



**HAL**  
open science

# Une méthode rapide pour calculer un produit de convolution avec une fonction de Green : application au problème de contact dynamique

Rabie Meftah, Denis Duhamel, Julien Cesbron, Yin Hai-Ping

► **To cite this version:**

Rabie Meftah, Denis Duhamel, Julien Cesbron, Yin Hai-Ping. Une méthode rapide pour calculer un produit de convolution avec une fonction de Green : application au problème de contact dynamique. CSMA 2011, 10e Colloque National en Calcul des Structures, May 2011, Presqu'île de Giens, France. pp.1-8. hal-00668511

**HAL Id: hal-00668511**

**<https://hal.science/hal-00668511>**

Submitted on 9 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une méthode rapide pour calculer un produit de convolution avec une fonction de Green : application au problème de contact dynamique

R. Meftah<sup>1</sup>, D. Duhamel<sup>1</sup>, J. Cesbron<sup>2</sup>, H.P. Yin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Université Paris-Est, Laboratoire Navier (ENPC/IFSTTAR/CNRS), Ecole des Ponts ParisTech, 6  
8 av Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée {rabie.meftah,denis.duhamel,hp.yin}@enpc.fr

<sup>2</sup> IFSTTAR, BP 4129, 44341 Bouguenais Cedex, France. julien.cesbron@lcp.fr

---

## Résumé —

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle démarche pour calculer le produit de convolution de façon rapide et efficace. L'idée est de simplifier la fonction de Green dans le domaine fréquentiel en la décomposant dans une base modale. Les paramètres modaux identifiés sont ensuite utilisés pour construire une convolution rapide. Cette démarche a été adaptée au problème de contact dynamique. Pour illustrer l'efficacité de la méthode, deux exemples sont présentés. Les déplacements et les forces de contact obtenus par cette méthode sont comparés à ceux obtenus à l'aide de la convolution classique.

**Mots clés** — contact dynamique, fonction de Green, convolution.

---

## 1 Introduction

L'analyse du problème de contact dynamique entre deux solides déformables ou un solide déformable et une surface rigide est généralement traitée par deux grandes familles de méthodes : la méthode de pénalisation [2] et la méthode des multiplicateurs de Lagrange [1]. D'autres méthodes ont été développées, on peut citer par exemple la méthode de Lagrange perturbée [3] qui est une régularisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange par l'addition d'un terme à la fonction lagrangienne, ou bien la méthode de Lagrange augmentée [4] qui combine des termes de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la fonction de pénalité. On peut aussi citer d'autres méthodes comme la méthode d'éléments de contact [5], la méthode de fonction de contrainte [6], la méthode de la compensation linéaire [7] et la méthode incrémentale de programmation convexe [8]... La plupart de ces méthodes sont souvent difficiles à mettre en oeuvre ou bien mènent à des calculs lourds.

La réponse dynamique d'un problème de contact peut être aussi traitée à l'aide de la fonction de Green du système en contact. Dans cette approche, cette réponse est calculée par un produit de convolution entre la fonction de Green et la force de contact. Une telle démarche a été utilisée par différents auteurs : M. McIntyre et al. [9] a appliqué cette approche pour traiter son problème de contact (string/bow contact) afin d'étudier les grandes amplitudes d'oscillations des instruments musicaux. C. Wang et J. Kim. [10],[11] ont appliqué la même approche pour une poutre fine en contact avec un obstacle, puis Nordborg [12], pour le problème de contact roue/rail. Cette technique est aussi largement utilisée pour traiter les problèmes de contact entre pneumatique et chaussée [13, 14, 15, 16].

La technique de convolution présente l'avantage de sa simplicité à mettre en oeuvre et de temps de calcul relativement faibles par rapport aux méthodes classiques. Cependant le temps de calcul de la convolution peut encore être amélioré. Dans son article, G. Beylkin [17] a développé une méthode pour calculer le produit de convolution avec la fonction de Green de Helmholtz dans l'espace libre. La convolution combine un traitement dans l'espace et dans le domaine de Fourier. Dans le premier la fonction de Green est approximée par la somme d'une décomposition Gaussienne avec des coefficients positifs et dans le deuxième par un produit par un noyau à bande limitée. La démarche que nous proposons dans ce travail est basée sur la décomposition de la fonction de Green dans une base modale. Les paramètres modaux identifiés sont ensuite utilisés pour construire une convolution plus rapide.

## 2 Résolution à l'aide des fonctions de Green

### 2.1 Convolution standard

Dans le cas général, un problème de dynamique linéaire s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{q}(t) \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  sont respectivement la matrice de masse, la matrice de raideur et la matrice d'amortissement.

La résolution de cette équation demande d'une part la recherche d'une solution générale  $\mathbf{u}_g(t)$  de l'équation homogène qui lui est associée, d'autre part, de chercher une solution particulière de l'équation complète. La connaissance de la fonction de Green  $\mathbf{G}(\omega)$  est un moyen systématique pour trouver cette solution particulière. La méthode classique pour ce genre de calcul est de trouver la fonction de Green temporelle  $\mathbf{g}(t)$  puis de faire un produit de convolution de cette fonction et de la force appliquée  $\mathbf{q}(t)$ .

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_g(t) + \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t - \tau)\mathbf{q}(\tau)d\tau \quad (2)$$

On se place dans le cas où le système est au repos jusqu'à un certain temps pris comme origine  $t = 0$ . Dans ces conditions, la solution du problème homogène est nulle ( $\mathbf{u}_g(t) = \mathbf{0}$ ), et la solution se réduit à

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t - \tau)\mathbf{q}(\tau)d\tau \quad (3)$$

Cette équation peut être discrétisée sous la forme :

$$\mathbf{u}_k = \sum_{m=0}^k \mathbf{g}_{k-m}\mathbf{q}_m \quad (4)$$

où  $\mathbf{u}_k$  est le déplacement à l'instant  $k\Delta t$ .

On note  $N_t$  le nombre de pas à simuler et  $N_g$  le nombre de pas pour représenter la fonction de Green dans l'intervalle de temps d'influence  $[0, N_g\Delta t]$ . Au delà de cet intervalle, la fonction de Green peut être négligée. On choisit donc le nombre  $N_g$  de façon que la partie négligée soit d'amplitude inférieure à un centième de l'amplitude maximale.

L'équation (4) est réduite à

$$\mathbf{u}_k \approx \sum_{m=0}^{\min(k, N_g)} \mathbf{g}_{k-m}\mathbf{q}_m \quad (5)$$

### 2.2 Convolution par décomposition modale

La fonction de Green est supposée connue. L'idée est d'approximer cette fonction par une combinaison linéaire de la contribution de chaque mode. Les paramètres modaux sont identifiés à l'aide de l'algorithme LSCE

$$G(\omega) \approx \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{-\omega^2 + 2j\xi_k\omega\omega_k + \omega_k^2} \quad (6)$$

Pour vérifier l'approximation, on définit l'erreur  $E$  entre la fonction de base et la fonction reconstruite à l'aide des paramètres modaux identifiés par

$$E = \frac{\int_0^{\omega_{max}} |G(\omega) - \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k}{-\omega^2 + 2j\xi_k\omega\omega_k + \omega_k^2}| d\omega}{\int_0^{\omega_{max}} |G(\omega)| d\omega} \quad (7)$$

Après avoir déterminé les paramètres modaux  $A_k$ ,  $\omega_k$  et  $\xi_k$  et tronqué la décomposition à un ordre  $N$ , le déplacement dans le domaine temporel peut être obtenu par une transformation de Fourier inverse de l'équation (6)

$$g(t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_k^d t) H(t) \quad (8)$$

Avec

$$\omega_k^d = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$$

Le déplacement peut être calculé par un produit de convolution

$$u(t) = \int_0^t g(\tau) q(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) q(\tau) d\tau \quad (9)$$

On remplace l'expression de  $g(t)$  dans l'équation (9) pour obtenir :

$$u(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{k=2N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k (t - \tau)} \sin(\omega_k^d (t - \tau)) q(\tau) d\tau \quad (10)$$

En séparant les variables  $t$  et  $\tau$  puis en réarrangeant les termes, nous pouvons écrire le déplacement sous la forme

$$u(t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} \left[ \sin(\omega_k^d t) \alpha^k(t) - \cos(\omega_k^d t) \beta^k(t) \right] \quad (11)$$

où  $\alpha^k(t)$  et  $\beta^k(t)$  sont calculés par les formules

$$\alpha^k(t) = \int_0^t e^{\xi_k \omega_k \tau} \cos(\omega_k^d \tau) q(\tau) d\tau \quad (12)$$

$$\beta^k(t) = \int_0^t e^{\xi_k \omega_k \tau} \sin(\omega_k^d \tau) q(\tau) d\tau \quad (13)$$

$$(14)$$

Numériquement le déplacement à l'instant  $n\Delta t$  est calculé par la formule

$$u(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k n\Delta t} \left[ \sin(\omega_k^d n\Delta t) \alpha^k(n\Delta t) - \cos(\omega_k^d n\Delta t) \beta^k(n\Delta t) \right] \quad (15)$$

Les coefficients  $\alpha^k(n\Delta t)$  et  $\beta^k(n\Delta t)$  sont calculés par les relations de récurrence

$$\alpha^k((n+1)\Delta t) = \alpha^k(n\Delta t) + e^{\xi_k \omega_k n\Delta t} \cos(\omega_k^d n\Delta t) q(n\Delta t) \Delta t \quad (16)$$

$$\beta^k((n+1)\Delta t) = \beta^k(n\Delta t) + e^{\xi_k \omega_k n\Delta t} \sin(\omega_k^d n\Delta t) q(n\Delta t) \Delta t \quad (17)$$

### 3 Application aux problèmes de contact

Pour illustrer la présente approche, on considère un simple problème de contact unilatéral. L'objectif est de valider la méthode en la comparant avec la méthode standard. On considère un système mécanique caractérisé par sa fonction de Green  $G(\omega)$  au point de contact. Le système se déplace avec une vitesse constante et sans frottement sur un profil  $u_r(t)$ . Le déplacement  $u(t)$  à l'instant  $t$  dépend de l'historique de la force de contact  $f_c(t)$  et du déplacement imposé par le profil. Deux situations se présentent : soit il y a contact, dans ce cas le déplacement est égal à la hauteur du profil  $u_r(t)$ , et la force est strictement positive, soit il n'y a pas contact et dans ce cas, la force de contact est nulle et le déplacement est strictement supérieur à la hauteur du profil.

$$u(t) = u_r(t) ; f_c(t) > 0 \quad (18)$$

$$u(t) > u_r(t) ; f_c(t) = 0 \quad (19)$$

1. Premièrement l'historique de déplacement  $u^h(n\Delta t)$  est calculé en supposant qu'il n'y a pas de contact  $f_c(n\Delta t) = 0$ .

$$u^h(n\Delta t) = \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} f_c(k\Delta t) g((n-k)\Delta t) \quad (20)$$

2.  $u^h(n\Delta t)$  est comparé avec la hauteur du profil et la longueur du ressort au repos  $l_0$  (voir figure 1) :

$$\Delta x(n\Delta t) = u_r(n\Delta t) + l_0 - u^h(n\Delta t) \quad (21)$$

3. si la condition de non contact ( $\Delta x < 0$ ) est satisfaite, le déplacement est :

$$u(n\Delta t) = u^h(n\Delta t) \quad (22)$$

puis on refait la même procédure pour ( $f_c((n+1)\Delta t) = 0$ ).

4. Si  $\Delta x \geq 0$ , la force de contact résultante de la compression du ressort est calculée par la loi de Hertz

$$f_c(n\Delta t) = k_c \Delta x^{\frac{3}{2}}(n\Delta t), \quad (23)$$

5. La procédure est répétée pour le prochain pas de temps en supposant qu'il n'y a pas de contact ( $f_c((n+1)\Delta t) = 0$ ).

La même démarche est utilisée dans le cas de la méthode de composition modale sauf que le déplacement historique  $u^h(n\Delta t)$  est calculé par

$$u^h(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k n\Delta t} \left[ \sin(\omega_k^d n\Delta t) \alpha^k((n-1)\Delta t) - \cos(\omega_k^d n\Delta t) \beta^k((n-1)\Delta t) \right] \quad (24)$$

### 3.1 Cas d'un SDof

Comme exemple de validation, prenons un cas simple d'un oscillateur harmonique amorti (une masse ponctuelle de masse  $M$  attachée à un ressort de raideur  $K$  et un amortisseur de coefficient d'amortissement  $C$ ). Le système se déplace avec une vitesse constante  $V_0$ . On suppose que le déplacement se fait sans glissement sur une chaussée de profil  $u_r(x)$  comme le montre la figure (1). Un ressort de contact de raideur  $k_c$  et de longueur  $l_0$  est placé entre la masse et la chaussée afin de modéliser l'effort de contact. Le ressort de contact travaille seulement en compression. La chaussée a pour équation :

$$u_r = A_0 \sin(\omega_r x) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_r} V_0 t\right) \quad (25)$$

où  $\lambda_r$  est la longueur d'onde de la chaussée et  $A_0$  son amplitude.

Le système vérifie les équations :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -Mg + F_c \quad (26)$$

$$u(t) \geq u_r(t) \quad (27)$$

$$F_c \geq 0 \quad (28)$$

On prend comme conditions initiales

$$u(0) = U_0 = u_r(0) \quad (29)$$

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} = V_0 \quad (30)$$

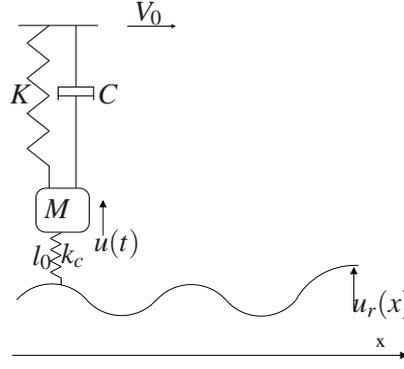


FIG. 1 – Contact d'un système masse-ressort-amortisseur avec une chaussée sinusoïdale

On peut distinguer deux cas de figures :

Si la masse est au-dessus du profil, il n'y a pas de contact. Le déplacement et la force de contact sont donnés par :

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0(t-t_c)} \left[ u_c \cos(\omega_d(t-t_c)) + \frac{v_c + \xi\omega_0 u_c}{\omega_d} \sin(\omega_d(t-t_c)) \right] \quad (31)$$

$$F_c(t) = 0 \quad (32)$$

où  $u_c$  et  $v_c$  sont respectivement le déplacement et la vitesse à l'instant  $t_c$  du dernier contact .

Si la masse est en-dessous du profil, il y a contact et les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$F_c(t) = k_c \Delta x^3 \quad (33)$$

$$\Delta x = u_r(t) + l_0 - u^h(t) \quad (34)$$

Les paramètres utilisés pour les simulations sont regroupés dans le tableau (1).

M[Kg]	K[N/m]	$\xi$	$\omega_r$ [rad/s]	$K_c$ [N/m]
1	$10^6$	0.02	100	$10^6$

TAB. 1 – Paramètres de simulation pour le système masse-ressort

Les figures (2) et 3 montrent que les deux méthodes donnent quasiment le même déplacement et la même force de contact. L'utilisation de la convolution standard est coûteuse en terme de temps de calcul, en particulier pour un nombre de pas de temps important. En effet, d'après les équations (15) et (4) nous pouvons constater que dans le cas d'une convolution classique, le nombre d'opérations de calcul est proportionnel aux nombre de pas à simuler  $N$  et à la taille de la fonction de Green dans son intervalle d'influence  $N_g$ . Au contraire, pour la décomposition modale le nombre d'opérations est proportionnel à  $N$  et à l'ordre de l'approximation. Le tableau (2) illustre une comparaison de temps de calcul entre les deux méthodes pour plusieurs configurations.

### 3.2 Cas d'un MDof

Comme deuxième exemple d'illustration, on considère un système dynamique présenté par sa fonction de Green  $G(\omega)$ . Les paramètres modaux ( $A_k^0, \omega_k^0, \xi_k^0$ ) sont générés de façon aléatoire. Leurs approximations ( $A_k, \omega_k, \xi_k$ ) sont obtenues à l'aide de l'algorithme LSCE. La figure (4) montre une comparaison entre la fonction de Green de base et son approximation.

Le système se déplace avec une vitesse constante sur une chaussée pseudo aléatoire définie par

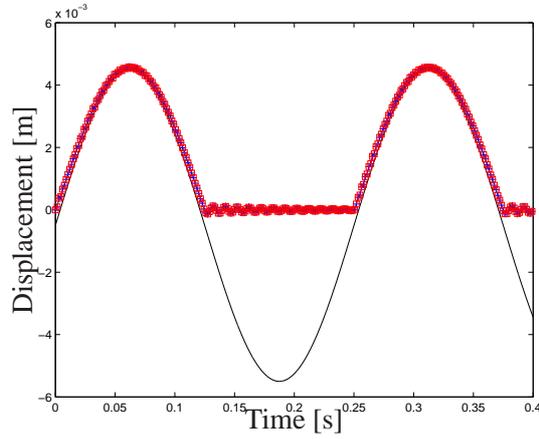


FIG. 2 – Déplacement d'un système SDOF sur un profil sinusoïdal : — profil, - + - convolution standard, -□- décomposition modale

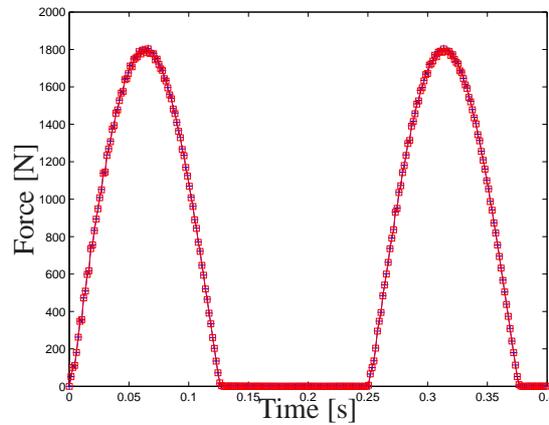


FIG. 3 – Force de contact pour un système SDOF sur un profil sinusoïdal : - + - convolution standard, -□- décomposition modale

Pas de temps[ms]	$N_t$	Convolution standard		Décomposition modale	
		$N_g$	Durée de la simulation[s]	$N_m$	Temps de calcul[s]
0.1	2000	1900	0.06	1	0.02
0.1	20000	1900	1.01	1	0.10
0.01	20000	19000	5.50	1	0.15
0.01	200000	19000	105.14	1	1.50

TAB. 2 – Comparaison des temps de calcul (système SDoF)

$$u_r = \sum_{k=1}^{k=10} \phi_k A_0 \sin(\phi_k \frac{2\pi}{\lambda_r} x) \quad (35)$$

où  $\lambda_r = 50$  mm est la longueur d'onde du profil,  $A_0 = 5$  mm son amplitude,  $\phi_k$  et  $\phi_k$  deux paramètres aléatoires compris entre 0 et 1.

Les figures (5) et (6) montrent les résultats de la simulation. De même que le cas d'un SDoF on obtient les mêmes résultats pour les deux méthodes. Le temps de calcul en utilisant la méthode de la décomposition modale est plus avantageux comme le montre le tableau (3).

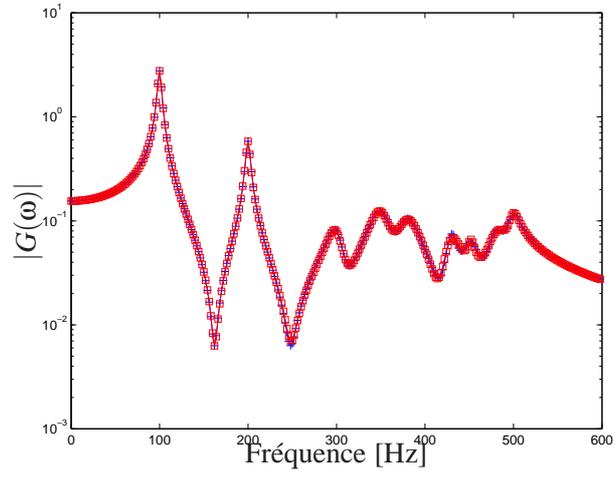


FIG. 4 – Approximation de la fonction de Green à l'aide de l'algorithme LSCE : -□- Analytique, - + - Approximation

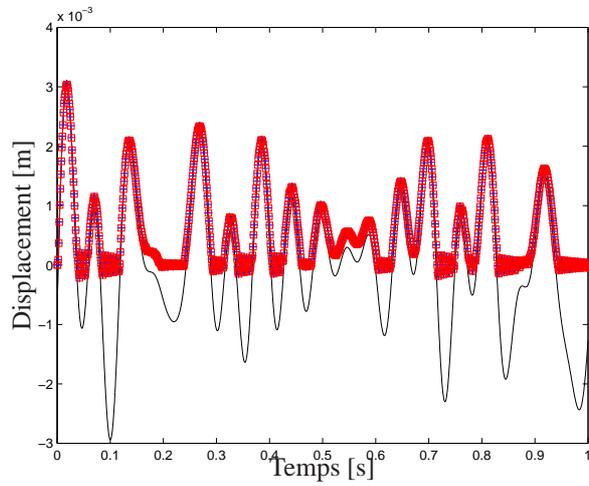


FIG. 5 – Déplacement d'un système MDoF sur un profil aléatoire : — profil, - + - convolution standard, -□- décomposition modale

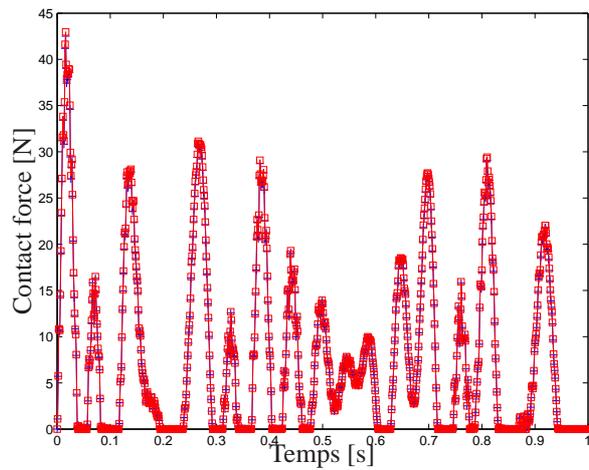


FIG. 6 – Force de contact pour un système MDOF sur un profil aléatoire : - + - convolution standard , -□- décomposition modale

Pas de temps [ms]	$N_t$	Convolution standard		Décomposition modale	
		$N_g$	temps de calcul [s]	$N_m$	temps de calcul [s]
0.1	10000	2930	1.14	10	0.23

TAB. 3 – Comparaison des temps de calcul (système MDoF)

## 4 Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle formulation pour calculer le produit de convolution avec les fonctions de Green. La formulation est basée sur l’approximation des fonctions de Green par une combinaison linéaire de la contribution de chaque mode. Les paramètres modaux de l’approximation sont identifiés à l’aide de l’algorithme LLSCE, et sont ensuite utilisés pour construire une convolution plus rapide. Nous avons appliqué la démarche dans le cas d’un problème de contact dynamique où le passage au domaine temporel est indispensable pour intégrer les non linéarité dues aux efforts de contact. A travers les deux exemples présentés (un système SDof sur un profil sinusoïdal et un système MDoF sur un profil pseudo-aléatoire) nous avons pu constater la rapidité de la méthode par rapport à la convolution classique, tout en gardant la même précision. Le gain en temps de calcul peut être encore plus important dans le cas de problèmes de contact multi points.

## Références

- [1] K.J. Bathe and A.B. Chaudhary. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 :65–88, 1985.
- [2] Y. Kanto and G. Yakwa. A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :755–774, 1990.
- [3] C. Simo, P. Wriggers, and R.L. Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50 :163–180, 1985.
- [4] Lei Jianga and Robert J. Rogersa. Combined lagrangian multiplier and penalty function finite element technique for elastic impact analysis. *Computers and Structures*, 30 :1219–1229, 1988.
- [5] J.T. Stadter and R.O. Weiss. Analysis of previous contact through finite element gaps. *Computers and Structures*, 10 :867–873, 1979.
- [6] Etrovic and K.J. Bathe. On the treatment of inequality constraints arising from contact conditions in finite element analysis. *Computers and Structures*, 40(2) :203–209, 1991.
- [7] J.O. Kim and B.M. Kwak. Dynamic analysis of two-dimensional friction contact by linear complementarity problem formulation,. *International Journal of Solids and Structures*, 33 (1996) :4605–4624, 1996.
- [8] F.F. Mahmoud, M.M. Hassan, and N.J. Salamon. Dynamic contact of deformable bodies. *Computers and Structures*, 36 (1) :169–181.
- [9] M. McIntyre, R. Schumacher, and J. Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 74 (1983) :1325–1345, 1983.
- [10] C. Wang and J. Kim. New analysis method for a thin beam impacting against a stop based on the full continuous mode. *Journal of Sound and Vibration*, 1996 :809–823, 191.
- [11] C. Wang and J. Kim. The dynamic analysis of a thin beam impacting against a stop of general three-dimensional geometry. *Journal of Sound and Vibration*, 203 :237–249, 1997.
- [12] A. Nordborg. Wheel/rail noise generation due to nonlinear effects and parametric excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111 :1772–1781, 2002.
- [13] W. Kropp. *A model to describe the rolling noise of a smooth radial tire on a rough road surface*. PhD thesis, T. U. Berlin, 1992.
- [14] K. Larsson. *Modelling of dynamic contact-exemplified on tire/road interaction*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2002.
- [15] F. Wullens. *Excitation of tyre vibration due to tyre/road interaction*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2004.
- [16] P.B.U. Andersson and W. Kropp. Time domain contact model for tyre/road interaction including nonlinear contact stiffness due to small-scale roughness. *Journal of Sound and Vibration*, pages 296–312, 2008.
- [17] G. Beylkin, C. Kurcza, and L. Monzona. Fast convolution with the free space Helmholtz Green’s function. *Journal of Computational Physics*, 228 :2770–2791, 2009.