



**HAL**  
open science

# Action du groupe symétrique sur l'homologie d'un poset sur les hyperarbres

Bérénice Oger

► **To cite this version:**

Bérénice Oger. Action du groupe symétrique sur l'homologie d'un poset sur les hyperarbres. 2012.  
hal-00671334v1

**HAL Id: hal-00671334**

**<https://hal.science/hal-00671334v1>**

Preprint submitted on 17 Feb 2012 (v1), last revised 30 Oct 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ACTION DU GROUPE SYMÉTRIQUE SUR L'HOMOLOGIE D'UN POSET SUR LES HYPERARBRES

BÉRÉNICE OGER

RÉSUMÉ. McCammond et Meier ont défini un poset sur les hyperarbres et calculé la dimension de son unique groupe d'homologie non nul. Après avoir donné une autre preuve de ce résultat, nous déterminons l'action du groupe symétrique sur ce groupe, en utilisant la théorie des espèces. Nous calculons aussi de la même façon l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset.

ABSTRACT. McCammond and Meier have defined a poset on hypertrees and computed the dimension of its unique non zero homology group. We give another proof of their result and determine the action of the symmetric group on this homology group, using the theory of species of structures. We also compute the action on the Whitney homology of the poset.

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Construction de l'homologie du poset des hyperarbres	2
2. Relations entre espèces et espèces auxiliaires	6
3. Calcul de la dimension de l'homologie du poset	12
4. Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset	15
5. Action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney	18
Annexe A. Rappels sur les espèces	23
Annexe B. Rappels sur l'indice cyclique	24
Références	25

## INTRODUCTION

La notion d'hyperarbre a été introduite par Berge [Ber89] dans les années 1980. Le nombre d'hyperarbres sur  $n$  sommets a été déterminé par Kalikow dans [Kal99] et Smith et Warme dans [War98]. Plus récemment, le poset des hyperarbres a été utilisé par Jensen, McCammond et Meier dans les articles [MM04], [JMM07] et [JMM06] pour étudier un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre. McCammond et Meier ont montré que ce poset est Cohen-Macaulay et ont déterminé la dimension de son groupe d'homologie. Le polynôme caractéristique du poset a été calculé par Chapoton dans l'article [Cha07], qui le relie à l'opérade PreLie. Les objectifs de cet article sont de résoudre la conjecture de [Cha07] pour l'action du groupe

symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres et sur son homologie de Whitney. Ces résultats nous permettent de relier le poset sur les hyperarbres avec l'opérade PreLie, laissant présager d'une relation étroite entre PreLie et une opérade reliée au poset des hyperarbres, qu'il reste encore à déterminer.

Nous renvoyons à l'annexe A et au livre [BLL98] pour une introduction à la théorie des espèces qui sera utilisée dans cet article. Dans la première partie de l'article, nous rappelons la construction de l'homologie du poset des hyperarbres. Dans la seconde partie, nous déterminons des relations entre les espèces d'hyperarbres et d'hyperarbres pointés avant de donner une nouvelle preuve du résultat de McCammond et Meier sur la dimension du groupe d'homologie du poset, dans la troisième partie. Dans la quatrième partie, nous utilisons les relations entre espèces de la première partie pour calculer l'action du groupe symétrique sur ce groupe d'homologie. Dans la cinquième partie, nous calculons l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset.

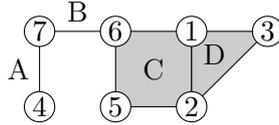
## 1. CONSTRUCTION DE L'HOMOLOGIE DU POSET DES HYPERARBRES

**1.1. Définition du poset.** Les hyperarbres et le poset associé sont décrits dans [Cha07]. Nous rappelons brièvement leurs définitions.

### 1.1.1. Hypergraphes et hyperarbres.

**Définition 1.1.** Un **hypergraphe** (sur l'ensemble  $V$ ) est un couple  $(V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini et les éléments de  $E$  sont des éléments de l'ensemble  $\mathcal{P}(V)$  des parties de  $V$  de cardinal au moins 2. Les éléments de  $V$  sont appelés **sommets** et ceux de  $E$  sont appelés **arêtes**.

**Exemple 1.2.** Un exemple d'hypergraphe sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  :



**Définition 1.3.** Soit  $H$  un hypergraphe,  $v$  et  $w$  deux sommets de  $H$ . Un **chemin de  $v$  à  $w$  dans  $H$**  est une succession alternée de sommets et d'arêtes  $(v = v_1, e_1, v_2, \dots, e_n, v_{n+1} = w)$  où, pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $v_i, v_{i+1} \in e_i$ . Nous imposerons en plus que les  $e_i$  soient tous différents pour assurer une forme de minimalité du chemin.

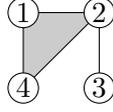
**Exemple 1.4.** Dans l'exemple précédent, il existe plusieurs chemins de 4 à 2 :  $(4, A, 7, B, 6, C, 2)$  et  $(4, A, 7, B, 6, C, 1, D, 2)$ .

**Définition 1.5.** Un **hyperarbre** est un hypergraphe non vide  $H$  tel que, pour tout couple de sommets  $(v, w)$  de  $H$ , il existe un et un seul chemin de  $v$  à  $w$  dans  $H$ . Le couple  $H = (V, E)$  est appelé **hyperarbre sur  $n$  sommets** si  $|V| = n$ .

Un hyperarbre est, en particulier, *connexe* et *sans cycles*.

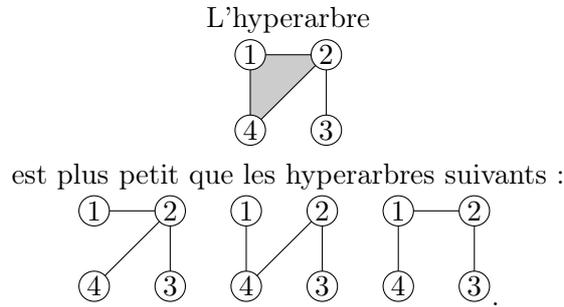
Nous noterons  $\mathcal{H}$  l'espèce des hyperarbres.

**Exemple 1.6.** Un exemple d'hyperarbre sur  $\{1, 2, 3, 4\}$  :



1.1.2. *Le poset des hyperarbres sur  $n$  sommets.* Soit  $I$ , un ensemble fini de cardinal  $n$ . L'ensemble  $\mathcal{H}(I)$  des hyperarbres sur  $I$  est muni d'un ordre partiel défini comme suit. Soient  $S$  et  $T$  deux éléments de  $\mathcal{H}(I)$ . L'hyperarbre  $S$  est inférieur ou égal à  $T$ , noté  $S \preceq T$ , si chaque arête de  $S$  est union d'arêtes de  $T$ .

**Exemple 1.7.** Exemple dans le poset des hyperarbres sur 4 sommets :



L'ensemble  $(\mathcal{H}(I), \preceq)$  ainsi formé est un ensemble partiellement ordonné (ou poset), noté  $\text{HT}(I)$ . Nous noterons  $\widehat{\text{HT}}(I)$  le poset  $\text{HT}(I)$  augmenté d'un maximum. Nous noterons de plus  $\text{HT}_n$  le poset  $\text{HT}(\{1, \dots, n\})$ .

**Définition 1.8.** Etant donnée la relation d'ordre partiel  $\preceq$ , la *relation de couverture*  $\triangleleft$  est définie par  $x \triangleleft y$  ( $y$  couvre  $x$  ou  $x$  est couvert par  $y$ ) si et seulement si  $x \prec y$  et il n'y a pas de  $z$  tel que  $x \prec z \prec y$ .

Dans  $\text{HT}(I)$ , on définit alors le *rang*  $r(h)$  d'un hyperarbre  $h$  à  $A$  arêtes par :

$$r(h) = A - 1.$$

Chaque relation de couverture augmente le rang de 1, donc le poset  $\text{HT}(I)$  est gradué par le nombre d'arêtes des hyperarbres.

**1.2. Complexe de chaînes et homologie associés à un poset.** Nous définissons maintenant l'homologie associée à un poset  $\mathcal{P}$  possédant un minimum et un maximum, et renvoyons à [Wac07] pour un traitement approfondi de ce sujet et à [Mun84] pour plus de détails sur l'homologie simpliciale. Nous introduisons la terminologie suivante :

**Définition 1.9.** Une  *$m$ -chaîne stricte* est un  $m$ -uplet  $(a_1, \dots, a_m)$  où les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathcal{P}$ , non maximum ou minimum dans  $\mathcal{P}$ , et  $a_i$  est strictement plus petit que  $a_{i+1}$  pour tout  $i \geq 0$ . Nous noterons  $\mathcal{C}_m(\mathcal{P})$ , l'ensemble des  $m$ -chaînes strictes et  $C_m(\mathcal{P})$ , l'espace vectoriel engendré par les  $m$ -chaînes strictes.

L'ensemble  $\cup_{m>0} \mathcal{C}_{m+1}(\mathcal{P})$  forme alors un complexe simplicial.

Définissons alors l'application  $d_m : \mathcal{C}_{m+1}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{C}_m(\mathcal{P})$  qui à un  $m+1$ -simplexe associe son bord. Ces applications vérifient  $d_{m-1} \circ d_m = 0$ . Les

couples  $(C_m(\mathcal{P}), d_m)_{m>0}$  ainsi obtenus forment un *complexe de chaînes*. Nous pouvons ainsi définir l'homologie.

**Définition 1.10.** Le groupe d'homologie de dimension  $m$  du poset  $\mathcal{P}$  est :

$$H_m(\mathcal{P}) = \ker d_m / \text{Im } d_{m+1}.$$

Nous considérerons ici l'homologie réduite, notée  $\tilde{H}_i$  : posant  $C_{-1}(\mathcal{P}) = \mathbb{C}e$ , et  $d : C_0 \rightarrow C_{-1}$ , l'application linéaire triviale qui envoie tous les singletons sur  $e$ , nous obtenons  $\dim(\tilde{H}_0(\mathcal{P})) = \dim(H_0(\mathcal{P}) - 1)$ .

Les dimensions des espaces d'homologie vérifient alors la propriété classique suivante :

**Lemme 1.11.** La caractéristique d'Euler de l'homologie vérifie :

$$(1.1) \quad \chi = \sum_{m \geq -1} (-1)^m \dim \tilde{H}_m(\mathcal{P}) = \sum_{m \geq -1} (-1)^m \dim C_m(\mathcal{P}).$$

**1.3. Homologie du poset  $\widehat{\text{HT}}_n$ .** Appliquons ce qui précède au poset  $\widehat{\text{HT}}_n$ .  $C_m(\mathcal{P})$  et  $\tilde{H}_m(\mathcal{P})$  seront alors notés  $C_m^n$  et  $\tilde{H}_m^n$ . Nous renvoyons à [Sun94] pour des généralités sur la notion de poset Cohen-Macaulay. La notion suivante est nécessaire :

**Définition 1.12.** Soient  $\mathcal{P}$  un poset et  $\sigma$  un simplexe fermé de la réalisation géométrique  $|\mathcal{P}|$  de  $\mathcal{P}$ . Le *lien* de  $\sigma$  est le sous-complexe :

$$Lk(\sigma) = \{\lambda \in |\mathcal{P}| : \lambda \cup \sigma \in |\mathcal{P}|, \lambda \cap \sigma = \emptyset\}.$$

**Définition 1.13.** [MM04, définition 2.8] Un poset  $\mathcal{P}$  est *Cohen-Macaulay* si  $|\mathcal{P}|$  est Cohen-Macaulay, c'est-à-dire si pour tout sous-simplexe fermé  $\sigma$  de  $|\mathcal{P}|$ , nous avons :

$$\tilde{H}_i(Lk(\sigma)) = \begin{cases} 0, & \text{pour } i \neq \dim(|\mathcal{P}|) - \dim(\sigma) - 1 \\ \text{sans torsion,} & \text{pour } i = \dim(|\mathcal{P}|) - \dim(\sigma) - 1, \end{cases}$$

où le simplexe vide a la dimension  $-1$  par convention.

**Théorème 1.14.** [MM04, théorème 2.9] *Pour tout  $n \geq 1$ , le poset  $\widehat{\text{HT}}_n$  est Cohen-Macaulay.*

**Corollaire 1.15.** L'homologie de  $\widehat{\text{HT}}_n$  est concentrée en degré maximal :

$$\tilde{H}_i(Lk(\emptyset)) = \begin{cases} 0, & \text{pour } i \neq \dim(|\mathcal{P}|) - 2 \\ \text{sans torsion,} & \text{pour } i = \dim(|\mathcal{P}|) - 2. \end{cases}$$

La formule (1.1) se réécrit donc :

$$(1.2) \quad \tilde{H}_{n-2}^n = \sum_{m \geq -1} (-1)^m \dim C_m^n.$$

**1.4. Des chaînes larges aux chaînes strictes.** D'après l'équation (1.2), il suffit de déterminer la somme alternée des dimensions des espaces  $C_m^n$  pour déterminer la dimension de l'homologie.

Pour  $k$  un entier naturel et  $I$  un ensemble fini, l'ensemble des *k-chaînes larges* d'hyperarbres sur  $I$  est l'ensemble  $\text{HL}_k^I$  des  $k$ -uplets  $(a_1, \dots, a_k)$  où les  $a_i$  sont des éléments de  $\text{HT}(I)$  et  $a_i \preceq a_{i+1}$ . L'ensemble des *k-chaînes*

strictes d'hyperarbres sur  $I$  est l'ensemble  $\text{HS}_k^I$  des  $k$ -uplets  $(a_1, \dots, a_k)$  où les  $a_i$  sont des éléments non minimum de  $\text{HT}(I)$  et  $a_i \prec a_{i+1}$ .

Nous définissons les espèces suivantes :

**Définition 1.16.** L'espèce  $\mathcal{H}_k$  des  $k$ -chaînes larges d'hyperarbres est l'espèce définie par :

$$I \mapsto \text{HL}_k^I.$$

L'espèce  $\mathcal{HS}_k$  des  $k$ -chaînes strictes d'hyperarbres est l'espèce définie par :

$$I \mapsto \text{HS}_k^I.$$

**Définition 1.17.** Soit  $M_{k,s}$ , l'ensemble des mots sur  $\{0, 1\}$  de longueur  $k$ , contenant  $s$  lettres "1". L'espèce  $\mathcal{M}_{k,s}$  est définie par :

$$\begin{cases} \emptyset & \mapsto M_{k,s} \\ V \neq \emptyset & \mapsto \emptyset. \end{cases}$$

Relions ces espèces entre elles :

**Proposition 1.18.** Les espèces  $\mathcal{H}_k$  et  $\mathcal{HS}_i$  sont reliées par :

$$\mathcal{H}_k \cong \sum_{i \geq 0} \mathcal{HS}_i \times \mathcal{M}_{k,i}.$$

*Démonstration.* Soit une  $k$ -chaîne large  $(a_1, \dots, a_k)$ . Elle peut se décomposer en un couple formé d'une  $s$ -chaîne stricte  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$ , obtenue en supprimant les répétitions dans la chaîne large et  $m$ , si besoin, et d'un élément  $u_1 \dots u_k$  de  $M_{k,s}$  tel que :

- $u_1 = 0$  si  $a_1 = m$ , 1 sinon ;
- $u_j = 0$  si  $a_j \neq a_{j-1}$ , 1 sinon.

A partir d'une chaîne stricte de longueur  $i$ , et d'un mot  $u_1 \dots u_k$  de  $M_{k,i}$ , une  $k$ -chaîne large peut être reconstruite.

Ceci établit l'isomorphisme d'espèces voulu.  $\square$

**Corollaire 1.19.** Considérons l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\{1, \dots, n\}$  par permutation. Les caractères  $\chi_k$  et  $\chi_i^s$  des actions induites respectivement sur les espaces  $\mathcal{H}_k(\{1, \dots, n\})$  et  $\mathcal{HS}_i(\{1, \dots, n\})$  vérifient :

$$(1.3) \quad \chi_k = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s.$$

*Démonstration.* L'isomorphisme de la proposition 1.18 est un isomorphisme d'espèce donc il préserve l'action du groupe symétrique.

Or cet isomorphisme se simplifie en :

$$\mathcal{H}_k(\{1, \dots, n\}) \cong \sum_i \mathcal{HS}_i(\{1, \dots, n\}) \times \mathcal{M}_{k,i}(\emptyset).$$

De plus, l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathcal{M}_{k,i}(\emptyset)$  est triviale, d'où :

$$\chi_k = \sum_{i \geq 0} \chi_i^s \times \#M_{k,i}.$$

Le cardinal de  $M_{k,i}$  est  $\binom{k}{i}$ . Comme de plus la longueur maximale d'une chaîne stricte dans  $\text{HT}_n$  est  $n - 2$ , la somme est finie.  $\square$

Comme l'expression de  $\sum_{i=0}^{n-2} \binom{k}{i} \chi_i^s$  est polynomiale en  $k$ , de degré borné par  $n$ , elle permet d'étendre  $\chi_k$  aux entiers relatifs. L'équation (1.2) montre que le caractère  $\chi_k$  évalué en  $k = -1$  est le caractère donné par l'action de  $\mathfrak{S}_n$  induite sur l'homologie du poset.

## 2. RELATIONS ENTRE ESPÈCES ET ESPÈCES AUXILIAIRES

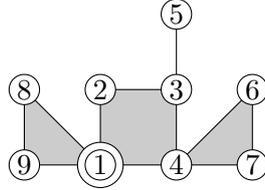
Après avoir défini de nouvelles espèces, nous établissons dans cette partie des relations entre elles. Nous renvoyons à l'annexe A pour les définitions des espèces usuelles utilisées dans cette partie.

**2.1. Hyperarbres pointés.** Soit  $k$  un entier naturel.

Nous définissons les types d'hyperarbres suivants :

**Définition 2.1.** Un **hyperarbre pointé en un sommet** est un couple formé d'un hyperarbre  $H$  et d'un sommet différencié  $s$  de  $H$ . L'hyperarbre  $H$  est dit *pointé en  $s$* .

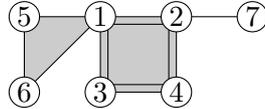
**Exemple 2.2.** Un hyperarbre sur neuf sommets, pointé en 1.



L'espèce associée aux hyperarbres pointés en un sommet est notée  $\mathcal{H}^p$ . Celle associée aux  $k$ -chaînes larges d'hyperarbres dont le minimum est pointé en un sommet est notée  $\mathcal{H}_k^p$ . Ce sommet est alors privilégié dans les autres hyperarbres de la chaîne : ils peuvent tous être considérés comme pointés en un sommet. Dans ce qui suit, l'espèce  $\mathcal{H}_k^p$  sera parfois appelée espèce des  $k$ -chaînes larges d'hyperarbres pointés, par abus de langage.

**Définition 2.3.** Un **hyperarbre pointé en une arête** est un couple formé d'un hyperarbre sur au moins deux sommets  $H$  et d'une arête  $a$  de  $H$ . L'hyperarbre  $H$  est alors *pointé en  $a$* .

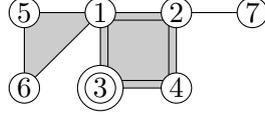
**Exemple 2.4.** Un hyperarbre sur sept sommets, pointé en l'arête  $\{1, 2, 3, 4\}$ .



L'espèce associée aux hyperarbres pointés en une arête est notée  $\mathcal{H}^a$ . L'espèce associée aux  $k$ -chaînes larges d'hyperarbres dont le minimum est pointé en une arête est notée  $\mathcal{H}_k^a$ .

**Définition 2.5.** Un **hyperarbre pointé en un sommet et une arête** est un triplet formé d'un hyperarbre sur au moins deux sommets  $H$ , d'une arête  $a$  de  $H$ , et d'un sommet  $s$  de  $a$ . L'hyperarbre  $H$  est alors *pointé en  $a$  et  $s$* .

**Exemple 2.6.** Un hyperarbre sur sept sommets, pointé en l'arête  $\{1, 2, 3, 4\}$ , et en 3.



L'espèce associée aux hyperarbres pointés en un sommet et une arête est notée  $\mathcal{H}^{pa}$ . Celle associée aux  $k$ -chaînes larges d'hyperarbres dont le minimum est pointé en un sommet et une arête est notée  $\mathcal{H}_k^{pa}$ .

**2.2. Principe de dissymétrie.** Nous renvoyons à [BLL98, Chapitre 2.3] pour plus d'informations. De manière générale, un *principe de dissymétrie* est l'utilisation d'un centre pour obtenir l'expression d'espèces non pointées en fonction d'espèces pointées, comme par exemple l'utilisation du centre d'un arbre pour exprimer l'espèce des arbres en fonctions de l'espèce des arbres enracinés. L'expression de l'espèce des hyperarbres en fonction des espèces d'hyperarbres pointés est donnée par :

**Proposition 2.7.** Les espèces des hyperarbres et des hyperarbres pointés sont reliées par :

$$(2.1) \quad \mathcal{H} + \mathcal{H}^{pa} = \mathcal{H}^p + \mathcal{H}^a.$$

*Démonstration.* Pour cette preuve, nous aurons besoin des notions suivantes :

**Définition 2.8.** L'*excentricité* d'un sommet ou d'une arête est le nombre maximal de sommets et d'arêtes sur un chemin minimal le reliant à un autre sommet. Le *centre* d'un hyperarbre (pointé ou non) est le sommet ou l'arête d'excentricité minimale.

Les applications suivantes sont des bijections, réciproques l'une de l'autre :

$$\phi : \mathcal{H} + \mathcal{H}^{pa} \rightarrow \mathcal{H}^a + \mathcal{H}^p,$$

$$\psi : \mathcal{H}^a + \mathcal{H}^p \rightarrow \mathcal{H} + \mathcal{H}^{pa}.$$

Si  $T$  appartient à  $\mathcal{H}$ ,  $\phi(T)$  est l'hyperarbre obtenu en pointant le centre de  $T$  (qui est soit une arête, soit un sommet). (cas A)

Sinon,  $T$  appartient à  $\mathcal{H}^{pa}$ ,  $\phi(T)$  est l'hyperarbre obtenu en :

- ne pointant que l'arête pointée de  $T$ , si son centre est le sommet pointé de  $T$ , (cas B)
- ne pointant que le sommet pointé de  $T$ , si son centre est l'arête pointée de  $T$ , (cas C)
- ne pointant que le sommet ou l'arête pointée le plus éloigné du centre. (cas D)

Si  $T$  appartient à  $\mathcal{H}^a$ ,  $\psi(T)$  est l'hyperarbre obtenu en :

- ne pointant rien, si son centre est l'arête pointée de  $T$ , (réciproque du cas A)
- pointant le centre et l'arête pointée de  $T$ , si le centre appartient à l'arête pointée de  $T$ , (réciproque du cas B)
- pointant l'arête pointée de  $T$  et le sommet de cette arête le plus près du centre sinon. (réciproque du cas D)

Sinon,  $T$  appartient à  $\mathcal{H}^p$ ,  $\psi(T)$  est l'hyperarbre obtenu en :

- ne pointant rien, si son centre est le sommet pointé de  $T$ , (réciproque du cas A)

- pointant le sommet pointé de  $T$  et l'arête qui contient celui-ci, si cette arête est le centre, (réciproque du cas C)
- pointant le sommet pointé de  $T$  et l'arête contenant celui-ci la plus près du centre. (réciproque du cas D)

□

Soit  $k$  un entier naturel.

La proposition suivante permet de relier les espèces des  $k$ -chaînes larges d'hyperarbres, d'hyperarbres pointés en un sommet, d'hyperarbres pointés en une arête et d'hyperarbres pointés en un sommet et une arête.

**Proposition 2.9** (Principe de dissymétrie pour les chaînes d'hyperarbres). Nous avons la relation suivante :

$$(2.2) \quad \mathcal{H}_k + \mathcal{H}_k^{pa} = \mathcal{H}_k^p + \mathcal{H}_k^a.$$

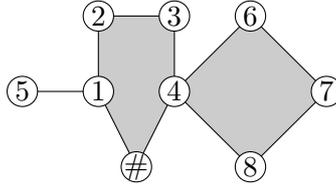
*Démonstration.* Le principe de dissymétrie est appliqué au minimum de la chaîne. □

### 2.3. Relations entre espèces.

2.3.1. *Relations pour  $\mathcal{H}_k^p$ .* Pour déterminer une équation fonctionnelle pour  $\mathcal{H}_k^p$ , nous introduisons un nouveau type d'hyperarbres.

**Définition 2.10.** Un *hyperarbre creux* est un hyperarbre dont nous avons enlevé un sommet qui n'appartenait qu'à une arête, en le remplaçant par un symbole #.

**Exemple 2.11.** Hyperarbre creux sur 8 sommets.



**Définition 2.12.** Une **chaîne d'hyperarbres creux** est une chaîne dont le minimum, c'est-à-dire l'hyperarbre avec le moins d'arêtes, est un hyperarbre creux. L'espèce des  $k$ -chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux sera notée  $\mathcal{H}_k^c$ . L'espèce des  $k$ -chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux à une seule arête sera notée  $\mathcal{H}_k^{cm}$ . Il est à noter que les autres éléments de la chaîne ne sont pas forcément creux.

Ces espèces sont reliées par la proposition suivante :

**Proposition 2.13.** Les espèces  $\mathcal{H}_k^p$ ,  $\mathcal{H}_k^c$  et  $\mathcal{H}_k^{cm}$  vérifient :

$$(2.3) \quad \mathcal{H}_k^p = X \times \text{Comm} \circ \mathcal{H}_k^c + X,$$

$$(2.4) \quad \mathcal{H}_k^c = \mathcal{H}_k^{cm} \circ \mathcal{H}_k^p,$$

$$(2.5) \quad \mathcal{H}_k^{cm} = \text{Comm} \circ \mathcal{H}_{k-1}^c.$$

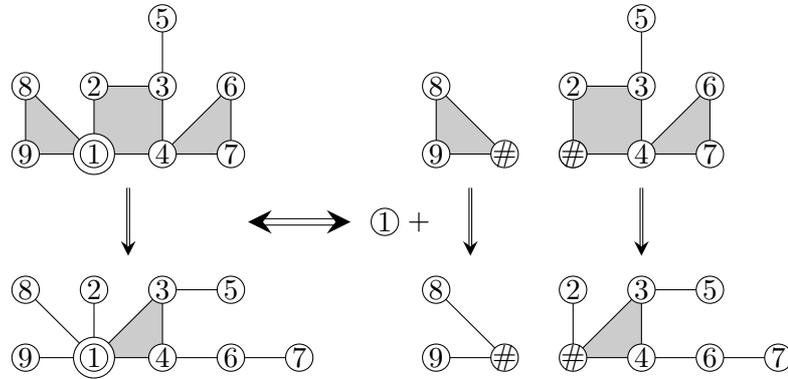
*Démonstration.* (1) Si les hyperarbres de la  $k$ -chaîne n'ont qu'un sommet, alors la  $k$ -chaîne est le même hyperarbre sur un sommet répété  $k$  fois : elle est équivalente à un singleton, ce qui donne l'espèce  $X$ .

Sinon, le minimum possède au moins une arête contenant le sommet pointé. Nous pouvons alors décomposer le minimum de la  $k$ -chaîne en un couple formé de l'étiquette du sommet pointé, qui donne l'espèce  $X$ , et d'un ensemble d'hyperarbres creux. Cet ensemble est obtenu en :

- insérant dans chaque arête contenant le sommet pointé un symbole #,
- supprimant le sommet pointé,
- séparant les arêtes qui avait le sommet pointé comme sommet commun.

Cette décomposition induit une décomposition de la chaîne large dont le minimum est pointé en un sommet. En effet, nous pouvons garder à part l'étiquette du sommet pointé en la remplaçant par le symbole #. Ensuite, la séparation des arêtes dans le minimum permet de dédoubler la chaîne en un ensemble de chaînes d'hyperarbres creux. Ceci donne le résultat (2.3).

**Exemple 2.14.** Une chaîne d'hyperarbres pointés décomposée en une étiquette et des chaînes d'hyperarbres creux. Nous n'avons représenté ici que les minimum (en haut) et maximum (en bas) de la chaîne.



(2) Soit  $S$  une  $k$ -chaîne d'hyperarbres creux.

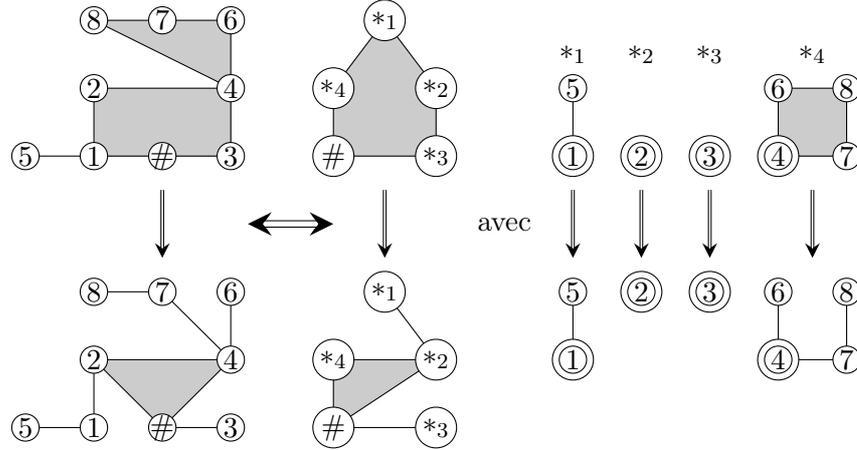
L'arête creuse du minimum de  $S$  donne à chaque étape de la chaîne un groupe d'arêtes distinguées, qui contiennent le symbole #. Ne considérant que ces arêtes, nous obtenons une  $k$ -chaîne d'hyperarbres  $C$  dont le minimum est creux et n'a qu'une arête.

En supprimant l'arête de son minimum contenant le symbole #, nous obtenons une forêt d'hyperarbres  $(h_1, \dots, h_f)$ . Chaque hyperarbre  $h_i$  a un sommet distingué  $s_i$  qui appartenait à l'arête supprimée. L'évolution des arêtes de  $h_i$  dans la chaîne  $S$  induit une chaîne  $S_{h_i}$  pointée au sommet  $s_i$ . Nous remarquons que la forêt formée des hyperarbres  $h_{i,l}$  de la  $l$ -ième étape des chaînes  $S_{h_i}$  est la forêt obtenue en supprimant dans  $S$  les arêtes de l'hyperarbre de la  $l$ -ième étape de  $C$ . La chaîne  $S$  est donc la chaîne  $C$  sur le sommet  $i$  de laquelle

à chaque étape  $l$ , l'hyperarbre  $h_{i,l}$  est greffé. La greffe en question consiste à remplacer le sommet  $i$  par la racine de  $h_{i,l}$  dans les arêtes contenant  $i$ .

La chaîne  $S$  peut être considérée comme la chaîne  $C$  dans le sommet  $i$  de laquelle est inséré la chaîne d'hyperarbres  $S_{h_i}$ , pointée en le sommet  $s_i$ . Ceci donne le résultat (2.4).

**Exemple 2.15.** Chaîne d'hyperarbres creux, décomposée en chaîne d'hyperarbres creux dont le minimum n'a qu'une arête et dont les sommets sont des chaînes d'hyperarbres enracinés.



- (3) Une  $k$ -chaînes d'hyperarbres creux dont le minimum ne possède qu'une arête peut être vue comme une  $(k - 1)$ -chaîne  $C_{k-1}$  d'hyperarbres ayant un sommet supplémentaire étiqueté  $\#$ . Séparer les arêtes contenant le symbole  $\#$  dans le minimum de  $C_{k-1}$  revient à séparer cette chaîne en un ensemble non vide de  $(k - 1)$ -chaînes d'hyperarbres dont le minimum est un hyperarbre creux. Ceci donne le résultat (2.5).  $\square$

Comme l'espèce  $\mathcal{H}_k^p$  se factorise par l'espèce  $X$ , l'application  $\frac{\mathcal{H}_k^p - X}{X}$  est une espèce. Ces équations nous permettent d'obtenir le corollaire suivant :

**Corollaire 2.16.** L'espèce  $\mathcal{H}_k^p$  vérifie :

$$(2.6) \quad \mathcal{H}_k^p = X \times Comm \circ \left( \frac{\mathcal{H}_{k-1}^p - X}{X} \circ \mathcal{H}_k^p \right) + X.$$

2.3.2. *Relations pour  $\mathcal{H}_k^a$ .* Nous avons la relation suivante :

**Proposition 2.17.** L'espèce  $\mathcal{H}_k^a$  s'exprime :

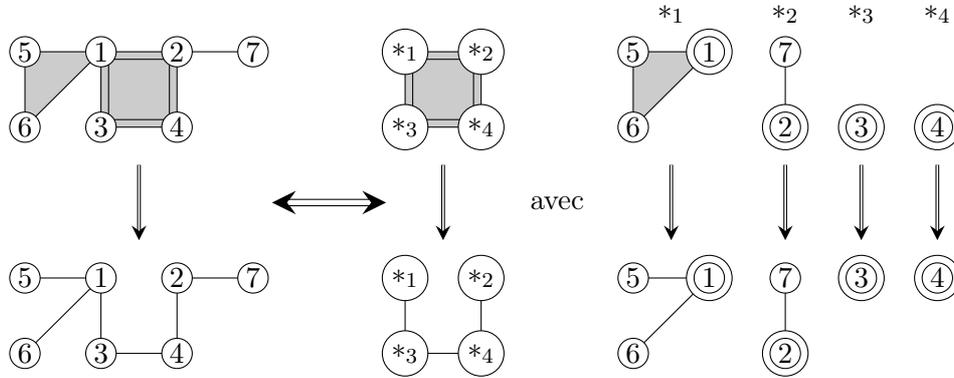
$$(2.7) \quad \mathcal{H}_k^a = (\mathcal{H}_{k-1} - X) \circ \mathcal{H}_k^p.$$

*Démonstration.* Soit  $S$  une  $k$ -chaîne d'hyperarbres dont le minimum est pointé en une arête. L'arête pointée du minimum de  $S$  donne à chaque étape de la chaîne un groupe d'arêtes distinguées, toutes issues de la fission de l'arête pointée du minimum. Ne considérant que ces arêtes, nous obtenons une  $k$ -chaîne d'hyperarbres dont le minimum n'a qu'une arête, ce qui revient à une  $(k - 1)$ -chaîne d'hyperarbres  $C$  sur au moins deux sommets.

En supprimant l'arête pointée dans le minimum de  $S$ , nous obtenons une forêt d'hyperarbres  $(h_1, \dots, h_f)$ . Chaque hyperarbre  $h_i$  a un sommet distingué  $s_i$  qui appartenait à l'arête supprimée. Le minimum de  $S$  peut être vu comme un hyperarbre à une seule arête dans les  $f$  sommets duquel sont insérés les  $h_i$  pointés en les  $s_i$ . L'évolution des arêtes de  $h_i$  dans la chaîne  $S$  induit une chaîne  $S_{h_i}$  pointée au sommet  $s_i$ .

La chaîne  $S$  peut être considérée comme la chaîne  $C$  dans les sommets de laquelle sont insérés les chaînes d'hyperarbres  $S_{h_i}$ , pointées en les sommets  $s_i$ , de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.13.

**Exemple 2.18.** Une chaîne d'hyperarbres dont le minimum est pointé en une arête, décomposée en une chaîne d'hyperarbres dont les sommets sont des chaînes d'hyperarbres pointés en un sommet.



□

2.3.3. Relations pour  $\mathcal{H}_k^{pa}$ . Nous avons :

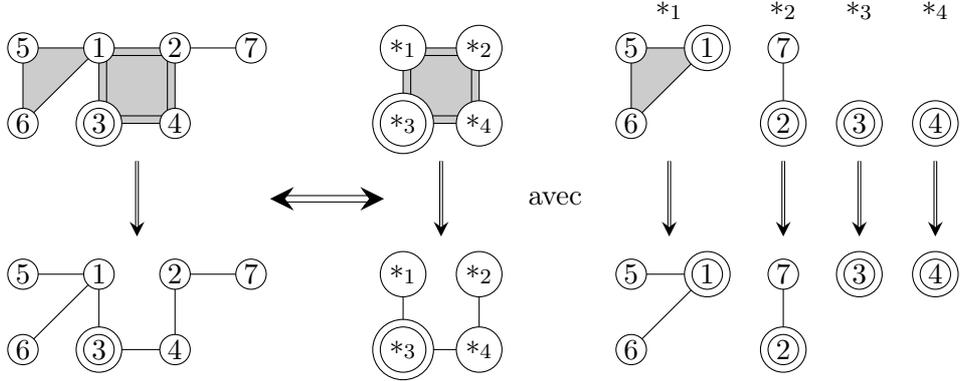
**Proposition 2.19.** L'espèce  $\mathcal{H}_k^{pa}$  vérifie l'équation fonctionnelle :

$$(2.8) \quad \mathcal{H}_k^{pa} = (\mathcal{H}_{k-1}^p - X) \circ \mathcal{H}_k^p.$$

*Démonstration.* Omettre dans un premier temps le pointage du sommet donne la décomposition de la proposition 2.17.

Pointer un sommet dans la chaîne d'hyperarbres pointée en une arête revient à pointer un sommet dans la  $k-1$ -chaîne d'hyperarbres, ce qui donne le résultat.

**Exemple 2.20.** Une chaîne d'hyperarbres, dont le minimum est pointé en une arête et un sommet, est décomposée en une chaîne d'hyperarbres pointés en un sommet dont les sommets sont des chaînes d'hyperarbres pointés en un sommet.



□

2.3.4. *Relations pour  $\mathcal{H}_k$ .* Le pointage en un sommet donne la proposition suivante :

**Proposition 2.21.** L'espèce  $\mathcal{H}_k$  vérifie :

$$(2.9) \quad X \times \mathcal{H}'_k = \mathcal{H}^p_k,$$

où ' désigne la dérivation des espèces.

2.4. **Retour sur les chaînes larges et les chaînes strictes.** Le pointage d'un sommet dans une chaîne ne change pas la nature polynomiale du caractère montrée au paragraphe 1.4. Par conséquent, la série génératrice et l'indice cyclique de  $\mathcal{H}^p$  sont polynomiaux en  $k$ .

De plus, comme la composée de fonctions symétriques à coefficients polynomiaux est une fonction symétrique à coefficients polynomiaux, les séries génératrices et indices cycliques associés aux espèces  $\mathcal{H}^a$ ,  $\mathcal{H}^{pa}$ ,  $\mathcal{H}^c$  et  $\mathcal{H}^{cm}$  sont eux-aussi polynomiaux en  $k$ .

Par conséquent, pour toutes les espèces d'hyperarbres considérées, nous pouvons évaluer en  $-1$  l'index cyclique, et cela donnera le caractère du groupe symétrique sur l'homologie associée aux posets d'hyperarbres pointés.

### 3. CALCUL DE LA DIMENSION DE L'HOMOLOGIE DU POSET

Les séries génératrices associées aux espèces  $\mathcal{H}_k$ ,  $\mathcal{H}^p_k$ ,  $\mathcal{H}^a_k$ ,  $\mathcal{H}^{pa}_k$ ,  $\mathcal{H}^c_k$  et  $\mathcal{H}^{cm}_k$  sont notées respectivement  $\mathcal{C}_k$ ,  $\mathcal{C}^p_k$ ,  $\mathcal{C}^a_k$ ,  $\mathcal{C}^{pa}_k$ ,  $\mathcal{C}^c_k$  et  $\mathcal{C}^{cm}_k$ . Nous les calculons ici.

3.1. **Relations entre séries génératrices.** Les égalités entre espèces de la partie 2 se traduisent par les mêmes égalités entre les séries génératrices :

**Proposition 3.1.** La série  $\mathcal{C}^p_k$  vérifie :

$$(3.1) \quad \mathcal{C}^p_k = x \times \exp \left( \frac{\mathcal{C}^p_{k-1} \circ \mathcal{C}^p_k}{\mathcal{C}^p_k} - 1 \right).$$

La série  $\mathcal{C}^a_k$  vérifie :

$$(3.2) \quad \mathcal{C}^a_k = (\mathcal{C}_k - x)(\mathcal{C}^p_k).$$

La série  $\mathcal{C}^{pa}_k$  vérifie :

$$(3.3) \quad \mathcal{C}^{pa}_k = (\mathcal{C}^p_{k-1} - x)(\mathcal{C}^p_k).$$

La série  $\mathcal{C}_k$  vérifie :

$$(3.4) \quad x \times \mathcal{C}'_k = \mathcal{C}_k^p.$$

Les séries vérifient de plus, d'après le principe de dissymétrie de la proposition 2.9 :

$$(3.5) \quad \mathcal{C}_k + \mathcal{C}_k^{pa} = \mathcal{C}_k^p + \mathcal{C}_k^a.$$

### 3.2. Valeurs des séries pour $k = 0$ et $k = -1$ .

3.2.1. *Calcul de  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_0^p$ .* Il n'y a qu'une chaîne d'hyperarbres de longueur 0 : la chaîne vide. Ceci donne :

$$(3.6) \quad \mathcal{C}_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$

La relation (3.4) nous permet d'obtenir :

$$(3.7) \quad \mathcal{C}_0^p = xe^x.$$

3.2.2. *Calcul de  $\mathcal{C}_{-1}$ .* La série  $\mathcal{C}_{-1}$  est donnée par le théorème suivant, ce qui permet de retrouver le résultat de MacCammond et Meier de [MM04] :

**Théorème 3.2.** [MM04, théorème 5.1] *La dimension du groupe d'homologie non trivial du poset des hyperarbres sur  $n$  sommets est  $(n-1)^{n-2}$ .*

*Démonstration.* D'après les équations (3.2) et (3.3), appliquées en  $k = 0$ , le principe de dissymétrie du corollaire 2.9 devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_0^p &= \mathcal{C}_0^a - \mathcal{C}_0^{pa} \\ &= (\mathcal{C}_{-1} - \mathcal{C}_{-1}^p) \circ \mathcal{C}_0^p. \end{aligned}$$

Avec les équations (3.4), (3.6) et (3.7), cette égalité devient :

$$(3.8) \quad (\mathcal{C}_{-1} - x\mathcal{C}'_{-1}) \circ xe^x = e^x - xe^x - 1.$$

Nous définissons une nouvelle série :

**Définition 3.3.** Soit  $\Sigma W$ , la série donnée par :

$$\Sigma W(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Cette série est la suspension de la série génératrice de l'espèce des arbres enracinés, associée à l'opérade PreLie. Elle vérifie l'équation suivante :

$$\Sigma W(x) e^{\Sigma W(x)} = x.$$

Ceci nous permet de calculer sa dérivée :

$$(\Sigma W)'(x) = \frac{1}{x + e^{\Sigma W}}.$$

En composant l'équation (3.8) par  $\Sigma W$ , nous obtenons :

$$\mathcal{C}_{-1} - x\mathcal{C}'_{-1} = e^{\Sigma W} - x - 1.$$

Pour conclure, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.4.** La décomposition en séries du membre de droite de l'égalité précédente s'exprime :

$$e^{\Sigma W} - x - 1 = \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

*Preuve du lemme 3.4.* Les deux membres de l'équation s'annulent en 0.

D'une part, nous obtenons en dérivant :

$$(e^{\Sigma W} - x - 1)' = \Sigma W' e^{\Sigma W} - 1 = \frac{e^{\Sigma W} - x - e^{\Sigma W}}{x + e^{\Sigma W}} = -x \Sigma W'.$$

D'autre part, nous obtenons en dérivant :

$$\left( \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

d'où, en ré-indexant :

$$\left( \sum_{n \geq 2} (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n^n \frac{x^n}{n!} = -x \Sigma W'.$$

Les dérivées de ces deux séries formelles coïncident et elles ont les mêmes valeurs en 0 donc elles sont égales.  $\square$

Le lemme 3.4 nous permet de conclure en posant  $\mathcal{C}_{-1} = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}$ . Car les coefficients  $a_n$  vérifient alors, pour tout entier  $n > 0$  :

$$a_n - n a_n = -(n-1) a_n = (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1},$$

d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 3.5.** La dérivée de la fonction  $\mathcal{C}_{-1}$  est donnée par :

$$(\mathcal{C}_{-1} - x)' = \Sigma W$$

*Démonstration.* En dérivant l'expression de  $\mathcal{C}_{-1}$  obtenue au théorème précédent, nous obtenons :

$$(\mathcal{C}_{-1} - x)' = \sum_{n \geq 2} (-1)^n (n-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ceci donne le résultat voulu en réindexant la série.  $\square$

3.2.3. *Retour sur  $\mathcal{C}_0^a$  et  $\mathcal{C}_0^{pa}$ .* Les séries  $\mathcal{C}_0^a$  et  $\mathcal{C}_0^{pa}$  sont données par la proposition suivante.

**Proposition 3.6.** (1) La série  $\mathcal{C}_0^a$  vérifie :

$$(3.9) \quad \mathcal{C}_0^a = \sum_{n \geq 2} (n-1)^2 \frac{x^n}{n!}.$$

(2) La série  $\mathcal{C}_0^{pa}$  vérifie :

$$(3.10) \quad \mathcal{C}_0^{pa} = \sum_{n \geq 2} n(n-1) \frac{x^n}{n!}.$$

*Démonstration.* D'après les équations (3.2) et (3.7),  $\mathcal{C}_0^a$  vérifie :

$$\mathcal{C}_0^a(x) = (\mathcal{C}_{-1} - x) \circ \mathcal{C}_0^p(x) = (\mathcal{C}_{-1} - x) \circ xe^x.$$

En dérivant cette égalité, nous obtenons en utilisant le corollaire 3.5 :

$$(\mathcal{C}_0^a)'(x) = \Sigma W \circ xe^x \times (x+1)e^x = x(x+1)e^x.$$

En développant ce résultat en séries formelles, nous avons :

$$(\mathcal{C}_0^a)'(x) = \sum_{n \geq 1} n^2 \frac{x^n}{n!}.$$

Comme  $\mathcal{C}_0^a(0) = 0$ , nous obtenons le résultat (1) voulu.

D'après les équations (3.3) et (3.7),  $\mathcal{C}_0^{pa}$  vérifie :

$$\mathcal{C}_0^{pa}(x) = (\mathcal{C}_{-1}^p - x) \circ \mathcal{C}_0^p(x) = (x(\mathcal{C}_{-1}' - 1)) \circ xe^x.$$

Avec le corollaire 3.5, nous obtenons :

$$\mathcal{C}_0^{pa}(x) = (x\Sigma W) \circ xe^x = x^2 e^x.$$

En développant ce résultat en séries formelles, nous obtenons le deuxième résultat de la proposition. □

#### 4. ACTION DU GROUPE SYMÉTRIQUE SUR L'HOMOLOGIE DU POSET

Nous renvoyons à l'annexe B pour les définitions de base sur l'indice cyclique d'une espèce et à l'annexe A pour les définitions des espèces usuelles utilisées dans cette partie et la suivante.

**4.1. Description de l'action.** Considérons le poset des hyperarbres sur  $n$  sommets décrit précédemment. Le groupe symétrique agit sur l'ensemble sous-jacent par permutation des sommets de ces hyperarbres. Cette action conserve le nombre d'arêtes ainsi que la relation d'ordre partielle. Elle induit donc une action sur l'homologie associée au poset  $\widehat{\text{HT}}_n$ . Nous allons déterminer dans cette partie le caractère de cette action sur l'homologie du poset.

Nous noterons  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{C}_k^p$ ,  $\mathbf{C}_k^a$  et  $\mathbf{C}_k^{pa}$ , les indices cycliques associés respectivement aux espèces  $\mathcal{H}_k$ ,  $\mathcal{H}_k^p$ ,  $\mathcal{H}_k^a$  et  $\mathcal{H}_k^{pa}$ .

**4.2. Relations entre les indices cycliques.** Les relations entre espèces de la partie 2 donnent les relations suivantes :

**Proposition 4.1.** Les séries  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{C}_k^p$ ,  $\mathbf{C}_k^a$  et  $\mathbf{C}_k^{pa}$  vérifient les relations suivantes :

$$(4.1) \quad \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k^{pa} = \mathbf{C}_k^p + \mathbf{C}_k^a,$$

$$(4.2) \quad \mathbf{C}_k^p = p_1 + p_1 \times \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \left( \frac{\mathbf{C}_{k-1}^p \circ \mathbf{C}_k^p - \mathbf{C}_k^p}{\mathbf{C}_k^p} \right),$$

$$(4.3) \quad \mathbf{C}_k^a + \mathbf{C}_k^p = \mathbf{C}_{k-1} \circ \mathbf{C}_k^p,$$

$$(4.4) \quad \mathbf{C}_k^{pa} + \mathbf{C}_k^p = \mathbf{C}_{k-1}^p \circ \mathbf{C}_k^p,$$

$$(4.5) \quad p_1 \frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial p_1} = \mathbf{C}_k^p.$$

### 4.3. Calcul du caractère du groupe symétrique.

4.3.1. *Calcul de  $\mathbf{C}_{-1}$ .* Nous notons  $M$  la fonction symétrique provenant de la structure anti-cyclique de l'opérade PreLie.

Nous renvoyons à [Cha07, partie 5.4] pour plus d'informations sur cette série.

Nous allons démontrer le théorème suivant qui donne la description de l'action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres en fonction des indices cycliques associés aux opérades Comm et PreLie :

**Théorème 4.2.** *La fonction symétrique  $\mathbf{C}_{-1}$  est donnée par :*

$$(4.6) \quad \mathbf{C}_{-1} = p_1 - \Sigma M = \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} + p_1 (\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} + 1).$$

*La fonction symétrique  $\mathbf{C}_{-1}^p$  est donnée par :*

$$(4.7) \quad \mathbf{C}_{-1}^p = p_1 (\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} + 1).$$

*Démonstration.* Pour cela, nous commençons par calculer  $\mathbf{C}_0$  et  $\mathbf{C}_0^p$ . Il n'y a qu'une chaîne de longueur 0 : la chaîne vide. Celle-ci est fixée par n'importe quelle permutation. Un calcul rapide donne :

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_{\text{Comm}}.$$

L'équation (4.5) nous permet d'obtenir :

$$(4.8) \quad \mathbf{C}_0^p = p_1 \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{Comm}}}{\partial p_1} = \mathbf{C}_{\text{Perm}} = p_1 (1 + \mathbf{C}_{\text{Comm}}).$$

L'équation (4.2) nous donne :

$$\mathbf{C}_0^p = p_1 + p_1 \times \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \left( \frac{\mathbf{C}_{-1}^p \circ \mathbf{C}_0^p - \mathbf{C}_0^p}{\mathbf{C}_0^p} \right),$$

d'où

$$p_1 + p_1 \times \mathbf{C}_{\text{Comm}} = p_1 + p_1 \times \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \left( \frac{\mathbf{C}_{-1}^p \circ \mathbf{C}_{\text{Perm}} - \mathbf{C}_{\text{Perm}}}{\mathbf{C}_{\text{Perm}}} \right).$$

Rappelons que  $\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} \circ \mathbf{C}_{\text{Perm}} = \mathbf{C}_{\text{Perm}} \circ \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} = p_1$ , d'après [Cha07]. Nous obtenons alors :

$$\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} = \frac{\mathbf{C}_{-1}^p - p_1}{p_1},$$

d'où le résultat :

$$(4.9) \quad \mathbf{C}_{-1}^p = p_1 (\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} + 1).$$

L'équation de dissymétrie (4.1), combinée aux relations (4.3) et (4.4) en  $k = 0$  donne :

$$\mathbf{C}_{\text{Comm}} + \mathbf{C}_{-1}^p \circ \mathbf{C}_{\text{Perm}} - \mathbf{C}_{\text{Perm}} = \mathbf{C}_{\text{Perm}} + \mathbf{C}_{-1} \circ \mathbf{C}_{\text{Perm}} - \mathbf{C}_{\text{Perm}}.$$

En composant par  $\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}}$  et remplaçant  $\mathbf{C}_{-1}^p$  par son expression dans l'équation (4.9), nous obtenons :

$$\mathbf{C}_{-1} = \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} + p_1 (\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} + 1) - p_1.$$

$$\text{Or } (p_1(\mathbf{C}_{\text{Comm}} + 1)) \circ \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} = p_1,$$

d'où

$$\mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} = \frac{p_1 - \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}}}{\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}}}.$$

Donc

$$\mathbf{C}_{-1} = -1 + \frac{p_1}{\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}}} + p_1 \times \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}}.$$

D'après [Cha05, équation 50], en composant par la suspension, nous obtenons :

$$\Sigma M - 1 = -p_1 \left( -1 + \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}} + \frac{1}{\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}}} \right),$$

or nous avons :

$$(p_1 - \mathbf{C}_{-1}) - 1 = p_1 - \frac{p_1}{\Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}}} - p_1 \times \Sigma \mathbf{C}_{\text{PreLie}},$$

d'où le résultat.  $\square$

4.3.2. *Retour sur  $\mathbf{C}_0^a$  et  $\mathbf{C}_0^{pa}$ .* Dans cette partie, nous raffinons les résultats obtenus à la proposition 3.6.

**Théorème 4.3.** *Les indices cycliques associés aux espèces des 0-chaînes larges, dont le minimum est pointé respectivement en une arête et en un sommet et une arête, s'expriment :*

$$(4.10) \quad \mathbf{C}_0^a = \mathbf{C}_{\text{Comm}} + (p_1 - 1) \times \mathbf{C}_{\text{Perm}},$$

et

$$(4.11) \quad \mathbf{C}_0^{pa} = p_1 \mathbf{C}_{\text{Perm}}.$$

Pour  $\mathbf{C}$  un indice cyclique, notons  $(\mathbf{C})_n$  la partie de  $\mathbf{C}$  correspondant à une représentation du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .

Alors, pour tout  $n \geq 2$ , notant  $S^{(n-1,1)}$  la représentation irréductible du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  associée à la partition  $(n-1, 1)$  de  $n$ , nous obtenons :

- (1)  $(\mathbf{C}_0^a)_n$  est le caractère de la représentation  $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)}$  ;
- (2)  $(\mathbf{C}_0^{pa})_n$  est le caractère de la représentation  $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n-1,1)}$ .

*Démonstration.* Les deux égalités viennent des relations (4.3) et (4.4), en remplaçant  $\mathbf{C}_0^p$  par son expression dans l'équation (4.8),  $\mathbf{C}_{-1}^p$  par son expression dans l'équation (4.9) et  $\mathbf{C}_{-1}$  par son expression dans le théorème 4.2. Nous obtenons :

$$(4.12) \quad (\mathbf{C}_0^a)_n = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} + \sum_{\lambda \vdash n-2} p_1^2 \frac{p_\lambda}{z_\lambda} - \sum_{\lambda \vdash n-1} p_1 \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$$

Le coefficient devant  $\frac{p_\lambda}{z_\lambda}$  dans  $(\mathbf{C}_0^a)_n$  est

$$1 - p + p(p-1) = (p-1)^2,$$

où  $p$  est le nombre de points fixes d'une permutation de type  $\lambda$ .

De la même manière, nous obtenons :

$$(4.13) \quad (\mathbf{C}_0^{pa})_n = \sum_{\lambda \vdash n-2} p_1^2 \frac{p_\lambda}{z_\lambda}$$

Le coefficient devant  $\frac{p_\lambda}{z_\lambda}$  dans  $(\mathbf{C}_0^{pa})_n$  est

$$(p-1)^2 + p - 1 = p(p-1),$$

où  $p$  est le nombre de points fixes d'une permutation de type  $\lambda$ .

Le lemme suivant permet de conclure :

**Lemme 4.4.** Le caractère de la représentation irréductible  $S^{(n-1,1)}$  sur une classe de conjugaison  $C_\sigma$  est égale à  $p-1$ , où  $p$  est le nombre de point fixes de chacun des éléments de  $C_\sigma$ .

*Preuve du lemme.* La représentation naturelle de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathbb{C}^n$  est la somme directe de la représentation triviale et de la représentation  $S^{(n-1,1)}$ .

Le caractère de cette représentation sur une classe de conjugaison  $C_\sigma$  est égale au nombre de point fixes de chacun des éléments de  $C_\sigma$ .

Le caractère de la représentation triviale vaut toujours 1. Le résultat est obtenu par différence. □

En effet, d'après le lemme, Le caractère de la représentation  $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)}$  sur une classe de conjugaison  $C_\sigma$  est égale à  $(p-1)^2$ , où  $p$  est le nombre de point fixes de chacun des éléments de  $C_\sigma$ . Ceci donne la première relation.

La seconde relation est obtenue en calculant le caractère de la représentation  $S^{(n-1,1)} \otimes S^{(n-1,1)} \oplus S^{(n-1,1)}$ , qui vaut  $p(p-1)$  sur une classe de conjugaison dont les éléments ont  $p$  points fixes. □

## 5. ACTION DU GROUPE SYMÉTRIQUE SUR L'HOMOLOGIE DE WHITNEY

### 5.1. Définition et propriété de l'homologie de Whitney du poset.

Nous renvoyons à [Wac07] pour la définition et les propriétés de l'homologie de Whitney.

**Définition 5.1.** L'homologie de Whitney d'un poset  $\mathcal{P}$  possédant un minimum  $m$  est l'ensemble des espaces :

$$(5.1) \quad \text{WH}_i(\mathcal{P}) = \bigoplus_{x \in \mathcal{P}} \tilde{H}_{i-2}([m, x]), i \geq 2.$$

**Théorème 5.2.** [Wac07] Si un poset  $\mathcal{P}$  est Cohen-Macaulay, son homologie de Whitney vérifie :

$$(5.2) \quad \text{WH}_i(\mathcal{P}) = \bigoplus_{x \in P_{i-1}} \tilde{H}_{i-2}([m, x])$$

où  $P_{i-1} = \{x \in \mathcal{P} | r(x) = i-1\}$  et  $r(x)$  est le rang de  $x$ .

Comme  $\widehat{\text{HT}}_n$  est Cohen-Macaulay d'après le théorème 1.14, il vérifie le théorème précédent.

Pour pouvoir calculer l'homologie de Whitney de  $\widehat{\text{HT}}_n$ , nous définissons un poids sur les  $k$ -chaînes larges :

**Définition 5.3.** Le *poids* d'une chaîne  $S$  d'hyperarbres, noté  $w(S)$ , est :

$$w(S) = \#\text{edge}(\max(S)) - 1$$

où  $\#\text{edge}(\max(S))$  est le nombre d'arêtes du maximum de  $S$ .

On observe que dans  $\widehat{\text{HT}}_n$ , le poids d'une chaîne est égale au rang de son maximum.

Pour  $\mathcal{E}$ , une espèce d'indice cyclique  $\mathbf{C}$ , nous noterons  $\mathcal{E}_t$ , l'espèce pondérée associée, d'indice cyclique  $\mathbf{C}_t$ .

Ainsi, l'espèce  $\mathcal{H}_{k,t}$  est l'espèce qui à un ensemble associe l'ensemble des couples formées d'une  $k$ -chaîne large d'hyperarbres et du poids de son maximum. Nous avons donc :

$$\mathbf{C}_{k,t} = \sum_{n \geq 1} \sum_{i \geq 0} \chi(\text{HL}_{k,i}^n) t^i \frac{x^n}{n!}$$

où  $\chi(\text{HL}_{k,i}^n)$  est le caractère donnée par l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sur l'espace des  $k$ -chaînes larges dont le maximum est de rang  $i$ .

Le raisonnement de la partie 1.4 reste valable avec le poids : notre but est de trouver des relations polynomiales en  $k$  entre les  $k$ -chaînes larges, puis de les évaluer en  $k = -1$ . Nous obtiendrons alors :

$$(5.3) \quad \mathbf{C}_{-1,t} = \sum_{n \geq 1} \sum_{i \geq 0} \text{WH}_i(\widehat{\text{HT}}_n) t^i \frac{x^n}{n!}.$$

**5.2. Relations entre les indices cycliques.** Les relations entre espèces de la partie 2 donnent les relations suivantes, en prenant en compte le poids :

**Proposition 5.4.** Les séries  $\mathbf{C}_{k,t}$ ,  $\mathbf{C}_{k,t}^p$ ,  $\mathbf{C}_{k,t}^a$  et  $\mathbf{C}_{k,t}^{pa}$  vérifient les relations suivantes :

$$(5.4) \quad \mathbf{C}_{k,t} + \mathbf{C}_{k,t}^{pa} = \mathbf{C}_{k,t}^p + \mathbf{C}_{k,t}^a,$$

$$(5.5) \quad \mathbf{C}_k^p = \frac{p_1}{t} \times (1 + \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \left( \frac{t\mathbf{C}_{k-1,t}^p - p_1}{p_1} \circ t\mathbf{C}_{k,t}^p \right)),$$

$$(5.6) \quad \mathbf{C}_{k,t}^a = (\mathbf{C}_{k-1,t} - \frac{p_1}{t}) \circ (t\mathbf{C}_{k,t}^p),$$

$$(5.7) \quad \mathbf{C}_{k,t}^{pa} = (\mathbf{C}_{k-1,t}^p - \frac{p_1}{t}) \circ (t\mathbf{C}_{k,t}^p),$$

$$(5.8) \quad p_1 \frac{\partial \mathbf{C}_{k,t}}{\partial p_1} = \mathbf{C}_{k,t}^p.$$

**5.3. Nouveau pointage des chaînes.** Nous avons besoin d'introduire deux nouveaux pointages de chaînes. Pour cela, nous noterons :

- $\mathcal{H}_{k,t}^A$ , l'espèce associée aux  $k$ -chaînes larges pondérées d'hyperarbres dont le maximum est pointé en une arête et  $\mathbf{C}_{k,t}^A$  la série génératrice associée.
- $\mathcal{H}_{k,t}^{pA}$ , l'espèce associée aux  $k$ -chaînes larges pondérées d'hyperarbres dont le maximum est pointé en un sommet et une arête et  $\mathbf{C}_{k,t}^{pA}$  la série génératrice associée.

Remarquons que les espèces  $\mathcal{H}_{1,t}^a$  et  $\mathcal{H}_{1,t}^A$  coïncident par définition, de même que les espèces  $\mathcal{H}_{1,t}^{pa}$  et  $\mathcal{H}_{1,t}^{pA}$ .

Les espèces définies précédemment sont reliées aux autres espèces pointées d'hyperarbres par le théorème suivant :

**Théorème 5.5.** *Les espèces  $\mathcal{H}_{k,t}^A$  et  $\mathcal{H}_{k,t}^{pA}$  vérifient :*

$$(5.9) \quad \mathcal{H}_{k,t}^A = \mathcal{H}_{k-1,t}^A \circ (t\mathcal{H}_{k,t}^p),$$

$$(5.10) \quad \mathcal{H}_{k,t}^{pA} = \mathcal{H}_{k-1,t}^{pA} \circ (t\mathcal{H}_{k,t}^p),$$

$$(5.11) \quad \mathcal{H}_{k,t} + \mathcal{H}_{k,t}^{pA} = \mathcal{H}_{k,t}^p + \mathcal{H}_{k,t}^A.$$

*Démonstration.* Pointer une arête dans le maximum revient à pointer une arête dans le minimum, puis pointer une arête dans le maximum issue de la division de l'arête pointée dans le minimum. Ceci donne le résultat en se basant sur la preuve de la proposition 2.17.

Pointer ensuite un sommet de la chaîne donne la deuxième relation.

La troisième relation est obtenue par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 2.2 sur le principe de dissymétrie. □

Ceci entraîne les relations suivantes :

**Corollaire 5.6.** Les séries  $\mathbf{C}_{k,t}^A$  et  $\mathbf{C}_{k,t}^{pA}$  vérifient :

$$(5.12) \quad \mathbf{C}_{k,t}^A = \mathbf{C}_{k-1,t}^A \circ (t\mathbf{C}_{k,t}^p),$$

$$(5.13) \quad \mathbf{C}_{k,t}^{pA} = \mathbf{C}_{k-1,t}^{pA} \circ (t\mathbf{C}_{k,t}^p).$$

**5.4. Séries HAL.** Nous rappelons ici les définitions des séries HAL introduites dans [Cha07].

**Définition 5.7.** Les séries HAL, HAL<sup>p</sup>, HAL<sup>pA</sup> et HAL<sup>A</sup> sont les séries définies par les équations fonctionnelles suivantes :

$$(5.14) \quad \text{HAL}^{pA} = p_1 \left( \frac{p_1}{1 + tp_1} \circ \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ (p_1 + (-t) \text{HAL}^{pA}) \right),$$

$$(5.15) \quad \text{HAL}^p = p_1 (\Sigma_t \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ (p_1 + (-t) \text{HAL}^{pA})),$$

$$(5.16) \quad \text{HAL}^A = (\mathbf{C}_{\text{Comm}} - p_1) \circ (p_1 + (-t) \text{HAL}^{pA}),$$

$$(5.17) \quad \text{HAL} = \text{HAL}^p + \text{HAL}^A - \text{HAL}^{pA}.$$

Nous introduisons la série  $\Sigma W_t$ , définie par :

$$(t\mathbf{C}_{\text{Perm}} - tp_1 + p_1) \circ \Sigma W_t = \Sigma W_t \circ (t\mathbf{C}_{\text{Perm}} - tp_1 + p_1) = p_1.$$

**Proposition 5.8.** La série  $\Sigma W_t$  vérifie :

$$(5.18) \quad \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma W_t = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t\Sigma W_t}.$$

*Démonstration.* Par définition, nous avons :

$$(\mathbf{C}_{\text{Perm}} - p_1) \circ \Sigma W_t = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t}.$$

Or  $\mathbf{C}_{\text{Perm}} = p_1(1 + \mathbf{C}_{\text{Comm}})$ , d'où le résultat.  $\square$

Le théorème suivant donne des expressions explicites des séries HAL en fonction de  $\Sigma W_t$ .

**Théorème 5.9.** Les séries HAL, HAL<sup>P</sup>, HAL<sup>PA</sup> et HAL<sup>A</sup> vérifient :

$$(5.19) \quad \text{HAL}^{\text{PA}} = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t},$$

$$(5.20) \quad \text{HAL}^{\text{A}} = (\mathbf{C}_{\text{Comm}} - p_1) \circ \Sigma W_t,$$

$$(5.21) \quad \text{HAL}^{\text{P}} = \frac{p_1}{t} \left( \Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ \frac{p_1 - \Sigma W_t}{\Sigma W_t} \right).$$

où  $\Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}}$  est la série vérifiant  $\Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ \mathbf{C}_{\text{Comm}} = \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} = p_1$ .

*Démonstration.* (1) Un calcul donne, en appliquant l'équation (5.18) :

$$p_1 \left( \frac{\mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma W_t}{1 + t\mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma W_t} \right) = p_1 \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t\Sigma W_t + tp_1 - t\Sigma W_t}.$$

D'où la relation :

$$\frac{p_1 - \Sigma W_t}{t} = p_1 \left( \frac{p_1}{1 + tp_1} \right) \circ \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ (p_1 + (-t) \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t}).$$

Les séries HAL<sup>PA</sup> et  $\frac{p_1 - \Sigma W_t}{t}$  vérifient la même équation fonctionnelle : elles sont donc égales.

(2) La deuxième égalité découle de la première et de l'équation (5.16) car la série  $\Sigma W_t$  vérifie :

$$p_1 + (-t) \text{HAL}^{\text{PA}} = \Sigma W_t.$$

(3) D'après la première relation de la proposition, la série HAL<sup>P</sup> vérifie :

$$\text{HAL}^{\text{P}} = p_1(\Sigma_t \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma W_t).$$

Or,  $\Sigma_t \mathbf{C}_{\text{Lie}} = \frac{1}{t} \Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ (tp_1)$ , ce qui implique :

$$\text{HAL}^{\text{P}} = \frac{p_1}{t} (\Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ t\mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \Sigma W_t).$$

Appliquant l'équation (5.18), nous obtenons le résultat souhaité.  $\square$

## 5.5. Calcul du caractère.

5.5.1. *Calcul des séries en  $k = 0$ .* Nous pouvons calculer :

**Proposition 5.10.** (1) La série  $\mathbf{C}_{0,t}$  s'exprime :

$$(5.22) \quad \mathbf{C}_{0,t} = \mathbf{C}_{\text{Comm}} - p_1 + \frac{p_1}{t}.$$

(2) La série  $\mathbf{C}_{0,t}^p$  s'exprime :

$$(5.23) \quad \mathbf{C}_{0,t}^p = \mathbf{C}_{\text{Perm}} - p_1 + \frac{p_1}{t} = p_1 \mathbf{C}_{\text{Comm}} + \frac{p_1}{t}.$$

La série  $t\mathbf{C}_{0,t}^p$  est donc l'inverse de la série  $\Sigma W_t$  pour la composition.

(3) La série  $\mathbf{C}_{0,t}^A$  s'exprime :

$$(5.24) \quad \mathbf{C}_{0,t}^A = \mathbf{C}_{\text{Comm}} - p_1.$$

(4) La série  $\mathbf{C}_{0,t}^{pA}$  s'exprime :

$$(5.25) \quad \mathbf{C}_{0,t}^{pA} = \mathbf{C}_{\text{Perm}} - p_1 = p_1 \mathbf{C}_{\text{Comm}}.$$

*Démonstration.* (1) La seule chaîne d'hyperarbres fixée par l'action d'un élément  $\sigma$  du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  est la chaîne vide. Comme le poids de la chaîne vide est  $t^0$ , sauf pour  $n = 1$ , où il est égal à  $\frac{1}{t}$ . La série  $\mathbf{C}_{0,t}$  ne diffère donc de  $\mathbf{C}_{\text{Comm}}$  que pour le terme en  $n = 1$ , d'où le résultat.

(2) Comme  $p_1 \frac{\partial \mathbf{C}_{\text{Comm}}}{\partial p_1} = \mathbf{C}_{\text{Perm}}$ , le résultat vient de la relation (5.8) en  $k = 0$ .

(3) Par définition,  $\mathbf{C}_{1,t}^A = \mathbf{C}_{1,t}^a$ , avec les relations (5.12) et (5.6), la série  $\mathbf{C}_{0,t}^A$  vérifie :

$$\mathbf{C}_{0,t}^A = \mathbf{C}_{0,t} - \frac{p_1}{t} = \mathbf{C}_{\text{Comm}} - p_1.$$

(4) Par définition,  $\mathbf{C}_{1,t}^{pA} = \mathbf{C}_{1,t}^{pa}$ , avec les relations (5.13) et (5.7), la série  $\mathbf{C}_{0,t}^{pA}$  vérifie :

$$\mathbf{C}_{0,t}^{pA} = \mathbf{C}_{0,t}^p - \frac{p_1}{t} = \mathbf{C}_{\text{Perm}} - p_1 = p_1 \mathbf{C}_{\text{Comm}}.$$

□

5.5.2. *Calcul des séries en  $k = -1$ .* Le théorème suivant raffine le calcul du polynôme caractéristique [Cha07], démontre la conjecture de [Cha07, Conjecture 5.3] et relie l'action du groupe symétrique sur l'homologie de Whitney du poset des hyperarbres à une action du groupe symétrique sur un ensemble d'hyperarbres décorés par l'opérade Lie.

**Théorème 5.11.** (1) La série  $\mathbf{C}_{-1,t}^{pA}$  s'exprime :

$$(5.26) \quad \mathbf{C}_{-1,t}^{pA} = \frac{p_1 - \Sigma W_t}{t} = \text{HAL}^{pA}.$$

(2) La série  $\mathbf{C}_{-1,t}^A$  s'exprime :

$$(5.27) \quad \mathbf{C}_{-1,t}^A = (\mathbf{C}_{\text{Comm}} - p_1) \circ \Sigma W_t = \text{HAL}^A.$$

(3) La série  $\mathbf{C}_{-1,t}^p$  s'exprime :

$$(5.28) \quad \mathbf{C}_{-1,t}^p = \frac{p_1}{t} (1 + \Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ \frac{p_1 - \Sigma W_t}{\Sigma W_t}) = \text{HAL}^p + \frac{p_1}{t}.$$

(4) La série  $\mathbf{C}_{-1,t}$  s'exprime :

$$(5.29) \quad \mathbf{C}_{-1,t} = \text{HAL} + \frac{p_1}{t}.$$

*Démonstration.* Les égalités de droite sont données par le théorème 5.9.

(1) La relation (5.13) en  $k = 0$  donne, avec les équations (5.23) et (5.25) :

$$\mathbf{C}_{-1,t}^{pA} = (p_1 \mathbf{C}_{\text{Comm}}) \circ \Sigma W_t.$$

L'équation (5.18) nous permet ainsi de conclure.

(2) La relation (5.12) en  $k = 0$  donne, avec les équations (5.23) et (5.24) :

$$\mathbf{C}_{-1,t}^A = (\mathbf{C}_{\text{Comm}} - p_1) \circ \Sigma W_t,$$

d'où le résultat.

(3) La relation (5.5) en  $k = 0$  donne, comme  $\Sigma W_t$  est l'inverse de  $t\mathbf{C}_{0,t}^p$  :

$$p_1 = \Sigma W_t (1 + \mathbf{C}_{\text{Comm}} \circ \frac{t\mathbf{C}_{-1,t}^p - p_1}{p_1})$$

Or  $\Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ \mathbf{C}_{\text{Comm}} = p_1$  d'après [Cha07], d'où :

$$\Sigma \mathbf{C}_{\text{Lie}} \circ \frac{p_1 - \Sigma W_t}{\Sigma W_t} = \frac{t\mathbf{C}_{-1,t}^p - p_1}{p_1}.$$

On obtient ainsi le résultat.

(4) Cette relation vient des relations précédentes, associées au principe de dissymétrie. □

## ANNEXE A. RAPPELS SUR LES ESPÈCES

Nous ne donnons dans cette partie que de brefs rappels sur les espèces. Le lecteur trouvera dans le livre [BLL98] plus d'informations sur ce sujet.

**Définition A.1.** Une *espèce*  $F$  est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans la catégorie des ensembles finis. A un ensemble fini  $I$ , l'espèce  $F$  associe un ensemble fini  $F(I)$  indépendant de la nature de  $I$ .

**Exemple A.2.** • L'application qui a un ensemble fini  $I$  associe l'ensemble des ordres totaux sur  $I$  est une espèce, appelée espèce des listes, notée  $L$ .

• L'application qui a un ensemble fini  $I$  associe l'ensemble  $\{I\}$  est une espèce, appelée l'espèce des ensembles, notée  $E$ .

• L'application définie pour tout ensemble fini  $I$  par :

$$I \mapsto \begin{cases} \{I\} & \text{si } \#I = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une espèce, appelée l'espèce singleton, notée  $X$ .

- L'application définie pour tout ensemble fini  $I$  par :

$$I \mapsto \begin{cases} \{I\} & \text{si } \#I \geq 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une espèce, notée  $Comm$ , appelée l'espèce associée à l'opérade  $Comm$ .

- L'application qui à un ensemble fini  $I$  associe l'ensemble  $I$  est une espèce, appelée l'espèce des ensembles pointés, notée  $Perm$ . Elle est associée à l'opérade  $Perm$ .
- L'application qui à un ensemble fini  $I$  associe l'ensemble des arbres enracinés dont les sommets sont étiquetés par  $I$  est une espèce, appelée l'espèce associée à l'opérade  $PreLie$ , notée  $PreLie$ .

A chaque espèce  $F$ , on peut associer la série génératrice suivante :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \#F(\{1, \dots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

**Exemple A.3.** Les séries génératrices des espèces définies précédemment sont :

- $C_L(x) = \frac{1}{1-x}$ ,
- $C_E(x) = \exp(x)$ ,
- $C_X(x) = x$ ,
- $C_{Comm}(x) = \exp(x) - 1$ .

Les opérations suivantes peuvent être définies sur les espèces :

**Définition A.4.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Les opérations suivantes peuvent être définies :

- $F'(I) = F(I \sqcup \{\bullet\})$ , (dérivation)
- $(F \sqcup G)(I) = F(I) \sqcup G(I)$ , (union disjointe)
- $(F \times G)(I) = F(I) \times G(I)$ , (produit)
- $(F \circ G)(I) = \bigsqcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J)$ , (composition)  
où  $\mathcal{P}(I)$  parcourt l'ensemble des partitions de  $I$ .

Nous avons alors la propriété suivante :

**Proposition A.5.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Leurs séries génératrices vérifient :

- $C_{F'} = C'_F$ ,
- $C_{F \sqcup G} = C_F + C_G$ ,
- $C_{F \times G} = C_F \times C_G$ ,
- $C_{F \circ G} = C_F \circ C_G$ .

## ANNEXE B. RAPPELS SUR L'INDICE CYCLIQUE

Soit  $F$  une espèce. On peut lui associer une fonction symétrique : l'indice cyclique. Nous renvoyons à [BLL98] pour une référence sur ce sujet.

**Définition B.1.** L'indice cyclique d'une espèce  $F$  est la série formelle en une infinité de variables  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$  définie par :

$$\mathbf{C}_F(\mathbf{p}) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} F^\sigma p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} p_3^{\sigma_3} \dots \right),$$

où  $F^\sigma$  désigne l'ensemble des  $F$ -structures fixées sous l'action de  $\sigma$  et où  $\sigma_i$  est le nombre de cycles de longueur  $i$  dans la décomposition de  $\sigma$  en cycles disjoints.

Nous pouvons définir des opérations sur les indices cycliques.

**Définition B.2.** Les opérations  $+$  et  $\times$  sur les indices cycliques sont les mêmes que sur des séries formelles.

Pour  $f = f(\mathbf{p})$  et  $g = g(\mathbf{p})$ , le pléthysme  $f \circ g$  est défini par :

$$f \circ g(\mathbf{p}) = f(g(p_1, p_2, p_3, \dots), g(p_2, p_4, p_6, \dots), \dots, g(p_k, p_{2k}, p_{3k}, \dots), \dots).$$

Il est linéaire à gauche.

Ces opérations vérifient :

**Proposition B.3.** Soient  $F$  et  $G$  deux espèces. Leurs indices cycliques vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{F+G} &= \mathbf{C}_F + \mathbf{C}_G, & \mathbf{C}_{F \times G} &= \mathbf{C}_F \times \mathbf{C}_G, \\ \mathbf{C}_{F \circ G} &= \mathbf{C}_F \circ \mathbf{C}_G, & \mathbf{C}_{F'} &= \frac{\partial \mathbf{C}_F}{\partial p_1}. \end{aligned}$$

Nous définissons, de plus, l'opération suivante :

**Définition B.4.** La *suspension*  $\Sigma_t$  d'une fonction symétrique  $f(p_1, p_2, p_3, \dots)$  est définie par :

$$\Sigma_t f = -\frac{1}{t} f(-tp_1, -t^2 p_2, -t^3 p_3, \dots).$$

Par convention, nous noterons  $\Sigma$ , la suspension en  $t = 1$ .

#### RÉFÉRENCES

- [Ber89] Claude Berge. *Hypergraphs*, volume 45 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. Combinatorics of finite sets, Translated from the French.
- [BLL98] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota.
- [Cha05] F. Chapoton. On some anticyclic operads. *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :53–69 (electronic), 2005.
- [Cha07] F. Chapoton. Hyperarbres, arbres enracinés et partitions pointées. *Homology, Homotopy Appl.*, 9(1) :193–212, 2007.
- [JMM06] Craig Jensen, Jon McCammond, and John Meier. The integral cohomology of the group of loops. *Geom. Topol.*, 10 :759–784 (electronic), 2006.
- [JMM07] Craig Jensen, Jon McCammond, and John Meier. The Euler characteristic of the Whitehead automorphism group of a free product. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6) :2577–2595 (electronic), 2007.
- [Kal99] Louis H. Kalikow. *Enumeration of parking functions, allowable permutation pairs, and labeled trees*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1999. Thesis (Ph.D.)–Brandeis University.
- [MM04] Jon McCammond and John Meier. The hypertree poset and the  $l^2$ -Betti numbers of the motion group of the trivial link. *Math. Ann.*, 328(4) :633–652, 2004.
- [Mun84] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

- [Sun94] Sheila Sundaram. The homology representations of the symmetric group on Cohen-Macaulay subposets of the partition lattice. *Adv. Math.*, 104(2) :225–296, 1994.
- [Wac07] Michelle L. Wachs. Poset topology : tools and applications. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 497–615. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [War98] David Michael Warme. *Spanning trees in hypergraphs with applications to Steiner trees*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1998. Thesis (Ph.D.)—University of Virginia.