HAL open science

Finitude géométrique en géométrie de Hilbert

Mickaël Crampon, Ludovic Marquis

▶ **To cite this version:**

Mickaël Crampon, Ludovic Marquis. Finitude géométrique en géométrie de Hilbert. Annales de l'Institut Fourier, 2014, 64 (6), pp.2299-2377. 10.5802/aif.2914 . hal-00673118v3

HAL Id: hal-00673118

https://hal.science/hal-00673118v3

Submitted on 2 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FINITUDE GÉOMÉTRIQUE EN GÉOMÉTRIE DE HILBERT

par

Mickaël Crampon & Ludovic Marquis

Avec un appendice écrit avec Constantin Vernicos

Résumé. — On étudie la notion de finitude géométrique pour certaines géométries de Hilbert définies par un ouvert strictement convexe à bord de classe $\mathcal{C}^1$.
La définition dans le cadre des espaces Gromov-hyperboliques fait intervenir l'action du groupe discret considéré sur le bord de l'espace. On montre, en construisant explicitement un contre-exemple, que cette définition doit être renforcée pour obtenir des définitions équivalentes en termes de la géométrie de l'orbifold quotient, similaires à celles obtenues par Brian Bowditch [**Bow93**] en géométrie hyperbolique.

Abstract. — We study the notion of geometrical finiteness for those Hilbert geometries defined by strictly convex sets with $\mathcal{C}^1$ boundary.
In Gromov-hyperbolic spaces, geometrical finiteness is defined by a property of the group action on the boundary of the space. We show by constructing an explicit counter-example that this definition has to be strenghtened in order to get equivalent characterizations in terms of the geometry of the quotient orbifold, similar to those obtained by Brian Bowditch [**Bow93**] in hyperbolic geometry.

Table des matières

1. Introduction 2
   1.1. Présentation des résultats 6
   1.2. Autres travaux sur le sujet 8
   1.3. Plan de l'article 8
   Remerciements 9
2. Géométrie de Hilbert 9
   2.1. Distance et volume 9
   2.2. Fonctions de Busemann et horosphères 11
   2.3. Dualité 12
   2.4. Le théorème de Benzécri 12
3. Classification des automorphismes 13
   3.1. Le théorème de classification 13
   3.2. Petites dimensions 13
   3.3. Quelques lemmes 14
   3.4. Démonstration du théorème de classification 3.3 15
   3.5. Sous-groupes nilpotents discrets de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 18
4. Les notions classiques vues dans le monde projectif 19
   4.1. Ensemble limite et domaine de discontinuité 19
   4.2. Action de Γ sur son domaine de discontinuité 20
   4.3. Domaines fondamentaux 22
5. Action géométriquement finie sur Λ_Γ et sur Ω 22
   5.1. Action affine des sous-groupes paraboliques 22
   5.2. Finitude géométrique 24
   5.3. Action géométriquement finie sur Ω et $\partial\Omega$ 26
   5.4. Dualité 27

6. Décomposition du quotient 28
6.1. Lemme de Zassenhaus-Kazhdan-Margulis 28
6.2. Décomposition du quotient 28
7. Sur les sous-groupes paraboliques 31
7.1. Quelques résultats préliminaires sur les groupes algébriques 31
7.2. Description des sous-groupes paraboliques uniformément bornés 33
7.3. Constructions des régions paraboliques standards 38
7.4. Adhérence de Zariski de Γ 42
8. Définitions équivalentes de la finitude géométrique 44
8.1. Finitude topologique 45
8.2. Parties épaisse et non cuspidale 46
8.3. Volume 47
8.4. Cas particuliers 48
9. Hyperbolicité au sens de Gromov 49
9.1. Gromov-hyperbolicité de $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ 49
9.2. Gromov-hyperbolicité du groupe Γ 52
10. Petites dimensions 53
10.1. La dimension 2 53
10.2. La dimension 3 54
10.3. Un contre-exemple 55
Appendice A. Sur le volume des pics, par les auteurs et Constantin Vernicos 57
Références 60

1. Introduction

La notion de finitude géométrique a suscité l'intérêt de nombreux géomètres dans l'étude des groupes kleinéens de dimension 3. On peut notamment citer Leon Greenberg [**Gre66**], Lars Ahlfors [**Ahl66**], Albert Marden [**Mar67, Mar74**], Alan Beardon and Bernard Maskit [**BM74**], William Thurston [**Thu**]. Six définitions équivalentes avaient alors été introduites, parmi lesquelles subsistent seulement cinq en dimension supérieure. Il revient à Brian Bowditch, dans une étude très détaillée [**Bow93**], d'avoir effectué cette extension à la dimension quelconque. Dans ce travail, Bowditch discute également de façon très complète le problème essentiel de l'existence d'un domaine fondamental ayant un nombre fini de faces : il s'agit de la sixième définition de finitude géométrique, qui n'est plus équivalente aux autres en dimension supérieure ou égale à 4.

Dans [**Bow95**], Bowditch étend ces considérations à la courbure négative pincée. Dans ce texte, nous nous proposons d'étudier, comme promis dans [**CM1**], ce qu'il se passe dans le cadre des géométries de Hilbert.

Les géométries de Hilbert peuvent être vues comme des généralisations de la géométrie hyperbolique, dont la définition se base sur le modèle de Beltrami-Klein : il s'agit d'un espace métrique (Ω, d_Ω), où Ω est un ouvert proprement convexe de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ et d_Ω la distance définie par

$$d_\Omega(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln\big([p:x:y:q]\big) \quad \text{et} \quad d_\Omega(x,x) = 0,\ x,y \in \Omega,\ x \neq y.$$

Ici, p et q sont les points d'intersection de la droite (xy) et du bord $\partial\Omega$ de Ω tels que x soit entre p et y, et y soit entre x et q (voir figure 1). Par proprement convexe, nous voulons dire que l'adhérence de Ω dans $\mathbb{P}^n$ évite au moins un hyperplan projectif ; de façon équivalente, il existe une carte affine dans laquelle Ω apparaît comme un ouvert convexe relativement compact.

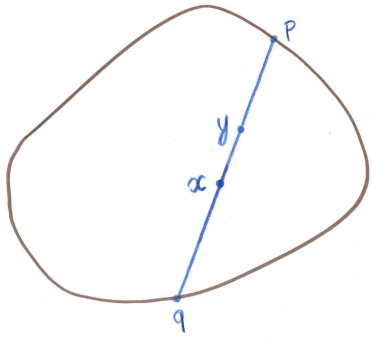

FIGURE 1. La distance de Hilbert

Ces géométries furent introduites par Hilbert comme exemples d'espaces dans lesquelles les droites sont des géodésiques. Ce qui nous intéresse ici, c'est l'étude des quotients d'une géométrie de Hilbert donnée. Il faut noter tout de suite que le groupe des transformations projectives préservant le convexe Ω, que nous noterons $\mathrm{Aut}(\Omega)$, est un sous-groupe du groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(\Omega, d_\Omega)$. On ne sait pas en général dire si ces deux groupes coïncident. Par contre, il n'est pas difficile de voir que c'est le cas dès que Ω est strictement convexe : c'est une conséquence du fait que les droites sont alors les seule géodésiques. Sinon, les seuls cas compris sont ceux des polyèdres : si Ω est un polyèdre, $\mathrm{Aut}(\Omega) = \mathrm{Isom}(\Omega, d_\Omega)$ si et seulement si Ω n'est pas un simplexe ; lorsque Ω est un simplexe, $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Isom}(\Omega, d_\Omega)$.

Les géométries de Hilbert ont connus un regain d'intérêt dans les, disons, deux dernières décennies. Pour ce qui va nous concerner ici, il convient de citer dans les rôles principaux William Goldman et Yves Benoist. L'article [**Gol90**] de Goldman de 1990 est consacré aux surfaces compactes projectives convexes, autrement dit aux quotients compacts d'une géométrie de Hilbert plane. Yves Benoist s'est lui intéressé à la situation bien plus générale d'un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ préservant un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ [**Ben00**] ; il a ensuite clarifié, dans sa série d'articles sur les convexes *divisibles*[(1)] [**Ben04**, **Ben03**, **Ben05**, **Ben06a**], le cas des quotients compacts d'une géométrie (Ω, d_Ω) par un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Dans les deux cas, notons que les auteurs restent tributaires de travaux des années 60, notamment ceux de Benzécri, Kac, Koszul et Vinberg [**Ben60**, **Kos68**, **KV67**].

Parmi les convexes divisibles, l'ellipsoïde, qui définit une géométrie hyperbolique, est un cas bien à part. En fait, un théorème d'Édith Socié-Méthou affirme que, dès que le bord du convexe Ω est de classe $\mathcal{C}^2$ à hessien défini positif, le groupe d'isométries de (Ω, d_Ω) est compact, sauf si, bien sûr, c'est un ellipsoïde [**SM02**]. Un des accomplissements des auteurs précédents est bien d'avoir montré qu'il existe malgré tout de nombreux autres convexes divisibles. Le premier exemple avait été donné par Kac et Vinberg dans les années 60 [**KV67**]. En dimension 2, le résultat de Goldman est quantitatif : l'espace des structures projectives convexes non équivalentes sur une surface de genre $g \geqslant 2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16}$, alors que l'espace des structures hyperboliques non équivalentes est lui homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6}$. En dimension plus grande, on ne dispose que de théorèmes d'existence : d'une part, il est possible dans certains cas, par des techniques de pliage, de déformer continûment une structure hyperbolique en une structure projective convexe ;

(1) Un ouvert proprement convexe est dit *divisible* lorsqu'il existe un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\Omega/_\Gamma$ soit compact. On dit alors que le groupe Γ divise le convexe Ω.

d'autre part, il existe des exemples de quotients exotiques [**Ben06b**, **Kap07**], c'est-à-dire de variétés compactes projectives strictement convexes, qui n'admettent pas de structure hyperbolique. L'étude quantitative de la dimension 2 et la construction d'exemples par pliage de structures hyperboliques ont été généralisées au cas du volume fini par le second auteur [**Mar10**, **Mara**].

Jusque-là, sans le savoir, nous n'avons parlé que de situations dans lesquelles l'ouvert convexe est strictement convexe. Rappelons le résultat suivant :

Théorème 1.1 **(Benoist [Ben04])**. — *Soit Ω un convexe divisible, divisé par $\Gamma \leqslant Aut(\Omega)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'ouvert Ω est strictement convexe ;
(ii) Le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
(iii) L'espace métrique (Ω, d_Ω) est Gromov-hyperbolique ;
(iv) Le groupe Γ est Gromov-hyperbolique.

Ce théorème a été étendu dans la prépublication [**CLT11**] au cas des convexes *quasi-divisibles*, c'est-à-dire ayant un quotient de volume fini. Cette claire dichotomie ne peut plus exister pour des quotients plus généraux et nous allons voir pourquoi.

Dans [**Ben00**], Benoist explique que, sous des hypothèses minimales, si un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ préserve un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, alors il préserve un convexe minimal Ω_{min} et un maximal Ω_{max} : tout ouvert proprement convexe préservé par Γ est coincé entre Ω_{min} et Ω_{max}. Le convexe Ω_{min} n'est rien d'autre que l'intérieur de l'enveloppe convexe $C(\Lambda_\Gamma)$ de l'ensemble limite Λ_Γ de Γ, défini comme l'adhérence des points attractifs des éléments proximaux de Γ. Le convexe Ω_{max} se déduit par dualité du convexe minimal de l'action duale de Γ.
Prenons l'exemple simple d'un sous-groupe discret Γ d'isométries du plan hyperbolique $\mathcal{E} = \mathbb{H}^2$. Dans ce cas, l'ensemble limite peut être défini dynamiquement comme l'ensemble $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma.o} \smallsetminus \Gamma.o \subset \partial\mathcal{E}$, où o est un point quelconque de $\mathcal{E}$. Lorsque l'action du groupe Γ est cocompacte ou de volume fini, l'ensemble limite est précisément $\partial\mathcal{E}$ tout entier. Cette propriété va en fait rester vraie pour une géométrie de Hilbert définie par un ouvert strictement convexe Ω : on aura ainsi $\Omega_{min} = \Omega_{max} = \Omega$, autrement dit que Γ ne préserve pas d'autre ouvert proprement convexe que Ω. C'est la propriété essentielle, que l'on va perdre pour un quotient général, qui permet d'obtenir le théorème 1.1.

En effet, considérons maintenant un sous-groupe convexe cocompact Γ, dont, disons, le quotient $\mathcal{E}/\Gamma$ est une surface de genre 1 avec une pointe (qui ressemble à une trompette). Le groupe fondamental de la pointe, isomorphe à $\mathbb{Z}$, est représenté par un élément hyperbolique $\gamma \in \Gamma$ qui correspond à la géodésique fermée à la base de la trompette. L'ensemble $C(\Lambda_\Gamma)$ est un ouvert convexe qui n'est ni strictement convexe ni à bord $\mathcal{C}^1$. L'ensemble $\partial\mathcal{E} \smallsetminus C(\Lambda_\Gamma)$ est exactement l'orbite sous Γ de l'ouvert convexe C_γ délimité par l'axe $(\gamma^+\gamma^-)$ de γ et l'arc de cercle dans $\partial\mathcal{E}$ reliant γ^+ à γ^-. Il n'est pas difficile de voir qu'on peut modifier la partie circulaire du bord de C_γ par une courbe γ-invariante de telle façon que le convexe que cette courbe définit avec l'axe de γ aient les propriétés que l'on veut : strictement convexe mais pas à bord $\mathcal{C}^1$, à bord $\mathcal{C}^1$ mais pas strictement convexe. En copiant cette "pièce" via Γ, on peut ainsi voir que le groupe Γ agit sur des ouverts convexes aux caractéristiques bien différentes, et qu'ainsi on ne peut espérer un

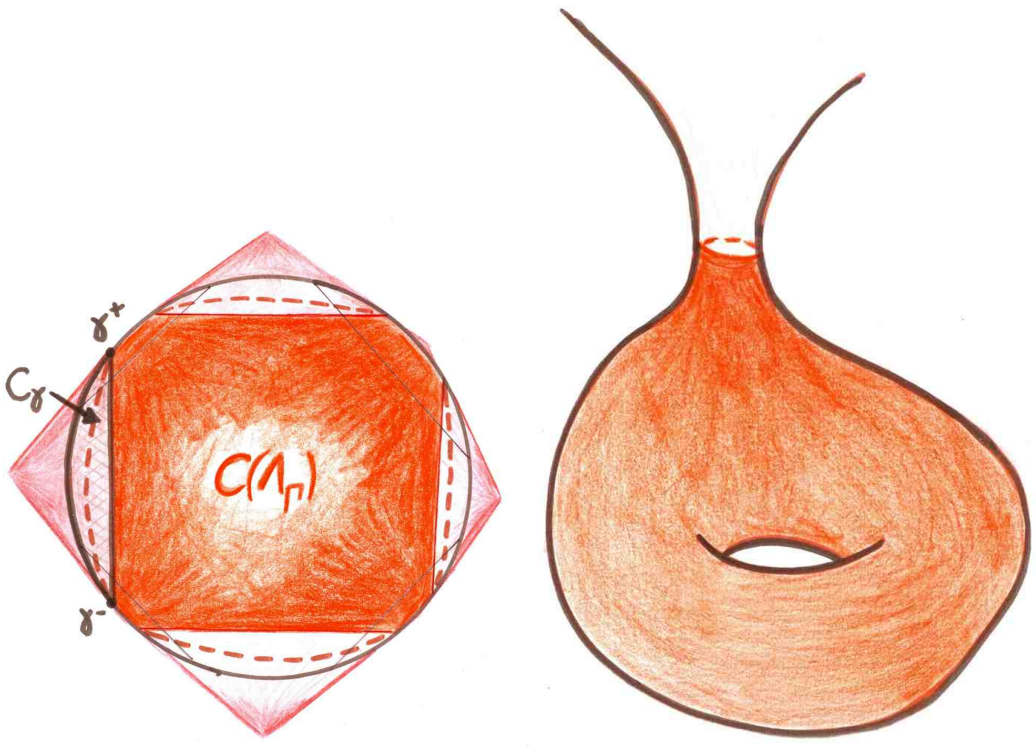

FIGURE 2. Convexe-cocompact

résultat du type du théorème 1.1. Ce qu'il est raisonnable de se demander toutefois, ce serait :

Question 1. — *Soit* Γ *un sous-groupe discret (irréductible) de* $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$. *A t-on équivalence entre les points suivants ?*

(i) Γ *préserve un ouvert strictement convexe ;*
(ii) Γ *préserve un ouvert convexe à bord* $\mathcal{C}^1$ *;*
(iii) Γ *préserve un ouvert strictement convexe à bord* $\mathcal{C}^1$.

C'est charmé par cette idée que nous allons dans cet article ne considérer que des géométries de Hilbert définies par un ouvert strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$. Il est plus agréable de travailler avec une telle géométrie, plus proche de la géométrie hyperbolique, et une réponse affirmative à la question précédente permettrait, pour des problèmes ne dépendant que du groupe Γ, de se ramener à un tel convexe. De plus, ce sont des hypothèses essentielles pour les résultats géométriques de cet article, ainsi que pour l'article [**CM3**] à venir, dans lequel nous étudierons la dynamique du flot géodésique sur certains quotients géométriquement finis.

Même si on répondait affirmativement à la question 1, cela laisserait de côté les cas où les deux propriétés, stricte convexité et bord $\mathcal{C}^1$, tombent en défaut. En fait, lorsque le convexe n'est ni strictement convexe ni à bord $\mathcal{C}^1$, le sentiment très naïf est que la géométrie de Hilbert qu'il définit a plus à voir avec la géométrie riemanienne de courbure négative *ou nulle* qu'avec la géométrie hyperbolique. Or, en géométrie riemanienne de courbure négative ou nulle, les situations peuvent être très diverses et c'est chose peu aisée voire vaine que de se mettre d'accord sur une notion de finitude géométrique.

1.1. Présentation des résultats. — Il nous a fallu un certain temps avant de trouver la bonne définition de la notion de finitude géométrique. Parmi les définitions équivalentes de Bowditch, celle qui semblait la plus simple et directe à adapter était la suivante : l'action d'un sous-groupe discret Γ sur Ω est géométriquement finie si tout point de l'ensemble limite est soit conique soit parabolique borné. C'est d'ailleurs la définition que l'on retrouve dans les travaux postérieurs de Bowditch et Yaman qui concernent des espaces plus généraux que les variétés riemanniennes de courbure négative.
Malheureusement, nous n'arrivions par à montrer que les autres définitions de Bowditch, qui font intervenir plus directement la géométrie du quotient, étaient équivalentes à la précédente. Nous n'y parvenions qu'en faisant une hypothèse supplémentaire sur les points paraboliques, que l'on devait supposer *uniformément bornés* (définition 5.12).

Le résultat est alors le suivant (on se reportera au texte pour les définitions, parties 5 et 6 essentiellement ; elles sont similaires à celles qu'on trouve en géométrie hyperbolique).

***Théorème 1.2* (Théorème 8.1).** — *Soient Ω un ouvert proprement convexe, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$, Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$, et $M = \Omega/_\Gamma$ le quotient correspondant. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(GF) Tout point de Λ_Γ est soit un point limite conique soit un point parabolique uniformément borné ;
(TF) Le quotient $\mathcal{O}_\Gamma/_\Gamma$ est une orbifold à bord qui est l'union d'un compact et d'un nombre fini de projections de régions paraboliques standards disjointes ;
(PEC) La partie épaisse du cœur convexe de M est compacte ;
(PNC) La partie non cuspidale du cœur convexe de M est compacte ;
(VF) Le 1-voisinage du cœur convexe de $\Omega/_\Gamma$ est de volume fini et le groupe Γ est de type fini.

En particulier, un tel quotient est sage *(c'est-à-dire est l'intérieur d'une orbifold compacte à bord) et par suite le groupe Γ est de présentation finie.*

Nous avons longtemps pensé que cet écart était dû à une défaillance de notre part, et qu'on devrait pouvoir enlever l'hypothèse d'uniformité. En fait, il s'avère que non :

***Proposition 1.3* (Proposition 10.6).** — *Il existe un ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{P}^4$, strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$, qui admet une action d'un sous-groupe Γ de $Aut(\Omega)$ telle que tout point de Λ_Γ est soit conique soit parabolique borné, mais pas uniformément borné.*

C'est ce qui nous a amené à introduire les définitions suivantes de finitude géométrique, qui respectent les terminologies introduites jusque-là (voir partie 5) :

Définition 1.4. — Soient Ω un ouvert proprement convexe, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$ et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

- L'action de Γ est dite géométriquement finie sur $\partial\Omega$ si tout point de l'ensemble limite est soit conique soit parabolique borné.
- L'action de Γ est dite géométriquement finie sur Ω si tout point de l'ensemble limite est soit conique soit parabolique *uniformément* borné. On dira aussi dans ce cas que le quotient $\Omega/_\Gamma$ est géométriquement fini.

Parmi les actions géométriquement finies, on distingue celles qui sont de covolume fini, et qui avaient déjà été étudiées, notamment de façon complète en dimension 2, par le second auteur :

Corollaire 1.5 **(Corollaire 8.7)**. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$ et Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *l'action de Γ sur Ω est de covolume fini ;*
- *l'action de Γ sur Ω est géométriquement finie et $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$;*
- *l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie et $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.*

D'autres résultats apparaissent au fil du texte. Une grande partie de notre travail a consisté à comprendre les bouts d'un quotient géométriquement fini, autrement dit les sous-groupes paraboliques qui apparaissent ; c'est le

Théorème 1.6 **(Corollaire 7.18)**. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$ et Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Si p est un point parabolique uniformément borné de Λ_Γ de stabilisateur $\mathcal{P} = Stab_\Gamma(p)$, alors le groupe $\mathcal{P}$ est conjugué dans $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ à un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$. En particulier, le groupe $\mathcal{P}$ est virtuellement isomorphe à $\mathbb{Z}^d$, où $1 \leqslant d \leqslant n-1$ est sa dimension cohomologique virtuelle.*

Ce résultat permet d'adapter une démonstration de Benoist dans [**Ben00**] pour obtenir le théorème suivant, qu'on trouve dans [**Ben00**] dans le cas où l'action du groupe est cocompacte :

Théorème 1.7 **(Théorème 7.28)**. — *Soit Γ un sous-groupe discret* irréductible *de $Aut(\Omega)$. Si Γ contient un sous-groupe parabolique uniformément borné de dimension cohomologique $n-1$ ou $n-2$, alors l'adhérence de Zariski de Γ est soit $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ soit conjuguée à $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$.*

Ce théorème tombe en défaut dès que l'ensemble limite ne contient pas de points paraboliques, ou que ceux-ci ne sont pas uniformément bornés. Ces contre-exemples sont directement reliés à celui que l'on construit dans la proposition 1.3.

On se rappelle que dans le théorème 1.1 de Benoist, l'existence d'un quotient compact pour un ouvert strictement strictement convexe implique que la géométrie de Hilbert qu'il définit était Gromov-hyperbolique, tout comme le groupe cocompact impliqué. Voici le pendant de ce résultat dans notre cas :

Théorème 1.8 **(Theorème 9.1)**. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$ et Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Si l'action de Γ sur Ω est géométriquement finie, alors l'espace métrique $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ est Gromov-hyperbolique et le groupe Γ est relativement hyperbolique par rapport à ses sous-groupes paraboliques maximaux.*

Remarquons bien sûr que l'espace métrique $(C(\Lambda_\Gamma), d_{C(\Lambda_\Gamma)})$ n'est pas en général Gromov-hyperbolique. En fait, ce sera le cas seulement lorsque $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$:

Corollaire 1.9 **(Corollaire 9.6)**. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$. Si Ω admet une action de covolume fini, alors l'espace métrique (Ω, d_Ω) est Gromov-hyperbolique.*

En ce qui concerne la recherche d'une action géométriquement finie sur $\partial\Omega$ qui ne le serait pas sur Ω, il convient de noter tout de suite les restrictions suivantes, qui donnent des informations sur le type d'espaces et de groupes que l'on obtient dans de tels exemples :

***Théorème 1.10* (Proposition 10.4).** — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$ et Γ un sous-groupe discret de Aut(Ω). Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action de Γ sur Ω est géométriquement finie ;
(ii) l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie et les sous-groupes paraboliques de Γ sont conjugués à des sous-groupes paraboliques de $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$;
(iii) l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie et l'espace métrique $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ est Gromov-hyperbolique.

En particulier, si $n = 2$ ou 3, l'action de Γ est géométriquement finie sur Ω si et seulement si elle l'est sur $\partial\Omega$.

Disons quelques mots sur l'exemple que nous donnons pour affirmer la proposition 1.3. Il s'agit de considérer la représentation sphérique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^5$, dont l'ensemble limite dans $\mathbb{P}^4$ est la courbe Veronese. Nous prouvons que cette action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^4$ préserve une famille $\{\Omega_r\}_{r\in[0,+\infty]}$ d'ouverts proprement convexes qui, hormis Ω_0 et Ω_∞, sont tous strictement convexes à bord $\mathcal{C}^1$. Tous nos exemples proviennent alors des images par cette représentation de réseaux de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Autres travaux sur le sujet. — Personne encore ne s'était encore intéressé à la notion de finitude géométrique en géométrie de Hilbert mais d'autres travaux ont été proposés récemment sur les quotients non compacts de géométries de Hilbert. Nous faisons principalement référence à l'article de Suhyoung Choi [**Cho10**] et celui de Daryl Cooper, Darren Long et Stephan Tillmann [**CLT11**].

Choi a une approche différente qui consiste à partir de la variété ou de l'orbifold et de chercher ce qu'implique l'existence d'une structure projective (strictement) convexe. Il s'intéresse également à l'espace des modules de telles structures et il n'est pas clair que les résultats obtenus puissent s'appliquer directement dans les cas considérés ici ; il semble que cela reste dépendant de la question 1.

Dans [**CLT11**], les auteurs font des hypothèses moins restrictives sur l'ouvert convexe considéré. C'est ainsi, par exemple, qu'en s'affranchissant de l'hypothèse de régularité $\mathcal{C}^1$, ils peuvent donner la version correspondante du théorème 1.1 de Benoist dans le cas d'une action de covolume fini. Cela aurait ici compliqué et dévié le propos de prendre en compte des cas plus généraux, et nous l'avons glissé, encore une fois, dans la question 1. Notons que notre travail présente quelques points communs, ce qui n'est pas étonnant, avec [**CLT11**]. En particulier, le lemme 7.12 apparaît aussi dans [**CLT11**], encore une fois avec l'hypothèse de régularité en moins. Des éléments de la partie 6 y sont aussi présents.

1.3. Plan de l'article. — Terminons cette introduction en expliquant où l'on trouvera quoi. Après des rappels de géométrie de Hilbert, nous classifions et décrivons dans la section 3 les automorphismes d'une géométrie de Hilbert définie par un ouvert strictement convexe (et à bord $\mathcal{C}^1$). C'est la classification classique, selon la distance de translation, entre isométrie hyperbolique, parabolique et elliptique, qu'on trouve en géométrie hyperbolique ou de courbure négative.
La quatrième partie s'intéresse au bord $\partial\Omega$, aux points de l'ensemble limite Λ_Γ, et à l'action du groupe Γ sur son ensemble limite et son domaine de discontinuité $\partial\Omega \smallsetminus \Lambda_\Gamma$. L'ouvert convexe Ω est à partir d'ici supposé strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$ mais le groupe Γ est un sous-groupe discret quelconque de $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

On trouve les définitions de finitude géométrique dans la partie 5, dans laquelle on justifie notre terminologie en faisant référence à celle qui a été employée par d'autres auteurs.
Dans la section 6, nous rappelons le lemme de Margulis, que nous avons prouvé dans [**CM1**], et en tirons les conséquences sur la géométrie d'un quotient $\Omega/_\Gamma$ d'une géométrie de Hilbert.
La section 7 étudie plus en détail les groupes paraboliques. C'est avec la section suivante le cœur de ce travail. On y prouve les théorèmes 1.6 et 1.7, ainsi que d'autres résultats concernant l'action des groupes paraboliques qui nous seront utiles ensuite.
La section 8 est consacrée à la démonstration du théorème 1.2. On y trouve aussi les descriptions des actions convexes-cocompactes et de covolume fini.
Nous démontrons le théorème 1.8, qui concerne les propriétés d'hyperbolicité métrique, dans la section 9. La dernière section permet elle de faire la distinction entre les deux notions de finitude géométrique que nous avons introduites, sur Ω et $\partial\Omega$. Nous montrons qu'elles sont en fait équivalentes en dimension 2 et 3, puis construisons un exemple, en dimension 4, d'une action géométriquement finie sur $\partial\Omega$ mais pas sur Ω.
En annexe, nous démontrons un petit résultat concernant le volume des pics, que nous espérons pouvoir généraliser dans un prochain travail ; il s'agit d'un travail en commun avec Constantin Vernicos.

Remerciements. — Profitons-en donc pour remercier Constantin pour son aide et son intérêt. Nous tenons également à remercier Yves Benoist, Serge Cantat, Françoise Dal'bo et Patrick Foulon dont les discussions et les connaissances ne sont pas pour rien dans ce travail.
Le premier auteur est financé par le programme FONDECYT N° 3120071 de la CONICYT (Chile).

2. Géométrie de Hilbert

Cette partie constitue une introduction très rapide à la géométrie de Hilbert. Pour une introduction plus complète, on pourra lire [**Ver05**, **dlH93**] ou les livres [**Bus55**, **BK53**].

2.1. Distance et volume. — Une *carte affine* A de $\mathbb{P}^n$ est le complémentaire d'un hyperplan projectif. Une carte affine possède une structure naturelle d'espace affine. Un ouvert Ω de $\mathbb{P}^n$ différent de $\mathbb{P}^n$ est *convexe* lorsqu'il est inclus dans une carte affine et qu'il est convexe dans cette carte. Un ouvert convexe Ω de $\mathbb{P}^n$ est dit *proprement convexe* lorsqu'il existe une carte affine contenant son adhérence $\overline{\Omega}$. Autrement dit, un ouvert convexe est proprement convexe lorsqu'il ne contient pas de droite affine. Un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^n$ est dit *strictement convexe* lorsque son bord $\partial\Omega$ ne contient pas de segment non trivial.

Hilbert a introduit sur un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^n$ la distance qui porte aujourd'hui son nom. Pour $x \neq y \in \Omega$, on note p, q les points d'intersection de la droite (xy) et du bord $\partial\Omega$ de Ω, de telle façon que x soit entre p et y, et y entre x et q (voir figure 3). On pose

$$d_\Omega(x,y) = \frac{1}{2}\ln\big([p:x:y:q]\big) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|py|\cdot|qx|}{|px|\cdot|qy|}\right) \quad \text{et} \quad d_\Omega(x,x) = 0,$$

où

1. la quantité $[p:x:y:q]$ désigne le birapport des points p, x, y, q ;

2. $|\cdot|$ est une norme euclidienne quelconque sur une carte affine A qui contient l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω.

Le birapport étant une notion projective, il est clair que d_Ω ne dépend ni du choix de A, ni du choix de la norme euclidienne sur A.

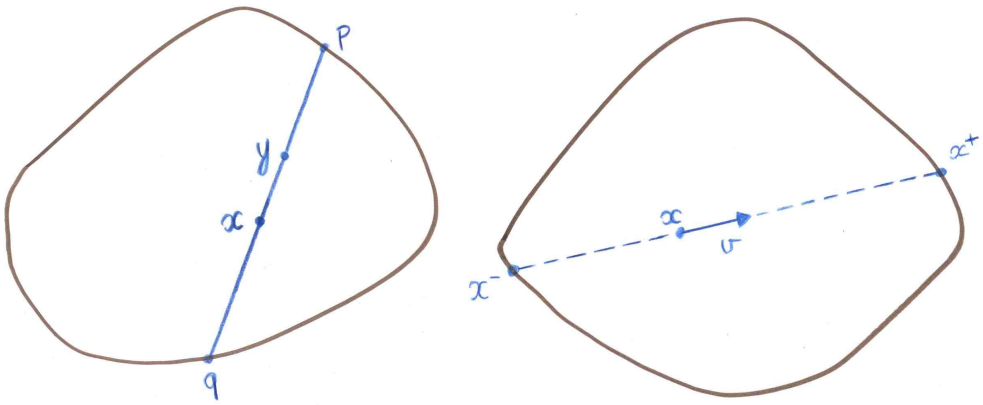

FIGURE 3. La distance de Hilbert et la norme de Finsler

Fait. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$.*

1. *d_Ω est une distance sur Ω ;*
2. *(Ω, d_Ω) est un espace métrique complet ;*
3. *La topologie induite par d_Ω coïncide avec celle induite par $\mathbb{P}^n$;*
4. *Le groupe $Aut(\Omega)$ des transformations projectives de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préservent Ω est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui agit par isométries sur (Ω, d_Ω). Il agit donc proprement sur Ω.*

La distance de Hilbert d_Ω est induite par une structure finslérienne sur l'ouvert Ω. On choisit une carte affine A et une métrique euclidienne $|\cdot|$ sur A pour lesquelles Ω apparaît comme un ouvert convexe borné. On identifie le fibré tangent $T\Omega$ de Ω à $\Omega \times A$. Soient $x \in \Omega$ et $v \in A$, on note $x^+ = x^+(x, v)$ (resp. x^-) le point d'intersection de la demi-droite définie par x et v (resp $-v$) avec $\partial\Omega$ (voir figure 3). On pose

$$F(x, v) = \frac{|v|}{2}\Big(\frac{1}{|xx^-|} + \frac{1}{|xx^+|}\Big),$$

quantité indépendante du choix de A et de $|\cdot|$, puisqu'on ne considère que des rapports de longueurs.

Fait. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ et A une carte affine qui contient $\overline{\Omega}$. La distance induite par la métrique finslérienne F est la distance d_Ω. Autrement dit on a les formules suivantes :*

- $F(x, v) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} d_\Omega(x, x + tv)$, *pour $v \in A$;*
- $d_\Omega(x, y) = \inf \displaystyle\int_0^1 F(\dot\sigma(t))\, dt$, *où l'infimum est pris sur les chemins σ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\sigma(0) = x$ et $\sigma(1) = y$.*

Il y a plusieurs manières naturelles. de construire un volume pour une géométrie de Finsler, la définition riemannienne acceptant plusieurs généralisations. Nous travaillerons avec le volume de Busemann, noté Vol_Ω.
Pour le construire, on se donne une carte affine A et une métrique euclidienne $|\cdot|$ sur A pour lesquelles Ω apparaît comme un ouvert convexe borné. On note $B(T_x\Omega) = \{v \in T_x\Omega \,|\, F(x,v) < 1\}$ la boule de rayon 1 de l'espace tangent à Ω en x, Vol la mesure de Lebesgue sur A associée à $|\cdot|$ et $v_n = \mathrm{Vol}(\{v \in A \,|\, |v| < 1\})$ le volume de la boule unité euclidienne en dimension n.

Pour tout borélien $\mathcal{A} \subset \Omega \subset A$, on pose :

$$\mathrm{Vol}_\Omega(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{v_n}{\mathrm{Vol}(B(T_x\Omega))}\, d\mathrm{Vol}(x)$$

Là encore, la mesure Vol_Ω est indépendante du choix de A et de $|\cdot|$. En particulier, elle est préservée par le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

La proposition suivante permet de comparer deux géométries de Hilbert entre elles.

Proposition 2.1. — *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts proprement convexes de $\mathbb{P}^n$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$.*

- *Les métriques finslériennes F_1 et F_2 de Ω_1 et Ω_2 vérifient : $F_2(w) \leqslant F_1(w)$, $w \in T\Omega_1 \subset T\Omega_2$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $x^+_{\Omega_1}(w) = x^+_{\Omega_2}(w)$ et $x^-_{\Omega_1}(w) = x^-_{\Omega_2}(w)$.*
- *Pour tous $x, y \in \Omega_1$, on a $d_{\Omega_2}(x,y) \leqslant d_{\Omega_1}(x,y)$.*
- *Les boules métriques vérifient, pour tout $x \in \Omega_1$ et $r > 0$, $B_{\Omega_1}(x,r) \subset B_{\Omega_2}(x,r)$, avec égalité si et seulement si $\Omega_1 = \Omega_2$. De même, $B(T_x\Omega_1) \subset B(T_x\Omega_2)$.*
- *Pour tout borélien $\mathcal{A}$ de Ω_1, on a $Vol_{\Omega_2}(\mathcal{A}) \leqslant Vol_{\Omega_1}(\mathcal{A})$.*

2.2. Fonctions de Busemann et horosphères. — Nous supposons dans ce paragraphe que l'ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^n$ est strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$. Dans ce cadre, il est possible de définir les fonctions de Busemann et les horosphères de la même manière qu'en géométrie hyperbolique, et nous ne donnerons pas de détails.

Pour $\xi \in \partial\Omega$ et $x \in \Omega$, notons $c_{x,\xi} : [0,+\infty) \longrightarrow \Omega$ la géodésique issue de x et d'extrémité ξ, soit $c_{x,\xi}(0) = x$ et $c_{x,\xi}(+\infty) = \xi$. La *fonction de Busemann* basée en $\xi \in \partial\Omega$ $b_\xi(.,.) : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$b_\xi(x,y) = \lim_{t\to+\infty} d_\Omega(y, c_{x,\xi}(t)) - t = \lim_{z\to\xi} d_\Omega(y,z) - d_\Omega(x,z),\ x,y \in \Omega.$$

L'existence de ces limites est due aux hypothèses de régularité faites sur Ω. Les fonctions de Busemann sont de classe $\mathcal{C}^1$.

L'horosphère basée en $\xi \in \partial\Omega$ et passant par $x \in \Omega$ est l'ensemble

$$\mathcal{H}_\xi(x) = \{y \in \Omega \mid b_\xi(x,y) = 0\}.$$

L'horoboule basée en $\xi \in \partial\Omega$ et passant par $x \in \Omega$ est l'ensemble

$$H_\xi(x) = \{y \in \Omega \mid b_\xi(x,y) < 0\}.$$

L'horoboule basée en $\xi \in \partial\Omega$ et passant par $x \in \Omega$ est un ouvert strictement convexe de Ω, dont le bord est l'horosphère correspondante, qui est elle une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω.

Dans une carte affine A dans laquelle Ω apparaît comme un ouvert convexe relativement compact, on peut, en identifiant $T\Omega$ avec $\Omega \times A$, construire géométriquement l'espace tangent à $\mathcal{H}_\xi(x)$ en x : c'est le sous-espace affine contenant x et l'intersection $T_\xi\partial\Omega \cap T_\eta\partial\Omega$ des espaces tangents à $\partial\Omega$ en ξ et $\eta = (x\xi) \cap \partial\Omega \smallsetminus \{\xi\}$.
On peut voir que que l'horoboule et l'horosphère basées en $\xi \in \partial\Omega$ et passant par $x \in \Omega$ sont les limites des boules et des sphères métriques centrées au point $z \in \Omega$ et passant par x lorsque z tend vers ξ.

2.3. Dualité. — À l'ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^n$ est associé l'ouvert proprement convexe dual Ω^* : on considère un des deux cônes $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ au-dessus de Ω, et son dual

$$C^* = \{f \in (\mathbb{R}^{n+1})^*,\ \forall x \in C,\ f(x) > 0\}.$$

Le convexe Ω^* est par définition la trace de C^* dans $\mathbb{P}((\mathbb{R}^{n+1})^*)$.

Le bord de $\partial\Omega^*$ est facile à comprendre, car il s'identifie à l'ensemble des hyperplans tangent à Ω. En effet, un hyperplan tangent T_x à $\partial\Omega$ en x est la trace d'un hyperplan H_x de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'ensemble des formes linéaires dont le noyau est H_x forme une droite de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$, dont la trace x^* dans $\mathbb{P}((\mathbb{R}^{n+1})^*)$ est dans $\partial\Omega^*$. Il n'est pas dur de voir qu'on obtient ainsi tout le bord $\partial\Omega^*$.
Cette remarque permet de voir que le dual d'un ouvert strictement convexe a un bord de classe C^1, et inversement. En particulier, lorsque Ω est strictement convexe et que son bord est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui est le cas que nous étudierons, on obtient une involution continue $x \longmapsto x^*$ entre les bords de Ω et Ω^*.

Étant donné un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Aut}(\Omega)$, on en déduit aussi une action de Γ sur le convexe dual Ω^* : pour $f \in C^*$ et $\gamma \in \Gamma$,

$$(\gamma \cdot f)(x) = f(\gamma^{-1}x),\ x \in C.$$

Le sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega^*)$ ainsi obtenu sera noté Γ^*. Bien entendu, on a $(\Omega^*)^* = \Omega$ et $(\Gamma^*)^* = \Gamma$.

2.4. Le théorème de Benzécri. — On définit l'espace $X^\bullet$ des convexes marqués comme l'ensemble suivant :

$$X^\bullet = \{(\Omega, x) \mid \Omega \text{ est un ouvert proprement convexe de } \mathbb{P}^n \text{ et } x \in \Omega\}$$

muni de la topologie de Hausdorff héritée par la distance canonique sur $\mathbb{P}^n$.
Le théorème suivant a dejà prouvé maintes fois son utilité.

***Théorème 2.2* (Jean-Paul Benzécri [Ben60]).** — *L'action de* $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *sur* $X^\bullet$ *est propre et cocompacte.*

On pourra trouver une preuve en anglais de ce théorème dans les notes de cours de William Goldman [Gol10].

3. Classification des automorphismes

3.1. Le théorème de classification. —

Définition 3.1. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. On appelle *distance de translation de* γ la quantité $\tau(\gamma) = \inf_{x\in\Omega} d_\Omega(x, \gamma \cdot x)$.

Définition 3.2. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. On dira que γ est :

1. *hyperbolique* lorsque $\tau(\gamma) > 0$ et cet infimum est atteint ;
2. *quasi-hyperbolique* lorsque $\tau(\gamma) > 0$ et cet infimum n'est pas atteint ;
3. *elliptique* lorsque $\tau(\gamma) = 0$ et cet infimum est atteint, autrement dit γ fixe un point de Ω ;
4. *parabolique* lorsque $\tau(\gamma) = 0$ et cet infimum n'est pas atteint.

Théorème 3.3. — *Soient Ω un ouvert strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{P}^n$ et $\gamma \in$ Aut(Ω). On est dans l'un des trois cas exclusifs suivants :*

1. *L'automorphisme γ est elliptique.*
2. *L'automorphisme γ est hyperbolique. Il a exactement deux points fixes $p^+, p^- \in \partial\Omega$, l'un répulsif et l'autre attractif : la suite $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{p^-\}$ vers p^+, et la suite $(\gamma^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{p^+\}$ vers p^-.*
3. *L'automorphisme γ est parabolique. Il a exactement un point fixe $p \in \partial\Omega$ et préserve toute horosphère basée en p. De plus, la famille $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{p\}$ vers p. Mais p n'est pas un point attractif au sens de la remarque ci-dessous.*

En particulier, l'automorphisme γ n'est pas quasi-hyperbolique.

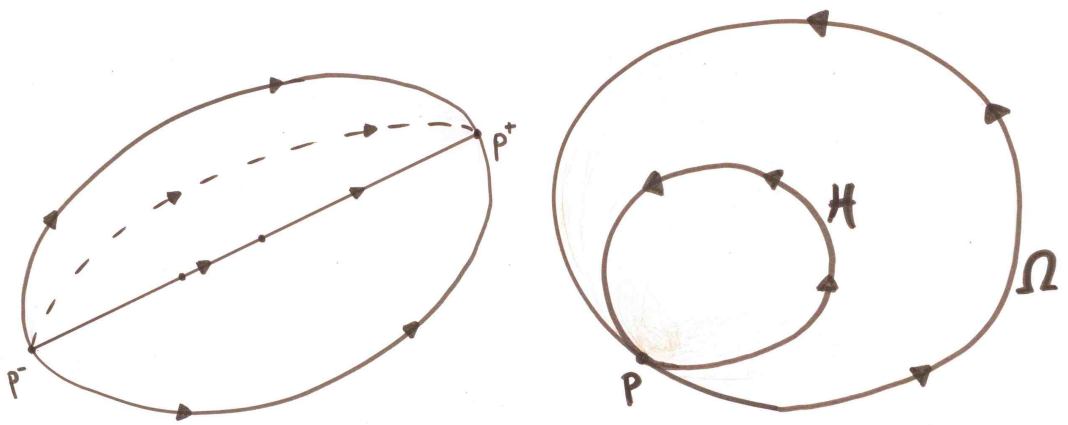

FIGURE 4. Isométries hyperbolique et parabolique

Remarque 3.4. — Un point x est dit *attractif* pour un homéomorphisme γ lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x tel que $(\gamma^n(\mathcal{U}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le singleton $\{x\}$ en décroissant. Un point est *répulsif* pour un homéomorphisme γ s'il est attractif pour γ^{-1}.

3.2. Petites dimensions. —

Dimension 1. — Le lemme suivant est un exercice laissé au lecteur.

Lemme 3.5. — *Tout ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^1$ est projectivement équivalent à $\Omega_0 = \mathbb{R}_+^*$. De plus, $Aut(\Omega_0) = \mathbb{R}_+^*$ via l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même par homothétie.*

Remarque 3.6. — L'action par homothétie γ de rapport λ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une action par translation de force $\ln(\lambda)$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $d_{\mathbb{R}_+^*}(x, \gamma \cdot x) = \ln(\lambda)$.

Dimension 2. — On pourra trouver dans [**Cho94**, **Marb**] une classification complète des automorphismes des ouverts proprement convexes de $\mathbb{P}^2$. On ne donne ici que le lemme nécessaire pour le théorème 3.3.

***Lemme 3.7* (Proposition 2.9 de [Marb]).** — *Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$. S'il existe un automorphisme $\gamma \in Aut(\Omega)$ qui possède trois points fixes distincts sur $\partial\Omega$ alors le bord $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω contient deux segments distincts et non triviaux.*

3.3. Quelques lemmes. — Sur l'adhérence $\overline{\Omega}$ de tout ouvert proprement convexe Ω, on peut introduire la relation d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & x \sim_\Omega y \\ \Leftrightarrow\ & \text{le segment } [x, y] \text{ peut se prolonger strictement} \\ & \text{à ses deux extrémités et rester dans } \overline{\Omega} \\ \Leftrightarrow\ & \text{les points } x \text{ et } y \text{ sont dans la même facette de } \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

On appelle ainsi *facette* les classes de cette relation d'équivalence. Le *support* d'une facette est l'espace projectif qu'elle engendre. On remarquera que les facettes de $\overline{\Omega}$ sont des ouverts proprement convexes de leur support. Lorsqu'une facette est un singleton $\{p\}$, le point p est dit *extrémal*.

Lemme 3.8. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de points de Ω telles que :*

1. *la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x_\infty \in \partial\Omega$;*
2. *la suite $(d_\Omega(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ;*
3. *le point x_∞ est un point extrémal de Ω.*

Alors, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point $x_\infty \in \partial\Omega$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition suivante 3.9 qui est démontré dans [**Mara**]. □

Proposition 3.9. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ et x_∞ un point de $\partial\Omega$. On note S la facette de $\overline{\Omega}$ contenant x_∞ et E son support.*

Pour toute suite de points (x_n) de Ω et tout réel $R > 0$, si la suite (x_n) tend vers x_∞ alors la suite $(B_{x_n}^\Omega(R))$ converge vers la boule $B_{x_\infty}^S(R)$ pour la distance de Hausdorff induite par la distance canonique d_{can} de $\mathbb{P}^n$ (voir figure 5).

Lemme 3.10. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et $\gamma \in Aut(\Omega)$. S'il existe un point $x \in \Omega$ tel que la suite $(\gamma^n \cdot x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point extrémal $p \in \partial\Omega$, alors la suite $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers p.*

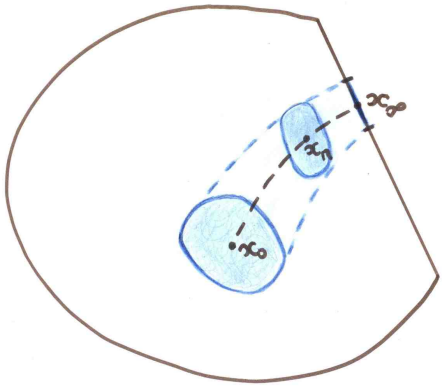

FIGURE 5. Dégénérescence des boules

Démonstration. — Commençons par montrer que la suite $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers p sur Ω. Soit $y \in \Omega$. Il suffit d'appliquer le lemme 3.8 précédent aux suites $x_n = \gamma^n \cdot x$ et $y_n = \gamma^n \cdot y$. La suite $(d_\Omega(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien majorée puisque, γ étant une isométrie, elle est constante égale à $d_\Omega(x, y)$.
On obtient la convergence uniforme sur les compacts pour la même raison. En effet, comme les $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des isométries, elles forment en particulier une famille équicontinue d'applications. □

Lemme 3.11. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe. Tout point d'accumulation dans $\partial\Omega$ de la suite $(\gamma^n \cdot x)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est un point extrémal de Ω est un point fixe de γ.*

Démonstration. — Soit p un point d'accumulation de la suite $(\gamma^n \cdot x)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est dans $\partial\Omega$. Il existe une extractrice $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{i\to\infty} \gamma^{n_i} \cdot x = p$. Le lemme 3.8 montre que la suite $(\gamma^{1+n_i} \cdot x)$ converge vers p car p est extrémal. L'application γ est continue sur $\mathbb{P}^n \supset \overline{\Omega}$, il vient que $\gamma(p) = p$. □

3.4. Démonstration du théorème de classification 3.3. — Nous aurons besoin de la proposition suivante :

***Proposition 3.12* (Lemme 3.2 de [Ben05]).** — *Si un élément $\gamma \in \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ préserve un ouvert proprement convexe alors le rayon spectral $\rho(\gamma)$ (c'est-à-dire le module de la plus grande valeur propre de γ) est une valeur propre dont la droite propre appartient à $\overline{\Omega}$. En particulier, tout automorphisme d'un ouvert proprement convexe possède un point fixe dans $\overline{\Omega}$.*

Démonstration du théorème 3.3. — D'après la proposition 3.12, l'homéomorphisme $\gamma : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ possède un point fixe dans $\overline{\Omega}$. S'il existe un point $x \in \Omega$ fixé par γ, alors γ est elliptique et il n'y a rien à montrer. On peut donc supposer que tout point fixe de γ est dans $\partial\Omega$. Nous allons à présent distinguer 3 cas.

1. Il existe au moins trois points distincts $x, y, z \in \partial\Omega$ fixés par γ.
2. Il existe exactement deux points distincts $x, y \in \partial\Omega$ fixés par γ.
3. L'automorphisme γ fixe un et un seul point de $\partial\Omega$.

Commençons par montrer que le premier cas est exclu. Les points x, y, z ne sont pas alignés car le convexe Ω est strictement convexe. Le plan projectif P engendré par les points x, y, z est préservé par γ, tout comme l'ouvert proprement convexe $P \cap \Omega$ de P.

Comme P est un espace projectif de dimension 2, le lemme 3.7 montre que le bord du convexe $P \cap \Omega$ contient un segment non trivial. Par conséquent, Ω n'est pas strictement convexe, ce qui contredit l'hypothèse.

Si on est dans le second cas alors le segment ouvert $s =]x, y[$ de $\overline{\Omega}$ est préservé par γ et inclus dans Ω puisque Ω est strictement convexe. Le lemme 3.5 montre que l'élément γ agit comme une translation sur s et que l'un des points x, y est attractif pour l'action de γ sur s et l'autre est répulsif. On note p^+ l'attractif et p^- le répulsif. Le lemme 3.10 montre que $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers p^+, et la suite $(\gamma^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers p^-. Montrons la convergence sur les compacts de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{p^-\}$. On se donne un compact K de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{p^-\}$ et on choisit un hyperplan H de Ω qui sépare p^- de K. Les convexes $\gamma^n(H) \cap \Omega$ convergent vers p^+ et donc K aussi. On procède de la même façon avec p^-.
Il nous reste à montrer qu'un tel élément est hyperbolique. Pour cela, on va montrer que pour tout $b \in \Omega \smallsetminus s$, et pour tout point $a \in s$, $d_\Omega(b, \gamma b) > d_\Omega(a, \gamma a)$. Sur le segment ouvert s, l'élément γ agit comme une translation, la quantité $d_\Omega(a, \gamma a)$ ne dépend donc pas du point $a \in s$. On note H^+ (resp. H^-) l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en p^+ (resp. p^-). Soit H_b l'hyperplan passant par $H^+ \cap H^-$ et le point b. On note a l'unique point de l'intersection $H_b \cap s$. La distance de Hilbert est définie à l'aide de birapports et par conséquent on a : $d_\Omega(a, \gamma(a)) = \frac{1}{2}\ln([H^- : H_b : \gamma(H_b) : H^+])$. De plus, comme l'ouvert Ω est strictement convexe, on a $[H^- : H_b : \gamma(H_b) : H^+] < [q_b : b : \gamma(b) : p_b]$, où q_b, p_b sont les points d'intersections de la droite $(b\,\gamma(b))$ avec $\partial\Omega$, tels que $\gamma(b)$ soit entre b et p_b (voir figure 6). L'infimum de la distance de translation de γ est donc atteint par tout point de s et seulement par les points de s. En particulier, l'automorphisme γ n'est pas quasi-hyperbolique.

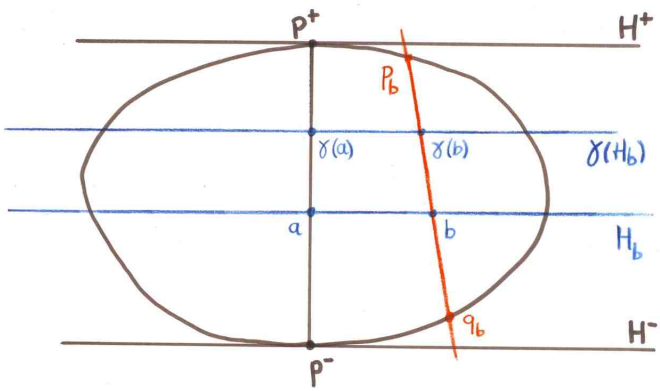

FIGURE 6. L'automorphisme γ est hyperbolique

Enfin, si l'automorphisme γ fixe un et un seul point p de $\partial\Omega$, le lemme 3.11 montre que pour tout point $x \in \Omega$, le seul point d'accumulation de la bi-suite $(\gamma^n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'unique point fixe de γ. Par conséquent d'après le lemme 3.10, la bi-suite $(\gamma^n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge vers p uniformément sur les compacts de Ω. Un raisonnement analogue au précédent montre que la convergence a lieu sur les compacts de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{p\}$.
Montrons maintenant que $\tau(\gamma) = 0$. Pour cela, on se donne un point $x \in \Omega$ et une suite

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de la demi-droite $[xp[$ qui converge vers p. La suite de points $(\gamma x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc sur la demi-droite $[\gamma x\ p[$ et converge vers p. La suite des droites $(x_n\ \gamma x_n)$ converge vers la droite intersection du plan projectif engendré par $p, x, \gamma x$ et de l'hyperplan tangent à Ω en p. Comme le bord du convexe est de classe $\mathcal{C}^1$, on en conclut que $d_\Omega(x_n, \gamma x_n)$ tend vers 0.

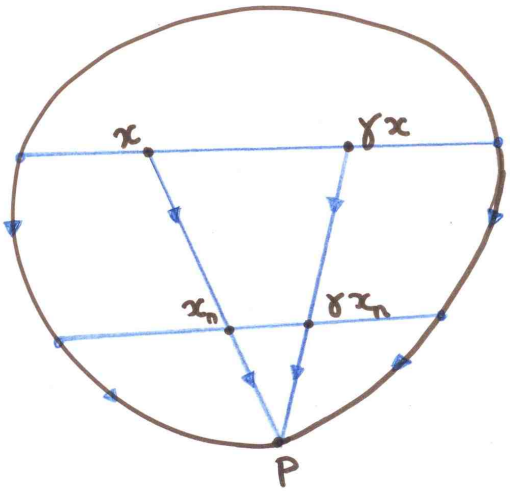

FIGURE 7. La distance de translation est nulle

Il reste à montrer que γ préserve toute horosphère basée en p. Voyons d'abord que les fonctions de Busemann basées en p sont invariantes par γ : pour tous $o, x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} b_p(\gamma o, \gamma x) = \lim_{z\to p} d_\Omega(\gamma o, z) - d_\Omega(\gamma x, z) &= \lim_{z\to p} d_\Omega(\gamma o, \gamma z) - d_\Omega(\gamma x, \gamma z) \\ &= \lim_{z\to p} d_\Omega(o, z) - d_\Omega(x, z) \\ &= b_p(o, z), \end{aligned}$$

puisque, si z tend vers p, γz également. Ainsi, pour tout $x \in \Omega$,

$$\mathcal{H}_p(\gamma x) = \{y \in \Omega,\ b_p(\gamma x, y) = 0\} = \{y \in \Omega,\ b_p(x, \gamma^{-1} y) = 0\} = \gamma H_p(x);$$

autrement dit, γ préserve l'ensemble des horosphères basées en p. Maintenant, pour tous $x, y \in \Omega$, on a

$$b_p(x, \gamma x) = b_p(x, y) + b_p(y, \gamma y) + b_p(\gamma y, \gamma x) = b_p(y, \gamma y) := a \in \mathbb{R}.$$

Or, $|b_p(x, gx)| \leqslant d_\Omega(x, gx)$, ce qui implique que pour tout $x \in \Omega$, $d_\Omega(x, \gamma x) \geqslant |a|$. De $\tau(g) = 0$, on déduit que $a = 0$, c'est-à-dire que $\gamma x \in \mathcal{H}_p(x)$. □

En fait, la classification du théorème 3.3 reste valable lorsque l'ouvert est seulement supposé strictement convexe. Pour montrer que la distance de translation d'un automorphisme parabolique γ est nulle, on utilise alors le lemme suivant, dû à McMullen, et le fait que le rayon spectral de γ est nécessairement 1 (sinon, γ aurait plus d'un point fixe). Pour des résultats plus généraux, on pourra consulter [**CLT11**].

Lemme 3.13 **(Curtis McMullen, Théorème 2.1 de [McM02])**
Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ et $\gamma \in Aut(\Omega)$. On a

$$\frac{1}{2}\ln\left(\max\left(\rho(\gamma),\rho(\gamma^{-1}),\rho(\gamma)\rho(\gamma^{-1})\right)\right) \leqslant \tau(\gamma) \leqslant \ln\left(\max\left(\rho(\gamma),\rho(\gamma^{-1})\right)\right)$$

En particulier, si $\rho(\gamma)=\rho(\gamma^{-1})$ alors $\tau(\gamma)=\ln(\rho(\gamma))$; et si $\rho(\gamma)=1$ alors $\tau(\gamma)=0$.

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite, Ω désignera un ouvert proprement convexe, strictement convexe et à bord $\mathcal{C}^1$.

3.5. Sous-groupes nilpotents discrets de Aut(Ω). —

Points fixes et discrétude. —

Proposition 3.14. — *Soient γ et δ deux éléments non elliptiques de $Aut(\Omega)$ qui engendrent un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Supposons que γ et δ fixent un même point $x \in \partial\Omega$.*

1. *Si γ est parabolique, alors δ est parabolique.*
2. *Si γ est hyperbolique, alors δ est hyperbolique et il existe $k,l \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma^k=\delta^l$.*

Démonstration. — Supposons pour commencer γ hyperbolique. On peut supposer que le point fixe attractif de γ est x, et on appelle y son point répulsif. On veut montrer que δ est hyperbolique et fixe le point y.
Si l'élément δ ne fixe pas y, l'élément $\gamma'=\delta\gamma\delta^{-1}$ est hyperbolique, fixe le point x et le point $\delta(y)\neq y$. Il préserve donc le segment $[x,\delta(y)]$. Or, si $z\in]x,y[$, la famille de points (ultimement) distincts $\gamma'^{-n}\gamma^n\cdot z$ s'accumule dans Ω, ce qui contredit la discrétude de l'action de Γ sur Ω.
Ainsi, si γ est hyperbolique et si δ fixe x alors δ fixe aussi le point y. Par suite, δ est hyperbolique grâce au théorème 3.3. Le groupe engendré par γ et δ agit proprement sur le segment $]x,y[\subset\Omega$. Or, le groupe $\mathrm{Aut}(]x,y[)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$; il existe donc des entiers $k,l\in\mathbb{Z}$ tel que $\gamma^k=\delta^l$.

Enfin, si γ est parabolique et si δ fixe x alors on vient de voir que δ ne peut être hyperbolique. Il est donc parabolique via le théorème 3.3.

□

Points fixes et groupes libres. — Un simple argument de ping-pong donne la

Proposition 3.15. — *Soient γ et δ deux éléments non elliptiques de $Aut(\Omega)$ dont les points fixes sont deux à deux disjoints. Supposons que $Fix(\gamma)$ et $Fix(\delta)$ sont deux ensembles disjoints. Le groupe engendré par les éléments γ et δ est un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ qui contient un groupe libre à deux générateurs.*

Les sous-groupes nilpotents discrets de $Aut(\Omega)$. —

Corollaire 3.16. — *Soit Γ un sous-groupe discret, nilpotent, infini, et sans torsion de $Aut(\Omega)$. Alors*

1. *soit tous les éléments de $\Gamma\smallsetminus\{Id\}$ sont hyperboliques et Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$;*
2. *soit tous les éléments de $\Gamma\smallsetminus\{Id\}$ sont paraboliques.*

Démonstration. — La proposition 3.15 montre que tous les éléments de Γ doivent avoir un point fixe commun, sinon le groupe Γ contiendrait un groupe libre non abélien et ne serait donc pas nilpotent. La proposition 3.14 montre qu'alors les éléments de Γ (différents de l'identité) sont tous hyperboliques ou bien tous paraboliques. De plus, s'ils sont tous hyperboliques, le deuxième point de la proposition 3.14 montre que Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. □

On dira par la suite qu'un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est

- *elliptique* si tous ses éléments sont elliptiques et fixent le même point ;
- *parabolique* s'il contient un sous-groupe d'indice fini dont tous les éléments sont paraboliques et fixent le même point ;
- *hyperbolique* s'il contient un sous-groupe d'indice fini engendré par un élément hyperbolique.

Le corollaire précédent montre qu'un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$, qui est virtuellement nilpotent et infini, est soit parabolique, soit hyperbolique.

On remarquera qu'un sous-groupe parabolique contient nécessairement uniquement des éléments paraboliques alors qu'un sous-groupe hyperbolique peut contenir des éléments elliptiques d'ordre 2 qui échange les deux points fixes des éléments hyperboliques du groupe en question.

4. Les notions classiques vues dans le monde projectif

Le but de cette partie est de rappeler les définitions d'ensemble limite, de domaine de discontinuité, d'action de convergence et de domaine fondamental ; cela nous permettra de montrer dans le cadre des géométries de Hilbert des propositions bien connues de géométrie hyperbolique.

4.1. Ensemble limite et domaine de discontinuité. — Comme en géométrie hyperbolique, on peut définir l'ensemble limite et le domaine de discontinuité d'un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ de la façon suivante.

Définition 4.1. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ et $x \in \Omega$. L'ensemble limite Λ_Γ de Γ est le sous-ensemble de $\partial\Omega$ suivant :

$$\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma \cdot x} \smallsetminus \Gamma \cdot x,$$

où x est un point quelconque de Ω. *Le domaine de discontinuité* $\mathcal{O}_\Gamma$ de Γ est le complémentaire de l'ensemble limite de Γ dans Ω.

L'ensemble limite Λ_Γ, s'il n'est pas infini, est vide ou consiste en 1 ou 2 points, auxquels cas Γ est respectivement elliptique, parabolique ou hyperbolique. On dit que Γ est *non élémentaire* si Λ_Γ est infini. Dans ce dernier cas, l'ensemble limite Λ_Γ est le plus petit fermé Γ-invariant non vide de $\partial\Omega$. Ainsi, Λ_Γ est l'adhérence des points fixes des éléments hyperboliques de Γ. Le lemme suivant décrit grossièrement l'ensemble limite.

Lemme 4.2. — *Soit Γ un sous-groupe discret non élémentaire de $Aut(\Omega)$. L'ensemble limite Λ_Γ est un compact parfait. De plus, si $\Lambda_\Gamma \neq \partial\Omega$ alors Λ_Γ est d'intérieur vide.*

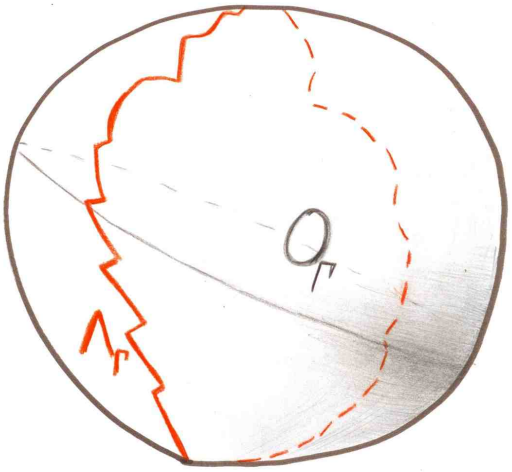

FIGURE 8. Ensemble limite et domaine de discontinuité

Démonstration. — On commence par montrer par l'absurde que Λ_Γ est un compact parfait. Puisque Λ_Γ est l'adhérence des points fixes des éléments hyperboliques de Γ, s'il existe un point isolé $x \in \Lambda_\Gamma$ alors le point x est fixé par un élément hyperbolique γ. On peut supposer que x est point fixe attractif de γ. Comme Γ n'est pas élémentaire, il existe un point $y \in \Lambda_\Gamma$ qui n'est pas fixé par γ. La suite $(\gamma^n \cdot y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers le point x lorsque n tend vers l'infini et tous les points de cette suite sont différents de x. Ce qui contredit le fait que le point x est isolé.

Montrons à présent le deuxième point. Le fermé $\overline{\mathcal{O}_\Gamma \cap \partial\Omega}$ est un fermé Γ-invariant donc il contient Λ_Γ, qui est le plus petit fermé Γ-invariant. Par conséquent, $\overline{\mathcal{O}_\Gamma \cap \partial\Omega} = \overline{\partial\Omega}$, autrement dit $\mathcal{O}_\Gamma \cap \partial\Omega$ est dense. Autrement dit encore, Λ_Γ est d'intérieur vide. □

Remarque 4.3. — Il est possible de définir l'ensemble limite d'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{P}^n$ dans des cas plus généraux. On pourra se référer aux travaux de Benoist [**Ben00**], Yves Guivarc'h [**Gui90**] ou Guivarc'h et Jean-Pierre Conze [**CG00**]. En fait, il suffit que le groupe soit irréductible et proximal.

Définition 4.4. — Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$. On dira que Γ est *irréductible* lorsque les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n+1}$ invariants par Γ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$. On dira que Γ est *fortement irréductible* si tous ses sous-groupes d'indice fini sont irréductibles, autrement dit si Γ ne préserve pas une union finie de sous-espaces vectoriels non triviaux.

Lorsque Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$, Γ est irréductible si et seulement si l'intérieur $C(\Lambda_\Gamma)$ de l'enveloppe convexe de son ensemble limite Λ_Γ est non vide. Dans ce cas, $C(\Lambda_\Gamma)$ est le plus petit ouvert convexe de $\mathbb{P}^n$ préservé par Γ. En fait, il n'est pas difficile de voir qu'alors Γ est fortement irréductible. En effet, si G est un sous-groupe d'indice fini de Γ alors pour tout élément hyperbolique h de Γ, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $h^n \in G$, et donc $\Lambda_G = \Lambda_\Gamma$.

4.2. Action de Γ sur son domaine de discontinuité. — Le but de cette partie est de montrer le lemme suivant.

Lemme 4.5. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Le groupe Γ agit proprement discontinûment sur $\mathcal{O}_\Gamma$.*

Compactification du groupe des transformations projectives de $\mathbb{P}^n$. — Le groupe $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{R}^{n+1}))$, où $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{n+1})$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ce dernier nous fournit donc une compactification de $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ en tant qu'espace topologique. On rappelle qu'un élément γ de $\mathbb{P}(\mathrm{End}(\mathbb{R}^{n+1}))$ définit une application de $\mathbb{P}^n \smallsetminus N(\gamma)$ vers $\mathbb{P}^n$, où $N(\gamma)$ est le projectivisé du noyau de n'importe quel relevé de γ à $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{n+1})$.

De plus, la proposition suivante permet de décrire cette compactification.

Proposition 4.6. — *Soient $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments du groupe $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ et γ_∞ un élément de $\mathbb{P}(End(\mathbb{R}^{n+1}))$. La suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers γ_∞ dans $\mathbb{P}(End(\mathbb{R}^{n+1}))$ si et seulement si la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers γ_∞ sur tout compact de $\mathbb{P}^n \smallsetminus N(\gamma_\infty)$.*

Cette proposition et des détails sur la compactification du groupe $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sont donnés par exemple dans [**Ben60**] et aussi dans [**Gol10**] qui s'inspire de [**Ben60**].

Action de convergence. —

Définition 4.7. — Soit Γ un groupe agissant par homéomorphisme sur un compact parfait X. L'action de Γ sur X est *une action de convergence* si, pour toute suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Γ, il existe une sous-suite $(\gamma_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de Γ et deux points $a, b \in X$ tels que $(\gamma_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers b sur $X \smallsetminus \{a\}$.

Proposition 4.8. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un sous-groupe Γ de $Aut(\Omega)$. On suppose que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers γ_∞ dans $\mathbb{P}(End(\mathbb{R}^n))$ et que l'application γ_∞ est singulière.*
Alors les sous-espaces $Im(\gamma_\infty)$ et $N(\gamma_\infty)$ rencontrent $\overline{\Omega}$ mais ne rencontrent pas Ω.
En particulier, si le convexe Ω est strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$ alors $Im(\gamma_\infty)$ est réduite à un point z qui est inclus dans $\partial\Omega$ et $N(\gamma_\infty)$ est un hyperplan dont l'intersection avec $\overline{\Omega}$ est réduite à un point $x \in \partial\Omega$. De plus, le point z est dans l'ensemble limite de Γ.

Démonstration. — L'action du groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ sur Ω est propre. Par conséquent, pour tout point $x \in \Omega$, tout point d'accumulation de la suite $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est sur le bord $\partial\Omega$ de Ω. Mieux, si un point $x_0 \in \Omega$ est tel que la suite $(\gamma_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $y_{x_0} \in \partial\Omega$, la proposition 3.9 montre qu'il existe une facette S de $\overline{\Omega}$ incluse dans $\partial\Omega$ contenant y_{x_0} telle que, pour tout $x \in \Omega$, la suite $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sous-converge vers un point $y_x \in S$.

Remarquons ensuite que, par construction de la compactification, l'ensemble $N(\gamma_\infty)$ n'est pas vide et n'est pas $\mathbb{P}^n$ tout entier. Il existe donc un point $x_0 \in \Omega$ tel que $x_0 \notin N(\gamma_\infty)$. Le paragraphe précédent montre qu'alors aucun point de Ω n'est dans $N(\gamma_\infty)$ et qu'il existe une facette S de $\overline{\Omega}$ incluse dans $\partial\Omega$ et telle que $\gamma_\infty(\Omega) \subset S$. Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{P}^n$, on a $\mathrm{Im}(\gamma_\infty) \subset E$, où E est le support de S. Ce qui montre le résultat pour $\mathrm{Im}(\gamma_\infty)$.

Un raisonnement par dualité permet de montrer le second point. Le noyau de $\gamma^* = {}^t\gamma^{-1}$ n'est rien d'autre que le dual de l'image de γ. On obtient ainsi le résultat pour $N(\gamma_\infty)$ en utilisant le convexe dual Ω^* de Ω défini au paragraphe 2.3.

Les améliorations dans le cas strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$ sont évidentes. □

Théorème 4.9. — *Soient Ω un ouvert strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{P}^n$ et Γ un sous-groupe discret et irréductible de $Aut(\Omega)$. Les actions de Γ sur les compacts $\partial\Omega$ et $\overline{\Omega}$ sont des actions de convergence.*

Démonstration. — La proposition 4.8 montre que tout point d'accumulation d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'automorphismes de Ω qui n'est pas stationnaire est de la forme

$$\begin{array}{rccc} b_a : & \overline{\Omega} & \to & \overline{\Omega} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} b & \text{si} & x \neq a \\ a & \text{si} & x = a \end{array} \right. \end{array}$$

où le point b est l'unique point de l'image du point d'accumulation γ_∞ choisi de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et le point a est l'intersection du noyau γ_∞ avec $\overline{\Omega}$. La proposition 4.6 montre que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous-converge uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{a\}$ vers b_a. C'est ce qu'il fallait montrer dans les deux cas. □

Démonstration du lemme 4.5. — Supposons que l'action de Γ sur $\mathcal{O}_\Gamma = \overline{\Omega} \smallsetminus \Lambda_\Gamma$ ne soit pas proprement discontinue. Il existe donc un compact K et une suite d'automorphismes $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\gamma_n(K) \cap K \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'action de Γ sur $\overline{\Omega}$ est de convergence (théorème 4.9), il existe donc deux points a et b tels que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous-converge vers b uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} \smallsetminus \{a\}$. De plus, le point b est un point de Λ_Γ. Par conséquent, il existe un voisinage U de b dans $\overline{\Omega}$ tel que $U \cap K = \varnothing$.

D'un autre côté, si n est assez grand, on a $\gamma_n(K) \subset U$, ce qui contredit le fait que $\gamma_n(K) \cap K \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

4.3. Domaines fondamentaux. — Le théorème de Dirichlet possède un analogue dans le monde projectif convexe. Rappelons qu'un *domaine fondamental* pour l'action d'un groupe discret Γ sur un espace topologique X est un fermé d'intérieur non vide D de X tel que $\Gamma \cdot D = X$ et $\gamma \cdot \mathring{D} \cap \gamma' \cdot \mathring{D} = \varnothing$ si et seulement si γ et γ' sont deux éléments distincts de Γ. Un domaine fondamental est dit *localement fini* si tout compact de X ne rencontre qu'un nombre fini de translatés de D par Γ.

Théorème 4.10 **(Jaejeong Lee, [Lee08]).** — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Il existe un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur Ω.*

On pourra trouver une courte démonstration de ce théorème dans [Marb].

5. Action géométriquement finie sur Λ_Γ et sur Ω

5.1. Action affine des sous-groupes paraboliques. —

Définition 5.1. — Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{P}^n$ (a priori non proprement convexe). Un sous-espace affine $\mathcal{F}$ inclus dans Ω est dit *maximal* lorsqu'il n'existe pas de sous-espace affine de $\mathbb{P}^n$ contenant strictement $\mathcal{F}$ et inclus dans Ω.

On note π la projection naturelle $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$. Tout sous-espace affine F de $\mathbb{P}^n$ est la projection via π d'un sous-espace affine $\tilde{F}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui ne contient pas l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$. Deux sous-espaces affines $\tilde{F}$ et $\tilde{F}'$ ont la même trace $\pi(\tilde{F}) = \pi(\tilde{F}')$ si et seulement s'ils engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$.

On dira que deux sous-espaces affines de $\mathbb{P}^n$ ont la *même direction* lorsque les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^{n+1}$ correspondant ont la même direction, c'est-à-dire la même partie linéaire. La direction commune est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui correspond à un

sous-espace projectif de $\mathbb{P}^n$. Par exemple, la direction d'une carte affine est précisément son hyperplan à l'infini.

Remarque 5.2. — Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{P}^n$. Deux sous-espaces affines maximaux inclus dans Ω ont la même direction F_{max}, qui est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^n$. La projection de Ω dans l'espace projectif $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^{n+1}/\tilde{F}_{max}\right)$ est un ouvert proprement convexe, où on a noté $\tilde{F}_{max}$ est un relevé de F_{max} à $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si p est un point et A une partie de $\mathbb{P}^n$, on note $\mathcal{D}_p(A)$ l'ensemble des droites concourantes en p et rencontrant A.

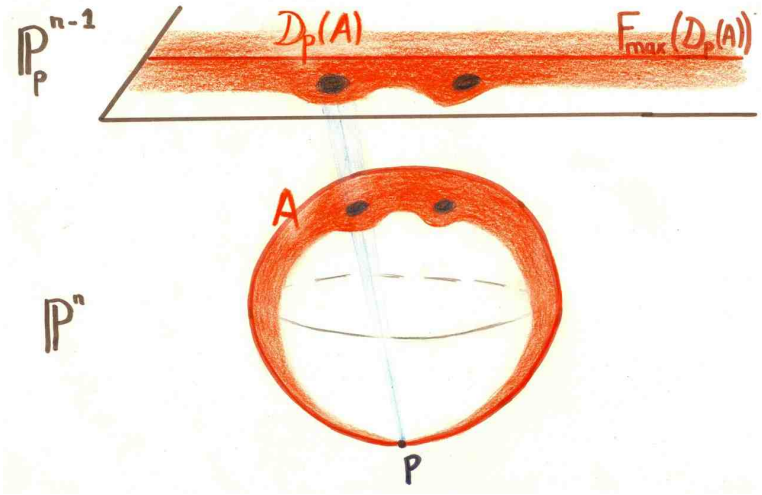

FIGURE 9

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 5.3. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ et $p \in \partial\Omega$. L'ensemble $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p(\Omega)$ des droites concourantes en p et rencontrant Ω est un ouvert convexe de l'espace projectif $\mathbb{P}_p^{n-1} = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^{n+1}/_p\right)$ des droites concourantes en p.*
Un point $p \in \partial\Omega$ est un point de classe $\mathcal{C}^1$ de $\partial\Omega$ si et seulement si le convexe $\mathcal{D}_p(\Omega)$ est une carte affine $\mathbb{A}_p^{n-1}$ de $\mathbb{P}_p^{n-1}$.

Remarque 5.4. — Si le point $p \in \partial\Omega$ n'est pas un point de classe $\mathcal{C}^1$ de $\partial\Omega$ alors les espaces affines maximaux inclus dans le convexe $\mathcal{D}_p(\Omega)$ ont la même direction (remarque 5.2). Cette direction commune est précisément l'ensemble des directions dans lesquelles $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en p.

On rappelle que, sauf mention explicite, l'ouvert Ω est un ouvert proprement convexe strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$.

Lemme 5.5. — *Soit Γ un sous-groupe discret et sans torsion de $Aut(\Omega)$, qui fixe un point p de $\partial\Omega$. Il existe une représentation fidèle de Γ dans le groupe affine $Aff(\mathbb{R}^{n-1})$ des transformations affines de $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Démonstration. — Si le groupe Γ préserve le point p alors il préserve l'ensemble des droites passant par p. Or, l'ensemble des droites passant par p est un espace projectif $\mathbb{P}_p^{n-1}$, trace de l'espace vectoriel quotient $\mathbb{R}^{n+1}/_p$. Le groupe Γ agit projectivement sur cet espace projectif $\mathbb{P}_p^{n-1}$. De plus, comme p est un point $\mathcal{C}^1$ de $\partial\Omega$, le groupe Γ préserve l'hyperplan tangent $T_p\partial\Omega$ à $\partial\Omega$ en p ; il agit donc par transformation affine sur l'espace affine $\mathbb{A}_p^{n-1}$ des droites passant par p qui ne sont pas incluses dans $T_p\partial\Omega$, qui n'est rien d'autre que $\mathcal{D}_p(\Omega)$.
Cette représentation est fidèle : un élément qui fixe toutes les droites issus de p, fixerait tous les points de $\partial\Omega$. □

Notations. — Si p est un point de $\partial\Omega$, on notera à présent $\mathbb{A}_p^{n-1}$ l'espace affine $\mathcal{D}_p(\Omega)$ des droites passant par p qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan tangent $T_p\partial\Omega$ à $\partial\Omega$ en p.
Si C est une partie convexe de Ω, on désignera par $\overline{\mathcal{D}_p(C)}$ l'adhérence, *dans* $\mathbb{A}_p^{n-1}$, de l'ensemble $\mathcal{D}_p(C)$ des droites concourantes en p rencontrant C . Remarquons que si A est une partie de $\overline{O}$, alors $\overline{\mathcal{D}_p(C(A))}$ n'est rien d'autre que l'enveloppe convexe de $\mathcal{D}_p(A\setminus\{p\})$ dans $\mathbb{A}_p^{n-1}$.

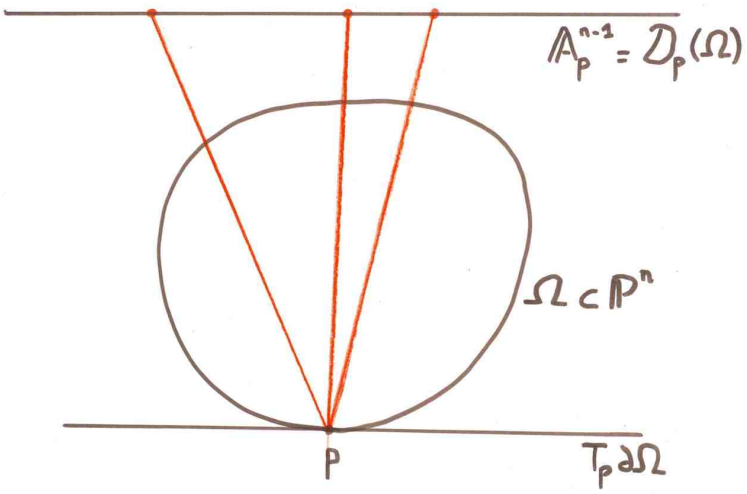

FIGURE 10

5.2. Finitude géométrique. — Nous allons définir deux notions de finitude géométrique via la nature des points de l'ensemble limite Λ_Γ. Pour cela, on s'inspire des définitions données en géométrie hyperbolique ou plus généralement pour les espaces métriques hyperboliques, pour lesquels on dispose des mêmes objets que dans le cas présent.

5.2.1. Points paraboliques bornés. — La définition suivante fait l'unanimité pour l'action d'un groupe discret par isométries sur un espace Gromov-hyperbolique. Nous l'adoptons ici.

Définition 5.6. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Un point $x \in \Lambda_\Gamma$ est *un point parabolique borné* si l'action du groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$ sur $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{x\}$ est cocompacte.
Le *rang* d'un point parabolique borné $x \in \Lambda_\Gamma$ est la dimension cohomologique virtuelle

du groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$. Le point parabolique $x \in \Lambda_\Gamma$ est dit *de rang maximal* si son rang vaut $\dim \Omega - 1$, autrement dit si $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$ agit de façon cocompacte sur $\partial\Omega \smallsetminus \{x\}$.

Remarque 5.7. — La dimension cohomologique d'un groupe discret Γ sans torsion est un entier n_Γ tel que, pour toute action libre et propre de Γ sur une variété contractible de dimension n, on a $n \geqslant n_\Gamma$, avec égalité si et seulement si l'action est cocompacte. Si le groupe Γ est virtuellement sans torsion, alors on peut montrer que tous ses sous-groupes d'indice fini sans torsion ont la même dimension cohomologique et on appelle ce nombre la dimension cohomologique virtuelle de Γ. On pourra consulter [Ser71].

Remarquons que si x est un point parabolique borné alors $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$ est parabolique, c'est-à-dire quà indice fini près, il est composé uniquement d'éléments paraboliques qui fixent le même point.

5.2.2. Points limites coniques. — En géométrie hyperbolique, on trouve la définition suivante, qui convient à notre cadre :

Définition 5.8. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. On dit qu'un point $x \in \Lambda_\Gamma$ est un *point limite conique* lorsqu'il existe une suite d'éléments $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Γ, un point $x_0 \in \Omega$, une demi-droite $[x_1, x[$, et un réel $C > 0$ tel que :

1. $\gamma_n \cdot x_0 \underset{n\to\infty}{\to} x$
2. $d_\Omega(\gamma_n \cdot x_0, [x_1, x[) \leqslant C$

Remarque 5.9. — Un point $x \in \Lambda_\Gamma$ est un *point limite conique* si et seulement si la projection d'une (et donc de toute) demi-droite terminant en x sur $\Omega/_\Gamma$ retourne une infinité de fois dans un compact de $\Omega/_\Gamma$.

Cette définition de point conique ne convient pas à un espace métrique X Gromov-hyperbolique, et on en trouve une autre dans ce contexte : un point $x \in \partial X$ est un point limite conique pour l'action d'un groupe Γ sur X lorsqu'il existe deux points distincts $a, b \in \partial X$ et une suite d'éléments $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Γ tel que $\gamma_n \cdot x \underset{n\to\infty}{\to} a$ et $\gamma_n \cdot y \underset{n\to\infty}{\to} b$ pour tout $y \neq x$.
Bien sûr, cette dernière définition est équivalente à la précédente lorsqu'on l'applique à la géométrie hyperbolique. L'avantage de cette dernière définition est sa nature purement topologique et non géométrique. Cela reste vrai dans notre cas, et cela nous permettra de montrer la proposition 5.15 :

Lemme 5.10. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Un point $x \in \Lambda_\Gamma$ est un point limite conique si et seulement s'il existe deux points a et b distincts de $\partial\Omega$ et une suite d'éléments $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Γ tels que*

- *$\gamma_n x$ tend vers a ;*
- *pour tout $y \in \partial\Omega \smallsetminus \{x\}$, $\gamma_n y$ tend vers b.*

Démonstration. — Commençons par montrer que cette condition est suffisante. S'il existe deux points distincts $a, b \in \partial\Omega$ et une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Γ tel que $\delta_n \cdot x \underset{n\to\infty}{\to} a$ et $\delta_n \cdot y \underset{n\to\infty}{\to} b$ pour tout $y \neq x$. On pose $\gamma_n = \delta_n^{-1}$ et on se donne $x_0 \in \Omega$.

La suite $(\gamma_n \cdot x_0)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ car sinon la suite de termes $\delta_n(\gamma_n \cdot x_0) = x_0$ sous-convergerait vers b. Il faut à présent montrer que la quantité suivante : $d_\Omega(\gamma_n \cdot x_0, [x_0, x[)$ est majorée indépendamment de n. Mais, les automorphismes γ_n sont des isométries, on a donc $d_\Omega(\gamma_n \cdot$

$x_0, [x_0, x[) = d_\Omega(x_0, \delta_n([x_0, x[)) \to d_\Omega(x_0,]b, a[) < \infty$ car $\delta_n \cdot x_0 \underset{n\to\infty}{\to} b$. La dernière inégalité est stricte car Ω est strictement convexe.

Montrons à présent que cette condition est nécessaire.

Il existe un point $x_0 \in \Omega$ et une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Γ tel que $\gamma_n \cdot x_0 \underset{n\to\infty}{\to} x$ et $d_\Omega(\gamma_n \cdot x_0, [x_0, x[)$ est majorée par une constante $C > 0$ indépendamment de n. On pose $\delta_n = \gamma_n^{-1}$, on note D la droite passant par x_0 et x, enfin on note q le point d'intersection de D avec $\partial\Omega$ qui n'est pas x. Les droites $\delta_n(D)$ forment une famille de droites qui rencontre la boule fermée de centre x_0 et de rayon C. On peut donc supposer quitte à extraire que ces droites convergent vers une droite (ab), où les points $a, b \in \partial\Omega$ et $a \neq b$. On en déduit que $\delta_n \cdot x \underset{n\to\infty}{\to} a$ et $\delta_n \cdot q \underset{n\to\infty}{\to} b$.

Il vient que pour tout point $y \in [x_0, x[$, on a $\delta_n \cdot y \underset{n\to\infty}{\to} b$. Il n'est pas difficile d'en déduire alors que pour tout $y \in \overline{\Omega}$, si $y \neq x$ alors $\delta_n \cdot y \underset{n\to\infty}{\to} b$ car le point b est extrémal. □

5.3. Action géométriquement finie sur Ω et $\partial\Omega$. — On trouve la définition suivante, que ce soit en géométrie hyperbolique ou pour un espace Gromov-hyperbolique :

Définition 5.11. — Soient X un espace Gromov-hyperbolique et Γ un sous-groupe discret d'isométries de X. L'action de Γ sur X est dite *géométriquement finie* lorsque tout point de l'ensemble limite Λ_Γ est un point limite conique ou un point parabolique borné.

En dépit des ressemblances, il s'avère que cette définition ne va pas convenir dans notre cadre. Bien sûr, elle convient lorsque la géométrie de Hilbert est Gromov-hyperbolique mais nos hypothèses sur le convexe sont bien plus faibles. En géométrie hyperbolique, la finitude géométrique admet des définitions équivalentes de nature plus géométriques, qui justifient l'appelation géométriquement fini. Ces dernières font sens dans notre contexte mais ne sont plus équivalentes à la précédente, sinon à une version plus forte, qui demande plus aux points paraboliques bornés. C'est ce que nous introduisons maintenant.

Définition 5.12. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Un point $x \in \Lambda_\Gamma$ est *un point parabolique uniformément borné* si l'action du groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$ sur $\mathcal{D}_p(\overline{C(\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{x\})})$ est cocompacte.

Remarque 5.13. — La notion de point parabolique uniformément borné n'a aucun intérêt en géométrie hyperbolique, autrement dit dans le cas où Ω est un ellipsoïde : en effet, tout point parabolique borné est automatiquement uniformément borné.
Pour voir cela, plaçons-nous dans le modèle du demi-espace de Poincaré et supposons que le point ∞ est un point parabolique borné pour un groupe discret Γ d'isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. Le groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty)$ agit donc cocompactement sur $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{\infty\}$. Le point important est que le groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty)$ agit par isométrie euclidienne sur l'espace euclidien $\partial\mathbb{H}^n \smallsetminus \{\infty\}$. Il existe donc un sous-espace F de celui-ci préservé par $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty)$ sur lequel $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty)$ agit cocompactement ; de plus, tout sous-espace F' préservé par $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty)$ sur lequel $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty)$ agit cocompactement est parallèle à F. Ainsi, l'ensemble $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{\infty\}$ est inclus dans un voisinage tubulaire de rayon fini de F. Comme ce voisinage est convexe, on obtient que le point ∞ est un point parabolique uniformément borné de Γ.

Mais dans le contexte des géométries de Hilbert, cette distinction a un sens. Nous invitons le lecteur impatient à consulter le paragraphe 10.3 qui donne un exemple de point parabolique borné mais non uniformément borné.

On peut donner alors la définition suivante :

Définition 5.14. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. L'action de Γ sur $\partial\Omega$ (resp. Ω) est dite *géométriquement finie* lorsque tout point de l'ensemble limite est un point limite conique ou un point parabolique borné (resp. uniformément borné). On dira que le quotient $M = \Omega/_\Gamma$ est *géométriquement fini* lorsque l'action de <u>Γ sur Ω</u> est géométriquement finie.

Ceci introduit <u>deux</u> notions différentes a priori : la finitude géométrique de l'action de Γ <u>sur $\partial\Omega$</u> et la finitude géométrique de l'action de Γ <u>sur Ω</u>. On verra que ces deux notions sont effectivement différentes et que cela n'a rien d'évident. On essaiera aussi de dire quand elles coïncident. C'est l'objet de la dernière partie.

La définition "traditionnelle" de finitude géométrique est donc celle dont on précise ici qu'elle est <u>sur $\partial\Omega$</u>. Comme on le verra dans la partie 8, celle qui porte sur Ω admet des définitions équivalentes concernant la géométrie du quotient $\Omega/_\Gamma$. Lorsque l'action de Γ est géométriquement finie sur $\partial\Omega$ mais pas sur Ω, le quotient $\Omega/_\Gamma$ ne jouit par conséquent d'aucune de ces propriétés géométriques, et on ne saurait qualifier sa géométrie de finie. Nous espérons ainsi justifier notre terminologie.

5.4. Dualité. — Si $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ est hyperbolique, les seuls hyperplans projectifs tangents à $\partial\Omega$ préservés par γ sont les hyperplans $T_{x_\gamma^+}\partial\Omega$ et $T_{x_\gamma^-}\partial\Omega$ tangents à $\partial\Omega$ en ses deux points fixes. L'élément correspondant $\gamma^* \in \Gamma^*$ est donc aussi hyperbolique, ses points fixes sont $(x_\gamma^+)^* = T_{x_\gamma^+}\partial\Omega$ et $(x_\gamma^-)^* = T_{x_\gamma^-}\partial\Omega$. De même, on voit que si $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ est un élément parabolique fixant $p \in \partial\Omega$ alors son dual $\gamma^* \in \Gamma^*$ est parabolique de point fixe p^*. Cela implique en particulier qu'étant donné un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$, l'application duale $x \longmapsto x^*$ de $\partial\Omega$ dans $\partial\Omega^*$ envoie Λ_Γ sur Λ_{Γ^*}.

Proposition 5.15. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. L'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie si et seulement si l'action de Γ^* sur $\partial\Omega^*$ est géométriquement finie.*

Démonstration. — Bien sûr, il suffit de prouver une seule implication. Supposons donc que l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie. Il suffit de montrer que l'application $x \longmapsto x^*$ de $\partial\Omega$ dans $\partial\Omega^*$ envoie un point limite conique pour Γ sur un point limite conique pour Γ^* et un point parabolique borné pour Γ sur un point parabolique borné pour Γ^*.

Soit donc $x \in \Lambda_\Gamma$ un point limite conique. Il existe donc, d'après le lemme 5.10, deux points a et b distincts de $\partial\Omega$ et une suite d'éléments $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Γ tels que $\gamma_n x$ tend vers a et pour tout $y \in \partial\Omega \smallsetminus \{x\}$, $\gamma_n y$ tend vers b. Le convexe Ω étant supposé strictement convexe à bord C^1, cela implique la convergence de $\gamma_n x^*$ vers a^* et de $\gamma_n y^*$ vers b^* pour tout $y \neq x$, puisque ces points s'identifient aux plans tangents $T_{\gamma_n x}\partial\Omega$, $T_a\partial\Omega$, $T_{\gamma_n y}\partial\Omega$ et

$T_b\partial\Omega$. Le point x^* est donc un point limite conique.

Soit maintenant $x \in \Lambda_\Gamma$ un point parabolique borné. Le groupe $\mathrm{Stab}_{\Gamma^*}(x^*)$ n'est rien d'autre que le groupe $(\mathrm{Stab}_\Gamma(x))^*$. Or, $\mathrm{Stab}_\Gamma(x)$ agit cocompactement sur $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{x\}$, donc sur $\{T_y\partial\Omega,\ y \in \Lambda_\Gamma \smallsetminus \{x\}\}$ qui s'identifie à $\Lambda_{\Gamma^*} \smallsetminus \{x^*\}$. Cela montre que $\mathrm{Stab}_{\Gamma^*}(x^*)$ agit cocompactement sur $\Lambda_{\Gamma^*} \smallsetminus \{x^*\}$. □

Remarque 5.16. — Le corollaire 10.5 montrera que l'action de Γ sur Ω est géométriquement finie si et seulement si l'action de Γ^* sur Ω^* l'est.

6. Décomposition du quotient

6.1. Lemme de Zassenhaus-Kazhdan-Margulis. — Les auteurs ont montré dans [CM1] le lemme suivant qui est le premier pas vers la description des actions géométriquement finies.

Lemme 6.1. — *En toute dimension n, il existe une constante $\varepsilon_n > 0$ tel que : pour tout ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^n$, et tout point $x \in \Omega$, tout groupe discret engendré par des automorphismes $\gamma_1, ..., \gamma_p \in Aut(\Omega)$ qui vérifient $d_\Omega(x, \gamma_i \cdot x) \leqslant \varepsilon_n$ est virtuellement nilpotent.*

Une telle constante ε_n sera appelé *constante de Margulis*.

6.2. Décomposition du quotient. —

Dans toute la suite, on se fixe un réel $\varepsilon > 0$ qui est une constante de Margulis pour les ouverts proprement convexes de $\mathbb{P}^n$. Tous les résultats qui suivent sont indépendants de ce choix.

On va introduire ici les définitions et notations que nous utiliserons par la suite. Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Pour tout sous-groupe G de Γ, on note

- pour $x \in \Omega$, $G_\varepsilon(x)$ le groupe engendré par les éléments $\gamma \in G$ tels que $d_\Omega(x, \gamma\cdot x) < \varepsilon$;
- $\Omega_\varepsilon(G) = \{x \in \Omega \mid G_\varepsilon(x) \text{ est infini}\}$;
- $\Omega^c_\varepsilon(G) = \{x \in \Omega \mid G_\varepsilon(x) \text{ est infini et parabolique}\}$;
- $M_\varepsilon(G) = \Omega_\varepsilon(G)/_\Gamma$ et $M^c_\varepsilon(G) = \Omega^c_\varepsilon(G)/_\Gamma$ les projections de ces différents ensembles sur $M = \Omega/_\Gamma$.

Dans le cas où G est le groupe Γ tout entier, on abrègera ces notations en Ω_ε, Ω^c_ε, M_ε et M^c_ε.
La partie M_ε est la *partie fine* de M. Dans le cas où M est une variété, autrement dit quand Γ est sans torsion, c'est l'ouvert des points de M dont le rayon d'injectivité est strictement inférieur à ε.
Le complémentaire de Ω_ε dans Ω sera noté Ω^ε et sa projection sur M, M^ε. L'ensemble M^ε est la *partie épaisse* de M, complémentaire de la partie fine dans M. Lorsque M est une variété, c'est l'ensemble des points de M dont le rayon d'injectivité est supérieur ou égal à ε.
L'ensemble M^c_ε est la *partie cuspidale* de M. Son complémentaire dans Ω sera noté Ω^{nc}_ε ; sa projection M^{nc}_ε, complémentaire de M^c_ε, est la *partie non cuspidale* de M. Enfin, on

appellera les composantes connexes de la partie cuspidale de M_ε^c les *cusps* de M.
Enfin, on désignera par $C(\Lambda_\Gamma)$ l'enveloppe convexe de Λ_Γ dans Ω. Le *cœur convexe* de M est le quotient est l'adhérence du $C(\Lambda_\Gamma)/_\Gamma$ dans $\Omega/_\Gamma$, on le note $C(M)$.
On remarquera que $C(\Lambda_\Gamma)$ est un ouvert convexe de Ω et que $C(M)$ est un fermé de $\Omega/_\Gamma$.
Le lemme suivant donne une première description de ces différentes parties.

FIGURE 11. Le cœur convexe

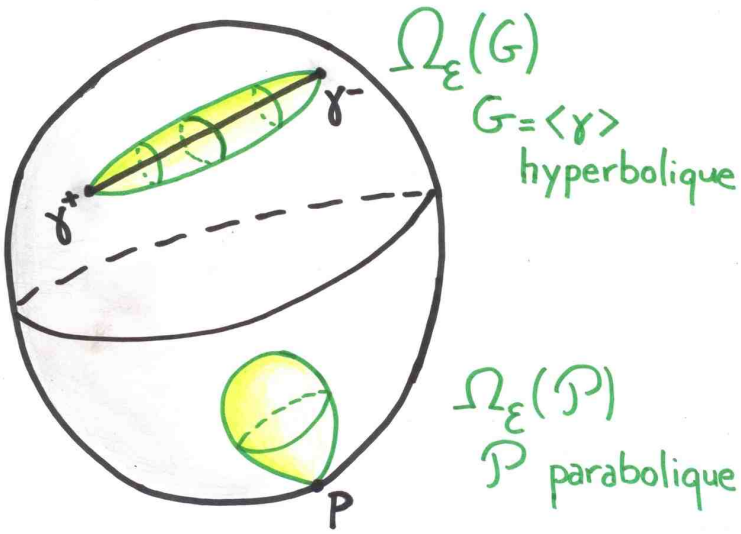

FIGURE 12. Parties fine et épaisse

Lemme 6.2. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$.*

1. *La partie fine de M est la réunion disjointe des parties $M_\varepsilon(G)$ où G parcourt les sous-groupes virtuellement nilpotents maximaux de Γ, c'est-à-dire les sous-groupes hyperboliques et paraboliques maximaux de Γ.*

2. *Les parties $M_\varepsilon(G)$, où G parcourt les sous-groupes virtuellement nilpotents maximaux de Γ, sont connexes, et d'adhérences disjointes.*
3. *Lorsque G est un sous-groupe hyperbolique de Γ, la partie $M_\varepsilon(G)$ est relativement compacte dans M.*
4. *Lorsque G est un sous-groupe parabolique de Γ fixant $p \in \partial\Omega$, la partie $\Omega_\varepsilon(G)$ est étoilée dans Ω en p, et p est le seul point de $\partial\Omega$ adhérent à $\Omega_\varepsilon(G)$.*
5. *La partie cuspidale est la réunion disjointe des parties $M_\varepsilon(G)$, où G parcourt les sous-groupes paraboliques maximaux de Γ.*
6. *La partie fine de la partie non cuspidale, c'est-à-dire $M_\varepsilon^{nc} = M_\varepsilon \smallsetminus M_\varepsilon^c$, est la réunion disjointe des parties $M_\varepsilon(G)$, où G parcourt les sous-groupes hyperboliques maximaux de Γ.*

Démonstration. —

1. Par définition, $M_\varepsilon(G) \subset M_\varepsilon$ pour tout sous-groupe G de Γ. Maintenant, si $x \in M_\varepsilon$, il existe un élément non elliptique $\gamma \in \Gamma$ tel que $d_\Omega(x, \gamma x) < \varepsilon$. Le groupe engendré par γ est nilpotent et infini, et donc $x \in M_\varepsilon(\langle\gamma\rangle)$. De plus, les parties $\overline{M_\varepsilon(G)}$ sont disjointes. En effet, s'il y avait un point x qui était à la fois dans $\overline{M_\varepsilon(G)}$ et dans $\overline{M_\varepsilon(G')}$, le groupe discret engendré par G et G' serait nilpotent par le lemme de Margulis, contredisant le fait que G et G' sont maximaux.

2. Soit G un groupe virtuellement nilpotent maximal, que l'on peut supposer sans torsion. On va montrer que $M_\varepsilon(G)$ est ouvert et fermé dans M_ε. L'ouverture de $M_\varepsilon(G)$ découle de la définition. Pour la fermeture, considérons une suite (x_n) de points dans $M_\varepsilon(G)$ qui converge vers x dans M_ε. Il existe ainsi un élément non elliptique $\gamma \in \Gamma$ tel que $d_\Omega(x, \gamma x) < \varepsilon$. Par continuité, on a aussi $d_\Omega(x_n, \gamma x_n) < \varepsilon$ lorsque n est assez grand, et ainsi le groupe engendré par G et γ est nilpotent, d'après le lemme de Margulis. Comme G est maximal, on a forcément $\gamma \in G$ et donc $x \in M_\varepsilon(G)$, autrement dit $M_\varepsilon(G)$ est fermé.

3. Soit G le groupe nilpotent hyperbolique engendré par l'élément γ. Tout domaine fondamental convexe et fermé C pour l'action de G sur Ω intersecte l'axe a_γ de γ en une partie compacte. Il est alors clair que $d_\Omega(x, \gamma x) \geqslant \varepsilon$ dès que x est un point de C dont la distance à l'axe de γ est supérieure à une certaine constante. Autrement dit, $\Omega_\varepsilon(G) \cap C$ est un voisinage relativement compact de $a_\gamma \cap C$, et donc $M_\varepsilon(G)$ est relativement compact dans M.

4. Soit G un sous-groupe parabolique de Γ qui fixe le point $p \in \partial\Omega$. Prenons $x \in \partial\Omega \smallsetminus \{p\}$ et paramétrons la géodésique (xp) par $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de telle façon que $r(-\infty) = x,\ r(+\infty) = p,\ r(t) \in (xp), t \in \mathbb{R}$. La convexité de Ω montre que la fonction $f : t \longmapsto d_\Omega(r(t), \gamma r(t))$ est décroissante. La stricte convexité entraîne que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, et vers 0 en $+\infty$. C'est exactement ce qu'on voulait montrer.

5. Cela découle directement de la définition et du premier point.

6. La partie non cuspidale de M est par définition réunion de la partie épaisse et des parties fines non cuspidales. Ces dernières sont exactement les parties $M_\varepsilon(G)$, où G

parcourt les sous-groupes hyperboliques de Γ ; les points précédents montrent que ces parties sont connexes, d'adhérences compactes et disjointes.

□

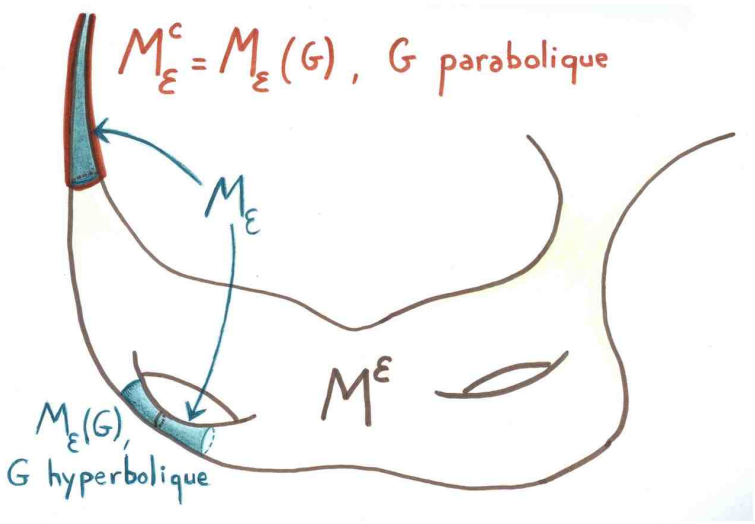

FIGURE 13. Décomposition du quotient

7. Sur les sous-groupes paraboliques

7.1. Quelques résultats préliminaires sur les groupes algébriques. — Nous allons avoir besoin de plusieurs résultats et définitions sur les groupes algébriques linéaires réels ; on pourra consulter le livre [Hum75].

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ Zariski-fermé. Un élément $g \in G$ est dit *semi-simple* (resp. *unipotent*) lorsque g est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (resp. $(g-1)^{n+1} = 0$). On note $\mathcal{S}(G)$ (resp. $\mathcal{U}(G)$) l'ensemble des éléments semi-simples (resp. unipotents) de G.

L'ensemble $\mathcal{U}(G)$ est un fermé de Zariski de G ; par contre, l'ensemble $\mathcal{S}(G)$ ne l'est pas en général.

Proposition 7.1 **(Proposition 19.2 de [Hum75])**. — *Soit G un groupe algébrique résoluble et connexe. Le groupe G est nilpotent si et seulement si $\mathcal{S}(G)$ est un sous-groupe de G. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{S}(G)$ est un fermé de G pour la topologie de Zariski, le groupe $\mathcal{S}(G)$ est abélien et le groupe G se décompose en le produit direct $G = \mathcal{S}(G) \times \mathcal{U}(G)$.*

Proposition 7.2 **(Lemme 4.9 de [Ben])**. — *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$. Si toutes les valeurs propres de tous les éléments de Γ sont de module 1 alors toutes les valeurs propres de tous les éléments de l'adhérence de Zariski de Γ sont aussi de module 1.*

Remarque 7.3. — Il faut bien faire attention au fait que, dans l'énoncé précédent, le corps de base est $\mathbb{R}$. Cette proposition est fausse sur un corps quelconque. Sur le corps des complexes, le groupe compact SU_n est Zariski-dense dans le $\mathbb{C}$-groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$; sur les corps p-adiques, le groupe compact $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ est Zariski dense dans le $\mathbb{Q}_p$-groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Pourtant, les valeurs propres des éléments de ces deux groupes sont toutes de modules 1.

Le phénomène exceptionnel qui explique cette proposition sur $\mathbb{R}$ est que le sous-groupe compact maximal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est Zariski-fermé.

Théorème 7.4 **(Kostant-Rosenlicht (Théorème 2 de [Ros61] ou appendice de [Bir71]))**
Soit U un groupe algébrique unipotent agissant sur un espace affine. Toute orbite de U est Zariski fermé.

Théorème 7.5 **(Théorème de Mal'cev (Théorème 2.1 de [Rag72]))**
Soit U un sous-groupe Zariski fermé de $\mathrm{SL}_{\mathrm{n+1}}(\mathbb{R})$. Si U est unipotent, alors tout sous-groupe discret et Zariski-dense Γ de U est un réseau cocompact de U.

Lemme 7.6. — *Soit $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de $Aut(\Omega)$ fixant un point p. On note $\mathcal{N}$ l'adhérence de Zariski de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{U}$ le sous-groupe de $\mathcal{N}$ constitué des éléments unipotents de $\mathcal{N}$.*
Le quotient $\mathcal{N}/_{\mathcal{U}}$ est compact, le groupe $\mathcal{P}$ est un réseau cocompact de $\mathcal{N}$, l'action de $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est propre et l'action de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est libre. En particulier, si l'action de $\mathcal{P}$ sur $\partial\Omega \smallsetminus \{p\}$ est cocompacte alors l'action de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est simplement transitive.

Démonstration. — Le groupe $\mathcal{P}$ est virtuellement nilpotent ; par conséquent, quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que $\mathcal{P}$ est nilpotent et Zariski-connexe. L'adhérence de Zariski $\mathcal{N}$ de $\mathcal{P}$ est alors un sous-groupe nilpotent Zariski-fermé de $\mathrm{SL}_{\mathrm{n+1}}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments unipotents de $\mathcal{N}$ et on note K l'ensemble des éléments semi-simples de $\mathcal{N}$. La proposition 7.1 montre que $_U$ et un groupe et que $\mathcal{N}$ est le produit direct de $\mathcal{U}$ et K, le groupe K est abélien.

La proposition 7.2 montre que toutes les valeurs propres des éléments de K sont de module 1. Or, les éléments du groupe abélien K sont tous semi-simples par conséquent K est compact.

Montrons à présent que le groupe discret $\mathcal{P}$ est un réseau du groupe de Lie $\mathcal{N}$. Le groupe dérivé $[\mathcal{P},\mathcal{P}]$ de $\mathcal{P}$ est Zariski-dense dans le groupe unipotent $[\mathcal{N},\mathcal{N}] = [\mathcal{U},\mathcal{U}]$. Le théorème 7.5 montre que le groupe $[\mathcal{P},\mathcal{P}]$ est un réseau cocompact de $[\mathcal{N},\mathcal{N}]$. Considérons les projections $\pi_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}/_{[\mathcal{N},\mathcal{N}]} = \mathcal{U}/_{[\mathcal{U},\mathcal{U}]} \times K$ et $\pi_2 : \mathcal{N}/_{[\mathcal{N},\mathcal{N}]} \to \mathcal{U}/_{[\mathcal{U},\mathcal{U}]}$. Le quotient $\mathcal{U}/_{[\mathcal{U},\mathcal{U}]}$ est un groupe de Lie abélien unipotent par conséquent, il est isomorphe à un espace vectoriel réel. Le groupe $\pi_2 \circ \pi_1(\mathcal{P})$ est Zariski-dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{U}/_{[\mathcal{U},\mathcal{U}]}$, par suite $\pi_2 \circ \pi_1(\mathcal{P})$ est un sous-groupe cocompact de $\mathcal{U}/_{[\mathcal{U},\mathcal{U}]}$. Il vient que $\pi_1(\mathcal{P})$ est un sous-groupe cocompact de $\mathcal{N}/_{[\mathcal{N},\mathcal{N}]}$. Donc, $\mathcal{P}$ est un réseau cocompact de $\mathcal{N}$.

Ensuite, considérons l'action de $\mathcal{P}$ sur l'espace affine $\mathbb{A}_p^{n-1}$ des droites de $\mathbb{P}^n$ passant par p mais qui ne sont pas contenu dans l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en p. Le groupe $\mathcal{N}$ agit aussi sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$. L'action de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est propre et $\mathcal{P}$ est un sous-groupe cocompact de $\mathcal{N}$ par suite $\mathcal{N}$ agit proprement sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$.

Comme l'action de $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est propre le stabilisateur de tout point de $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est compact. Mais le groupe $\mathcal{U}$ est unipotent et tout élément d'un groupe compact est semi-simple. L'action de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est donc libre.

Enfin, si l'action de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est cocompact comme l'orbite de tout point de $\mathbb{A}_p^{n-1}$ sous l'action de $\mathcal{U}$ est Zariski-fermé par le théorème 7.4, l'action de $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est transitive et l'action de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est simplement transitive. □

7.2. Description des sous-groupes paraboliques uniformément bornés. — Dans cette partie, nous décrivons les sous-groupes paraboliques des sous-groupes discrets de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ dont l'action est géométriquement finie sur Ω. Ceux-ci sont en fait conjugués dans $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ à des sous-groupes paraboliques de $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$ et donc en particulier virtuellement abéliens.

Un petit laïus sur les unipotents qui préservent un convexe. —

Définition 7.7. — Soit $\gamma \in \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ un élément unipotent. On appelle *degré* de γ le plus petit entier k tel que $(\gamma - 1)^k = 0$.

Soit $\gamma \in \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ un élément unipotent qui préserve un ouvert proprement convexe quelconque. Benoist a remarqué dans [**Ben06a**] (lemme 2.3) que le degré de γ était nécessairement impair. L'argument est très cours, répétons-le pour faciliter la lecture. On regarde l'action de γ sur la sphère projective $\mathbb{S}^n$, c'est-à-dire le revêtement à deux feuillets de $\mathbb{P}^n$. Un calcul explicite de γ^n dans une base donnant une matrice de Jordan montre que, si k est pair alors dans $\mathbb{S}^n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma \cdot x = -\lim\limits_{n\to-\infty} \gamma \cdot x$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$ en dehors d'un hyperplan. Par conséquent, si k est pair, γ ne peut préserver d'ouvert proprement convexe.

De plus, si l'ouvert Ω est strictement convexe, alors il existe un unique bloc de Jordan de γ de degré maximal k et tous les autres blocs de Jordan de γ sont de degré strictement inférieur à k. C'est une conséquence du théorème 3.3. En effet, l'élélement unipotent γ est nécessairement un élément parabolique de $\mathrm{Aut}(\Omega)$; il possède donc un unique point fixe attractif, ce qui impose l'unicité du bloc de degré maximal.

On obtient ainsi que l'unique point fixe p de γ sur $\partial\Omega$ est l'image de $(\gamma - 1)^{k-1}$. En effet cet espace est une droite de $\mathbb{R}^{n+1}$: c'est la droite engendrée par le premier vecteur du bloc de Jordan de degré k de γ. En fait, il existe un hyperplan H de $\mathbb{P}^n$ tel que si $x \notin H$ alors $\gamma^n \cdot x \to p$ lorsque $n \to \pm\infty$.

On obtient aussi l'existence d'une droite attractive. L'image D de $(\gamma-1)^{k-2}$ est un plan de $\mathbb{R}^{n+1}$, donc une droite de $\mathbb{P}^n$: c'est le plan engendré par les deux premiers vecteurs du bloc de Jordan de degré k de γ. Si D' est une droite de $\mathbb{P}^n$ et $D' \not\subset H$ alors $\gamma^n \cdot D' \to D$. On appellera cette droite la *droite attractive* de γ. Cette dernière assertion est simplement une conséquence du calcul des γ^i et des $(\gamma - 1)^i$ dans une base donnant une matrice de Jordan.

On peut résumer l'essentiel de ce paragraphe dans la proposition suivante :

Proposition 7.8. — *Soit $\gamma \in Aut(\Omega)$ un élément unipotent. Le degré k de γ est impair et le bloc de Jordan de degré maximal est unique.*

Définition 7.9. — Une courbe $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{P}^n$ est dite *convexe* lorsqu'elle est incluse dans le bord d'un ouvert proprement convexe.

Lemme 7.10. — *Soit $\gamma \in Aut(\Omega)$ un élément unipotent. On note p le point de $\partial\Omega$ fixé par γ, H l'hyperplan tangent à Ω en p et $\mathcal{U} = \{g^t\}$ le groupe à un paramètre engendré par γ. Si $x \notin H$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ t \in \mathbb{R} & \longmapsto & \gamma^t \cdot x \\ \infty & \longmapsto & p \end{array}$$

définit une courbe $\mathcal{C}_x$ algébrique, lisse et convexe. De plus, la tangente à $\mathcal{C}_x$ en p est la droite attractive de γ.

Démonstration. — Si γ possède un unique bloc de Jordan non trivial, alors, dans un système de coordonnées convenable, $\mathcal{C}_x$ est définie par $[t : s] \to [t^{k-1} : t^{k-2}s : ... : s^{k-1} : 1 : ... : 1]$ où k est le degré de γ ; autrement dit, $\mathcal{C}_x$ est la courbe Veronese de degré $k-1$. Il suffit alors d'appliquer cette remarque à chaque bloc de Jordan de γ. □

Proposition 7.11. — *Soit γ (resp. g) une matrice unipotente possédant un unique bloc de Jordan de degré maximal impair $k \geqslant 5$ (resp. de degré 3). On suppose que γ et g ont le même point attractif p, la même droite attractive et que $\ker(\gamma-1)^2 = \ker(g-1)^2$. Alors l'élément $[\gamma, g]$ est unipotent de degré 2. En particulier $[\gamma, g]$ ne préserve pas d'ouvert proprement convexe.*

Démonstration. — C'est un simple calcul. On calcule le bloc principal de $[\gamma, g]$, pour cela on définit les matrices suivantes :

$$J_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J'_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^a_{2,l} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} & \cdots & -\frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & a & \cdots & -a & a \end{pmatrix}$$

Ainsi, J_k est le bloc de Jordan canonique de degré k, c'est une matrice de taille $k \times k$, $M^a_{2,l}$ est une matrice de taille $2 \times l$, où l est un nombre pair et $a \in \mathbb{R}$.

Par hypothèse, les matrices de γ et g ont, dans une base convenable, la forme suivante :

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g = \begin{pmatrix} J'_a & 0 & 0 \\ 0 & I_{k-3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n+1-k} \end{pmatrix},$$

où U est une matrice triangulaire supérieure avec uniquement des 1 sur la diagonale et dont les blocs de Jordan sont de degré strictement inférieur à k et $a \neq 0$. Ainsi, on a,

$$[\gamma, g] = \begin{pmatrix} I_{2,2} & 0 & M^a_{2,k-3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n+1-k} & \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $[\gamma, g]$ est une matrice unipotente de degré 2. □

Terminons cette partie sur un lemme clé :

Lemme 7.12. — *Soit $\mathcal{U}$ un sous-groupe unipotent de $Aut(\Omega)$ fixant un point $p \in \partial\Omega$. Si l'action de $\mathcal{U}$ sur $\partial\Omega \smallsetminus \{p\}$ est transitive, alors Ω est un ellipsoïde.*

Démonstration. — Cette proposition se démontre par récurrence. En dimension $n = 2$, l'unique groupe unipotent qui préserve un convexe est le groupe suivant :

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Si on note e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors l'orbite sous $\mathcal{U}$ d'un point qui n'est pas sur la droite projective $< e_1, e_2 >$ est une ellipse privée du point $< e_1 >$.

Supposons maintenant que la propriété soit démontrée pour un ouvert convexe de $\mathbb{P}^{n-1}$ et prenons $\Omega \subset \mathbb{P}^n$. On va montrer que le bord de Ω est de classe $\mathcal{C}^2$ à hessien défini positif. Le théorème 7.13 d'Édith Socié-Méthou permettra de conclure que Ω est un ellipsoïde.
On note H l'hyperplan tangent à Ω en p. Comme le groupe $\mathcal{U}$ est unipotent, il préserve un sous-espace F de dimension $n-2$ inclus dans H. L'ensemble des hyperplans contenant F est l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}/_{\tilde{F}}) = \mathbb{P}^1$, où $\tilde{F}$ désigne le relevé de F à $\mathbb{R}^{n+1}$. L'action de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}/_{\tilde{F}})$ préserve l'hyperplan H donc $\mathcal{U}$ agit par transformations affines sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}/_{\tilde{F}}) \smallsetminus H = \mathbb{A}^1$. Ces transformations affines étant unipotentes, $\mathcal{U}$ agit en fait par translations sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}/_{\tilde{F}}) \smallsetminus H$. On obtient donc un morphisme $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.
On note $(H_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ le paramétrage de la famille des hyperplans de $\mathbb{P}^n$ contenant F par $\mathbb{P}^1$, obtenu en posant $H_\infty = H$. Ainsi, le noyau $\mathcal{V}$ de φ préserve chacun des hyperplans H_t.
Par conséquent, si $t \neq \infty$, le groupe $\mathcal{V}$ préserve les ouverts proprement convexe $\Omega_t = \Omega \cap H_t$ qui sont strictement convexes à bord $\mathcal{C}^1$. L'action de $\mathcal{V}$ sur $\partial\Omega_t \smallsetminus \{p\}$ étant clairement transitive, l'hypothèse de récurrence montre donc que les Ω_t sont des ellipsoïdes.
Soit $\gamma \in \mathcal{U} \smallsetminus \mathcal{V}$. Si la droite attractive de γ est incluse dans F, alors il existe un élément $g \in \mathcal{V}$ tel que g et γ ont le même point fixe p et la même droite attractive, par conséquent, le lemme 7.11 montre que l'élément $[\gamma, g]$ ne préserve pas d'ouvert proprement convexe ce qui est absurde.

Par conséquent, la droite attractive de γ n'est pas incluse dans F, et le convexe Ω est de classe $\mathcal{C}^2$ à hessien défini positif, ainsi le théorème 7.13 conclut. En effet, le théorème 7.4 appliqué à l'action de $\mathcal{U}$ sur l'espace affine $\mathbb{P}^n \smallsetminus H$ montre que l'ensemble $\partial\Omega \smallsetminus \{p\}$ est Zariski-fermé ; il est lisse car le groupe algébrique $\mathcal{U}$ agit transitivement sur ce dernier. L'ensemble $\partial\Omega$ est la complétion algébrique de $\partial\Omega \smallsetminus \{p\}$ dans $\mathbb{P}^n$, c'est une sous-variété de classe C^2 : le point p est de classe $\mathcal{C}^2$ puisque dans la direction de F c'est un ellipsoïde, et dans la direction donnée par la droite attractive de γ, c'est une courbe algébrique convexe lisse (lemme 7.10). De la même façon, le bord du convexe dual Ω^* est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ et donc $\partial\Omega$ est à hessien défini positif. C'est ce qu'il fallait montrer. □

Théorème 7.13 **(Socié-Méthou [SM02])**. — *Un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ dont le bord est de classe $\mathcal{C}^2$ à hessien défini positif et le groupe d'automorphisme est non compact est un ellipsoïde.*

On peut à présent se lancer dans l'étude des sous-groupes paraboliques uniformément bornés. Commençons par traiter le cas des

Sous-groupes paraboliques de rang maximal. — Le lemme précédent va permettre d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 7.14. — *Soit $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique discret de $Aut(\Omega)$ fixant p. Si le groupe $\mathcal{P}$ est de rang maximal, alors il préserve des ellipsoïdes $\mathcal{E}^{int}$ et $\mathcal{E}^{ext}$ tels que*

- $\partial\mathcal{E}^{int} \cap \partial\mathcal{E}^{ext} = \partial\mathcal{E}^{int} \cap \partial\Omega = \partial\mathcal{E}^{ext} \cap \partial\Omega = \{p\}$;
- $\mathcal{E}^{int} \subset \Omega \subset \mathcal{E}^{ext}$;
- $\mathcal{E}^{int}$ *est une horoboule de l'espace hyperbolique* $(\mathcal{E}^{ext}, d_{\mathcal{E}^{ext}})$.

En particulier, le groupe $\mathcal{P}$ est conjugué dans $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ *à un sous-groupe parabolique de* $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$.

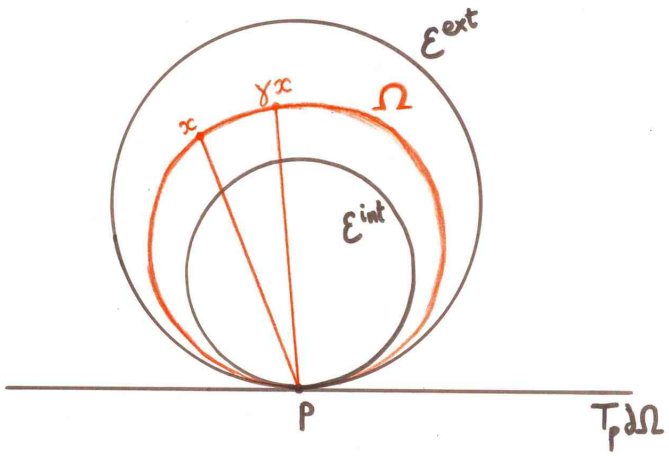

FIGURE 14. Ω coincé !

Démonstration. — Soient $\mathcal{N}$ l'adhérence de Zariski de $\mathcal{P}$ dans $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{N})$ le sous-groupe des éléments unipotents de $\mathcal{N}$. Le lemme 7.6 montre que le groupe $\mathcal{P}$ est un réseau cocompact de $\mathcal{N}$ et que l'action de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est simplement transitive.
Soient H l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en p et $x \in \mathbb{P}^n \smallsetminus H$. D'après le théorème 7.4 appliqué à l'action de $\mathcal{U}$ sur l'espace affine $\mathbb{P}^n \smallsetminus H$, l'orbite $\mathcal{U} \cdot x$ est une sous-variété algébrique lisse C_x de $\mathbb{P}^n \smallsetminus H$; C_x est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$ puisque $\mathcal{U} \cdot (px) = \mathbb{A}_p^{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.

On peut considérer l'enveloppe convexe $\mathcal{E}_x$ de C_x dans $\mathbb{P}^n$ qui est un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$: en effet, on a $\lim \gamma \cdot x = p$ quand γ tend vers l'infini dans $\mathcal{P}$ et donc également quand γ tend vers l'infini dans $\mathcal{N}$. Le groupe $\mathcal{U}$ agit simplement transitivement sur $\partial\mathcal{E}_x \smallsetminus \{p\}$ car $\partial\mathcal{E}_x \smallsetminus \{p\}$ se projette bijectivement sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$. Par conséquent, $C_x = \partial\mathcal{E}_x \smallsetminus \{p\}$.

Le bord $\partial\mathcal{E}_x$ de $\mathcal{E}_x$, qui est la complétion algébrique de C_x dans $\mathbb{P}^n$ est un fermé de Zariski de $\mathbb{P}^n$. La variété algébrique $\partial\mathcal{E}_x$ est partout lisse sauf peut-être en p. Comme $\mathcal{U}$ agit transitivement sur l'espace affine $\mathbb{A}_p^{n-1}$ des droites passant par p qui ne sont pas incluses dans H, le bord $\partial\mathcal{E}_x$ admet un unique plan tangent en p : l'hyperplan H. Comme $\mathcal{E}_x$ est convexe, on en déduit que son bord $\partial\mathcal{E}_x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au point p.

Par conséquent, $\mathcal{E}_x$ est un ouvert proprement convexe à bord $\mathcal{C}^1$. Le même raisonnement montre que le dual $\mathcal{E}_x^*$ de $\mathcal{E}_x$ est un ouvert proprement convexe à bord $\mathcal{C}^1$ et donc que $\mathcal{E}_x$ est un ouvert proprement convexe strictement convexe à bord $\mathcal{C}^1$. Le lemme 7.12 montre alors que $\mathcal{E}_x$ est un ellipsoïde.

Comme l'action de $\mathcal{P}$ sur $\partial\Omega \smallsetminus \{p\}$ est cocompacte, on peut trouver x et y tels que $\mathcal{E}_x \subset \Omega \subset \mathcal{E}_y$. On pose alors $\mathcal{E}^{int} = \mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}^{ext} = \mathcal{E}_y$. □

Remarque 7.15. — En faisant varier le point x le long d'une droite passant par p et coupant Ω, on voit que le groupe $\mathcal{P}$ préserve une famille à un paramètre d'ellipsoïdes tangents à Ω en p.

Notons tout de suite une conséquence de ce résultat.

Corollaire 7.16. — *Soit $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de rang maximal de $Aut(\Omega)$ fixant le point p de $\partial\Omega$. Le quotient $H/_{\mathcal{P}}$ de toute horoboule H basée en p par $\mathcal{P}$ est de volume fini.*

Démonstration. — Bien entendu, il suffit de montrer le résultat pour une seule horoboule. Prenons $\mathcal{E}^{int}$ comme dans le théorème 7.14, et appelons Vol^{int} le volume hyperbolique qu'il définit ; on a $\mathrm{Vol}^{int} \geqslant \mathrm{Vol}_\Omega$ sur les boréliens de $\mathcal{E}^{int}$ (proposition 2.1). Comme $\mathcal{P}$ agit cocompactement sur $\partial\Omega \smallsetminus \{p\}$, on peut choisir une petite horoboule H de Ω incluse dans $\mathcal{E}^{int}$ dont le bord ne rencontre celui de $\mathcal{E}^{int}$ qu'en p. Cette horoboule H est contenue dans une horoboule H^{int} de $\mathcal{E}^{int}$, de telle façon que $H/_{\mathcal{P}} \subset H^{int}/_{\mathcal{P}}$ et on a

$$\mathrm{Vol}_\Omega(H/_{\mathcal{P}}) \leqslant \mathrm{Vol}^{int}(H^{int}/_{\mathcal{P}}).$$

Or, le convexe $\mathcal{E}^{int}$ est un ellipsoïde, la géométrie de Hilbert qui lui est associée est la géométrie hyperbolique. On sait donc que $\mathrm{Vol}^{int}(H^{int}/_{\mathcal{P}})$ est fini. □

Cas général. — Le lemme suivant permet de ramener le cas général au cas où le rang du sous-groupe parabolique est maximal.

Lemme 7.17. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ et $p \in \Lambda_\Gamma$ un point parabolique uniformément borné. Le groupe $\mathcal{P} = Stab_\Gamma(p)$ préserve un sous-espace projectif $\mathbb{P}^{d+1}_p$ qui contient p et intersecte Ω, avec d le rang de $\mathcal{P}$.*
En particulier, le groupe $\mathcal{P}$ est un sous-groupe parabolique de rang maximal de $Aut(\Omega_p)$, où Ω_p désigne l'ouvert proprement convexe $\mathbb{P}^{d+1}_p \cap \Omega$.

Démonstration. — Voyons l'ensemble $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{A}^{n-1}_p$, et notons $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}_p(C(\Lambda_\Gamma))}$: c'est, dans $\mathbb{A}^{n-1}_p$, l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\}$. Soit K l'ensemble des sous-espaces affines maximaux inclus dans l'adhérence de $\mathcal{D}$. Les éléments de K ont tous la même direction D. L'ensemble K s'identifie à un fermé convexe dans l'espace affine $\mathbb{A}^{n-1}_p/_D$, qui, par définition, ne contient pas de droite. Montrons qu'il ne contient pas non plus de demi-droite.
Pour cela, compactifions l'espace $\mathbb{A}^{n-1}_p$ en $\overline{\mathbb{A}^{n-1}_p}$ en lui ajoutant l'ensemble des demi-droites passant par un point $o \in \mathbb{A}^{n-1}_p$ fixé, qui n'est rien d'autre qu'une sphère. Si x est un point de $\mathbb{A}^{n-1}_p$ et γ un élément d'ordre infini de $\mathcal{P}$ alors la limite dans $\overline{\mathbb{A}^{n-1}_p}$ de la suite $\gamma^n \cdot x$ vérifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma^n \cdot x = -\lim\limits_{n\to-\infty} \gamma^n \cdot x$ car le degré de tout élément de $\mathcal{P}$ est impair. Ainsi, si x est un point de $\mathcal{D}$, on voit que l'espace des demi-droites incluses dans K est stable par la symétrie centrale de centre x ; autrement dit, si une demi-droite est dans incluse dans K, la droite entière l'est également, ce qui est impossible.
Par conséquent, le fermé K est proprement convexe. L'action de $\mathcal{P}$ sur $K = \mathbb{A}^{n-1}_p/_D$ possède donc un point fixe, le centre de gravité de K. Autrement dit, $\mathcal{P}$ préserve un sous-espaces affine maximal F de $\mathcal{F}$, dont la dimension est nécessairement égale à la dimension cohomologique d de $\mathcal{P}$. Il ne reste plus qu'à faire machine arrière : F est un sous-espace affine de $A^{n-1}_p = \Omega/_\Gamma \mathbb{P}^n p \smallsetminus T_p\partial\Omega$, qui engendre le sous-espace projectif $\tilde{F}$ de $\Omega/_\Gamma \mathbb{P}^n p$, lui aussi $\mathcal{P}$-invariant ; l'espace $\mathbb{P}^{d+1}_p$ est le relevé à $\mathbb{P}^n$ de $\tilde{F}$. □

Notons $\mathrm{Cône}(p, C(\Lambda_\Gamma)) = \{y \in \mathbb{P}^n \mid y \in (px), x \in C(\Lambda_\Gamma)\}$. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 7.18. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ et $p \in \Lambda_\Gamma$ un point parabolique uniformément borné. Alors le groupe $\mathcal{P} = Stab_\Gamma(p)$ est virtuellement isomorphe à $\mathbb{Z}^d$ et préserve des ellipsoïdes $\mathcal{E}^{int}$ et $\mathcal{E}^{ext}$ tels que*

- $\partial\mathcal{E}^{int} \cap \partial\mathcal{E}^{ext} = \partial\mathcal{E}^{int} \cap \partial\Omega = \partial\mathcal{E}^{ext} \cap \partial\Omega = \{p\}$;
- $\mathcal{E}^{int} \cap Cône(p, C(\Lambda_\Gamma)) \subset \Omega \cap Cône(p, C(\Lambda_\Gamma)) \subset \mathcal{E}^{ext} \cap Cône(p, C(\Lambda_\Gamma))$;
- $\mathcal{E}^{int}$ *est une horoboule de de l'espace hyperbolique* $(\mathcal{E}^{ext}, d_{\mathcal{E}^{ext}})$.

Démonstration. — Le lemme précédent nous fournit un ouvert convexe $\Omega_p \subset \mathbb{P}^{d+1}_p$ dont le groupe $\mathcal{P}$ est un sous-groupe parabolique de rang maximal. Prenons deux ellipsoïdes $\mathcal{P}$-invariants $\mathcal{E}^{int}_p$ et $\mathcal{E}^{ext}_p$ de $\mathbb{P}^{d+1}_p$ comme dans le théorème 7.14.
Il existe donc des ellipsoïdes $\mathcal{P}$-invariants $\mathcal{E}^{int}$ et $\mathcal{E}^{ext}$ de $\mathbb{P}^n$ tels que $\Omega_p \cap \mathcal{E}^{int} = \mathcal{E}^{int}_p$ et $\Omega_p \cap \mathcal{E}^{ext} = \mathcal{E}^{ext}_p$. L'action de $\mathcal{P}$ sur l'adhérence, dans $\mathbb{A}^{n-1}_p$ de $\mathcal{D}_p(C(\Lambda_\Gamma))$ étant cocompacte, on peut, quitte à prendre $\mathcal{E}^{int}_p$ et $\mathcal{E}^{ext}_p$ plus petits ou plus grands (c'est possible car, d'après la remarque 7.15 on en a en fait une famille à un paramètre), faire en sorte que $\mathcal{E}^{int}$ et $\mathcal{E}^{ext}$ vérifient les conditions de l'énoncé. □

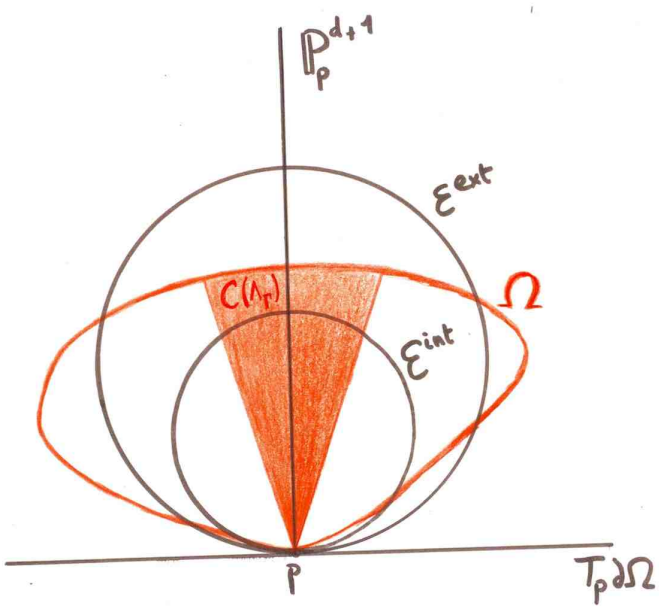

FIGURE 15. Corollaire 7.18

7.3. Constructions des régions paraboliques standards. — Rappelons pourquoi il est agréable que nos groupes paraboliques soient conjugués à des groupes paraboliques de $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ils apparaissent ainsi comme sous-groupes paraboliques d'isométries de l'espace hyperbolique, mais surtout leur action sur $\mathbb{A}^{n-1}_p$ préserve une métrique euclidienne. Le théorème de Bieberbach permet alors de les décrire :

Théorème 7.19 **(Bieberbach, Théorème 5.4.4 de [Rat06])**
Soit $\mathcal{P}$ un sous-groupe discret d'isométries de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$. Il existe une décomposition $\mathcal{P} = T \times R$ du groupe $\mathcal{P}$ et un sous-espace E de dimension d tels que

- *le groupe R est fini et agit trivialement sur E ;*
- *le groupe T est isomorphe à $\mathbb{Z}^d$ et agit cocompactement par translations sur E.*

On va maintenant décrire l'action d'un sous-groupe parabolique "uniformément borné" sur Ω.

Définition 7.20. — Soit $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ fixant le point $p \in \partial\Omega$. Une *bande parabolique standard basée en* p est la projection sur $\partial\Omega$ d'une partie $\mathcal{P}$-invariante fermée, convexe et d'intérieur non vide de $\mathbb{A}_p^{n-1}$, sur laquelle l'action de $\mathcal{P}$ est cocompacte.

Remarquons que, bien que les bandes standards soient définies comme des parties de $\partial\Omega \smallsetminus \{p\}$, elles proviennent de convexes de $\mathbb{A}_p^{n-1}$. On passera souvent d'un point de vue à l'autre, en essayant de rester le plus clair possible.

Proposition 7.21. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ et $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de Γ fixant le point $p \in \partial\Omega$. Les faits suivants sont équivalents :*

(i) le point parabolique p est uniformément borné ;
(ii) le groupe $\mathcal{P}$ est conjugué à un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$;
(iii) il existe une bande parabolique standard pour $\mathcal{P}$.

Démonstration. — $(i) \Leftrightarrow (ii)$ L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ était l'objet de la partie précédente. Réciproquement, si $\mathcal{P}$ est conjugué à un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$, alors il préserve une métrique euclidienne sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$. D'après le théorème 7.19, il existe un sous-espace $\mathbb{A}_p^d$ de dimension $d \geqslant 1$ sur lequel $\mathcal{P}$ agit par translations et cocompactement. L'ensemble $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\}$ (vu dans $\mathbb{A}_p^{n-1}$) est inclus dans un voisinage de $\mathbb{A}_p^d$ de taille r finie. Ce voisinage est un ensemble convexe et il contient donc aussi l'enveloppe convexe de $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\}$ dans $\mathbb{A}_p^{n-1}$, sur laquelle le groupe $\mathcal{P}$ agit encore cocompactement. Autrement dit, le point p est un point parabolique uniformément borné.
$(i) \Rightarrow (iii)$ Si p est un point parabolique uniformément borné, l'action de $\mathcal{P}$ sur l'adhérence de $C(\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\})$ dans $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est cocompacte ; l'adhérence de $C(\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\})$ dans $\mathbb{A}_p^{n-1}$ est donc une bande parabolique standard.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Supposons qu'il existe une bande standard B pour $\mathcal{P}$. En procédant comme dans la preuve du lemme 7.17, on voit que l'ensemble K des espaces affines maximaux inclus dans B, qui ont tous la même direction D, est compact. Ainsi, $\mathcal{P}$ stabilise un sous-espace affine $\mathbb{A}_p^d$ sur lequel il agit cocompactement. On en déduit, d'après le théorème 7.14, que $\mathcal{P}$ est conjugué à un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$. □

Définition 7.22. — Soit $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique uniformément borné de Γ fixant un point p. Si $\mathcal{P}$ est de rang maximal alors une *région parabolique standard basée en* p est une horoboule de centre p. Si $\mathcal{P}$ n'est pas de rang maximal alors une *région parabolique standard basée en* p est l'enveloppe convexe du complémentaire d'une bande standard d'intérieur non vide de $\mathcal{P}$ dans $\overline{\Omega}$.

Dans le cas où Ω est un ellipsoïde, on retrouve les régions paraboliques standards considérées par Bowditch [**Bow93**].

Proposition 7.23. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ et p un point parabolique uniformément borné de Λ_Γ, de stabilisateur $\mathcal{P}$ dans Γ.*
Toute région parabolique standard R est une partie convexe et $\mathcal{P}$-invariante de $\overline{\Omega}$, la variété à bord $(\overline{\Omega} \smallsetminus (R \cup \{p\}))/_{\mathcal{P}}$ est compacte et l'ensemble $R \cap \Omega$ est un ouvert.

En particulier, si $D_{\mathcal{P}}$ est un domaine fondamental convexe localement fini pour l'action de $\mathcal{P}$ sur Ω, alors l'adhérence de $D_{\mathcal{P}} \smallsetminus R$ dans $\overline{\Omega}$ ne contient pas p.

Démonstration. — Si le groupe $\mathcal{P}$ est de rang maximal, c'est évident.
Soit donc B la bande parabolique standard définissant la région parabolique standard R. L'ensemble $\mathcal{D}(D_P)$ est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{A}_p^{n-1}$ et l'intersection de $\mathcal{D}(D_P)$ avec B est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}$ sur B, qui est compact. Il vient alors que l'adhérence de $D_{\mathcal{P}} \smallsetminus R$ dans $\overline{\Omega}$ ne contient pas p. Ce qui montre que la variété à bord $(\overline{\Omega} \smallsetminus (R \cup \{p\}))/_{\mathcal{P}}$ est compacte. Les autres points sont triviaux. □

Remarque 7.24. — Donnons-nous un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ et un point parabolique $p \in \Lambda_\Gamma$ uniformément borné. On peut construire une région parabolique standard pour le stabilisateur $\mathcal{P}$ de p de la façon suivante.
Pour un point x de $C(\Lambda_\Gamma)$, on considère le plan tangent $T_x\mathcal{H}_p(x)$; il sépare Ω en deux ouverts convexes et on appelle $\Omega(x,p)$ celle qui contient p. On obtient une région parabolique standard en choisissant une horoboule H_p basée en p, de bord l'horosphère $\mathcal{H}_p$, et en posant

$$R_{H_p} = \bigcap_{x \in C(\Lambda_\Gamma) \cap \mathcal{H}_p} \Omega(x,p).$$

Plus généralement, on peut considérer les intersections

$$\bigcap_{x \in A \cap \mathcal{H}_p} \Omega(x,p),$$

pour toute partie A convexe et $\mathcal{P}$-invariante. En particulier, on pourrait prendre pour A un ouvert convexe Ω_p préservé par $\mathcal{P}$.

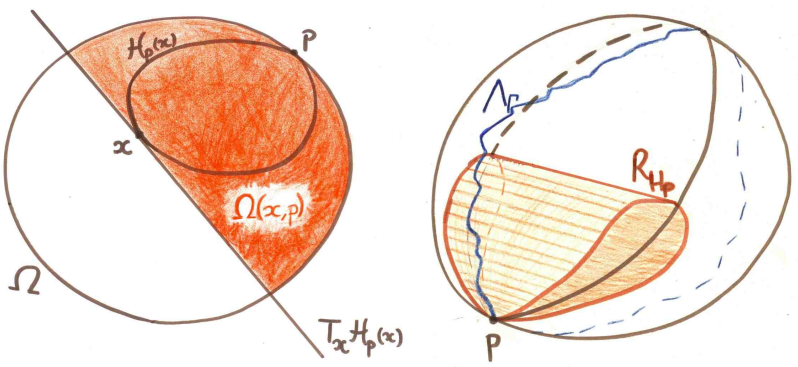

FIGURE 16. Remarque 7.24

De cette dernière remarque, on déduit le

Corollaire 7.25. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ et p un point parabolique uniformément borné de $\partial\Omega$ de stabilisateur $\mathcal{P}$ dans Γ. Il existe une horoboule H basée en p telle que*

$$R_H \cap C(\Lambda_\Gamma) = H \cap C(\Lambda_\Gamma) \subset \Omega_\varepsilon(\mathcal{P}).$$

Démonstration. — Fixons o dans Ω, notons H_t l'horoboule

$$H_t = \{x \in \Omega,\ b_p(o,x) \leqslant t\},$$

et $\mathcal{H}_t$ l'horosphère au bord de H_t. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'action de P sur $C(\Lambda_\Gamma) \cap \mathcal{H}_t$ est cocompacte et on a

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{x\in C(\Lambda_\Gamma)\cap H_t} d_\Omega(x,\gamma x) = 0.$$

On peut donc choisir t_0 assez grand pour que $H_{t_0} \cap C(\Lambda_\Gamma)$ soit inclus dans $\Omega_\varepsilon(\mathcal{P})$.
De cette façon, la région parabolique standard construite comme dans la remarque précédente via

$$R_{H_{t_0}} = \bigcap_{x\in\mathcal{H}_{t_0}\cap C(\Lambda_\Gamma)} \Omega(x,p)$$

vérifie $R_{H_{t_0}} \cap C(\Lambda_\Gamma) = H_{t_0} \cap C(\Lambda_\Gamma)$. □

Notations. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. On notera Π (resp. Π_{ub}) l'ensemble des points paraboliques (resp. paraboliques uniformément bornés) de Γ et pour tout point $p \in \Pi$ on notera $\mathcal{P}_p = \mathrm{Stab}_p(\Gamma)$.

Lemme 7.26. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. À tout point $p \in \Pi_{ub}$, on peut associer une région parabolique standard R_p de telle façon que la famille $(R_p)_{p\in\Pi_{ub}}$ soit strictement invariante, c'est-à-dire :*

- *$\forall\gamma \in \Gamma$ et $\forall p \in \Pi_{ub}$, on a $R_{\gamma p} = \gamma R_p$*
- *$\forall p,q \in \Pi_{ub}$ distincts, $R_p \cap R_q = \varnothing$.*

Démonstration. — Choisissons une famille de points paraboliques $(p_i)_{i\in I}$ uniformément bornés telle, que pour tout $p \in \Pi_{ub}$, il existe un unique $i \in I$ et un élément $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma p_i = p$. Les stabilisateurs $(\mathcal{P}_{p_i})_{i\in I}$ forment une famille de représentants des classes de conjugaisons de sous-groupes paraboliques maximaux uniformément bornés de Γ.

Pour chaque $i \in I$, on fixe une horoboule H_{p_i} basée en p_i comme dans le corollaire 7.25 : on a

$$H_{p_i} \cap C(\Lambda_\Gamma) \subset \Omega_\varepsilon(\mathcal{P}_{p_i}).$$

Notons $\mathcal{H}_{p_i}$ l'horosphère au bord de H_{p_i}. La région parabolique standard donnée par

$$R_{p_i} = \bigcap_{x\in\mathcal{H}_{p_i}\cap C(\Lambda_\Gamma)} \Omega(x,p)$$

vérifie $R_{p_i} \cap C(\Lambda_\Gamma) = H_{p_i}$.

À chaque point $p = \gamma p_i$ de Π_{ub}, on associe l'horoboule $H_p = \gamma H_{p_i}$ et la région parabolique standard $R_p = \gamma R_{p_i}$. La famille $(R_p)_{p\in\Pi_{ub}}$ ainsi construite vérifie alors immédiatement le premier point du lemme. Voyons qu'elle vérifie aussi le second.
Pour cela, prenons deux points distincts $p,q \in \Pi_{ub}$. Les ensembles $\Omega_\varepsilon(\mathcal{P}_p)$ et $\Omega_\varepsilon(\mathcal{P}_q)$ sont disjoints d'après le lemme 6.2 et donc les horoboules H_p et H_q également. La droite (pq) coupe H_p en P et H_q en Q. L'intersection des plans tangents à H_p et H_q en P et Q vérifie (voir section 2.2)

$$T_P H_p \cap T_Q H_q = T_p\partial\Omega \cap T_q\partial\Omega.$$

Ainsi, les ensembles $\Omega(P,p)$ et $\Omega(Q,q)$ sont disjoints et par suite R_p et R_q aussi. □

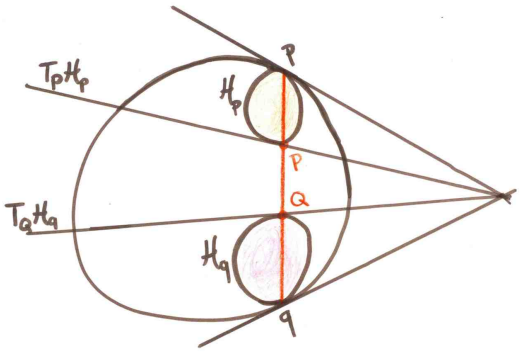

FIGURE 17. Les régions $(R_p)_{p\in\Pi_{ub}}$ sont disjointes

7.4. Adhérence de Zariski de Γ. — Dans [Ben00], Yves Benoist a montré le

Théorème 7.27 **(Benoist [Ben00])**. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe strictement convexe de $\mathbb{P}^n$. Si Γ est un sous-groupe de $Aut(\Omega)$ agissant de façon cocompacte sur Ω, alors l'adhérence de Zariski de Γ est soit $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ soit conjuguée à $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$.*

Nous allons, en utilisant les mêmes techniques, montrer un résultat similaire, valable pour les actions géométriquement finies sur Ω qui ne sont pas convexes-cocompactes. Dans ce dernier cas, le résultat est faux comme nous le verrons dans la partie 10.3.
Signalons en passant que dans [Ben03], Benoist a montré le théorème 7.27 en se passant de l'hypothèse de stricte convexité ; nous renvoyons à son texte pour un énoncé précis.
Notre résultat est le suivant :

Théorème 7.28. — *Soit Γ un sous-groupe discret et irréductible de $Aut(\Omega)$. Si Λ_Γ contient un point parabolique uniformément borné, alors l'adhérence de Zariski de Γ est soit $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ soit conjuguée à $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$.*

Nous utiliserons le résultat 7.29 ci-dessous, dû à Benoist. Pour cela, il nous faut d'abord définir quelques objets.

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple connexe.

Considérons une représentation irréductible ρ de G dans $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$. On dit qu'elle est *proximale* si tout sous-groupe nilpotent N maximal de G stabilise exactement une droite de $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire un point de $\mathbb{P}^n$; cette droite est la *droite de plus haut poids* associée à N. De façon équivalente, la représentation ρ est proximale s'il existe un élément $g \in G$ dont l'image $\rho(g)$ est un élément proximal, c'est-à-dire que sa valeur propre de module maximal est de multiplicité 1.

Supposons donc que la représentation ρ est proximale. Pour chaque élément proximal g, on note x_g^+ le point de $\mathbb{P}^n$ correspondant à sa valeur propre de module maximal. Les représentations proximales ont la propriété remarquable qu'il existe un plus petit fermé invariant ; on l'appelle *l'ensemble limite de G dans $\mathbb{P}^n$*, qu'on note Λ_G.

Comme tout groupe semi-simple connexe, G admet une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$, où K est un sous-groupe compact maximal, A un tore maximal, et N un sous-groupe nilpotent maximal. Si $x \in \mathbb{P}^n$ est la droite de plus haut poids de N, comme A normalise N et que x est l'unique point fixe de N, on a que A fixe aussi x. L'orbite de x sous G est donc celle de x sous le groupe compact K, et à ce titre, c'est une orbite fermée ; elle est donc égale à l'ensemble limite Λ_G.
L'ensemble limite Λ_G est donc l'orbite de la droite de plus haut poids x sous G. Comme x est fixé par A, il existe un élément proximal $g \in A$ tel que $x_g^+ = x$. Cela permet de voir que $\Lambda_G = \{x_g^+,\ g \in G \text{ proximal}\}$.

Lemme 7.29 **(Théorème 1.5 et démonstration du théorème 3.6 de [Ben00])**
Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe irréductible de $Aut(\Omega)$. La composante neutre G de l'adhérence de Zariski de Γ est un groupe de Lie semi-simple et la représentation $\rho : G \to \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ est irréductible et proximale.
De plus, si l'ensemble limite Λ_G de G s'identifie au bord d'un ouvert proprement convexe Ω', c'est-à-dire $\Lambda_G = \partial\Omega'$, alors G est conjugué à $\mathrm{SO_{n,1}}(\mathbb{R})$; si $\Lambda_G = \mathbb{P}^n$ alors $G = \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$.

Où trouver la preuve dans [Ben00]. — Tout d'abord, Benoist montre que l'adhérence de Zariski d'un groupe irréductible Γ qui préserve un ouvert proprement convexe est un groupe de Lie semi-simple ; voir la proposition 3.1 et la remarque qui suit le corollaire 3.2. Ensuite, le théorème 1.5 montre que la représentation de G dans $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ ainsi obtenue est proximale.
Enfin, la démonstration du théorème 3.6 de [Ben00] se divise en deux cas, $\Lambda_G = \partial\Omega'$ ou $\Lambda_G = \mathbb{P}^n$, et conclut comme indiqué dans l'énoncé du lemme. □

Dans la démonstration qui suit, on appellera *ellisphère* de dimension k le bord d'un ellipsoïde de dimension $k+1$.

Démonstration du théorème 7.28. — Soit G la composante connexe de l'adhérence de Zariski de Γ. Le lemme 7.29 montre que G est un groupe de Lie semi-simple et la représentation $\rho : G \to \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ est irréductible et proximale. Si $G = KAN$ est une décomposition d'Iwasawa de G, alors l'ensemble limite de G est $\Lambda_G = K \cdot x$, où x désigne la droite de plus haut poids de N. Λ_G est ainsi une sous-variété algébrique compacte connexe de $\mathbb{P}^n$.
Fixons un point parabolique uniformément borné p de Λ_Γ. Notons $\mathcal{P}_p$ le stabilisateur dans Γ de p et $\mathcal{U}_p$ le sous-groupe de l'adhérence de Zariski de $\mathcal{P}_p$ formé par les éléments unipotents. Le lemme 7.18 montre que $\mathcal{U}_p$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{R}^k$. D'après ce même lemme, il existe un sous-espace F_p de dimension k de l'hyperplan tangent $T_p\partial\Omega$ tel que tout sous-espace H' de dimension $k+1$ de $\mathbb{P}^n$ contenant F_p et intersectant Ω est préservé par $\mathcal{U}_p$; de plus, si z est un point hors de $T_p\partial\Omega$, alors l'ensemble $\mathcal{U}_p \cdot z \cup \{p\}$ est une ellisphère de dimension k. Si z est dans Λ_Γ ou plus généralement dans Λ_G, cette ellisphère est incluse dans Λ_G.

Commençons par le cas simple où le groupe $\mathcal{P}_p$ est de rang maximal. L'ensemble limite Λ_G contient alors une ellisphère de dimension $n-1$. Ainsi, soit Λ_G est précisément cette ellisphère, soit Λ_G est de dimension n, autrement dit, $\Lambda_G = \mathbb{P}^n$. Le lemme 7.29 permet de

conclure comme annoncé.

Traitons maintenant le cas général en supposant que le groupe parabolique $\mathcal{P}_p$ est de rang 1. Dans ce cas, le groupe $\mathcal{U}_p$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{R}$. Soit z un point de $\Lambda_G \smallsetminus T_p\partial\Omega$ et H_z le plan projectif engendré par z et F_p, qui est stable sous $\mathcal{U}_p$. L'ensemble limite Λ_G contient l'ellipse $\mathcal{U}_p \cdot z \cup \{p\}$. Par conséquent, la sous-variété algébrique $\Lambda_G \cap H_z$ de H_z est soit une ellipse soit H_z tout entier, et cette conclusion ne dépend pas de z. Comme Γ est irréductible, le cas $\Lambda_\Gamma \cap H_z = H_z$ implique que $\Lambda_G = \mathbb{P}^n$ et donc que $G = \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ par le lemme 7.29.
Supposons donc que $\Lambda_G \cap H_z$ est une ellipse. Comme le sous-groupe compact maximal K de G agit transitivement sur Λ_G, ceci est en fait valable pour tous points p de Λ_G et z de Λ_Γ : il existe une droite F_p de $T_p\Lambda_G$ telle que pour tout sous-espace H de dimension 2 contenant F_p et non inclus dans $T_p\Lambda_G$, l'intersection $H \cap \Lambda_G$ est une ellipse.

On va montrer que Λ_G est une ellisphère de dimension $n-1$, en utilisant une récurrence, dont l'initialisation vient juste d'être faite.

Prenons $k \geqslant 1$. Supposons que pour tout point p de Λ_G, il existe un sous-espace F_p^k de dimension k de $T_p\Lambda_G$ tel que pour tout sous-espace H de dimension $k+1$ contenant F_p^k et non inclus dans $T_p\Lambda_G$ alors $H \cap \Lambda_G$ est une ellisphère de dimension k.
Voyons que cette propriété est encore vraie au rang $k+1$. Par irréductibilité de Γ, on peut trouver des points $p, q \in \Lambda_\Gamma$ tels que l'espace engendré par la droite F_p et le sous-espace F_q^k soit de dimension $k+2$. En effet, on aurait sinon que l'intersection F de tous les sous-espaces F_q^k, pour $q \in \Lambda_\Gamma$, est non vide. F serait donc un sous-espace projectif préservé par Γ, et donc Γ ne serait pas irréductible.
Notons E l'espace de dimension $k+2$ engendré par F_p et F_q^k. On obtient ainsi deux feuilletages en ellisphères de $E \cap \Lambda_G$ qui n'ont aucune feuille en commun. Cela montre que $E \cap \Lambda_G$ est une ellisphère de dimension $k+1$. L'espace tangent en p à cette ellisphère est l'espace F_{k+1}^p que l'on cherchait. On a le résultat pour tout point de Λ_G en utilisant l'action de K.
Le cas $k = n-1$ permet de conclure que Λ_G est une ellisphère de dimension $n-1$. □

8. Définitions équivalentes de la finitude géométrique

Le but de cette partie est de montrer notre théorème principal, qui donne des définitions équivalentes de la notion de finitude géométrique *sur* Ω. En fait, celles-ci sont précisément celles que Brian Bowditch [**Bow95**] a données, en courbure négative pincée, pour la finitude géométrique telle que définie en 5.11.

Pour être plus précis, et plus juste, la première définition d'action géométriquement finie est due à Lars Alhfors dans [**Ahl66**] dans le contexte de géométrie hyperbolique de dimension 3. Ahlfors demandait à cette action d'avoir un domaine fondamental qui soit un polyèdre avec un nombre fini de côtés. Le temps (sous l'action de Brian Bowditch) a montré que cette définition n'était pas la bonne en dimension supérieure ou égale à 4. Une seconde définition, (GF) dans ce texte, a été proposée par Alan Beardon et Bernard Maskit [**BM74**] pour la dimension 3. William Thurston propose 3 autres définitions dans ses notes

([Thu97] chapitre 8), toujours en dimension 3 ; ce sont les définitions (PEC), (PNC), (VF) de ce texte. La situation devient vraiment claire lorsque Bowditch [Bow93, Bow95] montre qu'en géométrie hyperbolique ou en courbure négative pincée, toutes ces définitions sont équivalentes et ce quelque soit la dimension.

Théorème 8.1. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$, et $M = \Omega/_\Gamma$ l'orbifold quotient correspondante. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(GF) L'action de Γ sur Ω est géométriquement finie sur Ω (i.e les points de Λ_Γ sont des points limites coniques ou des points paraboliques uniformément bornés).

(TF) Le quotient $\mathcal{O}_\Gamma/_\Gamma$ est une orbifold à bord qui est l'union d'un compact et d'un nombre fini de projections de régions paraboliques standards disjointes.

(PEC) La partie épaisse du cœur convexe de M, c'est-à-dire $M^\varepsilon \cap C(M)$, est compacte.

(PNC) La partie non cuspidale du cœur convexe de M, c'est-à-dire $M^{nc}_\varepsilon \cap C(M)$, est compacte.

(VF) Le 1-voisinage du cœur convexe de $\Omega/_\Gamma$ est de volume fini et le groupe Γ est de type fini.

En particulier, le quotient $M = \Omega/_\Gamma$ est sage, *c'est-à-dire l'intérieur d'une orbifold compacte à bord, et par suite le groupe Γ est de présentation finie.*

8.1. Finitude topologique. —

Lemme 8.2. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Soit D un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur Ω. Aucun point de $\partial D \cap \partial\Omega$ n'est un point limite conique.*

Démonstration. — Soient p un point de $\partial D \cap \partial\Omega$ et x un point de D. La demi-droite $[xp[\subset D$ définit une demi-géodésique de $\Omega/_\Gamma$ qui sort de tout compact ; par conséquent, le point p n'est pas un point limite conique. □

Démonstration de (GF)⇒(TF). — Le lemme 4.5 montre que le groupe Γ agit proprement discontinûment sur $\mathcal{O}_\Gamma$. Le lemme 7.26 montre que pour tout point point parabolique p, il existe une région parabolique standard R_p basée en p puisque l'action de Γ est géométriquement finie sur Ω. De plus, le même lemme 7.26 montre que l'on peut choisir ces régions de telle sorte que la famille $(R_p)_{p\in\Pi}$ soit strictement invariante, puisque l'action est géométriquement finie sur Ω (Π désigne l'ensemble des points paraboliques).

On considère la partie K de $\mathcal{O}_\Gamma/_\Gamma$ obtenue en retirant les régions paraboliques standards R_p basées aux points paraboliques p. Il nous reste à montrer que K est compact et que l'ensemble Π des points paraboliques est fini modulo Γ. D'après le lemme 6.2, les composantes connexes du bord de K sont en bijection avec les classes de points paraboliques modulo Γ. Ainsi, si K est compact, alors l'ensemble $\Pi/_\Gamma$ est fini. Il suffit donc de montrer la compacité de K pour conclure.

On considère un domaine fondamental convexe et localement fini D pour l'action de Γ sur Ω. On doit montrer que tout point d'accumulation z dans $\overline{\Omega}$ de $D \smallsetminus \bigcup_{p\in\Pi} R_p$ est un point de $\mathcal{O}_\Gamma$. Comme l'action de Γ sur Ω est géométriquement finie sur Ω, on a $\Lambda_\Gamma \cap \overline{D} \subset \Pi$ d'après le lemme 8.2. Le point z est donc soit dans $\mathcal{O}_\Gamma$ soit un point de Π. La proposition 7.23 montre qu'aucune suite de points de $D \smallsetminus \bigcup_{p\in\Pi} R_p$ ne peut converger vers un point parabolique. □

8.2. Parties épaisse et non cuspidale. — Donnons maintenant une

Preuve de (TF)⇒(PNC)⇒(PEC). — Supposons que Γ vérifie (TF). Il existe alors un compact K de $\mathcal{O}_\Gamma$ et une famille Γ-équivariante $(R_{p_i})_{1\leqslant i\leqslant k}$ de régions paraboliques standards disjointes, basées en des points paraboliques p_i, tels que

$$\mathcal{O}_\Gamma = (\Gamma\cdot K)\bigsqcup \sqcup_{i=1}^k \Gamma\cdot R_{p_i}.$$

Le cœur convexe de M est le quotient $\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega/_\Gamma$, où $\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega$ désigne l'adhérence de $C(\Lambda_\Gamma)$ dans Ω. Or, on a

$$\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega = \Gamma\cdot(K\cap\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega)\bigsqcup \sqcup_{i=1}^k \Gamma\cdot(R_{p_i}\cap\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega);$$

autrement dit, $C(M)$ est l'union d'un compact et des projections des $R_{p_i}\cap\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega$.
Le corollaire 7.21 montre que tous les points paraboliques de Λ_Γ sont uniformément bornés. Par conséquent, il existe pour chaque p_i une horoboule H_{p_i} basée en p_i telle que

$$H_{p_i}\cap C(\Lambda_\Gamma)\subset R_{p_i}\cap C(\Lambda_\Gamma).$$

Le lemme 7.25 montre qu'on peut choisir H_{p_i} de telle façon que

$$H_{p_i}\cap C(\Lambda_\Gamma)\subset \Omega_\varepsilon(\mathrm{Stab}_\Gamma(p_i)).$$

L'ensemble $K_{p_i} = \overline{C(\Lambda_\Gamma)\cap R_{p_i}\smallsetminus H_{p_i}\cap C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega$ est compact, et, en posant

$$K' = K\cap\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega\bigcup \cup_{i=1}^k K_{p_i},$$

on obtient

$$\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega = (\Gamma\cdot K')\bigsqcup \sqcup_{i=1}^k \Gamma\cdot(H_{p_i}\cap\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega).$$

La partie non cuspidale du cœur convexe est un fermé du compact $\Gamma\cdot K'/_\Gamma$, elle est donc compacte. L'implication (TF)⇒(PEC) est immédiate puisque la partie épaisse du cœur convexe est un fermé de la partie non cuspidale du cœur convexe.
Reste à voir que (PEC) entraîne (PNC). Supposons donc que la partie épaisse du cœur convexe soit compacte. Celle-ci étant une orbifold à bord, le nombre de ses composantes connexes de bord est fini. Ainsi, $M_\varepsilon^{nc}\cap C(M)\smallsetminus M^\varepsilon\cap C(M)$ a un nombre fini de composantes connexes. Or, d'après le lemme 6.2, chacune des composantes connexes de $M_\varepsilon^{nc}\cap C(M)\smallsetminus M^\varepsilon\cap C(M)$ est compacte. Il vient que la partie non cuspidale elle-même est compacte. □

Remarque 8.3. — La preuve précédente montre que sous l'hypothèse (TF), le cœur convexe de M se décompose en

$$C(M) = (C(M))_\varepsilon^{nc}\bigsqcup \sqcup_{i=1}^k \left(H_{p_i}\cap\overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega\right)/_{\mathcal{P}_{p_i}},$$

où $(C(M))_\varepsilon^{nc}$ est la partie non cuspidale du cœur convexe, qui est compacte, les $\{p_i\}_{1\leqslant i\leqslant k}$ forment un ensemble de représentants de points paraboliques de Λ_Γ, les $\{H_{p_i}\}$ sont des horoboules basées aux points $\{p_i\}$ et $\mathcal{P}_{p_i} = \mathrm{Stab}_\Gamma(p_i)$.

Bouclons une première boucle :

Preuve de (PNC) ⇒ (GF). — Tout d'abord, comme la partie non cuspidale du cœur convexe de M est compacte, le nombre de ses composantes connexes de bord est fini. Cela entraîne que M a un nombre fini de cusps.

Soient p un point de l'ensemble limite Λ_Γ et x un point dans l'enveloppe convexe $C(\Lambda_\Gamma)$ de Λ_Γ dans Ω. La projection de la demi-droite $[xp)$ sur le quotient $M = \Omega/_\Gamma$ est un

rayon géodésique inclus dans le cœur convexe de M. De deux choses l'une : soit ce rayon géodésique revient un nombre infini de fois dans la partie non cuspidale du cœur convexe, qui est compacte, et donc le point p est un point limite conique ; soit il n'y revient qu'un nombre fini de fois, et il est ainsi ultimement inclus dans une composante connexe de la partie cuspidale de M, puisque M a un nombre fini de cusps ; le point 4 du lemme 6.2 montre alors que le point p est parabolique, nécessairement uniformément borné puisque la partie non cuspidale du cœur convexe est compacte. Le quotient $M = \Omega/_\Gamma$ est donc géométriquement fini. □

8.3. Volume. — Nous allons voir ici que l'hypothèse (VF) est équivalente à la finitude géométrique sur Ω. Remarquons que cette hypothèse en regroupe en fait deux :

(a) le 1-voisinage du cœur convexe de $\Omega/_\Gamma$ est de volume fini et
(b) l'ordre des sous-groupes finis de Γ est borné.

Dans le point (a), on est obligé de considérer le 1-voisinage pour prendre en compte les groupes dont l'action serait réductible : dans ce cas, le cœur convexe est d'intérieur vide et son volume est donc toujours nul. Si on suppose que les groupes sont irréductibles, on peut alors considérer le cœur convexe et non son 1-voisinage.
En géométrie hyperbolique, le point (b) est inutile lorsque le quotient $\Omega/_\Gamma$ est de volume fini ou la dimension est inférieure ou égale à 3. On notera qu'Emily Hamilton [**Ham98**] a construit un sous-groupe Γ_0 de $\mathrm{SO}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que le 1-voisinage du cœur convexe est de volume fini mais tel que le groupe Γ_0 n'est pas de type fini et par suite l'action de Γ_0 n'est pas géométriquement finie sur $\mathbb{H}^4$.

Pour prouver l'équivalence, nous utiliserons le fait que l'on peut minorer de façon uniforme le volume des boules de rayon $r > 0$ d'une géométrie de Hilbert :

Lemme 8.4 **(Colbois - Vernicos Théorème 12 de [CV06])**
Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $r > 0$, il existe une constante $v_n(r) > 0$ tel que pour tout ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^n$, pour tout point x de Ω, on a

$$Vol_\Omega(B_\Omega(x,r)) \geqslant v_n(r) > 0.$$

Bruno Colbois et Constantin Vernicos ont obtenu une inégalité quantitative dépendant du rayon r des boules. Si l'on veut simplement une inégalité qualitative alors il s'agit d'une simple conséquence du théorème de Benzécri :

Démonstration. — Soit $r > 0$ une constante. On rappelle la définition de l'espace des convexes marqués $X^\bullet$:

$$X^\bullet = \{(\Omega, x) \mid \Omega \text{ est un ouvert proprement convexe de } \mathbb{P}^n \text{ et } x \in \Omega\}$$

La fonction f qui a un point (Ω, x) de $X^\bullet$ associe le volume de la boule de (Ω, d_Ω) de centre x et de rayon r est continue, strictement positive, et $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$-invariante. Or, le théorème de Benzécri 2.2 montre que l'action de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur l'espace $X^\bullet$ est propre et cocompacte. La fonction f est donc minorée par une constante strictement positive. □

Nous pouvons maintenant donner une :

Preuve de (GF)⇔(VF). — ⇒ La remarque 8.3 et l'implication (GF)⇒(TF) montrent que le cœur convexe de $\Omega/_\Gamma$ se décompose en

$$C(M) = (C(M))_\varepsilon^{nc} \bigsqcup \sqcup_{i=1}^k \left(H_{p_i} \cap \overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega\right) /_{\mathcal{P}_{p_i}},$$

avec la partie non cuspidale $(C(M))_\varepsilon^{nc}$ compacte.
D'après le corollaire 7.18, il existe pour chaque point p_i, une coupe Ω_{p_i} (i.e l'intersection de Ω avec un sous-espace projectif) de Ω de dimension $d+1 \geqslant 2$, contenant p_i dans son bord, et deux ellipsoïdes tangents à $\partial\Omega_{p_i}$ en p_i qui encadrent Ω. En particulier, le bord $\partial\Omega_{p_i}$ est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ en p_i : le bord est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle est Lipschitz. On peut donc appliquer la proposition A.1 de l'annexe à Ω, qui montre que chaque partie $\left(H_{p_i} \cap \overline{C(\Lambda_\Gamma)}^\Omega\right) /_{\mathcal{P}_{p_i}}$ est de volume fini.
Pour finir, la décomposition précédente montre que le cœur convexe se rétracte sur sa partie non cuspidale. Le quotient $\Omega/_\Gamma$ est donc une orbifold sage ; par conséquent, le groupe Γ est de type fini et même de présentation finie.

⇐ Comme le groupe Γ est de type fini, le lemme de Selberg affirme que, quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que le groupe Γ est sans torsion. Le lemme 8.5 qui suit, appliqué à la partie épaisse du cœur convexe, implique que celle-ci est compacte, soit l'hypothèse (PEC) dont on a vu précédemment qu'elle impliquait (GF). □

Lemme 8.5. — *Soit Γ un sous-groupe discret et <u>sans torsion</u> de Aut(Ω). Si un fermé $\mathcal{F}$ de la partie épaisse de $\Omega/_\Gamma$ est de volume fini alors il est compact.*

Démonstration. — Par définition de la partie épaisse Ω^ε (et car le groupe Γ est sans torsion), si un point x de Ω est dans Ω^ε alors la boule $B(x,\varepsilon)$ s'injecte par projection dans $\Omega/_\Gamma$. Le lemme 8.4 montre que la boule $B(x,\varepsilon)$ a un volume minoré par une constante strictement positive indépendante de x. Par conséquent, on ne peut pas trouver plus de $\mathrm{Vol}(\mathcal{F})/v_n(\varepsilon)$ boules disjointes incluses dans $\mathcal{F}$. Soient $B(x_1,\varepsilon),...,B(x_k,\varepsilon)$ un ensemble maximal de boules disjointes incluses dans $\mathcal{F}$. Par maximalité, la réunion finie des boules $B(x_1,2\varepsilon),...,B(x_k,2\varepsilon)$ recouvre $\mathcal{F}$. L'ensemble $\mathcal{F}$ est donc compact. □

8.4. Cas particuliers. — La notion de finitude géométrique regroupe, comme on va le voir, des situations un peu différentes, selon que le quotient est de volume fini ou infini, selon que le cœur convexe est compact ou pas.

Cas convexe-cocompact. — Lorsque le cœur convexe du quotient $M = \Omega/_\Gamma$ de Ω par le sous-groupe discret Γ de Aut(Ω) est compact, on dit que l'action de Γ sur Ω est *convexe-cocompacte* ou que le quotient M lui-même est *convexe-cocompact*. Le corollaire suivant affirme que ces groupes sont exactement ceux dont l'action est géométriquement finie sur Ω et qui ne contiennent pas de paraboliques.

Corollaire 8.6. — *Soit Γ un sous-groupe discret de Aut(Ω). L'action de Γ sur Ω est convexe-cocompacte si et seulement si tout point de l'ensemble limite Λ_Γ est un point limite conique.*

Démonstration. — Si l'action de Γ sur Ω est convexe-cocompacte alors tout point de l'ensemble limite est un point limite conique (remarque 5.9).

Inversement, si tout point de l'ensemble limite est un point limite conique, alors Γ agit par définition de façon géométriquement finie sur Ω. Mais dans ce cas, la partie non cuspidale du cœur convexe de M est le cœur convexe de M tout entier. Le théorème 8.1 montre qu'alors le cœur convexe de M est compact. □

Action de covolume fini. — Nous obtenons ici la caractérisation suivante des actions de covolume fini.

Corollaire 8.7. — *Soit Γ un sous-groupe discret de type fini de $Aut(\Omega)$. L'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie et $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.*

Démonstration. — Si $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$, alors $C(\Lambda_\Gamma) = \Omega$ et le cœur convexe de $\Omega/_\Gamma$ est $\Omega/_\Gamma$ tout entier. Si l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie, comme $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$, elle est en fait géométriquement finie sur Ω. Le théorème 8.1 montre alors que $\Omega/_\Gamma$ est de volume fini.
Comme le groupe Γ est de type fini, le lemme de Selberg montre qu'on peut supposer que le groupe Γ est sans torsion. Par conséquent, le lemme 8.5 montre que la partie épaisse de $\Omega/_\Gamma$ est compacte. Par conséquent, tout point de $\partial\Omega$ est un point limite conique ou un point parabolique et tout point parabolique est borné et de rang maximal. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 8.8. — *Soit Γ un sous-groupe discret de type fini de $Aut(\Omega)$. L'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si l'action de Γ^* sur Ω^* est de covolume fini.*

Démonstration. — Le corollaire 8.7 montre que si l'action de Γ sur Ω est de covolume fini alors l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie et $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$. La proposition 5.15 montre qu'alors l'action de Γ sur $\partial\Omega^*$ est géométriquement finie et $\Lambda_{\Gamma^*} = \partial\Omega^*$. Le corollaire 8.7 montre enfin que l'action de Γ^* sur Ω^* est de covolume fini. □

9. Hyperbolicité au sens de Gromov

9.1. Gromov-hyperbolicité de $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$. — Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Théorème 9.1. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. L'action de Γ sur Ω est géométriquement finie sur Ω si et seulement si elle est géométriquement finie sur $\partial\Omega$ et l'espace $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ est Gromov-hyperbolique.*

Ce théorème sera conséquence des deux lemmes qui suivent :

Lemme 9.2. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Si l'espace métrique $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ est Gromov-hyperbolique, alors tout point parabolique borné est uniformément borné.*

Démonstration. — Supposons l'espace métrique $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ Gromov-hyperbolique et choisissons un point parabolique borné $p \in \Lambda_\Gamma$.
Fixons une horosphère $\mathcal{H}$ basée en p et notons $(p\Lambda_\Gamma) = \{y \in (xp) \mid x \in \Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\}\}$ (voir figure 18). Comme le point p est un point parabolique borné, le groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(p)$ agit de façon cocompacte sur $\mathcal{H} \cap (p\Lambda_\Gamma)$.

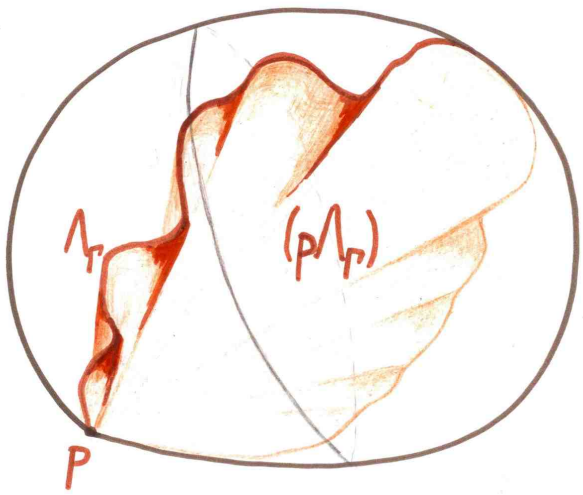

FIGURE 18. L'ensemble $(p\Lambda_\Gamma)$

On peut identifier l'espace des droites $\mathcal{D}_p(C(\Lambda_\Gamma))$ à sa trace sur l'horosphère $\mathcal{H}$. On va voir que $\mathcal{H} \cap C(\Lambda_\Gamma)$ est dans un voisinage borné de $\mathcal{H} \cap (p\Lambda_\Gamma)$, ce qui permettra de conclure que le groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(p)$ agit de façon cocompacte sur $\overline{\mathcal{H} \cap C(\Lambda_\Gamma)}$ et donc aussi sur $\overline{\mathcal{D}_p(C(\Lambda_\Gamma))}$ (l'adhérence est prise respectivement dans Ω et dans $\mathbb{A}_p^{n-1}$).

L'ensemble Λ_Γ est l'ensemble des points extrémaux de $C(\Lambda_\Gamma)$. Ainsi, tout point x de $C(\Lambda_\Gamma)$ est barycentre d'au plus $n+1$ points de Λ_Γ. Considérons d'abord l'ensemble $C_2(\Lambda_\Gamma)$ des points $x \in C(\Lambda_\Gamma)$ qui sont sur une droite (ab) avec $a, b \in \Lambda_\Gamma$ (on s'aidera de la figure 19). Comme l'espace $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ est Gromov-hyperbolique, le point x est dans un voisinage de taille au plus δ (pour d_Ω) de $(pa) \cup (pb)$, pour un certain $\delta > 0$, indépendant de x. Autrement dit, pour tout $x \in \mathcal{H} \cap C_2(\Lambda_\Gamma)$, il existe un point $y \in (p\Lambda_\Gamma)$ tel que $d_\Omega(x, y) < \delta$. Maintenant, le point $z = (py) \cap \mathcal{H} \in (p\Lambda_\Gamma) \cap \mathcal{H}$ est le point de $\mathcal{H}$ le plus proche de y ; en particulier, $d_\Omega(y, z) \leqslant d_\Omega(y, x) < \delta$. L'inégalité triangulaire donne que $d_\Omega(x, z) < 2\delta$. On obtient donc que $C_2(\Lambda_\Gamma) \cap \mathcal{H}$ est dans un voisinage de taille 2δ de $(p\Lambda_\Gamma) \cap \mathcal{H}$. On procède par récurrence pour avoir le résultat pour $C(\Lambda_\Gamma)$.

□

Lemme 9.3. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Si l'action de Γ sur Ω est géométriquement finie sur Ω alors l'espace métrique $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ est Gromov-hyperbolique.*

Remarque 9.4. — La démonstration qui suit est une amélioration de la démonstration du lemme 7.10 de l'article [**Mara**] qui est elle-même une amélioration de la démonstration de la proposition 2.5 de l'article [**Ben04**]. Elle est indépendante des deux précédentes mais leur lecture préalable peut aider.

Démonstration. — On va procéder par l'absurde en supposant qu'il existe une suite de triangles $(x_n y_n z_n)$ de $C(\Lambda_\Gamma)$ dont la taille $\delta_n = \sup\{d_\Omega(u_n, [xz]), d_\Omega(u_n, [y_n z_n])\}$ tend vers l'infini, u_n étant un point du segment $[x_n y_n]$.

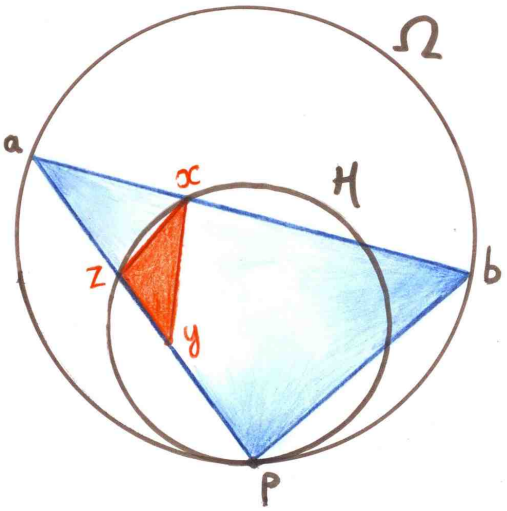

FIGURE 19. Preuve du lemme 9.2

Quitte à extraire, on peut supposer que toutes les suites convergent dans $\overline{C(\Lambda_\Gamma)}$ (l'adhérence est prise dans $\mathbb{P}^n$), et on note x, y, z, u les limites correspondantes.
On va distinguer deux cas.

- Supposons que u est un point de Ω. Dans ce cas, il faut au moins, pour que δ_n puisse tendre vers l'infini, que les points x, y, z soient à l'infini, autrement dit dans Λ_Γ, et qu'ils soient deux à deux distincts. Or, l'ouvert Ω étant strictement convexe, la distance de u à la droite (xz) est finie, d'où une contradiction.
- Supposons maintenant que u est un point de $\partial\Omega$. En utilisant l'action de Γ, on aurait pu, avant extraction, faire en sorte que la suite (u_n) reste dans un domaine fondamental convexe localement fini $D \subset \overline{C(\Lambda_\Gamma)}$. Le point limite $u \in \partial\Omega$ est alors dans l'adhérence du domaine D dans $\mathbb{P}^n$ et dans Λ_Γ ; c'est donc un point parabolique uniformément borné de Λ_Γ, d'après le lemme 8.2.
  Prenons alors deux ellipsoïdes $\mathcal{E}^{int}$ et $\mathcal{E}^{ext}$ comme dans le corollaire 7.18, et notons $C = \text{Cône}(u, C(\Lambda_\Gamma))$. On a
  $$C \cap \mathcal{E}^{int} \subset \Omega \cap C \subset C \cap \mathcal{E}^{ext}.$$
  On considère maintenant une isométrie hyperbolique γ de l'espace hyperbolique $(\mathcal{E}^{ext}, d_{\mathcal{E}^{ext}})$, dont le point répulsif est u et le point attractif un point $v \in C \cap \partial\mathcal{E}^{ext}$ quelconque. On fixe un hyperplan H séparant les points u et v, et on note $H' = \gamma(H)$, en s'arrangeant pour que H et H' intersectent ent $C(\Lambda_\Gamma)$. On note $A = \mathcal{E}^{ext} \cap C(H, H')$, où $C(H, H')$ représente l'ensemble délimité par H et H' et ne contenant ni u ni v.
  Pour chaque élément u_n, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma^{k_n}(u_n) \in A$. On pose $u'_n = \gamma^{k_n}(u_n)$, et on fait de même pour x'_n, y'_n, z'_n. Il revient alors au même, par isométrie, de regarder la suite de triangles $(x'_n y'_n z'_n)$ et de points (u'_n) dans la géométrie de Hilbert définie par $\Omega_n = \gamma^{k_n}(\Omega)$. On va même remplacer le convexe Ω_n par $\Omega'_n = \Omega_n \cap \mathcal{E}^{ext}$, la taille du triangle $(x'_n y'_n z'_n)$ étant plus grande dans Ω'_n que dans Ω_n (voir figure 20).

  Quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que toutes ces suites convergent, et on note x', y', z', u' leurs limites. Il n'est pas dur de voir que $u' \in [uv] \cap A$: en

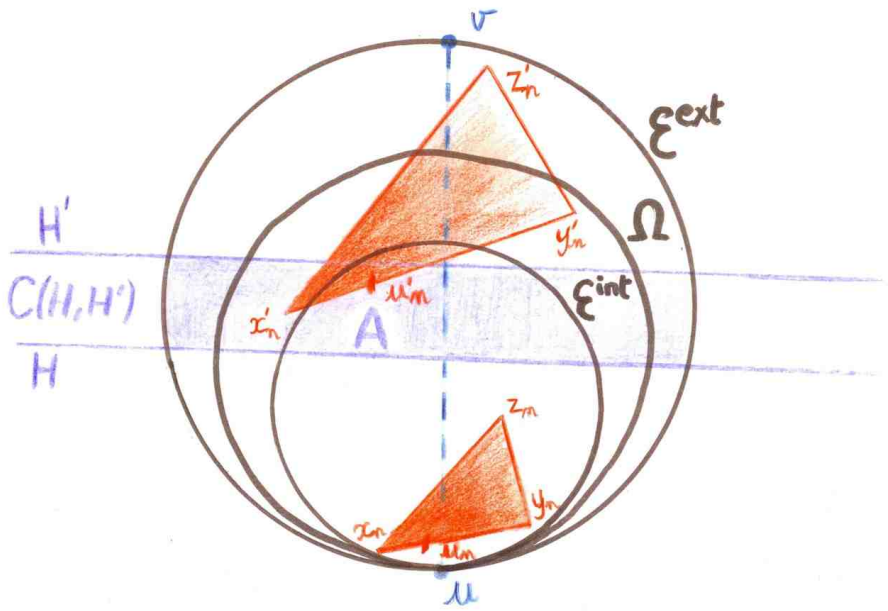

FIGURE 20. Preuve du lemme 9.3

effet, le point u'_n est dans $D_n = \gamma^{k_n}(D)$ et D_n tend vers $[uv]$ car u est un point parabolique uniformément borné. Comme Ω'_n est coincé entre $\gamma^{k_n}(\mathcal{E}^{int})$ et $\mathcal{E}^{ext}$, la suite de convexes (Ω'_n) tend, tout comme $(\gamma^{k_n}(\mathcal{E}^{int}))$, vers $\mathcal{E}^{ext}$. Les points x', y', z' sont quant à eux des point de $\partial\mathcal{E}^{ext}$. Autrement dit, on obtient à la limite un triangle $x'y'z'$ d'un espace hyperbolique, dont la taille est nécessairement bornée. D'où une contradiction avec l'hypothèse $\delta_n \to +\infty$.

□

Comme corollaire de la proposition 9.1, on peut énoncer le résultat suivant dans le cas d'une géométrie de Hilbert Gromov-hyperbolique.

Corollaire 9.5. — *Pour une géométrie de Hilbert* Gromov-hyperbolique*, les notions de finitude géométrique sur Ω et sur $\partial\Omega$ sont équivalentes.*

Notons enfin un autre corollaire dans le cas d'une action de covolume fini.

Corollaire 9.6. — *Si l'ouvert convexe Ω admet un quotient de volume fini, alors l'espace métrique (Ω, d_Ω) est Gromov-hyperbolique.*

9.2. Gromov-hyperbolicité du groupe Γ. — Rappelons qu'un groupe de type fini est Gromov-hyperbolique si son graphe de Cayley, muni de la métrique des mots, l'est. De façon plus générale, nous prendrons la définition suivante de groupe relativement hyperbolique :

Définition 9.7. — Soient Γ un groupe et $(\mathcal{P}_i)_i$ une famille de sous-groupes de type fini de Γ. On dit que le groupe Γ est *relativement hyperbolique relativement aux groupes* $(\mathcal{P}_i)_i$ lorsqu'il existe un espace Gromov-hyperbolique propre X et une action géométriquement finie de Γ sur X (au sens de la définition 5.11) telle que le stabilisateur de tout point parabolique de Λ_Γ est conjugué à l'un des groupes $(\mathcal{P}_i)_i$.

Les résultats de la partie précédente permettent donc d'affirmer le fait suivant.

Proposition 9.8. — *Si Γ est un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ agissant de façon géométriquement finie sur Ω, alors le groupe Γ est relativement hyperbolique relativement à ses sous-groupes paraboliques maximaux.*

En fait, on peut changer l'hypothèse d'action géométriquement finie sur Ω en action géométriquement finie sur $\partial\Omega$ via le travail d'Asli Yaman. Elle a montré le théorème suivant qui donne une caractérisation topologique des groupes relativement hyperboliques (dans [**Yam04**]).

Théorème 9.9 **(Yaman [Yam04])**. — *Soient M un compact parfait non vide et métrisable , et Γ un groupe. Supposons que le groupe Γ agit par une action de convergence sur M tel que tout point de M est un point limite conique ou un point parabolique borné, que l'ensemble des points paraboliques modulo l'action de Γ est fini et que les stabilisateurs des points paraboliques sont de type fini. Alors le groupe Γ est relativement hyperbolique relativement aux stabilisateurs de ses points paraboliques.*

On obtient alors le résultat *a priori* plus satisfaisant :

Proposition 9.10. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$ agissant de façon géométriquement finie sur $\partial\Omega$. Alors le groupe Γ est relativement hyperbolique relativement à ses sous-groupes paraboliques maximaux.*

Démonstration. — On prend pour compact M l'ensemble limite Λ_Γ. Le théorème 4.9 montre que l'action de Γ sur Λ_Γ est une action de convergence (définition 4.7).
On note P un ensemble de représentants des points paraboliques modulo Γ. L'ensemble P est fini. En effet, l'action du stabilisateur de tout point parabolique p sur $\Lambda_\Gamma \setminus \{p\}$ est cocompacte, on peut donc choisir l'ensemble P de telle façon que p soit isolé dans P. On peut donc faire en sorte que tous les points de P soient isolés, auquel cas P de est un sous-ensemble discret du compact Λ_Γ : P est donc fini.
Il nous reste à vérifier que les stabilisateurs des points paraboliques sont de type fini. Or, tout sous-groupe discret d'un groupe de Lie nilpotent connexe est de type fini. Ainsi, les sous-groupes paraboliques de Γ sont de type fini : c'est le corollaire 2 de la partie 2.10 du livre [**Rag72**] de Raghunathan. □

10. Petites dimensions

10.1. La dimension 2. — En dimension 2, la situation est beaucoup plus simple qu'en dimension supérieure. La proposition suivante a presque été montré par l'un des auteurs dans [**Marb**].

Théorème 10.1. — *Soient $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ et Γ un sous-groupe discret de $Aut(\Omega)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) le cœur convexe est de volume fini ;
(2) l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie ;
(3) l'action de Γ sur Ω est géométriquement finie ;
(4) le groupe Γ est de type fini.

Éléments de démonstration. — L'implication (2)⇒(3) est évidente puisqu'ici le bord de Ω est de dimension 1. L'implication (3)⇒(4) est une partie du théorème 8.1.

L'implication (4)⇒(1), a déjà été montrée dans [**Marb**] (proposition 6.16) et on ne reproduirera pas la démonstration de ce résultat ici. Remarquons simplement que la classification des surfaces (compactes ou non) montre que le groupe fondamental d'une surface est de type fini si et seulement si cette dernière est homéomorphe à une surface compacte à laquelle on a enlevé un nombre fini de points. Le reste de la démonstration est une étude attentive de la géométrie des bouts d'un tel quotient dans le cadre de la géométrie de Hilbert.

Pour montrer l'implication (1)⇒(2), on montre plutôt l'implication (1)⇒(4). En effet, si un groupe Γ vérifie (1) et (4) alors il vérifie l'hypothèse (VF) ; par conséquent, le théorème 8.1 montre que Γ vérifie (3), qui entraîne (2).
C'est le théorème 5.22 de [**Marb**] qui montre que si le groupe Γ vérifie (1), alors il est de type fini. Il serait un peu long de reproduire ici la démonstration de ce résultat. Mais l'idée principale est que pour une géométrie de Hilbert de dimension 2, il existe une borne uniforme strictement positive minorant l'aire des triangles idéaux (ce résultat est dû à Constantin Vernicos, Patrick Verovic et Bruno Colbois dans [**CVV04**]) ; c'est un analogue du fait que tout triangle idéal du plan hyperbolique a une aire égale à π. □

10.2. La dimension 3. — Le résultat principal en dimension 3 est le suivant, qui peut être prouvé "à la main".

Proposition 10.2. — *Soient $\Omega \subset \mathbb{P}^3$ et $\mathcal{P}$ un sous-groupe parabolique de $Aut(\Omega)$ fixant le point $p \in \partial\Omega$. Alors le groupe $\mathcal{P}$ préserve un ellipsoïde $\mathcal{E}$ tangent à Ω en p. $\mathcal{P}$ est donc conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{R})$; en particulier, $\mathcal{P}$ est virtuellement isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$.*

Démonstration. — Soit γ un élément parabolique de $\mathcal{P}$, qu'on voit comme matrice de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$. La décomposition de Jordan de γ permet d'écrire γ comme le produit d'une matrice unipotente γ_u et d'une matrice elliptique. Le paragraphe 7.2 montre que la seule possibilité pour γ_u est la matrice suivante :

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{H}}_{p},$$

où H l'hyperplan tangent à Ω en p. Par conséquent, l'action de γ_u (resp. γ) sur l'espace $\mathbb{A}^2_p$ est une action par translation (resp. vissage). La partie linéaire de l'action de Γ sur $\mathbb{A}^2_p$ est incluse dans un groupe compact. Il vient que le groupe Γ préserve un produit scalaire sur $\mathbb{A}^2_p$.

On en déduit que $\mathcal{P}$ est inclus dans un conjugué de $\mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ préserve un ellipsoïde, qui est nécessairement tangent à Ω en p. □

Cela permet d'obtenir le

Corollaire 10.3. — *En dimension* 3*, les notions de finitude géométrique sur* Ω *et sur* $\partial\Omega$ *sont équivalentes.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que, étant donné une action géométriquement finie d'un groupe Γ sur $\partial\Omega$, tout point parabolique borné $p \in \Lambda_\Gamma$ est en fait uniformément borné. Or, on vient de voir que les sous-groupes paraboliques sont, en dimension 3, conjugués dans $\mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{R})$. Le corollaire 7.21 permet de conclure. □

10.3. Un contre-exemple. — Pour trouver un exemple d'une action géométriquement finie sur $\partial\Omega$ mais pas géométriquement finie sur Ω, il faudra, d'après les deux parties précédentes, chercher en dimension supérieure ou égale à 4. On a vu aussi que, dès que la géométrie de Hilbert était Gromov-hyperbolique, les deux notions étaient équivalentes. Enfin, on a vu dans le corollaire 7.21 que, si le stabilisateur d'un point parabolique borné était conjugué dans $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors ce point était en fait uniformément borné.
On peut résumer tout cela dans l'énoncé suivant :

Proposition 10.4. — *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $Aut(\Omega)$*. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'action de Γ *sur* Ω *est géométriquement finie ;*
(ii) l'action de Γ *sur* $\partial\Omega$ *est géométriquement finie et les sous-groupes paraboliques de* Γ *sont conjugués à des sous-groupes paraboliques de* $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$ *;*
(iii) l'action de Γ *sur* $\partial\Omega$ *est géométriquement finie et l'espace métrique* $(C(\Lambda_\Gamma), d_\Omega)$ *est Gromov-hyperbolique.*

On notera au passage le corollaire suivant :

Corollaire 10.5. — *L'action de* Γ *sur* Ω *est géométriquement finie si et seulement si l'action de* Γ^* *sur* Ω^* *est géométriquement finie.*

Démonstration. — On sait déjà que l'action de Γ sur $\partial\Omega$ est géométriquement finie si et seulement si l'action de Γ^* sur $\partial\Omega^*$ est géométriquement finie (proposition 5.15). Or, le dual d'un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$ puisque $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$ est autodual. □

On en vient à présent aux contre-exemples annoncés dans l'introduction :

Proposition 10.6. — *Il existe un ouvert proprement convexe* Ω *de* $\mathbb{P}^4$*, strictement convexe et à bord* $\mathcal{C}^1$*, qui admet une action d'un sous-groupe discret d'automorphismes* Γ *dont l'action est géométriquement finie sur* $\partial\Omega$ *mais pas géométriquement finie sur* Ω*.*

Proposition 10.7. — *Il existe un ouvert proprement convexe* Ω *de* $\mathbb{P}^4$*, strictement convexe et à bord* $\mathcal{C}^1$*, et un sous-groupe discret* Γ *de* $Aut(\Omega)$ *dont l'action est convexe-cocompacte et l'adhérence de Zariski n'est ni* $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})$ *ni conjuguée à* $\mathrm{SO}_{4,1}(\mathbb{R})$*.*

Construction du contre-exemple via les représentations sphériques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*.* —
L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ induit une action ρ_d de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur l'espace vectoriel V_d des polynômes homogènes de degré d en deux variables, qui est de dimension $d+1$. De plus, toute représentation irréductible de dimension finie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est équivalente à l'une des représentations $\rho_d : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(V_d)$ pour un $d \geqslant 1$.

Il est facile de voir que ρ_d préserve un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}(V_d)$ si et seulement si d est pair. En effet, si d est impair alors $\rho_d(-Id_2) = -Id_{V_d}$: par conséquent, ρ_d ne peut préserver d'ouvert proprement convexe. Notons $\mathcal{C}_{min}$ l'ensemble des polynômes convexes de V_d et $\mathcal{C}_{max}$ l'ensemble des polynômes positifs de V_d. Ce sont deux cônes proprement convexes de V_d. Ils sont non vides si et seulement si d est pair et $\mathcal{C}_{min}$ est inclus dans $\mathcal{C}_{max}$. En fait, $\mathcal{C}_{max}$ est le cône dual de $\mathcal{C}_{min}$. Enfin, tous deux sont préservés par ρ_d. En fait, on peut même montrer que tout cône convexe proprement convexe de V_d préservé par ρ_d contient $\mathcal{C}_{min}$ et est contenu dans $\mathcal{C}_{max}$. Vinberg étudie le cas d'un groupe semi-simple quelconque dans [**Vin80**], on pourra aussi trouver un énoncé dans l'article [**Ben00**], proposition 4.7.

On notera $\Omega_0 = \mathbb{P}(\mathcal{C}_{min})$ et $\Omega_\infty = \mathbb{P}(\mathcal{C}_{max})$. Il n'est pas difficile de voir que $\Omega_0 \neq \Omega_\infty$ si et seulement si $d \geqslant 4$. Par conséquent, on peut introduire l'ouvert $\Omega_r = \{x \in \Omega_\infty \,|\, d_{\Omega_\infty}(x, \Omega_0) < r\}$, c'est-à-dire le r-voisinage de Ω_0 dans $(\Omega_\infty, d_{\Omega_\infty})$. La proposition suivante montre que les Ω_r sont convexes.

Lemme 10.8 **(Corollaire 1.10 de [CLT11])**. — *Le r-voisinage (pour d_Ω) d'une partie convexe d'un ouvert proprement convexe est convexe.*

Nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 10.9. — *Si $d = 4$ et $r \neq 0, \infty$ alors les ouverts proprement convexes Ω_r sont strictement convexes et à bord $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration de la proposition 10.6 et de la proposition 10.7

Choisissons un réel $r > 0$ et posons $\Omega = \Omega_r$.

Pour la proposition 10.6, il suffit de prendre un réseau Γ non cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et de remarquer que tout élément parabolique de $\rho_4(\Gamma)$ est conjugué à un bloc de Jordan de taille 5. L'action de $\rho_4(\Gamma)$ est bien sûr géométriquement finie sur $\partial\Omega$ mais la proposition 10.4 (ii) montre qu'elle n'est pas géométriquement finie sur Ω. On pourra même remarquer que l'enveloppe convexe de $\Lambda_\Gamma \smallsetminus \{p\}$ dans $\mathbb{A}^3_p$ est $\mathbb{A}^3_p$ tout entier (où p est n'importe quel point de Λ_Γ ; on rappelle que Λ_Γ est un cercle d'un point de vue topologique).

Pour la proposition 10.7, il suffit de prendre un réseau Γ' cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou un sous-groupe discret Γ' convexe-cocompact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dans tous les cas, l'action de $\rho_4(\Gamma')$ sera convexe-compacte mais l'adhérence de Zariski de Γ' dans $\mathrm{SL}_5(\mathbb{R})$ est $\rho_4(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ qui est incluse dans $\mathrm{SO}_{2,3}(\mathbb{R})$. On rappelle que la représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de dimension $2n$ est incluse dans le groupe symplectique alors que celle de dimension $2n+1$ est incluse dans $\mathrm{SO}_{n,n+1}(\mathbb{R})$. □

Nous allons avoir besoin de plusieurs lemmes pour démontrer la proposition 10.9.

Lemme 10.10. — *On suppose d pair. Si γ est un élément elliptique non trivial de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire qui n'est pas dans le centre) alors $\rho_d(\gamma)$ possède un unique point fixe sur $\mathbb{P}(V_d)$. En particulier, tout point fixe d'un élément elliptique appartient à Ω_0.*

Démonstration. — Si γ est un élément elliptique de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ non trivial alors les valeurs propres de γ s'écrivent $e^{\pm i\theta}$ pour un certain $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Il vient alors que les valeurs propres de $\rho_4(\gamma)$ sont les nombres : $e^{di\theta}, \cdots, 1, \cdots, e^{-di\theta}$. Par conséquent, $\rho_d(\gamma)$ fixe un unique point de $\mathbb{P}(V_d)$. Il nous reste à montrer que ce point est dans Ω_0.

Le sous-groupe à 1-paramètre K engendré par γ est un sous-groupe compact de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de dimension 1. Le groupe K préserve l'ouvert proprement convexe Ω_0, il préserve donc aussi l'isobarycentre de toute orbite. Ainsi, l'unique point fixe de $\rho_d(\gamma)$ appartient à Ω_0. □

Lemme 10.11. — *On suppose d pair. L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\Omega_\infty \smallsetminus \Omega_0$ est propre et libre.*

Démonstration. — L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur Ω_∞ est propre, donc l'ensemble des points fixes des éléments hyperboliques et paraboliques de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est dans le complémentaire de Ω_∞. Par suite, l'action de de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\Omega_\infty \smallsetminus \Omega_0$ est propre et libre via le lemme 10.10. □

Lemme 10.12. — *On suppose que $d = 4$. Tout ouvert proprement convexe préservé par ρ_d est l'un des Ω_r pour $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. En particulier, le dual d'un Ω_r est un certain $\Omega_{r'}$ et il existe un unique r_0 tel que Ω_{r_0} soit autodual. Enfin, tous les Ω_r sont strictement convexes et à bord $\mathcal{C}^1$, si $r \neq 0, \infty$.*

Démonstration. — Le lemme 10.11 montre que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\partial\Omega_r \smallsetminus \Lambda_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \subset \Omega_\infty \smallsetminus \Omega_0$ est libre. Or, si $d = 1$ le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et la sous-variété $\partial\Omega_r$ ont la même dimension (3) : cela montre que les orbites de cette action sont ouvertes dans $\partial\Omega_r \smallsetminus \Lambda_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. De plus, comme on a retiré l'ensemble limite de $\partial\Omega_r$, les orbites sont fermées. Enfin, comme la variété $\partial\Omega_r$ est une 3-sphère et l'ensemble limite est un cercle dont le plongement est donné par la courbe Veronese, l'espace $\partial\Omega_r \smallsetminus \Lambda_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ est donc connexe. Par suite, l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\partial\Omega_r \smallsetminus \Lambda_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} \subset \Omega_\infty$ est transitive.
Ceci montre que tout ouvert proprement convexe préservé par ρ_d est l'un des Ω_r. Le dual d'un Ω_r est donc un $\Omega_{r'}$. L'existence d'un unique Ω_r autodual est simplement due au fait que la dualité renverse les inclusions.
On se donne un $r \neq \infty$. Si Ω_r n'est pas strictement convexe, il existe un point de $\partial\Omega_r \smallsetminus \Lambda_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ qui n'est pas un point extrémal. Or, l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\partial\Omega_r \smallsetminus \Lambda_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ est transitive : aucun point de $\partial\Omega_r \smallsetminus \Lambda_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ n'est extrémal et donc $\Omega_r = \Omega_0$.
Enfin, si $r \neq 0, \infty$, le dual de Ω_r est un $\Omega_{r'}$ avec $r' \neq 0, \infty$. Comme $\Omega_{r'}$ est strictement convexe, le bord de Ω_r est de classe $\mathcal{C}^1$. □

Remarque 10.13. — On a vu que Ω_0 n'était pas strictement convexe. Une étude attentive de ρ_d permet de voir que Ω_∞ n'est pas strictement convexe. En effet, tout élément hyperbolique γ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ possède 5 valeurs propres réelles distinctes pour son action sur V_d. On peut vérifier que la droite propre p^0_γ associée à la troisième (si elles sont rangées par ordre croissant) appartient au bord de Ω_∞ mais pas à l'ensemble limite. Enfin, on peut vérifier que le segment $[p^0_\gamma p^+_\gamma]$ est inclus dans le bord de Ω_∞, où p^+_γ désigne le point fixe attractif de γ. Par conséquent, Ω_0 et Ω_∞ ne sont ni strictement convexes ni à bord $\mathcal{C}^1$.

Démonstration de la proposition 10.9. — Elle est incluse dans le lemme 10.12. □

Appendice A
Sur le volume des pics, par les auteurs et Constantin Vernicos

Le but de cette annexe est de prouver le résultat suivant.

Proposition A.1. — *Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, p un point du bord $\partial\Omega$ en lequel $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons qu'il existe une coupe de Ω de dimension $\geqslant 2$, contenant p en son bord, et dont le bord est $\mathcal{C}^\alpha$ en p, pour un certain $\alpha > 1$.*
Alors tout cône C de sommet p et de base $B \subset \Omega$ compacte est de volume fini.

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ euclidien. Rappelons que le volume de Busemann Vol_Ω de la géométrie de Hilbert (Ω, d_Ω) est donné par

$$d\mathrm{Vol}_\Omega(x) = \frac{v_n}{\mathrm{Vol}(B(T_x\Omega))} d\mathrm{Vol},$$

où Vol est le volume de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ et v_n le volume de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, un simple calcul montre le

Lemme A.2. — *(i) Soit $\Omega = (-a, a)$, avec $a > 1$. Le volume de Busemann est donné au point $x \in \Omega$ par*

$$d\,Vol_\Omega(x) = \frac{a}{a^2 - x^2} dx.$$

(ii) Soit $\Omega = (0, +\infty)$. Le volume de Busemann est donné au point $x \in \Omega$ par

$$d\,Vol_\Omega(x) = \frac{2dx}{x}.$$

Le lemme suivant nous sera également bien utile :

Lemme A.3. — *Soient $n \geqslant 1$ et Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, de base $(e_1, \cdots, e_n)$. Notons, pour $x \in \Omega$, $\Omega_i(x) = \Omega \cap (x + \mathbb{R} \cdot e_i)$. Il existe $K_n > 0$ tel que, pour tout $x \in \Omega$,*

$$Vol(B(T_x\Omega)) \geqslant K_n \prod_{i=1}^n Vol_i(B(T_x\Omega_i(x))),$$

en notant Vol_i le volume de Lebesgue de $\mathbb{R}.e_i$. Autrement dit, il existe $\kappa_n > 0$ tel que, pour tout $x \in \Omega$,

$$d\,Vol_\Omega \leqslant \kappa_n d\,Vol_{\Omega_1(x)} \cdots d\,Vol_{\Omega_n(x)}.$$

Démonstration. — Il suffit de voir que la boule unité tangente $B(T_x\Omega)$ contient toujours l'enveloppe convexe des points $z_i^\pm = \partial B(T_x\Omega) \cap \mathbb{R}_\pm \cdot e_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. □

Démonstration de la proposition A.1. — Si une telle coupe existe, il en existe en particulier une de dimension 2. On peut donc supposer qu'il existe une telle coupe de dimension 2.

Maintenant, voyons qu'il suffit de prouver le résultat pour un ouvert convexe bien choisi et un cône assez général, qui sont les suivants. Prenons le point p pour origine, pour convexe l'ensemble

$$\Omega = \{x_n > |x_1|^\alpha + \sum_{i=2}^{n-1} |x_i|\},$$

et pour cône

$$C = \{x_n < \frac{1}{2},\ x_n > 2\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|\}.$$

C'est une situation assez générale au sens où, étant donné un convexe dont le bord est $\mathcal{C}^1$ au point p et un cône de sommet p comme dans l'énoncé, on peut choisir une carte

affine, une norme euclidienne et des coordonnées, avec origine p, de telle façon que, au moins au voisinage de p, le convexe contienne un convexe du type précédent et le cône soit contenu dans un cône du type précédent.

On peut maintenant faire le calcul. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, notons $\Omega_k(x) = \Omega \cap (x + \mathbb{R}.e_k)$ la coupe du convexe Ω selon e_k, qui est donc un convexe de dimension 1.
Pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $\Omega_k(x)$ est un segment de demi-longueur

$$a_k(x) = x_n - |x_1|^\alpha - \sum_{i=2, i\neq k}^{n-1} |x_i|.$$

Le lemme A.2 nous donne que

$$d\mathrm{Vol}_{\Omega_k(x)} = \frac{a_k(x)}{a_k(x)^2 - x_k^2}\, dx_k = \frac{a_k(x)}{(a_k(x) - |x_k|)(a_k(x) + |x_k|)}\, dx_k \leqslant \frac{dx_k}{a_k(x) - |x_k|}.$$

Si x est dans C, on a $\sum_{i=1}^{n-1} |x_i| < \frac{x_n}{2}$, et donc

$$a_k(x) - |x_k| = x_n - |x_1|^\alpha - \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \geqslant x_n - \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \geqslant \frac{x_n}{2}.$$

Au final,

$$d\mathrm{Vol}_{\Omega_k(x)} \leqslant \frac{2dx_k}{x_n}.$$

De même, le convexe $\Omega_1(x)$ est un segment de demi-longueur

$$a_1(x) = (x_n - \sum_{i=2}^{n-1} |x_i|)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et on a donc, pour $x \in C$,

$$d\mathrm{Vol}_{\Omega_1(x)} = \frac{a_1(x)}{(a_1(x) - |x_1|)(a_1(x) + |x_1|)}\, dx_1 \leqslant \frac{dx_1}{(x_n - \sum_{i=2}^{n-1} |x_i|)^{\frac{1}{\alpha}} - |x_1|} \leqslant \frac{dx_1}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - |x_1|}.$$

Enfin $\Omega_n(x) = (0, +\infty)$ et donc, pour $x \in C$,

$$d\mathrm{Vol}_{\Omega_n(x)} = \frac{2dx_n}{x_n}.$$

Du lemme A.3, on tire ainsi

$$d\mathrm{Vol}_\Omega(x) \leqslant \kappa_n d\mathrm{Vol}_{\Omega_1(x)} \cdots d\mathrm{Vol}_{\Omega_n(x)} \leqslant \kappa_n \frac{2^{n-2}}{(x_n)^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - |x_1|}\, dx$$

L'intégrale sur C se majore alors ainsi, en utilisant les symétries, K et K' étant des constantes qui grandissent :

$$\int_C d\mathrm{Vol}_\Omega \leqslant K \int_{x_n=0}^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \int_{x_k=0}^{\frac{x_n}{2}} \frac{1}{(x_n)^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - |x_1|}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Ainsi,

$$\int_C d\mathrm{Vol}_\Omega \leqslant K' \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{x_n}{2}} \frac{1}{x_n} \frac{1}{\left(\frac{x_n}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - |x_1|} \, dx_1 \, dx_n = K' \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x_n} \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{x_n}{2}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}} \, dx_n.$$

Cette dernière intégrale est finie puisqu'en 0, l'intégrande est équivalente à $\frac{1}{(x_n)^{\frac{1}{\alpha}}}$, et $\frac{1}{\alpha} < 1$.

□

Références

[Ahl66] Lars V. Ahlfors. Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55 :251–254, 1966.

[Ben] Yves Benoist. Sous-groupes discrets des groupes de lie. 1997 European Summer School in Group Theory, Luminy July 7-18.

[Ben60] Jean-Paul Benzécri. Sur les variétés localement affines et localement projectives. *Bull. Soc. Math. France*, 88 :229–332, 1960.

[Ben00] Yves Benoist. Automorphismes des cônes convexes. *Invent. Math.*, 141(1) :149–193, 2000. URL : http://dx.doi.org/10.1007/PL00005789, doi:10.1007/PL00005789.

[Ben03] Yves Benoist. Convexes divisibles. II. *Duke Math. J.*, 120(1) :97–120, 2003. URL : http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-03-12014-1, doi:10.1215/S0012-7094-03-12014-1.

[Ben04] Yves Benoist. Convexes divisibles. I. In *Algebraic groups and arithmetic*, pages 339–374. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004.

[Ben05] Yves Benoist. Convexes divisibles. III. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(5) :793–832, 2005.

[Ben06a] Yves Benoist. Convexes divisibles. IV. Structure du bord en dimension 3. *Invent. Math.*, 164(2) :249–278, 2006. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s00222-005-0478-4, doi:10.1007/s00222-005-0478-4.

[Ben06b] Yves Benoist. Convexes hyperboliques et quasiisométries. *Geom. Dedicata*, 122 :109–134, 2006. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s10711-006-9066-z, doi:10.1007/s10711-006-9066-z.

[Bir71] David Birkes. Orbits of linear algebraic groups. *Ann. of Math. (2)*, 93 :459–475, 1971.

[BK53] Herbert Busemann and Paul J. Kelly. *Projective geometry and projective metrics*. Academic Press Inc., New York, N. Y., 1953.

[BM74] Alan F. Beardon and Bernard Maskit. Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra. *Acta Math.*, 132 :1–12, 1974.

[Bow93] Brian H. Bowditch. Geometrical finiteness for hyperbolic groups. *J. Funct. Anal.*, 113(2) :245–317, 1993. URL : http://dx.doi.org/10.1006/jfan.1993.1052, doi:10.1006/jfan.1993.1052.

[Bow95] Brian H. Bowditch. Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Math. J.*, 77(1) :229–274, 1995. URL : http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-95-07709-6, doi:10.1215/S0012-7094-95-07709-6.

[Bus55] Herbert Busemann. *The geometry of geodesics*. Academic Press Inc., New York, N. Y., 1955.

[CG00] J.-P. Conze and Y. Guivarc'h. Limit sets of groups of linear transformations. *Sankhyā Ser. A*, 62(3) :367–385, 2000. Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999).

[Cho94] Suhyoung Choi. Convex decompositions of real projective surfaces. II. Admissible decompositions. *J. Differential Geom.*, 40(2) :239–283, 1994. URL : http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.jdg/1214455537.

[Cho10] Suhyoung Choi. The convex real projective manifolds and orbifolds with radial ends : the openness of deformations. Preprint (11/2010). URL : http://arxiv.org/abs/1011.1060, arXiv:1011.1060.

[CLT11] Daryl Cooper, Darren Long, and Stephan Tillmann. On convex projective manifolds and cusps. Preprint (09/2011). URL : http://arxiv.org/abs/1109.0585, arXiv:1109.0585.

[CM1] Mickaël Crampon and Ludovic Marquis. Un lemme de kazhdan-margulis-zassenhaus pour les géométries de hilbert. *A paraitre aux annales Blaise Pascal*. URL : http://arxiv.org/abs/1106.3156, arXiv:1106.3156.

[CM3] Mickaël Crampon and Ludovic Marquis. Le flot géodésique des quotients geometriquement finis des géométries de Hilbert. *A paraitre dans Pacific journal of Mathematics*. URL : http://arxiv.org/abs/1204.5005, arXiv:1204.5005.

[CV06] Bruno Colbois and Constantin Vernicos. Bas du spectre et delta-hyperbolicité en géométrie de Hilbert plane. *Bull. Soc. Math. France*, 134(3) :357–381, 2006.

[CVV04] B. Colbois, C. Vernicos, and P. Verovic. L'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert. *Enseign. Math. (2)*, 50(3-4) :203–237, 2004.

[dlH93] Pierre de la Harpe. On Hilbert's metric for simplices. In *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, volume 181 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 97–119. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993. URL : http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511661860.009, doi:10.1017/CBO9780511661860.009.

[Gol90] William Goldman. Convex real projective structures on compact surfaces. *J. Differential Geom.*, 31(3) :791–845, 1990. URL : http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.jdg/1214444635.

[Gol10] William Goldman. Projective geometry on manifolds. Note (2010). URL : http://dx.doi.org/10.1017/S0143385700005095.

[Gre66] L. Greenberg. Fundamental polyhedra for kleinian groups. *Ann. of Math. (2)*, 84 :433–441, 1966.

[Gui90] Yves Guivarc'h. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(3) :483–512, 1990. URL : http://dx.doi.org/10.1017/S0143385700005708, doi:10.1017/S0143385700005708.

[Ham98] Emily Hamilton. Geometrical finiteness for hyperbolic orbifolds. *Topology*, 37(3) :635–657, 1998. URL : http://dx.doi.org/10.1016/S0040-9383(97)00043-8, doi:10.1016/S0040-9383(97)00043-8.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[Kap07] Michael Kapovich. Convex projective structures on Gromov-Thurston manifolds. *Geom. Topol.*, 11 :1777–1830, 2007. URL : http://dx.doi.org/10.2140/gt.2007.11.1777, doi:10.2140/gt.2007.11.1777.

[Kos68] Jean-Louis Koszul. Déformations de connexions localement plates. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 18 :103–114, 1968.

[KV67] Victor Kac and Érnest Vinberg. Quasi-homogeneous cones. *Mat. Zametki*, 1 :347–354, 1967.

[Lee08] Jaejeong Lee. *Fundamental domains of convex projective structures*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2008. Thesis (Ph.D.)–University of California, Davis. URL : http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:3329634.

[Mara] Ludovic Marquis. Exemples de variétés projectives strictement convexes de volume fini en dimension quelconque. l'Enseignement Mathématique Tome 58 (2012). URL : http://arxiv.org/abs/1004.3706, arXiv:1004.3706.

[Marb] Ludovic Marquis. Surface projective convexe de volume fini. *Aux Annales de l'Institut Fourier, Vol. 62 no. 1 (2012), p. 325-392*. URL : http://arxiv.org/abs/0902.3143, arXiv:0902.3143.

[Mar67] Albert Marden. On finitely generated Fuchsian groups. *Comment. Math. Helv.*, 42 :81–85, 1967.

[Mar74] Albert Marden. The geometry of finitely generated kleinian groups. *Ann. of Math. (2)*, 99 :383–462, 1974.

[Mar10] Ludovic Marquis. Espace des modules marqués des surfaces projectives convexes de volume fini. *Geom. Topol.*, 14(4) :2103–2149, 2010. URL : http://dx.doi.org/10.2140/gt.2010.14.2103, doi:10.2140/gt.2010.14.2103.

[McM02] Curtis McMullen. Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (95) :151–183, 2002. URL : http://dx.doi.org/10.1007/s102400200001, doi:10.1007/s102400200001.

[Rag72] M. S. Raghunathan. *Discrete subgroups of Lie groups*. Springer-Verlag, New York, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.

[Rat06] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.

[Ros61] Maxwell Rosenlicht. On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101 :211–223, 1961.

[Ser71] Jean-Pierre Serre. Cohomologie des groupes discrets. In *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/1971), Exp. No. 399*, pages 337–350. Lecture Notes in Math., Vol. 244. Springer, Berlin, 1971.

[SM02] Edith Socié-Méthou. Caractérisation des ellipsoïdes par leurs groupes d'automorphismes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(4) :537–548, 2002. URL : http://dx.doi.org/10.1016/S0012-9593(02)01103-5, doi:10.1016/S0012-9593(02)01103-5.

[Thu] William Thurston. The geometry and topology of three-manifolds. Lecture notes.

[Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.

[Ver05] Constantin Vernicos. Introduction aux géométries de Hilbert. In *Actes de Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 23. Année 2004–2005*, volume 23 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 145–168. Univ. Grenoble I, Saint, 2005.

[Vin80] Érnest Vinberg. Invariant convex cones and orderings in Lie groups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(1) :1–13, 96, 1980.

[Yam04] Asli Yaman. A topological characterisation of relatively hyperbolic groups. *J. Reine Angew. Math.*, 566 :41–89, 2004. URL : http://dx.doi.org/10.1515/crll.2004.007, doi:10.1515/crll.2004.007.

Mickaël Crampon

Ludovic Marquis,

E-mail : mickael.crampon@usach.cl, ludovic.marquis@univ-rennes1.fr

Url : http://mikl.crampon.free.fr/ Web

http://perso.univ-rennes1.fr/ludovic.marquis Web