



**HAL**  
open science

## Courbes d'écoulement en géométrie Couette par une approximation de Bingham

Patrice Estellé, Arnaud Perrot, Christophe Lanos, Sofiane Amziane

► **To cite this version:**

Patrice Estellé, Arnaud Perrot, Christophe Lanos, Sofiane Amziane. Courbes d'écoulement en géométrie Couette par une approximation de Bingham. 42ème Colloque du Groupe Français de Rhéologie - Rhéologie des Systèmes Evolutifs, Oct 2007, Clermont-Ferrand, France. pp.181-185. hal-00674815

**HAL Id: hal-00674815**

**<https://hal.science/hal-00674815>**

Submitted on 28 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Courbes d'écoulement en géométrie Couette par une approximation de Bingham

P. Estellé<sup>1</sup>, A. Perrot<sup>2</sup>, C. Lanos<sup>1</sup>, S. Amziane<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LGCGM, Equipe Matériaux et Thermique de l'Habitat, IUT Rennes - <sup>2</sup> LG2M, Université de Bretagne Sud, Lorient

**Résumé :** Une méthode simple pour identifier la courbe d'écoulement d'un fluide en cisaillement dans une géométrie Couette est développée. Elle consiste à considérer le fluide en écoulement comme étant un fluide de Bingham, et à évaluer la vitesse de cisaillement caractéristique du fluide partiellement et/ou complètement cisailé. La pertinence et l'intérêt pratique de la méthode sont examinés en analysant les résultats générés par des données numériques en géométrie Couette de fluides de propriétés fixées, en variant la taille de l'entrefer, puis en l'appliquant aux données expérimentales en géométrie Couette et vane d'un fluide visqueux newtonien et d'une suspension de Carbopol.

**Mots-clé :** Rhéométrie, Couette, Vane, Modèle de Bingham, Vitesse de cisaillement, Courbe d'écoulement

## 1. Introduction

La géométrie Couette ou à cylindres coaxiaux est largement utilisée pour évaluer les courbes d'écoulement des matériaux. Dans une telle géométrie, la vitesse de cisaillement n'est pas uniforme. Les techniques de calcul de la vitesse de cisaillement à la paroi du cylindre interne reposent généralement sur des hypothèses simplificatrices liées à la taille de l'entrefer et au choix de la loi de comportement rhéologique du fluide cisailé. Des procédures mathématiques complexes ont été développées récemment pour s'affranchir de ces hypothèses [1,2]. Dans le même but, une méthode simple est ici développée pour identifier la courbe d'écoulement d'un fluide en cisaillement dans une géométrie Couette. Elle consiste à considérer localement le fluide en écoulement comme étant un fluide de Bingham, et à évaluer la vitesse de cisaillement caractéristique du fluide partiellement et/ou complètement cisailé. L'intérêt pratique de la méthode est examiné en analysant les résultats générés par des données numériques en géométrie Couette de fluides de propriétés fixées, en variant la taille de l'entrefer. Notre approche est ensuite appliquée aux données expérimentales en géométrie Couette et vane d'un fluide visqueux newtonien et d'une suspension de Carbopol.

## 2. Principe de la méthode

On considère une géométrie Couette de rayon interne  $R_b$ , de hauteur  $h$  et de rayon externe  $R_c$ . Le cylindre externe est fixe et le cylindre interne tourne avec une vitesse de rotation  $\Omega$ . Le fluide cisailé est considéré incompressible, inélastique et en écoulement adhérent à la

surface des cylindres. Les effets de bord, d'inertie ainsi que le cisaillement dans la partie basse du cylindre interne sont négligés. La contrainte de cisaillement  $\tau_b$  s'exerçant sur le cylindre interne est directement liée au couple,  $M$ , indépendamment de la nature du fluide [2] :

$$\tau_b(M) = \frac{M}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot R_b^2} \quad (1)$$

La vitesse de rotation s'exprime en fonction de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  :

$$\Omega = \int_{R_b}^{R_c} \frac{\dot{\gamma}(r)}{r} dr \quad (2)$$

Différentes approches permettent de résoudre l'équation (2) [1-4] et permettent de tracer la courbe d'écoulement à partir des équations (1) et (2). Les solutions les plus courantes, rappelées dans le tableau 1, sont les suivantes : cisaillement simple (cisaillement uniforme dans un entrefer étroit, la contrainte correspondante est moyennée sur l'entrefer), la méthode de Krieger qui tend vers la solution d'un fluide en loi puissance (si l'index  $n$  peut être évalué pour chaque valeur de contrainte), la solution newtonienne souvent utilisée par défaut et la solution de Nguyen et Boger [4] pour un fluide à seuil partiellement cisailé dans l'entrefer.

Méthode de calcul de $\dot{\gamma}$	Cisaillement simple	Solution Newtonienne	Solution en loi puissance	Solution de Nguyen et Boger
Expression de $\dot{\gamma}$	$\frac{\Omega}{\alpha - 1}$	$2\Omega \left( \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right)$	$\frac{2\Omega}{n} \frac{\alpha^{2/n}}{\alpha^{2/n} - 1}$	$2 \cdot M \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial M}$

Tableau 1 : Expressions de la vitesse de cisaillement en géométrie Couette.

Ici, on considère que le comportement rhéologique du fluide cisailé suit la loi de Bingham :

$$\tau = K + \mu \cdot \dot{\gamma} \quad \text{si } \tau > K \quad (3)$$

Dans ce cas, le fluide peut être partiellement cisailé, si  $\tau_c \leq K \leq \tau_b$ , ou complètement cisailé quand  $\tau_c > K$ .

Selon ces deux conditions, la vitesse de rotation s'exprime respectivement :

$$\Omega = \frac{K}{2 \cdot \mu} \left[ \ln(2 \cdot \pi \cdot h \cdot K \cdot R_b^2) - 1 \right] + \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot h \cdot \mu \cdot R_b^2} - \frac{K}{2 \cdot \mu} \cdot \ln(M) \quad (4)$$

$$\Omega = \frac{M}{4 \cdot \pi \cdot h \cdot \mu} \cdot \left( \frac{1}{R_b^2} - \frac{1}{R_c^2} \right) + \frac{K}{\mu} \cdot \ln\left(\frac{R_b}{R_c}\right) \quad (5)$$

L'équation (5) correspond à l'expression de Reiner-Riwlin. Ces équations, dérivées par rapport au couple, puis combinées aux équations (1) et (3), conduisent alors à deux expressions distinctes de vitesse de cisaillement [5]:

$$\dot{\gamma} = 2 \cdot M \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial M} \quad \text{si } \tau_c \leq K \leq \tau_b \quad (6)$$

$$\dot{\gamma} = 2 \cdot \frac{M \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial M}}{\left(1 - \frac{R_b^2}{R_c^2}\right)} - \frac{\Omega - M \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial M}}{\ln\left(\frac{R_b}{R_c}\right)} \quad \text{si } \tau_c > K \quad (7)$$

L'équation (6) correspond à la solution de [4] pour un fluide à seuil partiellement cisailé sur la largeur de l'entrefer. L'équation (7) permet d'estimer  $\dot{\gamma}$  pour un fluide ne présentant pas de seuil ou dans le cas d'un cisaillement complet de l'entrefer. En référence au principe des travaux virtuels, la valeur caractéristique de  $\dot{\gamma}$ , exploitée pour tracer la courbe d'écoulement, est celle pour laquelle la dissipation d'énergie est maximale dans l'entrefer. Ainsi,

$$\dot{\gamma} = \max(\text{équation (6); équation (7)}) \quad (8)$$

La contrainte de cisaillement caractéristique correspondante est la moyenne arithmétique des valeurs de contraintes obtenues pour les couples ( $\Omega$  ;  $M$ ) utilisées pour le calcul de  $\dot{\gamma}$ . En balayant alors l'ensemble des valeurs ( $\Omega$  ;  $M$ ) obtenues au cours d'un essai de type rampe, la courbe d'écoulement du fluide testé peut ainsi être construite point par point, sans connaître nécessairement le régime ou le seuil d'écoulement du fluide.

### 3. Application numérique

Notre approche est ici comparée aux solutions décrites dans le tableau 1 à partir de données synthétiques de fluides modèles en l'absence de bruit. Les fluides testés présentent successivement un comportement newtonien, en loi puissance, puis à seuil d'écoulement de type

Herschel-Bulkley et Casson. La taille de l'entrefer, définie par le rapport des rayons  $\alpha = R_c / R_b$ , varie également de 1,04, 2 puis 3. Le but est ainsi de montrer, d'une part, que la méthode proposée permet d'obtenir une courbe d'écoulement caractéristique du fluide, indépendamment du type de comportement et de la taille de l'entrefer, et d'autre part, que l'évaluation de  $\dot{\gamma}$  par l'équation (8) est pertinente. Les données numériques sont générées à partir des lois de comportement, des paramètres géométriques et rhéologiques décrits dans le tableau 2. Les valeurs de couples sont obtenues numériquement par l'équation (1). Les vitesses de rotation sont calculées analytiquement (newton et loi puissance, voir tableau 1) et numériquement par différence finies (Herschel-Bulkley et Casson, avec  $\Delta r = (R_c - R_b)/100$ ). La courbe d'écoulement obtenue pour chaque simulation est confrontée à la courbe théorique. Les résultats décrits ci-après traduisent l'erreur de calcul de la vitesse de cisaillement estimée par rapport à sa valeur théorique en fonction de la contrainte de cisaillement.

Fluide	$R_c$ (mm)	$h$ (mm)	Incrément du couple (N.m)	$K$ (Pa)	$\mu$ (Pa.s) - $\eta$ (Pa.s <sup>n</sup> )	$n$ (-)
newtonien	16	16	0.00046	-	100	-
Loi puissance	16	16	0.0001	-	50	0.3
Herschel-Bulkley	14	20	0.008	300	50	0.6
Casson	16	16	0.0005	100	1	-

Tableau 2 : Paramètres rhéologiques et géométriques utilisés pour générer les données synthétiques d'écoulement en géométrie Couette.

Comme le montre la figure 1, dans le cas d'un fluide de Newton, l'approximation de Bingham fournit une courbe d'écoulement identique à celle obtenue par la solution newtonienne pour les différents entrefers envisagés. L'erreur reste inférieure à  $5 \cdot 10^{-12}$  %.

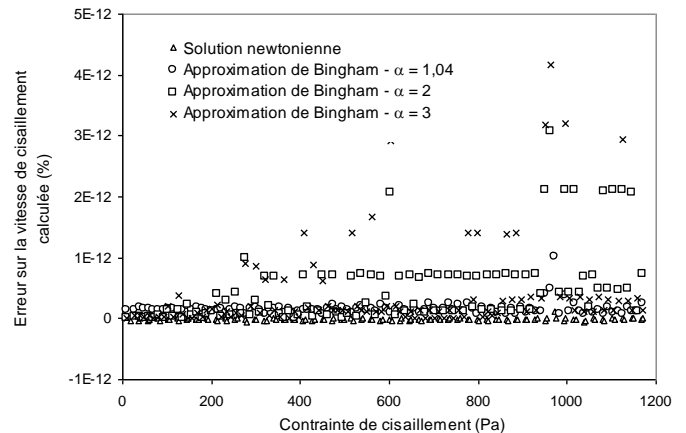


Figure 1 : Erreur sur la vitesse de cisaillement calculée pour un fluide de Newton ( $\mu=100$  Pa.s) – influence de la taille de l'entrefer.

La figure 2 décrit les résultats pour un fluide en loi puissance. La comparaison des courbes construites par l'approximation de Bingham et la solution en loi puissance (qui fournit la solution exacte) montre que notre approche est pertinente ici aussi. L'erreur calculée décroît rapidement pour de faibles valeurs de contraintes et se stabilisent à une valeur inférieure à 2% au-delà de 50 Pa quelque soit la taille de l'entrefer.

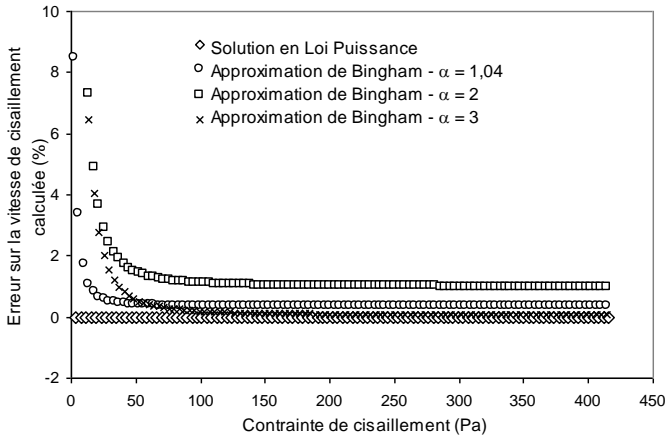
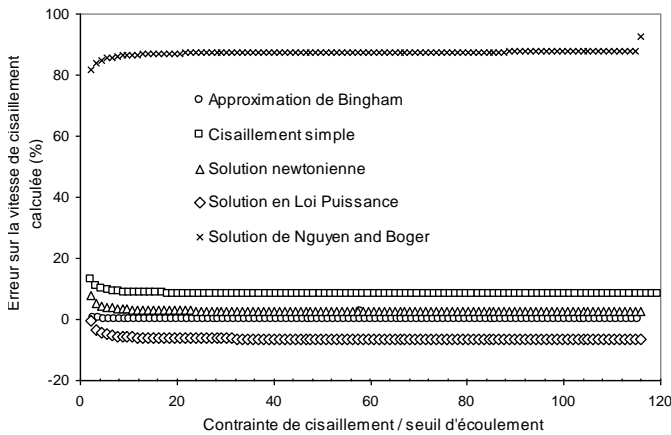
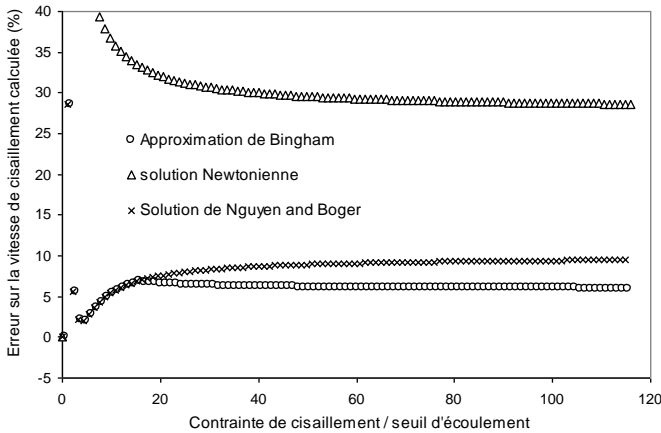


Figure 2 : Erreur sur la vitesse de cisaillement calculée pour un fluide en loi puissance ( $\eta=50 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ ,  $n=0,3$ ) – influence de la taille de l'entrefer.



(a)

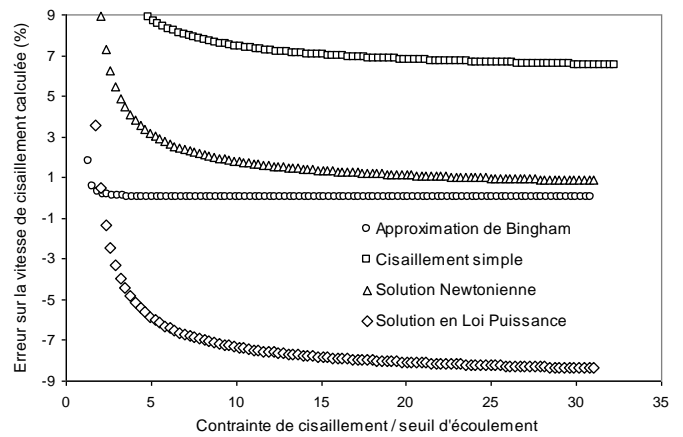


(b)

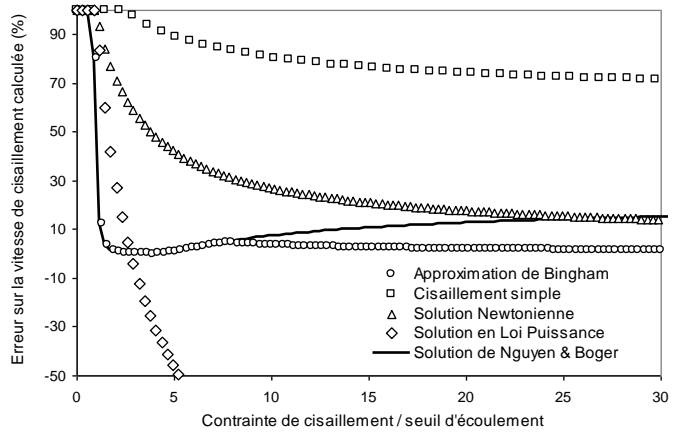
Figure 3 : Erreur sur la vitesse de cisaillement calculée pour un fluide d'Herschel-Bulkley – influence de la méthode de calcul (a)  $\alpha = 1,04$  ; (b)  $\alpha = 2$ .

Les résultats relatifs aux fluides à seuil sont décrits par les figures 3 (Herschel-Bulkley) et 4 (Casson). Pour un entrefer étroit ( $\alpha = 1,04$ ) et pour les deux types de fluides, on constate que les fluides sont rapidement complètement cisailés et que l'approximation de Bingham fournit la meilleure estimation de la courbe d'écoulement, devant la solution newtonienne.

Pour un entrefer plus important ( $\alpha = 2$ ), les fluides sont partiellement cisailés pour de faibles valeurs de contraintes. Dans ce cas, la solution de Nguyen and Boger [4] fournit la meilleure solution. Une fois la valeur de seuil d'écoulement atteinte au cylindre extérieur, les figures (3b) et (4b) montrent que l'approximation de Bingham donne une valeur de vitesse de cisaillement adéquate et que l'utilisation de certaines méthodes peut conduire à de larges erreurs. La transition entre les deux solutions constitue aussi un moyen pour évaluer a posteriori le seuil d'écoulement. Enfin, notons qu'un large entrefer ( $\alpha = 3$ ) conduit en permanence à un écoulement partiellement cisailé [5], avec une erreur inférieure à 3 %.



(a)



(b)

Figure 4 : Erreur sur la vitesse de cisaillement calculée pour un fluide de Casson – influence de la méthode de calcul (a)  $\alpha = 1,04$  ; (b)  $\alpha = 2$ .

## 4. Application expérimentale

La méthode est à présent exploitée pour dépouiller les essais en géométrie Couette d'un fluide Newtonien et d'une suspension de carbopol. Une géométrie vane, assimilable à un cylindre, est également utilisée avec un protocole de dépouillement identique. Les courbes d'écoulement identifiées selon la méthode proposée sont confrontées aux courbes générées en géométrie plan-plan.

### 4.1 Fluide newtonien

Une huile de silicone de viscosité 98,5 Pa.s à 25°C est ici utilisée. Les essais sont réalisés, à 25°C±0,1 avec un rhéomètre Malvern Gemini 150 équipé successivement d'une géométrie Couette ( $R_b = 7$  mm,  $R_c = 13,5$  mm,  $h = 21$  mm), d'une vane ( $R_b = 15$  mm,  $R_c = 40$  mm,  $h = 30$  mm), et d'une géométrie plan-plan ( $D = 40$  mm,  $h = 2$  mm). Une rampe linéaire croissante en vitesse de 0 à 160 s<sup>-1</sup> en 240 s est appliquée dans tous les cas à partir du rhéomètre. Les résultats de la figure 5 montrent que les trois essais fournissent une courbe d'écoulement similaire, traduisant bien le comportement newtonien du fluide de viscosité conforme à la valeur connue à 25°C, en particulier pour  $\dot{\gamma} < 30$ s<sup>-1</sup>. Ce résultat est identique en faisant varier les géométries [6]. On peut noter cependant l'influence du bruit sur le tracé de la courbe.

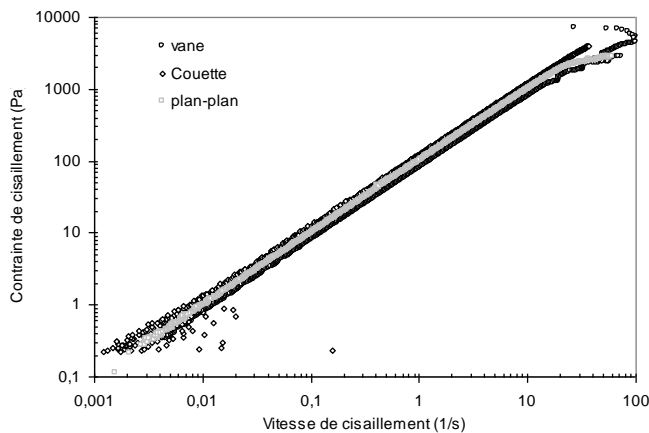


Figure 5 : Courbes d'écoulement de l'huile de silicone.

### 4.2 Fluide à seuil

Des essais sur une suspension de carbopol (0,15% ; pH 3,4), dont le protocole de préparation est décrit dans [6], sont aussi réalisés avec un rhéomètre Malvern Gemini 200 à 25°C±0,1. Les géométries exploitées, de rugosité contrôlée pour éviter le glissement, sont : géométrie Couette ( $R_b = 12,5$  mm,  $R_c = 13,5$  mm,  $h = 37,6$  mm), vane ( $R_b = 12,5$  mm,  $R_c = 22,15$  mm,  $h = 37,6$  mm), et géométrie plan-plan ( $D = 40$  mm,  $h = 1$  mm). Une rampe linéaire croissante puis décroissante en vitesse de 0 à 30 s<sup>-1</sup> est appliquée dans tous les cas à partir du rhéomètre. La figure 6 compare l'évolution de la viscosité apparente du carbopol en géométrie plan-plan et en géométrie Couette

et vane identifiée à l'aide du protocole de dépouillement proposé. Les différentes courbes sont correctement corrélées dans le domaine de vitesse de cisaillement étudié. La suspension de carbopol présente un seuil d'écoulement et un comportement rhéofluidifiant comme prédit par la littérature.

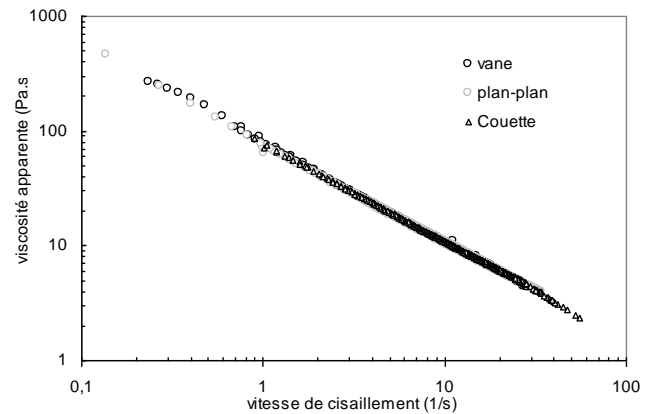


Figure 6 : Courbes d'écoulement de la suspension de carbopol.

## 5. Conclusion

La méthode proposée pour identifier la courbe d'écoulement d'un fluide quelconque en cisaillement dans une géométrie Couette ou vane est simple et efficace. Les résultats numériques et expérimentaux ont montré la pertinence de la méthode qui permet de s'affranchir de certaines limitations liées à ce type d'essai : taille de l'entrefer, choix a priori d'une loi de comportement, régime d'écoulement dans l'entrefer, évaluation préalable du seuil d'écoulement. La méthode semble opportune pour l'étude rhéologique de suspensions très concentrées de grosses particules, généralement réalisée au moyen de géométries à très large entrefer.

## Références

- [1] Yeow Y.L., Woan C.K., Pannie P.P.T., Solving the inverse problem of Couette viscometry by Tikhonov regularization, *J. Rheology* 44(6) 1335-1351 (2000)
- [2] Ancey C., Solving the Couette inverse problem using a wavelet-vaguelette decomposition, *J. Rheology* 49(2) 441-460 (2005)
- [3] Steffe J.F., *Rheological methods in food engineering process*, 2d Edition, Freeman Press, East Lansing, USA, 1996
- [4] Nguyen Q.D., Boger D.V., Characterization of yield stress fluids with concentric cylinder viscometers *Rheol. Acta* 26 508-515 (1987)
- [5] Estellé P., Lanos C., Perrot A., Processing the Couette viscometry data using a Bingham approximation in shear rate calculation, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 154 31-38 (2008).
- [6] Estellé P., Lanos C., Perrot A., Amziane S., Processing the vane shear flow data from Couette analogy, *Appl. Rheol.* 18:3, 34037 (2008).