série-parallèle) et 2-sommet connexe, il existe un sommet  $t$  adjacent à exactement 2 sommets  $t_1$  et  $t_2$ . D'après la remarque précédente, un des voisins de  $t$ , disons  $t_1$ , est tel que  $x([t, t_1]) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ . Soit  $\pi'_0$  la partition obtenue de  $\pi_0$  en contractant les sommets  $t$  et  $t_1$ . Il est clair que  $G_{\pi'_0}$  est outerplanaire et 2-sommet connexe et que, d'après le lemme 2.1, la contrainte de SP-partition induite par  $\pi'_0$  est serrée par  $x$ . On répète cette opération jusqu'à ce que les sommets  $v_i$  ou  $v_{i+1}$  soient adjacents à exactement 2 sommets dans le nouveau graphe obtenu. Cela est possible car les graphes série-parallèles peuvent être contruits en appliquant successivement les opérations de Duffin [4] à savoir :

1. dupliquer une arête,
2. subdiviser une arête  $uv$  c'est-à-dire remplacer  $uv$  par deux arêtes  $uw$  et  $wv$  où  $w$  est un nouveau sommet dans le graphe.

Soit  $\pi''_0 = (V_1, \dots, V_{t-1}, V_t, V_{t+1}, \dots, V_q)$ ,  $q \geq 3$ , la partition ainsi obtenue. On peut supposer s.p.d.g. que  $V_t = \{v_i\}$  et que  $V_t$  est adjacent à exactement 2 éléments de  $\pi''_0$ ,  $V_{t-1}$  et  $V_{t+1}$ . On peut aussi supposer s.p.d.g. que  $v_{i+1} \in V_{t+1}$ . Dans ce cas, on a  $|[V_t, V_{t+1}]| \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$  et  $e_i^* \in [V_t, V_{t+1}]$ . D'après le lemme 2.1, la contrainte de SP-partition induite par  $\pi''_0$  est serrée par  $x$ . Comme  $|[V_t, V_{t+1}]| \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$  et que  $x(e_i^*) = 0$ , on a  $x([V_t, V_{t+1}]) \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$  et  $x([V_t, V_{t-1}]) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ , contradiction. □

D'autre part, Didi Biha [1] a donné le résultat suivant qu'il énonce pour des graphes série-parallèles mais dont la preuve utilise une propriété des graphes outerplanaires. En effet, il utilise le fait que les sommets du graphe peuvent être disposés sur un cycle élémentaire, ce qui est impossible pour les graphes série-parallèles non outerplanaires.

**Théorème 2.3** [1] *Soient  $G = (V, E)$  un graphe quelconque,  $k \geq 1$  un entier impair et  $(V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 2$ , une partition de  $V$ . Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

1.  $G[V_i]$  est  $(k + 1)$ -arête connexe, pour  $i = 1, \dots, p$ ,
2.  $|[V_i, V_{i+1}]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ , pour  $i = 1, \dots, p$  (modulo  $p$ ),
3.  $G_\pi$  est outerplanaire.

*Alors la contrainte de SP-partition correspondante définit une facette de  $kECSP(G)$ .*

Nous déduisons du lemme 2.2 et du théorème 2.3 le théorème suivant.

**Théorème 2.4** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe outerplanaire et 2-sommet connexe avec  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 2$ . L'inégalité (5) définit une facette différente des facettes triviales si et seulement si  $|[u_i, u_{i+1}]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ , pour  $i = 1, \dots, n$  (modulo  $n$ ).*

## 2.2 Partitions quelconques

Dans ce qui suit, nous allons étendre les résultats précédents à des partitions quelconques. Soient  $G = (V, E)$  un graphe outerplanaire 2-sommet connexe et  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 2$ , une partition de  $V$  telle que  $G[V_i]$ ,  $i = 1, \dots, p$ , est connexe. Notons que comme  $G$  est outerplanaire et 2-sommet connexe,  $\pi$  induit un graphe également outerplanaire et 2-sommet connexe. Le lemme suivant nous donne la dimension du polyèdre  $kECSP(G)$ . La preuve est donnée dans [1].

**Lemme 2.5** [1] *Si  $G = (V, E)$  est  $(k + 1)$ -arête connexe, alors  $kECSP(G)$  est de pleine dimension.*

Dans toute la suite, on supposera que les graphes sont  $(k + 1)$ -arête connexe et que donc le polytope est de pleine dimension.

**Lemme 2.6** *Si*

1.  $|[V_i, V_{i+1}]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil, i = 1, \dots, p$  (modulo  $p$ ),
2.  $G[V_i]$  est  $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$ -arête connexe,

alors (4) définit une facette.

**Preuve.** Soit  $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$  le graphe induit par  $\pi$ . Soit  $\mathcal{F} = \{x \in k\text{ECSP}(G) \mid x$  vérifie la contrainte (4) induite par  $\pi$  à l'égalité} et  $\mathcal{F}_\pi = \{x \in k\text{ECSP}(G_\pi) \mid x$  vérifie (5) à l'égalité}. Comme  $G_\pi$  est outerplanaire et 2-sommet connexe, et d'après le théorème 2.4, on sait que  $\mathcal{F}_\pi$  définit une facette de  $k\text{ECSP}(G_\pi)$ . Pour  $i = 1, \dots, p$ , on pose

$$\tilde{x}_i(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour exactement } \frac{k-1}{2} \text{ arêtes de } [V_i, V_{i+1}] \text{ (modulo } p), \\ 1 & \text{pour exactement } \frac{k+1}{2} \text{ arêtes de } [V_j, V_{j+1}], j \in \{2, \dots, p\}, j \neq i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les vecteurs  $\tilde{x}_i(e), i = 1, \dots, p$ , appartiennent à  $\mathcal{F}_\pi$ . De plus, ils sont affinement indépendants. On définit  $x_i, i = 1, \dots, p$ , par

$$x_i(e) = \begin{cases} \tilde{x}_i(e) & \text{si } e \in E_\pi \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$x_i, i = 1, \dots, p$ , appartiennent à  $\mathcal{F}$  et forment  $p$  vecteurs affinement indépendants. Soit  $e^* \in E(V_{i_0})$ , pour  $V_{i_0} \in \{V_1, \dots, V_p\}$ . Soit  $z$  tel que

$$z(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e^* \\ x_1(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

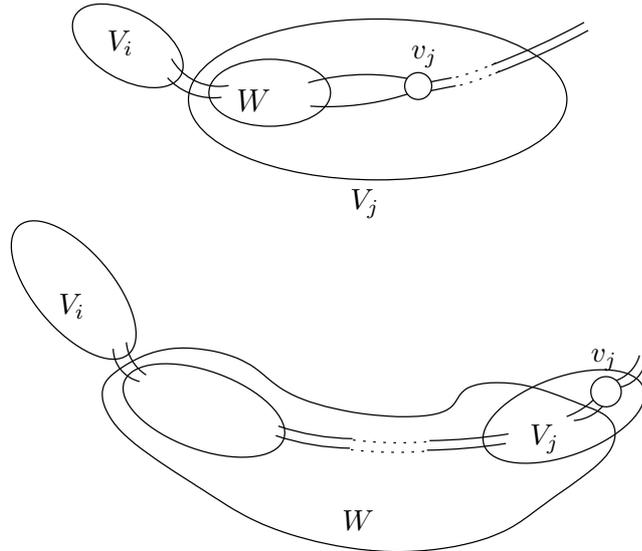


FIG. 1 – Cas où exactement un sommet  $v_j$  est tel que  $[W, v_j] \not\subseteq E_\pi$

Montrons que  $z$  induit un graphe  $k$ -arête connexe. Soit  $W \subset V$ . Montrons que  $z(\delta(W)) \geq k$ . Supposons que  $\delta(W) \not\subseteq E_\pi$ . Alors il existe au moins un sommet  $v \in V$

tel que  $[W, v] \not\subseteq E_\pi$ . Supposons qu'il en existe exactement un. La figure 1 illustre de telles configurations. Alors il existe un ensemble  $V_i$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , tel que  $[V_i, W] \subset \delta(W)$ . Étant donnée la définition de  $z$ , on a  $z([V_i, W]) \geq \frac{k-1}{2}$ . Soit  $v_j$  le sommet tel que  $[W, v_j] \not\subseteq E_\pi$ . Notons  $V_j$  l'ensemble de la partition contenant  $v_j$ .  $V_j$  est  $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$ -arête connexe, donc  $[W \cap V_j, V_j \setminus W] \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} z(\delta(W)) &\geq z([V_i, W]) + z([W \cap V_j, V_j \setminus W]) \\ &\geq \frac{k-1}{2} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ &= k. \end{aligned}$$

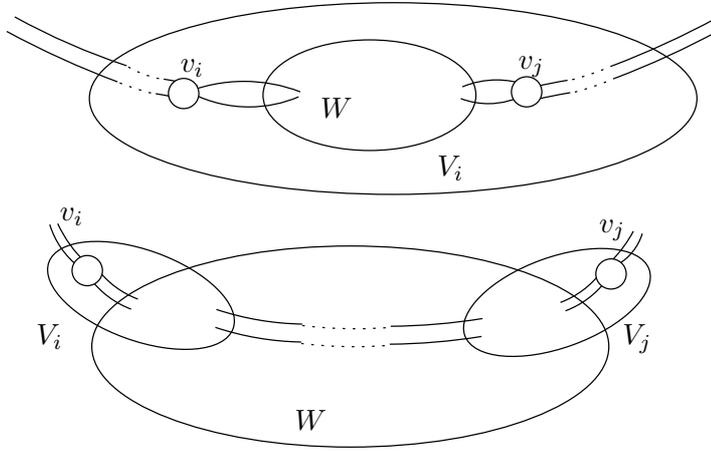


FIG. 2 – Cas où exactement 2 sommets  $v_i$  et  $v_j$  vérifient  $[W, \{v_j\}] \not\subseteq E_\pi$ ,  $[W, \{v_i\}] \not\subseteq E_\pi$

Supposons maintenant qu'il existe deux sommets, disons  $v_i$  et  $v_j$  tels que  $[W, \{v_i\}] \not\subseteq E_\pi$  et  $[W, \{v_j\}] \not\subseteq E_\pi$ . La figure 2 illustre ces configurations là. Notons  $V_i$  (resp.  $V_j$ ), l'ensemble de la partition contenant  $v_i$  (resp.  $v_j$ ). Dans le cas où  $V_i = V_j$ , autrement dit  $v_i, v_j$  et  $W$  sont contenus dans le même ensemble de la partition, alors il existe une partition  $(S_1, W, S_2)$  de  $V_i$  telle que  $v_i \in S_1, v_j \in S_2$ .

Supposons, dans le cas où  $V_i \neq V_j$  (resp. dans le cas où  $V_i = V_j$ ), qu'il existe au moins une arête reliant  $V_i \setminus W$  et  $V_j \setminus W$  (resp.  $S_1$  et  $S_2$ ). Comme  $G$  est outerplanaire et que par conséquent, il n'y a pas de corde qui se coupe, on a  $\delta(W) = [W, V_i \setminus W] \cup [W, V_j \setminus W]$  (resp.  $\delta(W) = [W, S_1] \cup [W, S_2]$ ). Comme  $G$  est  $(k+1)$ -arête connexe,  $|\delta(W)| \geq k+1$ , or comme il y a, au plus, une seule arête parmi celles des faisceaux  $[W, V_i \setminus W]$  et  $[W, V_j \setminus W]$  (resp.  $[W, S_1]$  et  $[W, S_2]$ ) de valeur nulle, donc  $z(\delta(W)) \geq k$ .

Supposons, dans le cas où  $V_i \neq V_j$ , qu'il n'existe pas d'arête reliant  $V_i \setminus W$  et  $V_j \setminus W$ . Comme  $G[V_i]$  et  $G[V_j]$  sont  $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$ -arête connexe, donc  $|[V_i \setminus W]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$  et  $|[V_j \setminus W, W]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ . Ainsi  $z(\delta(W)) \geq z([V_i \setminus W]) + z([V_j \setminus W, W]) \geq k$ . Supposons enfin, dans le cas où  $V_i = V_j$ , qu'il n'existe pas d'arête reliant  $S_1$  et  $S_2$ .  $G[V_i]$  est  $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$ -arête connexe, on a  $|[S_1, W \cup S_2]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$  et  $|[S_1 \cup W, S_2]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ . Ainsi  $z(\delta(W)) \geq z([S_1, W \cup S_2]) + z([S_1 \cup W, S_2]) \geq k$ .

Donc  $z$  induit un graphe  $k$ -arête connexe et vérifie (4) à l'égalité. Pour chaque arête  $e^* \in E - E_\pi$ , on définit  $z_{e^*}$  tel que

$$z_{e^*}(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e^* \\ x_1(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces vecteurs appartiennent à  $\mathcal{F}$ . On peut construire ainsi  $|E - \delta(\pi)|$  vecteurs. On obtient en tout  $|E|$  vecteurs affinement indépendants. Donc  $\mathcal{F}$  est une facette de  $k\text{ECSCP}(G)$ .  $\square$

De plus, Didi Biha [1] a montré le théorème suivant.

**Théorème 2.7** *Soient  $G = (V, E)$  un graphe série-parallèle et  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$  une partition de  $V$  telle que  $G[V_i]$  est connexe pour  $i = 1, \dots, p$ . L'inégalité (4) définit une facette de  $k\text{ECSP}(G)$  différente d'une facette triviale, où  $k$  est impair et  $k \geq 3$ , seulement si*

1. le graphe  $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$  est 2-sommet connexe,
2. pour tout  $e \in E_\pi$  tel que  $G - e$  est  $k$ -arête connexe,  $G_\pi - e$  est 2-sommet connexe,
3. si  $e_0$  est une arête de  $G[V_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$  telle que le graphe  $G - e_0$  est  $k$ -arête connexe, alors pour tout partition  $(V_i^1, V_i^2)$  de  $V_i$  avec  $e_0 \in [V_i^1, V_i^2]$ , on a  $|[V_i^1, V_i^2]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ .

En faisant le lien entre le lemme 2.6 et le théorème 2.7, on obtient l'équivalence énoncée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.8** *Soit  $G$  un graphe outerplanaire,  $(k+1)$ -arête connexe, 2-sommet connexe et  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$  une partition de  $G$  induisant un graphe outerplanaire et telle que  $G[V_i]$  soit connexe. La contrainte (4) définit une facette si et seulement si*

1.  $|[V_i, V_{i+1}]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ ,  $i = 1, \dots, p$  (modulo  $p$ ),
2.  $G[V_i]$  est  $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$ -arête connexe.

### 3 Graphes série-parallèles

Dans cette section, on s'intéresse aux contraintes de SP-partition définies par des partitions induisant des graphes série-parallèles et non outerplanaires, c'est-à-dire des graphes contractibles à  $K_{3,2}$ . On montre que ces contraintes sont soit dominées, soit rédundantes par rapport aux contraintes de SP-partition définies par des partitions induisant des graphes outerplanaires.

**Théorème 3.1** *Soit  $(V_1, \dots, V_p)$  une partition qui induit un graphe série-parallèle et non outerplanaire. Nous avons les résultats suivants.*

1. Si  $k = 3$ , alors la contrainte (4) est redondante par rapport aux contraintes (4) définies par des partitions induisant des graphes outerplanaires.
2. Si  $k \geq 5$ , la contrainte (4) ne définit pas de facette.

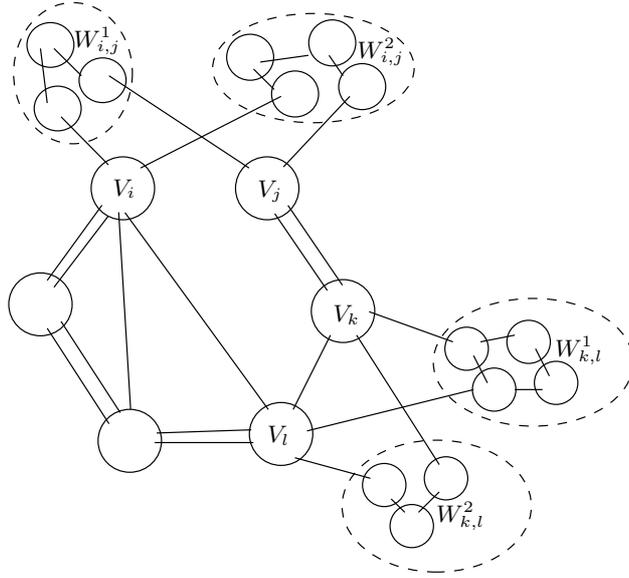


FIG. 3 – Exemple de partition  $\pi_{SP}$  série-parallèle et non outerplanaire

**Preuve.** Soit  $\pi_{SP} = (V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 3$ , une partition de  $V$  qui induit un graphe série-parallèle non outerplanaire. La figure 3 illustre une telle partition. Comme  $G$  est non contractible à  $K_{3,2}$ , il existe deux ensembles consécutifs  $V_i, V_{i+1}$ , tels qu'il existe 2 ensembles de sommets  $W_i^1, W_i^2$ , qui sont déconnectés l'un de l'autre et qui sont tous deux connectés à la fois à  $V_i$  et à  $V_{i+1}$ . Soit  $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } V_i, V_{i+1} \in \pi_{SP} \text{ et tels qu'il existe } W_i^1, W_i^2 \text{ avec } [W_i^1, W_i^2] = \emptyset, [W_i^1, V_i] \neq \emptyset \neq [W_i^1, V_{i+1}], [W_i^2, V_i] \neq \emptyset \neq [W_i^2, V_{i+1}]\}$ . Notons que comme  $G_{\pi_{SP}}$  est série-parallèle et non outerplanaire, on a  $|I| \geq 1$ .

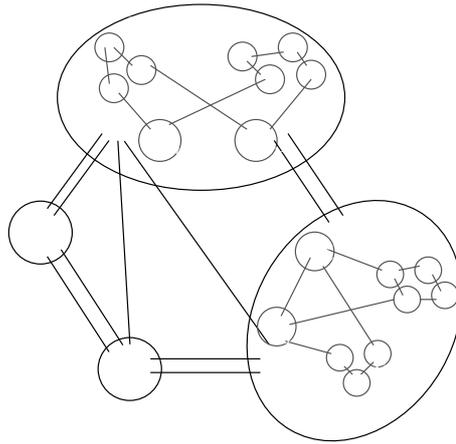


FIG. 4 – Exemple de partition  $\pi_{OP}$

Soit  $\pi_{OP}$  la partition obtenue en contractant  $V_i, V_{i+1}, W_i^1, W_i^2$ , pour tout  $i \in I$ . La figure 4 décrit le graphe obtenu. Il est facile de voir que le graphe induit par  $\pi_{OP}$  est outerplanaire. Notons  $p_i^1$  (resp.  $p_i^2$ ) le nombre d'ensemble(s)  $V_i, i = 1, \dots, p$ , inclus dans

$W_i^1$  (resp.  $W_i^2$ ) et  $p_i = p_i^1 + p_i^2$ . Notons aussi  $r = \sum_{i \in I} p_i$ . Soit  $\pi_{W_i^j}$ ,  $i \in I$  et  $j \in \{1, 2\}$ ,

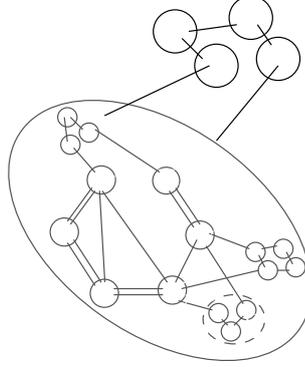


FIG. 5 – Exemple de partition  $\pi_{W_i^2}$

la partition obtenue à partir  $\pi_{SP}$  en contractant tous les ensembles qui ne sont pas dans  $W_i^j$  (cf figure 5). Le graphe induit par  $\pi_{W_i^j}$ ,  $i \in I$  et  $j \in \{1, 2\}$ , induit un graphe série-parallèle. Donc les contraintes suivantes sont valides pour  $kECSP(G)$ .

$$x(\delta(\pi_{OP})) \geq (p - r - |I|) \frac{k+1}{2} - 1 \quad \text{inégalité induite par } \pi_{OP}, \quad (7)$$

$$x(\delta(\pi_{W_i^1})) \geq (p_i^1 + 1) \frac{k+1}{2} - 1 \quad \forall i \in I \quad \text{inégalités induites par } \pi_{W_i^1}, \quad (8)$$

$$x(\delta(\pi_{W_i^2})) \geq (p_i^2 + 1) \frac{k+1}{2} - 1 \quad \forall i \in I \quad \text{inégalités induites par } \pi_{W_i^2}, \quad (9)$$

$$x([V_i, V_{i+1}]) \geq 0 \quad \forall i \in I \quad \text{inégalités de positivité.} \quad (10)$$

En additionnant ces contraintes, on obtient :

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi_{SP})) &\geq (p - r - |I| + \sum_{i \in I} (p_i^1 + p_i^2 + 2)) \frac{k+1}{2} - 1 - 2|I| \\ x(\delta(\pi_{SP})) &\geq (p - r - |I| + r + 2|I|) \frac{k+1}{2} - 1 - 2|I| \\ x(\delta(\pi_{SP})) &\geq p \frac{k+1}{2} - 1 + |I| \frac{k+1}{2} - 2|I|. \end{aligned} \quad (11)$$

Or, si  $k = 3$ ,  $|I| \frac{k+1}{2} - 2|I| = 0$ . Donc la contrainte  $x(\delta(\pi_{SP})) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1$  est redondante par rapport aux contraintes (7), (8), (9) et (10). Si  $k \geq 5$ , alors  $|I| \frac{k+1}{2} - 2|I| > 0$ , la contrainte de SP-partition induite par  $\pi_{SP}$  est dominée par les contraintes (7), (8), (9) et (10).  $\square$

## 4 Graphes quelconques

Dans cette section, nous nous intéressons aux graphes quelconques. Dans un premier temps, nous considérons les contraintes de SP-partition définies par des partitions

induisant des graphes outerplanaires. On étudie en particulier les conditions sous lesquelles ces contraintes peuvent définir des facettes pour des graphes généraux. Puis on s'intéresse aux cas où la partition induit un graphe qui n'est pas série-parallèle. On introduit les contraintes dites de *SP-partition liftées* et on donne des conditions suffisantes pour qu'elles définissent des facettes.

## 4.1 Partition outerplanaire

Une question que l'on peut se poser est de savoir si les propriétés de facette des contraintes de SP-partition sont toujours les mêmes lorsque le graphe est quelconque et la partition induit un graphe outerplanaire. Malheureusement les conditions nécessaires données dans le théorème 2.8 ne le sont plus pour un graphe général même avec une partition induisant un graphe outerplanaire. En effet, d'après ce théorème, pour un graphe  $G = (V, E)$  outerplanaire et une partition  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 2$ , l'inégalité de SP-partition induite par  $\pi$  définit une facette seulement si les sous-graphes  $G[V_i]$  sont  $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$ -arête connexe,  $i = 1, \dots, p$ . Or dans le graphe de la figure 6 avec  $k = 3$ , la contrainte de SP-partition induite par  $\pi = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_6, V_7)$  définit une facette mais le sous-graphe induit par  $V_4$  n'est pas  $(\lceil \frac{3}{2} \rceil + 1 = 3)$ -arête connexe.

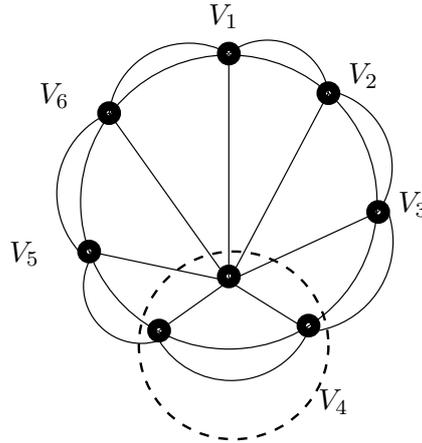


FIG. 6 – Contre-exemple

On peut supposer qu'ici, l'existence de cordes dans  $G[V_4]$  d'un sommet adjacent aux autres sommets du graphe rend ladite condition non nécessaire.

## 4.2 Les contraintes de SP-partition liftées

Chopra [3] a développé une procédure de lifting qui généralise les contraintes de SP-partition au cas où le graphe  $G$  n'est pas outerplanaire. Elle se présente comme suit. Soit  $\overline{E} = \{e_1, \dots, e_l\}$ ,  $l \geq 1$ , tel que  $G'_\pi = (V_\pi, E_\pi \cup \overline{E})$  n'est pas outerplanaire. Alors la contrainte

$$\sum_{e \in E_\pi} x(e) + \sum_{i=1}^l a(e_i)x(e_i) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1, \quad (12)$$

où  $a(e_i)$  est la longueur d'un plus court chemin dans  $G_\pi$  entre les extrémités de l'arête  $e_i$  (la longueur étant le nombre d'arête(s) qui compose(nt) le chemin), est appelée *contrainte de SP-partition liftée* et est valide pour  $k\text{ECSP}(G)$ . Cette procédure de lifting peut facilement être étendue au cas où le graphe  $G$  n'est pas série-parallèle et peut être très utile dans le cadre d'algorithmes de coupes et branchements pour  $k\text{ECSP}$ .

Dans ce qui suit, nous donnons des conditions suffisantes pour que les contraintes (12) définissent des facettes. Pour cela, nous rappelons le résultat de Chopra [3] suivant.

Soit  $G = (V, E)$ , un graphe outerplanaire.  $G$  est dit *outerplanaire maximal* s'il n'est plus outerplanaire lorsqu'on rajoute une arête entre deux sommets qui n'étaient pas reliés.

**Lemme 4.1** [3] *Soit  $G$  un graphe outerplanaire maximal et 2-sommet connexe. Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$  et  $P_1$  et  $P_2$  deux chemins sommets-disjoints entre  $u$  et  $v$ . On désigne par  $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{r_1}\}$ ,  $r_1 \geq 2$  et  $W = \{w_0, w_1, \dots, w_{r_2}\}$ ,  $r_2 \geq 2$ , les ensembles de sommets de  $P_1$  et  $P_2$  respectivement, avec  $u_0 = w_0 = u$  et  $u_{r_1} = w_{r_2} = v$ . Remarquons qu'on a  $U \cap W = \{u, v\}$  et que  $V = U \cup W$ . Si  $l \geq 2$  est la longueur d'un plus court chemin entre  $u$  et  $v$  dans  $G$ , alors il existe au moins  $l - 1$  arêtes  $e = u_i w_i$  telle que  $u_i \in U \setminus \{u, v\}$  et  $w_i \in W \setminus \{u, v\}$ .*

**Théoreme 4.2** *Soient  $G = (V, E)$  un graphe quelconque et  $\pi = (V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 2$ , une partition de  $V$  telle que  $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$  soit outerplanaire. Soit  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  un graphe tel que  $\overline{E} = E \cup \{e_1, \dots, e_l\}$ ,  $l \geq 1$ . L'inégalité de SP-partition liftée induite par  $\pi$  sur  $\overline{G}$  définit une facette de  $k\text{ECSP}(\overline{G})$  si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1.  $G_\pi$  est outerplanaire maximal,
2.  $||V_i, V_{i+1}|| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ ,  $i = 1, \dots, p$ , (modulo  $p$ ),
3.  $G[V_i]$  est  $(k + 1)$ -arête connexe, pour  $i = 1, \dots, p$ .

**Preuve :** Notons par  $ax \geq \alpha$  l'inégalité (12) induite par  $\pi$  sur  $\overline{G}$  et soit  $\mathcal{F} = \{x \in k\text{ECSP}(\overline{G}) \mid ax = \alpha\}$ . Supposons qu'elle soit incluse dans une facette de  $k\text{ECSP}(\overline{G})$  définie par l'inégalité  $bx \geq \beta$ . Soit  $\mathcal{F}'$  l'ensemble des points de  $k\text{ECSP}(\overline{G})$  qui vérifie  $bx \geq \beta$  à l'égalité. On a donc  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ .

Soit  $V_\pi = \{v_1, \dots, v_p\}$  où  $v_i$  correspond à  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , et posons  $\overline{G}_\pi = (V_\pi, \overline{E}_\pi)$  le sous-graphe de  $\overline{G}$  induit par  $\pi$ . Notons que  $E_\pi \subseteq \overline{E}_\pi$ . D'après les hypothèses et d'après le théorème 2.7, l'inégalité de partition induite par  $\pi$  sur  $G$  définit une facette de  $k\text{ECSP}(G)$ . En s'inspirant de la preuve de ce théorème, on peut montrer que  $b(e) = 0$  pour tout  $e \in \left(\bigcup_{i=1}^p \overline{E}(V_i)\right)$  et  $b(e) = \rho$  pour tout  $e \in E_\pi$  et pour un certain  $\rho > 0$ . Soient  $T_i$  un sous-ensemble de  $[v_i, v_{i+1}]$  contenant exactement  $\frac{k+1}{2}$  arêtes et  $T'_i$  un sous-ensemble de  $T_i$  contenant exactement  $\frac{k-1}{2}$  arêtes.

Nous allons maintenant montrer que, pour une arête  $e \in \overline{E}_\pi \setminus E_\pi$ , le coefficient  $b(e) = \rho a(e)$ .

Soit  $\overline{e} \in \overline{E}_\pi \setminus E_\pi$  avec  $\overline{e} = uv$ . Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux chemins reliant  $u$  et  $v$  dans  $G_\pi$  et  $r$  la longueur d'un plus court chemin entre  $u$  et  $v$  dans  $G_\pi$ . Désignons par  $U$  et  $W$  les ensembles de sommets de  $G_\pi$  qui forment  $P_1$  et  $P_2$ , respectivement. D'après le lemme 4.1, il existe  $r - 1$  arêtes  $e_i \in E_\pi$  dont les extrémités sont respectivement dans  $U$  et  $W$ . Posons  $v_{i_0} = u$  et soient  $v_{i_0}, \dots, v_{i_0+r-1}$  les extrémités des arêtes  $e_i$  qui sont dans  $W$ .

On définit la solution  $x$  suivante :

$$x(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } e = e_i, \text{ pour } i = 1, \dots, r-1, \\ 1 & \text{pour tout } e \in T'_{i_0+j}, \text{ pour } j = 0, \dots, r-1, \\ 1 & \text{pour tout } e \in T_i, \text{ pour } i \notin \{1, \dots, p\} \setminus \{i_0, \dots, i_0 + r - 1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que  $x$  induit un sous-graphe  $k$ -arête connexe de  $\overline{G}$  et vérifie l'inégalité de SP-partition liftée à l'égalité. Soit  $\tilde{e}_i$  une arête de  $T_i, i \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i_0, \dots, i_0 + r - 1\}$ .

Considérons maintenant la solution  $x'$  telle que :

$$x'(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } e = \bar{e}, \\ 1 & \text{pour tout } e \in T_i \setminus \{\tilde{e}_i\}, \text{ pour } i \in \{i_0 - r, \dots, i_0 - 1\}, \\ 0 & \text{pour } e = \tilde{e}_i, \text{ pour } i \in \{i_0 - r, \dots, i_0 - 1\}, \\ x(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$x'$  induit un sous-graphe  $k$ -arête connexe de  $\overline{G}$  et satisfait l'inégalité de SP-partition liftée à l'égalité. On a donc  $bx = bx' = \beta$ . Par conséquent,  $bx' = bx - \sum_{i=i_0-r}^{i_0-1} + b(\bar{e})$ .

Comme  $b(\tilde{e}_i) = \rho$  pour tout  $i \in \{i_0 - r, \dots, i_0 - 1\}$ , on a que  $b(\bar{e}) = r\rho$ .

Il s'en suit que  $b(e) = \rho a(e)$  pour tout  $e \in \overline{E}$ . Comme  $k\text{ECSP}(\overline{G})$  est de pleine dimension,  $ax \geq \alpha$  est une facette de  $k\text{ECSP}(\overline{G})$ .  $\square$

## 5 Conclusion

Dans ce rapport nous avons étudié les propriétés de facette des contraintes de SP-partition pour le problème du  $k\text{ECSP}$ . En affinant les résultats de Chopra [3], de Didi Biha [1], et de Didi Biha et Mahjoub [2], nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour que les contraintes de SP-partition définissent des facettes de  $k\text{ECSP}(G)$  lorsque  $G$  est outerplanaire. Nous avons également montré que les contraintes de SP-partition, induites par des partitions  $\pi$ , ne peuvent pas définir des facettes de  $k\text{ECSP}(G)$  lorsque le graphe induit par  $\pi$  est série-parallèle et non outerplanaire.

Nous avons aussi étudié ces contraintes dans le cas des graphes quelconques et nous avons donné des conditions suffisantes pour qu'elles induisent des facettes de  $k\text{ECSP}(G)$ .

Enfin, nous avons présenté une procédure de lifting pour les contraintes de SP-partition qui permet de les étendre aux cas où le graphe induit par la partition n'est pas série-parallèle.

L'étude d'autres propriétés de facettes pour les contraintes de SP-partition ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes que nous avons obtenues peuvent permettre de développer des procédures de séparations efficaces pour ces contraintes dans le cadre d'algorithmes de coupes et branchements pour le  $k\text{ECSP}$ .

## Références

- [1] M. Didi Biha. *Graphes  $k$ -arête connexes et polyèdres*. PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1998.
- [2] M. Didi Biha and A. Ridha Mahjoub.  $k$ -edge connected subgraph polyhedra on series-parallel graphs. *Operations Research Letters*, 19 :71–78, 1996.
- [3] S. Chopra. The  $k$ -edge-connected spanning subgraph polyhedron. *SIAM J. Discret. Math.*, 7(2) :245–259, 1994.
- [4] R. J. Duffin. Topology of series parallel network. *J. Math. Anal. Appl.*, 10, 1965.