



**HAL**  
open science

## Locally internal stability of weakly elastic Bresse system

Nahla Noun, Ali Wehbe

► **To cite this version:**

Nahla Noun, Ali Wehbe. Locally internal stability of weakly elastic Bresse system. 2011. hal-00671549v1

**HAL Id: hal-00671549**

**<https://hal.science/hal-00671549v1>**

Submitted on 17 Feb 2012 (v1), last revised 22 Feb 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Stabilisation faible interne locale de système élastique de Bresse

Nahla Noun<sup>a,b</sup>, Ali Wehbe<sup>a</sup>,

<sup>a</sup> *Université Libanaise, Faculté des Sciences 1 & Hadath, Beyrouth, Liban*

<sup>b</sup> *Université Montpellier 2, ACSIOM, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier, France*

---

## Abstract

### Weakly locally internal stabilization of elastic Bresse system

In [1], Alabau et al. studied the exponential and polynomial stability of the Bresse system with one globally distributed dissipation law. In this note, our goal is to extend the results from [1], by taking into consideration the important case when the dissipation law is locally distributed and to improve the polynomial energy decay rate. We then study the energy decay rate of the Bresse system with one locally internal distributed dissipation law acting on the equation about the shear angle displacement. Under the equal speed wave propagation condition, we show that the system is exponentially stable. On the contrary, we establish a new polynomial energy decay rate.

### Résumé

Dans [1], Alabau et al. ont étudié la stabilisation exponentielle et polynomiale de système de Bresse sous l'action d'une seule loi de dissipation interne globalement distribuée. Dans cette note, notre but est d'étendre les résultats de [1], pour prendre en considération le cas important où la loi de dissipation est localement distribuée et pour améliorer le taux de décroissance polynomial de l'énergie. Nous étudions alors, le taux de décroissance de l'énergie du système de Bresse sous l'action d'une seule loi de dissipation interne localement distribuée et agissant sur l'équation de rotation angulaire. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation, nous montrons que le système est exponentiellement stable. Dans le cas contraire, nous établissons un nouveau taux de décroissance polynomial de l'énergie.

---

## I- Abridged English Version

### 1. Introduction

In this note, we study the locally internal stabilization of an elastic Bresse system with one damping acting on the equation about the shear angle displacement. We consider the system:

---

*Email addresses:* [nahlanoun@hotmail.com](mailto:nahlanoun@hotmail.com) (Nahla Noun), [ali.wehbe@ul.edu.lb](mailto:ali.wehbe@ul.edu.lb) (Ali Wehbe).

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) + a(x)\psi_t = 0 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3)$$

with the following boundary conditions

$$\varphi(t, x) = \psi_x(t, x) = \omega_x(t, x) = 0 \quad \text{for } x = 0, L, \quad (4)$$

$$\varphi(t, x) = \psi(t, x) = \omega(t, x) = 0 \quad \text{for } x = 0, L, \quad (5)$$

where  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  are the vertical, shear angle and longitudinal displacements;  $a \in L^\infty([0, L]; \mathbb{R}^+)$  and we assume that there exist  $\alpha, \beta$  such that  $0 \leq \alpha < \beta \leq L$  and  $a \geq a_0 > 0$  on  $]\alpha, \beta[$ . Here  $\rho_1 = \rho A$ ,  $\rho_2 = \rho I$ ,  $\kappa_0 = EA$ ,  $\kappa = \kappa' GA$ ,  $b = EI$  and  $l = R^{-1}$  are positive constants for the elastic material properties. To be more precise,  $\rho$  for density,  $E$  for the modulus of elasticity,  $G$  for the shear modulus,  $\kappa'$  for the shear factor,  $A$  for the cross-sectional area,  $I$  for the second moment of area of cross-section, and  $R$  for the radius of the curvature (for more details see Lagnese et al. [6]).

The Bresse system consists of three coupled wave equations, there are number of publications concerning the stabilization of this system [8], [10], [4] and [1]. In particular, in [1], Alabau et al. consider the Bresse system (1)-(5) with one globally dissipation law acting on the equation about the shear angle displacement i.e the function  $a$  is constant on  $]0, L[$ . Under the equal speed wave propagation condition,  $\kappa = \kappa_0$  and  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}$ , they established an exponential energy decay rate for usual initial data. On the contrary, when  $\kappa \neq \kappa_0$  or  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ , they, first, showed that the Bresse system loses the exponential stability. Next, under the condition  $\kappa = \kappa_0$  and  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ , they established a polynomial energy decay rate of type  $\frac{1}{t^{1/2}}$  for smooth initial data. Otherwise, they showed that the energy of the regular solution decays polynomially to zero with rates  $\frac{1}{t^{1/3}}$ . Then, the stabilization of the Bresse system with one locally internal distributed dissipation law and the optimality of the polynomial decay rate seems still open problem. Therefore, our goal is to extend the results from [1], by taking into consideration the important case when  $a$  is a function in  $L^\infty([0, L]; \mathbb{R}_+)$  strictly positive in an open interval  $]\alpha, \beta[ \subset ]0, L[$  (the cases  $\alpha = 0$  or  $\beta = L$  are not excluded) and to improve the polynomial energy decay rate.

In this note, we consider the Bresse system damped by one locally internal distributed dissipation law with Dirichlet-Neumann-Neumann or Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet boundary conditions type. Under the equal speed wave propagation condition,  $\kappa = \kappa_0$  and  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}$ , we establish the same exponential energy decay rate for usual initial data. On the contrary, when  $\kappa \neq \kappa_0$  or  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ , we first prove the non-exponential decay rate for the Bresse system with Dirichlet-Neumann-Neumann condition type. Therefore, under the condition  $\kappa = \kappa_0$  and  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ , we establish a new polynomial energy decay rate of type  $\frac{1}{t}$  for the smooth solution. Otherwise, we show that the energy decays to zero with rate  $\frac{1}{t^{1/2}}$ .

## 2. Energy decay rate

First, we state stability results of system (1)-(5) under one locally distributed dissipation law in the case of equal speed wave propagation condition. We establish the following energy decay rate:

**Theorem 2.1** (*Exponential decay rate*) *Assume that  $\kappa = \kappa_0$  and  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}$ . Then there exist positive constants  $M \geq 1$ ,  $\omega > 0$  such that for all initial data  $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1) \in \mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ , the energy of the system (1)-(5) satisfies the following decay rate:*

$$E(t) \leq M e^{-\omega t} E(0), \quad \forall t > 0. \quad (6)$$

Next, under the non equal speed propagation condition, we show that the energy  $E(t)$  of the system (1)-(4) loses the exponential decay rate obtained when  $\kappa = \kappa_0$  and  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}$ .

**Theorem 2.2** (*Non-exponential decay rate*) Assume that  $\kappa \neq \kappa_0$  or  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ . Then the system (1)-(3), with the boundary conditions (4), is not uniformly stable.

Nevertheless we establish the following polynomial type decay rate:

**Theorem 2.3** (*Polynomial decay rate*) Assume that  $\kappa \neq \kappa_0$  or  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ . Then there exists a positive constant  $C > 0$  such that for all initial data  $U_0 \in D(\mathcal{A}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , the energy of the system (1)-(5) satisfies the following decay rate:

$$E(t) \leq C \frac{1}{t} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}^2 \quad \text{if } \kappa = \kappa_0 \quad \text{et} \quad E(t) \leq C \frac{1}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}^2 \quad \text{if } \kappa \neq \kappa_0, \quad \forall t > 0. \quad (7)$$

## II- Version française

### 1. Introduction

Dans cette note, nous étudions la stabilité interne locale de système élastique de Bresse sous l'action d'un seul contrôle agissant sur l'équation de rotation angulaire. Nous considérons le système suivant :

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \kappa_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0 \quad \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \quad (8)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) + a(x)\psi_t = 0 \quad \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \quad (9)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \quad \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \quad (10)$$

avec les conditions aux bords de type Dirichlet-Neumann-Neumann et Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet suivantes :

$$\varphi(t, x) = \psi_x(t, x) = \omega_x(t, x) = 0 \quad \text{pour } x = 0, L, \quad (11)$$

$$\varphi(t, x) = \psi(t, x) = \omega(t, x) = 0 \quad \text{pour } x = 0, L, \quad (12)$$

où les fonctions  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  désignent, respectivement, le déplacement transversal, l'angle de rotation d'un filament et le déplacement longitudinal de la poutre; la fonction  $a \in L^\infty([0, L]; \mathbb{R}^+)$  vérifiant  $a \geq a_0 > 0$  dans  $] \alpha, \beta[$  où  $0 \leq \alpha < \beta \leq L$ . Les coefficients  $\rho_1 = \rho A$ ,  $\rho_2 = \rho I$ ,  $\kappa_0 = EA$ ,  $\kappa = \kappa' GA$ ,  $b = EI$  et  $l = R^{-1}$  sont des constantes positives caractérisant les propriétés élastiques des matériaux. Physiquement,  $\rho$  est la densité,  $E$  est le module d'élasticité,  $G$  est le module de cisaillement,  $\kappa'$  est le facteur de cisaillement,  $A$  est l'aire de la section transversale,  $I$  est le second moment de la section transversale, et  $R$  est le rayon de courbure (pour plus de détails voir Lagnese et al. [6]).

Le système de Bresse est un modèle linéaire couplant trois équations des ondes. Par ailleurs, il y a un nombre de publications récentes concernant la stabilisation de ce système [8], [10], [4] et [1]. Dans [1], Alabau et al. ont considéré le système de Bresse (8)-(12) avec une seule loi de dissipation globale agissant sur l'équation de rotation angulaire i.e. la fonction  $a(x)$  est constante sur  $]0, L[$ . Dans le cas d'égalité des vitesses de propagation ( $\kappa = \kappa_0$  et  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}$ ), ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie du système. En revanche, quand les vitesses de propagation sont différentes ( $\kappa \neq \kappa_0$  ou  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ ), ils ont montré, d'abord, que le système n'est pas uniformément stable. Ensuite, sous la condition  $\kappa = \kappa_0$  et  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ , ils ont établi un taux de décroissance polynomial de type  $\frac{1}{t^{1/2}}$ . Puis, dans les autres cas, ils ont montré que l'énergie du système décroît vers zéro comme  $\frac{1}{t^{1/3}}$ . Alors, la stabilisation du système de Bresse avec un contrôle interne localement distribué et l'optimalité du taux de décroissance polynomial

restent un problème ouvert. Notre travail consiste donc à étendre les résultats de [1] : pour prendre en considération un cas important où  $a$  est une fonction dans  $L^\infty([0, L]; \mathbb{R}_+)$  strictement positive seulement dans un intervalle ouvert quelconque  $] \alpha, \beta[ \subset ] 0, L[$  (les cas  $\alpha = 0$  ou  $\beta = L$  ne sont pas exclus), et pour améliorer le taux de décroissance polynomial de l'énergie.

Dans cette note, nous considérons le système de Bresse avec une seule loi de dissipation localement distribuée à l'intérieur du domaine et agissant sur l'équation de rotation angulaire. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation ( $\kappa = \kappa_0$  et  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}$ ), nous établissons le même taux de décroissance exponentiel de l'énergie du système. Dans le cas contraire, ( $\kappa \neq \kappa_0$  ou  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ ), nous montrons, d'abord, que le système n'est pas uniformément stable. Ensuite, dans le cas où  $\kappa = \kappa_0$  et  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ , nous établissons un nouveau taux de décroissance polynomial de type  $\frac{1}{t}$ . Puis, dans les autres cas, nous obtenons un nouveau taux de décroissance polynomial de type  $\frac{1}{t^{1/2}}$ .

Notons que la condition d'égalité des vitesses de propagation n'a pas un sens physique, par conséquent, l'énergie du système décroît vers zéro comme  $\frac{1}{t^{1/2}}$ .

Soit  $(\varphi, \psi, \omega)$  une solution régulière du système (8)-(10), avec les conditions aux bords (11) ou (12). Son énergie associée est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \kappa |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa_0 |\omega_x - l\varphi|^2 + \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 \} dx. \quad (13)$$

Par un calcul direct nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L a(x) |\psi_t|^2 dx \leq 0. \quad (14)$$

Supposons que  $L \neq \frac{n\pi}{\kappa}$  et posons  $\Omega = (0, L)$ ,  $L_*^\kappa = \{ f \in L^2(0, L) : \int_0^L f(x) dx = 0 \}$  et  $H_*^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap L_*^\kappa(\Omega)$ . Définissons les espaces d'énergie par  $\mathcal{H}_1 = H_0^1 \times (H_*^1)^\kappa \times L^2 \times (L_*^\kappa)^\kappa$  et  $\mathcal{H}_2 = (H_0^1)^\kappa \times (L^2)^\kappa$  munis de la norme :

$$\|U\|_{\mathcal{H}_i}^2 = \kappa \|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \kappa_0 \|\omega_x - l\varphi\|^2 + \rho_1 \|u\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_1 \|z\|^2, \quad (15)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme dans  $L^2(\Omega)$ . Il est clair que la norme (15) est équivalente à la norme usuelle dans  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Définissons aussi les opérateurs linéaires  $\mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, 2$ , correspondant aux conditions aux bords (11) et (12) respectivement, par :

$$D(\mathcal{A}_1) = \{ U \in \mathcal{H}_1 : \varphi \in H_0^1 \cap H^2, \psi, \omega \in H_*^1 \cap H^2, u, \psi_x, \omega_x \in H_0^1, v, z \in H_*^1 \}, \quad (16)$$

$$D(\mathcal{A}_2) = \{ U \in \mathcal{H}_2 : \varphi, \psi, \omega \in H_0^1 \cap H^2, u, v, z \in H_0^1 \}, \quad (17)$$

$$\mathcal{A}_i(\varphi, \psi, \omega, u, v, z) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + \frac{\kappa_0 l}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{1}{\rho_2} a(x)v \\ \frac{\kappa_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x - \frac{\kappa l}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Notons que  $\mathcal{A}_i$  est m-dissipatif et engendre un  $C^0$ -semi-groupe de contractions  $e^{t\mathcal{A}_i}$  sur l'espace d'énergie  $\mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Comme le système (8)-(12) est équivalent à

$$U_t = \mathcal{A}_i U \text{ dans } \mathcal{H}_i, \quad t > 0, \quad U(0) = U_0, \quad i = 1, 2$$

avec  $U = (\varphi, \psi, \omega, \varphi_t, \psi_t, \omega_t)$ , nous en déduisons l'existence et l'unicité de la solution.

Comme souligné précédemment, nous allons étudier le taux de décroissance de l'énergie dans deux cas différents.

## 2. Stabilité exponentielle et polynomiale du système

Dans cette section nous montrons les résultats suivants :

**Théorème 2.1** (*Taux de décroissance exponentiel*) Supposons que  $\kappa = \kappa_0$  et  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}$ . Alors il existe des constantes  $M \geq 1$  et  $\omega > 0$  telles que pour toute donnée initiale  $(\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1) \in \mathcal{H}_j$ ,  $j = 1, 2$ , l'énergie du système (8)-(12) satisfait l'estimation suivante :

$$E(t) \leq M e^{-\omega t} E(0), \quad \forall t > 0. \quad (19)$$

*Idée de la démonstration*

D'après un résultat de Huang [5] et Prüss [9], un  $C^0$ -semi-groupe de contractions  $e^{t\mathcal{A}_j}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_j$ ,  $j = 1, 2$ , est exponentiellement stable si et seulement si les conditions suivantes :

$$(H1) : \quad i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j) \quad \text{et} \quad (H2) : \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda I - \mathcal{A}_j)^{-1}\| < +\infty$$

sont vérifiées. Nous montrons que  $\mathcal{A}_j$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. Alors, le fait que la résolvante de  $\mathcal{A}_j$  est compacte, entraîne bien la condition (H1). La condition (H2) se démontre en utilisant un argument de contradiction (voir théorème(2.3)).  $\square$

**Théorème 2.2** (*Taux non-exponentiel*) Supposons que  $\kappa \neq \kappa_0$  ou  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ . Alors, le système (8)-(10) avec les conditions aux bords (11), n'est pas uniformément stable.

*Idée de la démonstration*

Nous construisons une suite  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$  et une suite  $(U^n) \subset D(\mathcal{A}_1)$ , telles que  $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ ,  $\|U^n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$  et  $\|(i\lambda_n I - \mathcal{A}_1)U^n\|_{\mathcal{H}_1} \rightarrow 0$ . Alors, la résolvante de  $\mathcal{A}_1$  n'est pas uniformément bornée sur l'axe imaginaire et par conséquent le système (8)-(11) n'est pas uniformément stable (voir [5] et [9]).  $\square$

**Théorème 2.3** (*Taux polynomial*) Supposons que  $\kappa \neq \kappa_0$  ou  $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{\kappa}{b}$ . Alors il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute donnée initiale  $U_0 = (\varphi_0, \psi_0, \omega_0, \varphi_1, \psi_1, \omega_1) \in D(\mathcal{A}_j)$ ,  $j=1,2$ , l'énergie du système (8)-(10), avec (11) ou (12), satisfait l'estimation suivante :

$$E(t) \leq C \frac{1}{t} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}^2 \quad \text{si } \kappa = \kappa_0 \quad \text{et} \quad E(t) \leq C \frac{1}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}^2 \quad \text{si } \kappa \neq \kappa_0, \quad \forall t > 0. \quad (20)$$

On suppose que  $\kappa \neq \kappa_0$ . La démonstration du théorème (2.3) nécessite la démonstration de plusieurs lemmes.

Soit  $(\lambda_n)$  une suite dans  $\mathbb{R}$  et  $(U^n)$  une suite dans  $D(\mathcal{A}_j)$ , telles que

$$|\lambda_n| \rightarrow +\infty, \quad \|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = \|(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, u^n, v^n, z^n)\|_{\mathcal{H}_j} = 1, \quad (21)$$

et

$$\lambda_n^4 (i\lambda_n I - \mathcal{A}_j)(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, u^n, v^n, z^n) = (f_1^n, f_2^n, f_3^n, g_1^n, g_2^n, g_3^n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}_j. \quad (22)$$

Nous écrivons (22) sous la forme :

$$\lambda_n^2 \varphi^n + \frac{\kappa}{\rho_1} (\varphi_{xx}^n + \psi_x^n + l\omega_x^n) + \frac{\kappa_0 l}{\rho_1} (\omega_x^n - l\varphi^n) = -\frac{g_1^n + i\lambda_n f_1^n}{\lambda_n^4}, \quad (23)$$

$$\lambda_n^2 \psi^n + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx}^n - \frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) - \frac{1}{\rho_2} a(x)v^n = -\frac{g_2^n + i\lambda_n f_2^n}{\lambda_n^4}, \quad (24)$$

$$\lambda_n^2 \omega^n + \frac{\kappa_0}{\rho_1} (\omega_{xx}^n - l\varphi_x^n) - \frac{\kappa l}{\rho_1} (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) = -\frac{g_3^n + i\lambda_n f_3^n}{\lambda_n^4}. \quad (25)$$

**Lemme 2.4** *Sous les mêmes notations précédentes, nous avons*

$$\int_0^L a(x)|\psi^n|^2 dx = \frac{o(1)}{\lambda_n^6}. \quad (26)$$

*Démonstration*

Il suffit de multiplier (22) par  $U^n = (\varphi^n, \psi^n, \omega^n, u^n, v^n, z^n)$  pour obtenir :

$$\int_0^L a(x)|v^n|^2 dx = \operatorname{Re}((i\lambda_n I - \mathcal{A}_j)U^n, U^n)_{\mathcal{H}_j} = \frac{o(1)}{\lambda_n^4} \quad \text{et} \quad \int_0^L a(x)|\psi^n|^2 dx = \frac{o(1)}{\lambda_n^6}. \quad \square \quad (27)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\alpha < \alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon < \beta$ . Considérons une fonction  $\eta \in C^1([0, L])$  définie par  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta = 1$  sur  $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$  et  $\eta = 0$  sur  $[0, \alpha] \cup [\beta, L]$ .

**Lemme 2.5** *Sous les mêmes notations précédentes, nous avons*

$$\int_0^L \eta |\psi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^3}. \quad (28)$$

*Démonstration*

Dans un premier temps, notons que d'après (21) et (22) nous avons  $\|\varphi^n\| = O(1/\lambda_n)$ ,  $\|\psi^n\| = O(1/\lambda_n)$  et  $\|\omega^n\| = O(1/\lambda_n)$ . Ensuite, multiplions l'équation (24) par  $\eta\psi^n$ , nous obtenons :

$$b \int_0^L \eta |\psi_x^n|^2 = \rho_2 \int_0^L \eta |\lambda_n \psi^n|^2 - b \int_0^L \eta' \psi_x^n \bar{\psi}^n - \int_0^L [\kappa(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + av^n] \eta \bar{\psi}^n + \frac{o(1)}{\lambda_n^4}. \quad (29)$$

Nous utilisons (27) et le fait que  $\|\psi_x^n\|$ ,  $\|\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n\|$  sont uniformément bornées dans  $(29) \times \lambda_n^3$ . Nous déduisons alors (28).  $\square$

**Lemme 2.6** *Sous les mêmes notations précédentes, nous avons*

$$\int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = o(1) \quad \text{et} \quad \int_0^L \eta |\varphi^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^2}. \quad (30)$$

*Démonstration*

Multiplions (24) par  $\eta\bar{\varphi}_x^n$ , (23) par  $\eta\bar{\varphi}^n$  et utilisons (27) et le fait que  $\|\varphi_x^n\| = O(1)$ . Nous obtenons respectivement :

$$\kappa \int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = \rho_2 \int_0^L \eta \lambda_n^2 \psi^n \bar{\varphi}_x^n - b \int_0^L \eta \lambda_n \psi_x^n \lambda_n^{-1} \bar{\varphi}_{xx}^n - b \int_0^L \eta' \psi_x^n \bar{\varphi}_x^n - \int_0^L (\kappa l \omega^n + av) \eta \bar{\varphi}_x^n + \frac{o(1)}{\lambda_n^3} \quad (31)$$

et

$$\rho_1 \int_0^L \eta |\lambda_n \varphi^n|^2 = \kappa \int_0^L (\eta |\varphi_x^n|^2 + (\eta' \varphi_x^n - \eta \psi_x^n) \bar{\varphi}^n) + l \int_0^L (\kappa + \kappa_0) \omega^n (\eta \bar{\varphi}^n)_x + l^2 \kappa_0 \int_0^L \eta |\varphi^n|^2 + \frac{o(1)}{\lambda_n^4}. \quad (32)$$

D'abord, utilisons (27), (28) et le fait que  $\|\varphi_x^n\| = O(1)$ ,  $\|\varphi_{xx}^n\| = O(\lambda_n)$  et  $\|\omega^n\| = o(1)$  dans (31), nous obtenons la première partie de (30). Ensuite, utilisons de plus le fait que  $\|\varphi^n\| = \|\varphi_x^n\| = o(1)$  dans (32), nous déduisons la deuxième.  $\square$

**Lemme 2.7** Soit  $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$ . Sous les mêmes notations précédentes, supposons que

$$\int_0^L \eta |\psi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{2+2\gamma}}. \quad (33)$$

Alors, nous avons

$$\int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{2\gamma}}. \quad (34)$$

*Démonstration*

Soit  $l_N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k}$ , nous allons démontrer par récurrence sur  $N$  que  $\int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{\gamma l_N}}$ .

Utilisons (27), (30), (33) et le fait que  $\|\varphi_{xx}^n\| = O(\lambda_n)$  et  $\|\omega^n\| = O(\frac{1}{\lambda_n})$  dans (31)  $\times \lambda_n^\gamma$ , nous obtenons

$\int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^\gamma}$ . Alors, l'égalité est vraie pour  $N = 0$ . Supposons

$$\int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{\gamma l_N}}. \quad (35)$$

Utilisons (30), (33), (35) et le fait que  $\|\omega^n\| = O(\frac{1}{\lambda_n})$  et  $\gamma l_N \leq 2$  dans (32)  $\times \lambda_n^{\gamma l_N}$ , nous obtenons

$$\int_0^L \eta |\varphi^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{2+\gamma l_N}}. \quad (36)$$

Utilisons (36) dans (23) nous obtenons

$$\|\eta \varphi_{xx}^n\| = O(\lambda_n^{1-\frac{\gamma}{2} l_N}). \quad (37)$$

Notons que  $\gamma + \frac{\gamma}{2} l_N = \gamma l_{N+1}$ . En utilisant (27), (33), (35), (36), (37) et le fait que  $\|\omega^n\| = O(\frac{1}{\lambda_n})$  dans

(31)  $\times \lambda_n^{\gamma l_{N+1}}$ , nous obtenons  $\int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{\gamma l_{N+1}}}$ . Par conséquent, (35) est vraie pour tout  $N \geq 0$ . Enfin,

en utilisant le fait que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ , nous déduisons (34).  $\square$

**Lemme 2.8** Sous les mêmes notations précédentes, nous avons

$$\int_0^L \eta |\psi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^4}, \quad \int_0^L \eta |\varphi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^L \eta |\varphi^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^4}. \quad (38)$$

*Démonstration*

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , posons  $\hat{l}_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k}$ . Nous allons démontrer par récurrence sur  $N$  que  $\int_0^L \eta |\psi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{2+2\hat{l}_N}}$ .

D'abord, l'équation (28) assure l'égalité pour  $N = 1$ . Ensuite, supposons que

$$\int_0^L \eta |\psi_x^n|^2 = \frac{o(1)}{\lambda_n^{2+2\hat{l}_{N-1}}}. \quad (39)$$

Notons que  $3 + \hat{l}_{N-1} = 2 + 2\hat{l}_N$  et utilisons (27), (39), le lemme(2.7) et le fait que  $\|\omega^n\| = O(\frac{1}{\lambda_n})$  dans

(29)  $\times \lambda_n^{2+2\hat{l}_N}$ . Nous déduisons alors le résultat pour tout entier  $N \geq 1$ . Finalement, en utilisant le fait

que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ , le lemme (2.7) et l'équation (32), nous concluons (38).  $\square$



**Lemme 2.9** *Sous les mêmes notations précédentes, nous avons*

$$\int_0^L \eta |\omega_x^n|^2 = o(1). \quad (40)$$

*Démonstration*

Multiplions l'équation (23) par  $\eta \bar{\omega}_x^n$  et utilisons (38) et le fait que  $\|\omega_x^n\|$  est uniformément bornée. Nous déduisons :

$$(\kappa + \kappa_0)l \int_0^L \eta |\omega_x^n|^2 = \kappa \int_0^L \eta \lambda_n \varphi_x^n \lambda_n^{-1} \bar{\omega}_{xx}^n + o(1). \quad (41)$$

Utilisons (38) et le fait que  $\|\omega_{xx}^n\| = O(\lambda_n)$  dans (41), nous concluons (40).  $\square$

**Démonstration du théorème(2.3)** (cas  $\kappa \neq \kappa_0$ )

Nous définissons une fonction  $\hat{\eta} \in C^1([0, L])$  vérifiant  $0 \leq \hat{\eta} \leq 1$ ,  $\hat{\eta} = 1$  sur  $[0, \alpha + \varepsilon]$  et  $\hat{\eta} = 0$  sur  $[\alpha + 2\varepsilon, L]$ . Multiplions (23) par  $2\rho_1 x \hat{\eta} \bar{\varphi}_x^n$ , (24) par  $2\rho_2 x \hat{\eta} \bar{\psi}_x^n$  et (25) par  $2\rho_1 x \hat{\eta} \bar{\omega}_x^n$  et sommons les identités. En utilisant le fait que  $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = o(1)$  sur  $]\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon[$  (lemmes (2.8) et (2.9)) et le fait que  $\text{supp} \hat{\eta}' \subseteq \text{supp} \eta$ , nous obtenons  $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = o(1)$  sur  $]0, \alpha + \varepsilon[$ . Par le même raisonnement sur  $]\beta - \varepsilon, L[$ , nous concluons que  $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = o(1)$  sur  $]\beta - \varepsilon, L[$ . Par conséquent, nous avons  $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = o(1)$ , ce qui contredit le fait que  $\|U^n\|_{\mathcal{H}_j} = 1$  et nous permet de déduire que

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda|^4} \|(i\lambda I - \mathcal{A}_j)^{-1}\| < +\infty.$$

Finalement, sous le fait que  $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$  (théorème (2.1)), le "théorème 2.4" de [3] (voir aussi [7,2]) affirme que l'énergie du système décroît comme  $\frac{1}{t^2}$ .  $\square$

## Références

- [1] F. Alabau-Boussouira, J. E. Muoz Rivera, and D. d. S. Almeida Jnior. Stability to weak dissipative bresse system. *J. Math. Anal. Appl.*, 347(2) :481–498, 2011.
- [2] C. Batty and T. Duyckaerts. Non-uniform stability for bounded semi-groups on banach spaces. *J. Evol. Equ.*, 8(4) :765–780, 2008.
- [3] A. Borichev and Y. Tomilov. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. Ann.*, 347(2) :455–478, 2010.
- [4] L. H. Fatori and J. E. M. Rivera. Rates of decay to weak thermoelastic bresse system. *IMA J. Appl. Math.*, 75(6) :881–904, 2010.
- [5] F. L. Huang. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in hilbert spaces. *Ann. of Diff. Eqs.*, 1 :43–56, 1985.
- [6] G. L. J. E. Lagnese and J. P. G. Schmidt. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. *Math. Meth. in Appl. Sci.*, 16 :327–358, 1993.
- [7] Z. Liu and B. Rao. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation. *Z. Angew. Math. Phys.*, 56(4) :630–644, 2005.
- [8] Z. Liu and B. Rao. Energy decay rate of the thermoelastic bresse system. *Z. angew. Math. Phys.*, 60(1) :54–69, 2009.
- [9] J. Pruss. On the spectrum of  $c_0$ -semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284 :847–857, 1984.
- [10] A. Wehbe and W. Youssef. Exponential and polynomial stability of an elastic bresse system with two locally distributed feedback. *Journal of Mathematical Physics*, 51(10) :1067–1078, 2010.