



HAL
open science

Clôture intégrale et opérations de tores algébriques de complexité un dans les variétés affines

Kevin Langlois

► **To cite this version:**

Kevin Langlois. Clôture intégrale et opérations de tores algébriques de complexité un dans les variétés affines. 2012. hal-00666843v1

HAL Id: hal-00666843

<https://hal.science/hal-00666843v1>

Preprint submitted on 6 Feb 2012 (v1), last revised 7 Nov 2013 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Clôture intégrale et opérations de tores algébriques de complexité un dans les variétés affines

Kevin Langlois

Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons aux algèbres affines multigraduées de complexité 1. Un des résultats principaux donne une description des idéaux homogènes intégralement clos en termes de diviseurs polyédraux d'Altmann-Hausen. Un autre résultat important concerne le calcul de la normalisation d'une variété affine avec une opération de tore algébrique de complexité 1. On décrit également la clôture intégrale des idéaux homogènes.

Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons aux algèbres affines multigraduées de complexité 1 sur un corps commutatif \mathbf{k} algébriquement clos de caractéristique zéro. Un des résultats principaux donne une description des idéaux homogènes intégralement clos en termes de diviseurs polyédraux, voir §3.8, théorème 8. Un autre résultat important concerne le calcul de la normalisation d'une variété affine avec une opération de tore algébrique de complexité 1. On décrit également la clôture intégrale des idéaux homogènes, voir §2, théorème 4, §3.5, théorème 8.

Voici deux exemples classiques qui illustrent notre problématique. On considère l'algèbre des polynômes de Laurent à n variables

$$L_{[n]} = L_{[n]}(\mathbf{k}) := \mathbf{k} [t_1, t_1^{-1}, t_2, t_2^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}].$$

On remarque que $L_{[n]}$ est l'anneau des coordonnées de la variété $(\mathbf{k}^*)^n$. Soit A une sous-algèbre engendrée par un nombre fini de monômes dont les exposants forment un sous-ensemble E de \mathbb{Z}^n . Alors il est connu [Ho] que la normalisation de A est l'ensemble des combinaisons linéaires des monômes de $L_{[n]}$ dont les exposants appartiennent au cône rationnel $\omega \subset \mathbb{Q}^n$ engendré par E . On a donc l'égalité

$$\bar{A} = \bigoplus_{(m_1, \dots, m_n) \in \omega \cap \mathbb{Z}^n} \mathbf{k} t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$$

où \bar{A} est la normalisation de A . Par exemple, si $n = 1$ et si A est la sous-algèbre engendrée par les monômes t_1^2 et t_1^3 alors la normalisation de A est l'algèbre des polynômes $\mathbf{k}[t_1]$.

Un problème analogue existe pour les idéaux monomiaux. Supposons que l'algèbre A est normale. Soit I un idéal de A engendré par des monômes. L'enveloppe convexe dans \mathbb{Q}^n de tous les exposants des monômes apparaissant dans I est un polyèdre P contenu dans ω . Le polyèdre P est stable par translation de ω . La clôture intégrale de I est égale à

$$\bar{I} = \bigoplus_{(m_1, \dots, m_n) \in P \cap \mathbb{Z}^n} \mathbf{k} t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$$

(voir [Vit]). On peut déterminer P à l'aide d'un système fini de générateurs monomiaux de I . Par exemple, si $n = 2$, $A = \mathbb{C}[t_1, t_2]$ et I est l'idéal engendré par les monômes t_1^3 et t_2^3 alors

$$\bar{I} = (t_1^3, t_1^2 t_2, t_1 t_2^2, t_2^3).$$

Pour plus de détails sur la clôture intégrale des idéaux et leurs applications, voir [LeTe], [HS], [Va]. Notons que l'étude des idéaux intégralement clos est liée au problème de normalisation des éclatements (voir [KKMS] pour les variétés toriques et [Br] pour les variétés sphériques) et des modifications affines (voir [KZ], [Du]).

Dans cet article, par les analogies avec le cas monomial présenté ci-dessus, nous abordons le cas suivant, à savoir les opérations de tores algébriques de complexité 1. Avant de passer à la formulation des résultats, rappelons quelques notions.

Un tore algébrique \mathbb{T} de dimension n est un groupe algébrique isomorphe à $(\mathbf{k}^\star)^n$. Si M est le réseau des caractères de \mathbb{T} et A est une algèbre affine sur \mathbf{k} alors une M -graduation de A est équivalente à une opération algébrique de \mathbb{T} dans $X = \text{Spec } A$. La complexité de l'algèbre affine M -graduée A est la codimension d'une \mathbb{T} -orbite générale dans X . Dans l'exemple présenté ci-dessus, l'algèbre A admet une \mathbb{Z}^n -graduation naturelle, celle donnée par les monômes et l'opération de $(\mathbf{k}^\star)^n$ correspondante est de complexité 0.

Le but de cet article est de répondre aux questions suivantes : étant donnée une algèbre A affine M -graduée de complexité 1 sur \mathbf{k} et des éléments homogènes a_1, \dots, a_r tels que

$$A = \mathbf{k}[a_1, \dots, a_r],$$

peut-on décrire de manière explicite la normalisation de A en fonction du r -uplet (a_1, \dots, a_r) ? Si en outre A est normale alors peut-on décrire la clôture intégrale d'un idéal homogène $I \subset A$ en fonction d'un système de générateurs homogènes fini de I ? Ces deux questions sont liées. En effet la réponse à la seconde question peut être déduite de la première en examinant la normalisation de l'algèbre de Rees $A[It]$ correspondant à l'idéal I . Voir [Ri] pour plus de détails.

Pour répondre à la première question, il est utile d'attacher un objet combinatoire à chaque algèbre M -graduée normale. Par exemple dans le cas monomial, le cône rationnel ω permet de reconstruire A lorsque $A = \bar{A}$.

Rappelons qu'une \mathbb{T} -variété est une variété normale munie d'une opération algébrique fidèle de \mathbb{T} . Les \mathbb{T} -variétés de complexité zéro sont les variétés toriques. Il existe plusieurs descriptions combinatoires des \mathbb{T} -variétés affines. Voir [De], [AH] pour la complexité arbitraire, [KKMS], [Ti] pour la complexité 1 et [FZ] pour le cas des surfaces. Notons que les descriptions dans [AH], [Ti] se généralisent aux \mathbb{T} -variétés qui ne sont pas affines [AHS]. Voir [AOPSV] pour des applications diverses de la théorie des \mathbb{T} -variétés.

Dans cet article, nous utilisons le point de vue de [AH] et de [Ti]. Pour simplifier, supposons $M = \mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{T} = (\mathbf{k}^\star)^n$. Une \mathbb{T} -variété affine de complexité 1, $X = \text{Spec } A$, peut être décrite par son cône des poids $\omega \subset \mathbb{Q}^n$ et par un diviseur \mathfrak{D} sur une courbe algébrique lisse C dont les coefficients sont des polyèdres de \mathbb{Q}^n . Pour chaque élément $m = (m_1, \dots, m_n)$ de $\omega \cap \mathbb{Z}^n$, on a une évaluation $\mathfrak{D}(m)$ appartenant au \mathbb{Q} -espace vectoriel des diviseurs de Weil rationnels sur C . À la donnée combinatoire $(\omega, C, \mathfrak{D})$ on associe l'algèbre M -graduée

$$A[C, \mathfrak{D}] := \bigoplus_{m \in \omega \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C([\mathfrak{D}(m)])) \chi^m$$

où χ^m est le monôme $t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$. Voir [AH] pour des définitions et des énoncés précis. Un des résultats principaux de cet article est le suivant (voir le théorème 4, §2).

Théorème. *Soit C une courbe algébrique lisse. On considère une sous-algèbre*

$$B = \mathbf{k}[C][f_1 \chi^{s_1}, \dots, f_r \chi^{s_r}] \subset L_{[n]}(\mathbf{k}(C)) := \mathbf{k}(C)[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$$

satisfaisant les conditions suivantes : pour $i = 1, \dots, r$, f_i est une fonction rationnelle non nulle sur C , s_i est un vecteur de \mathbb{Z}^n et χ^{s_i} est le monôme de Laurent correspondant à s_i . L'algèbre B a même corps

des fractions que $L_{[n]}(\mathbf{k}(C))$. Sous ces conditions, la normalisation de B est l'algèbre $A[C, \mathfrak{D}]$ dont le cône des poids ω est engendré par s_1, \dots, s_r et le coefficient du diviseur polyédral \mathfrak{D} au point $z \in C$ est

$$\Delta_z = \{ v \in \mathbb{Q}^n, \langle s_i, v \rangle \geq -\nu_z(f_i), i = 1, \dots, r \}$$

où $\nu_z(f_i)$ est l'ordre d'annulation de la fonction f_i au point z .

Ce théorème donne une réponse à la première question ci-dessus. Cela généralise des résultats connus pour le cas des surfaces affines munies d'une opération de \mathbf{k}^* [FZ, 3.9, 4.6].

La réponse à la deuxième question est donnée par le théorème 7 de la section 3.5. Il est connu que l'ensemble des idéaux homogènes intégralement clos d'une variété torique affine non dégénérée de cône des poids ω est en correspondance bijective avec l'ensemble des polyèdres entiers contenus dans ω et stables par translation de celui-ci. Nous adaptons cet correspondance pour les idéaux homogènes intégralement clos des \mathbb{T} -variétés affines de complexité 1 (voir le théorème 8 de la section 3.8).

Nous décrivons un idéal homogène intégralement clos I d'une \mathbb{T} -variété affine $X = \text{Spec } A$ de complexité 1 par un couple $(P, \tilde{\mathfrak{D}})$ où P est un polyèdre entier de \mathbb{Q}^n qui peut être interprété comme l'analogie du polyèdre de Newton dans le cas monomial. Le diviseur polyédral $\tilde{\mathfrak{D}}$ correspond à l'algèbre de Rees normalisée de I . Nous donnons une interprétation géométrique des coefficients de $\tilde{\mathfrak{D}}$. Par exemple, lorsque le cône des poids de A est saillant, si $\tilde{\Delta}_z$ est le coefficient de $\tilde{\mathfrak{D}}$ au point $z \in C$ alors le théorème 8 donne des contraintes sur les équations des faces de codimension 1 de $\tilde{\Delta}_z$ pour que $\tilde{\mathfrak{D}}$ corresponde à la normalisation de l'algèbre de Rees $A[It]$.

Donnons un bref résumé du contenu de chaque section. Dans la première section, nous rappelons les notions sur les opérations de tores algébriques de complexité 1 et sur les diviseurs polyédraux d'Altmann-Hausen. Nous faisons le lien avec la description de Timashev. Dans la deuxième section, nous traitons le problème de normalisation des algèbres multigraduées et démontrons le théorème 4. Nous donnons quelques exemples. La troisième section concerne l'étude des idéaux homogènes intégralement clos. Des paragraphes 3.1 à 3.4, on rappelle quelques faits sur les idéaux intégralement clos et sur les polyèdres entiers. Dans le paragraphe 3.5, on étudie le cône des poids de l'algèbres de Rees de A correspondant à un idéal homogène. On déduit le théorème 7. Ensuite dans les paragraphes 3.6, 3.7, 3.8 on étudie la description (P, \mathfrak{D}) des idéaux homogènes intégralement clos. On conclut par quelques exemples.

Tout au long de cet article, \mathbf{k} est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique zéro. Une variété est un schéma séparé intègre de type fini sur \mathbf{k} .

Remerciements : L'auteur remercie Mikhail Zaidenberg pour ses encouragements perpétuels et pour avoir posé le problème de la section 2. Nous remercions également Ronan Terpereau et Mateusz Michalek pour des discussions utiles.

1 Préliminaires : Description combinatoire des \mathbb{T} -variétés affines de complexité un.

Nous rappelons ici les notions basiques sur les opérations de tores algébriques que nous aurons besoin par la suite.

1.1. Tore algébrique. Soit N un réseau de rang n et $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ son réseau dual. On note $N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ et $M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ les \mathbb{Q} -espaces vectoriels duaux associés. Au réseau M , on associe un tore algébrique \mathbb{T} de dimension n dont son algèbre des fonctions régulières est définie par

$$\mathbf{k}[\mathbb{T}] = \bigoplus_{m \in M} \mathbf{k} \chi^m,$$

la famille $(\chi^m)_{m \in M}$ satisfaisant les relations $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$, pour tous $m, m' \in M$. Le choix d'une base de M donne un isomorphisme entre $\mathbf{k}[\mathbb{T}]$ et l'algèbre des polynômes de Laurent à n variables. Chaque fonction χ^m s'interprète comme un caractère algébrique de \mathbb{T} .

1.2. Multigraduation. Soit X une variété affine et supposons que \mathbb{T} opère algébriquement dans X . Alors cela induit une opération de \mathbb{T} dans $A = \mathbf{k}[X]$ définie par $(t \cdot f)(x) = f(t \cdot x)$ avec $t \in \mathbb{T}$, $f \in \mathbf{k}[X]$ et $x \in X$, faisant du \mathbf{k} -espace vectoriel A un \mathbb{T} -module rationnel.

Le \mathbb{T} -module A admet une décomposition $A = \bigoplus_{m \in M} A_m$ en somme directe de sous-espaces vectoriels où pour tout $m \in M$,

$$A_m = \{f \in A \mid \forall t \in \mathbb{T}, t \cdot f = \chi^m(t)f\}.$$

Cela munit l'algèbre A d'une M -graduation¹. La partie

$$S = \{m \in M \mid A_m \neq \{0\}\}$$

de M contenant 0 et stable par l'addition est appelée *semi-groupe des poids* de A . Comme l'algèbre A est de type fini sur \mathbf{k} , S engendre un cône polyédral $\omega \subset M_{\mathbb{Q}}$ dit *cône des poids* de A .

L'opération de \mathbb{T} dans X est fidèle si et seulement si S n'est pas contenu dans un sous-réseau propre de M . Dans ce cas, ω est de dimension n et il existe un unique cône polyédral saillant $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ tel que

$$\omega = \{m \in M_{\mathbb{Q}} \mid \forall v \in \sigma, m(v) \geq 0\}.$$

On dit que ω est le cône dual de σ et on le note par σ^{\vee} .

Une \mathbb{T} -variété est une variété normale munie d'une opération algébrique fidèle de \mathbb{T} .

Notations 1.3. Désormais nous notons $\omega \cap M$ par ω_M , pour tout cône polyédral $\omega \subset M_{\mathbb{Q}}$.

1.4. Complexité. Nous appelons *complexité* de l'opération de \mathbb{T} dans $X = \text{Spec } A$, le degré de transcendance de l'extension de corps $\mathbf{k}(X)^{\mathbb{T}}/\mathbf{k}$. La complexité s'interprète géométriquement comme la codimension d'une \mathbb{T} -orbite de X en position générale et lorsque l'opération est fidèle, elle est égale à $\dim X - \dim \mathbb{T}$.

Elle fût introduite dans [LV] pour les opérations algébriques de groupes algébriques réductifs dans les espaces homogènes.

Les \mathbb{T} -variétés affines de complexité 0 sont les *variétés toriques affines*. Il existe une description bien connue des variétés toriques affines en terme de cônes polyédraux saillants. Elle est obtenue en associant à chaque variété torique affine le dual du cône des poids de son algèbre des fonctions.

1. Réciproquement, toute M -graduation de la \mathbf{k} -algèbre A est obtenue par une opération algébrique de \mathbb{T} dans $X = \text{Spec } A$.

Nous notons par X_σ la variété torique affine associée à l'algèbre M -graduée

$$\mathbf{k}[\sigma_M^\vee] = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} \mathbf{k} \chi^m \subset \mathbf{k}[\mathbb{T}].$$

Pour plus d'informations sur les variétés toriques, voir [CLS], [Da], [Fu], ainsi que [Od].

1.5. Description combinatoire d'Altmann-Hausen. Nous rappelons la description combinatoire des \mathbb{T} -variétés affines de complexité 1 obtenue en spécifiant les résultats de [AH] donnés en complexité arbitraire.

Une approche alternative et équivalente est donnée dans [Ti] à partir d'une description antérieure des opérations de groupes algébriques réductifs de complexité 1 [Ti 2]. Nous la rappelons ci-après. Voir également [KKMS, Chap 2 et 4] et [Vo] pour le lien avec les variétés toroïdales, et [De] pour les anneaux normaux \mathbb{N} -gradués.

Dans [FZ], on généralise la description classique de Dolgachev-Pinkham-Demazure (*D.P.D.*) aux cas des surfaces affines normales avec opération algébrique de \mathbb{C}^* (voir [AH, Exemple 3.5] et [Ti, 5.2] pour le lien avec [AH] et [Ti]).

Soit C une courbe algébrique lisse et $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant. Une partie $\Delta \subset N_{\mathbb{Q}}$ est un σ -polyèdre si Δ est somme de Minkowski de σ et d'un polytope $Q \subset N_{\mathbb{Q}}$. On note $\text{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ le semi-groupe abélien des σ -polyèdres de loi la somme de Minkowski et d'élément neutre σ .

Pour $\Delta \in \text{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$, on définit la fonction $h_\Delta : \sigma^\vee \rightarrow \mathbb{Q}$ par $h_\Delta(m) = \min_{v \in \Delta} m(v)$, pour tout $m \in \sigma^\vee$. On dit que h_Δ est la *fonction de support* de Δ . Elle est identiquement nulle si et seulement si $\Delta = \sigma$. Pour tous $m, m' \in \sigma^\vee$, on a l'inégalité de sous-additivité

$$(1) \quad h_\Delta(m) + h_\Delta(m') \leq h_\Delta(m + m').$$

Un *diviseur σ -polyédral* sur C est une somme formelle

$$\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$$

où chaque Δ_z appartient à $\text{Pol}_\sigma(N_{\mathbb{Q}})$ avec pour presque² tout $z \in C$, $\Delta_z = \sigma$. On note $\text{supp}(\mathfrak{D})$, dit *support* de \mathfrak{D} , l'ensemble fini des points $z \in C$ tels que $\Delta_z \neq \sigma$.

On dit que \mathfrak{D} est *propre* lorsque pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, l'évaluation

$$\mathfrak{D}(m) := \sum_{z \in C} h_{\Delta_z}(m) \cdot z$$

est un \mathbb{Q} -diviseur semi-ample et abondant (big) pour m appartenant à l'intérieur relatif de σ^\vee .

1.5.1. La propriété de \mathfrak{D} est décrite en distinguant les deux cas suivants (voir [AH, 2.12]).

(i) Lorsque C est une courbe projective lisse, \mathfrak{D} est propre si et seulement si pour tout $m \in \sigma_M^\vee$,

$\deg(\mathfrak{D}(m)) \geq 0$ et si $\deg(\mathfrak{D}(m)) = 0$ alors m appartient au bord de σ^\vee et il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $r\mathfrak{D}(m)$ est principal.

(ii) Lorsque C est une courbe affine lisse, aucune condition n'est imposée sur l'évaluation de \mathfrak{D} .

2. Cela signifie qu'il existe un sous-ensemble fini $E \subset C$ tel que pour tout $z \in C - E$, $\Delta_z = \sigma$.

Notations 1.5.2. D'après l'inégalité 1.5(1) ci-dessus, si \mathfrak{D} est un diviseur σ -polyédral sur C alors pour tous $m, m' \in \sigma_M^\vee$, l'application

$$H^0(C, \mathcal{O}_C([\mathfrak{D}(m)])) \times H^0(C, \mathcal{O}_C([\mathfrak{D}(m')])) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C([\mathfrak{D}(m+m')])), (f, g) \mapsto f \cdot g$$

est bien définie. On obtient une algèbre multigradué

$$A[C, \mathfrak{D}] := \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} H^0(C, \mathcal{O}_C([\mathfrak{D}(m)])) \chi^m,$$

ou encore notée $A[\mathfrak{D}]$ lorsque la mention de C est claire.

Pour tout élément homogène $f \chi^m$ de $A[C, \mathfrak{D}]$, nous sous-entendons que $f \in k(C)^\star$ est une fonction rationnelle non nulle et que χ^m est un caractère de \mathbb{T} .

Le théorème suivant est démontré dans [AH] et fait le lien entre diviseurs polyédraux et opérations de tores algébriques.

Théorème 1. *Si \mathfrak{D} est un diviseur σ -polyédral propre sur une courbe algébrique lisse C alors l'algèbre multigradué $A = A[C, \mathfrak{D}]$ est normale de type fini sur \mathbf{k} et sa M -graduation fait de $X = \text{Spec } A$ une \mathbb{T} -variété de complexité 1. Inversement, pour toute \mathbf{k} -algèbre multigradué A de \mathbb{T} -variété affine de complexité 1 dont le dual du cône des poids est σ , il existe une courbe algébrique lisse C et un diviseur σ -polyédral propre \mathfrak{D} sur C tels que $A[C, \mathfrak{D}]$ soit isomorphe à A en tant que \mathbf{k} -algèbre multigradué.*

Notations 1.5.3. Avec les mêmes notations que dans 1.5.2, si \mathfrak{D} est propre alors on note par $X[C, \mathfrak{D}]$ ou par $X[\mathfrak{D}]$ la \mathbb{T} -variété affine $\text{Spec } A[C, \mathfrak{D}]$ correspondante.

L'assertion suivante est bien connue [AH, §8] [Li, Theorem 1.4(3)]. Elle permet de comparer deux données combinatoires $(C, \sigma, \mathfrak{D})$ et $(C', \sigma', \mathfrak{D}')$ donnant des \mathbf{k} -algèbres M -graduées isomorphes.

Théorème 2. *Soient C, C' des courbes algébriques lisses et $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ des diviseurs polyédraux propres respectivement sur C, C' selon des cônes polyédraux saillants $\sigma, \sigma' \subset N_{\mathbb{Q}}$. Alors $X[C, \mathfrak{D}]$ et $X[C', \mathfrak{D}']$ sont \mathbb{T} -isomorphes si et seulement si il existe un automorphisme de réseau $F : N \rightarrow N$ tel que³ $F_{\mathbb{Q}}(\sigma) = \sigma'$, un isomorphisme $\phi : C \rightarrow C'$ de courbes algébriques, $v_1, \dots, v_r \in N$ et $f_1, \dots, f_r \in k(C)^\star$ des fonctions rationnelles non nulles tels que pour tout $m \in \sigma_M^\vee$,*

$$\phi^\star(\mathfrak{D}')(m) = F_\star(\mathfrak{D})(m) + \sum_{i=1}^r m(v_i) \text{div}(f_i)$$

avec

$$\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z, \quad \mathfrak{D}' = \sum_{z' \in C'} \Delta'_{z'} \cdot z', \quad \phi^\star(\mathfrak{D}') = \sum_{z' \in C'} \Delta'_{z'} \cdot \phi^{-1}(z') \text{ et } F_\star(\mathfrak{D}) = \sum_{z \in C} (F_{\mathbb{Q}}(\Delta_z) + \sigma) \cdot z.$$

Notation 1.5.4. Pour un σ -polyèdre $\Delta \subset N_{\mathbb{Q}}$, on note $V(\Delta)$ l'ensemble de ses sommets.

3. Un automorphisme de réseau $F : N \rightarrow N$ induit un automorphisme de l'espace vectoriel $N_{\mathbb{Q}}$ que l'on note $F_{\mathbb{Q}}$.

L'assertion suivante nous sera utile par la suite.

Proposition 1. Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant, $\Delta \in \text{Pol}_{\sigma}(N_{\mathbb{Q}})$ et $S \subset \Delta$ une partie non vide. Alors $\Delta = \text{Conv}(S) + \sigma$ si et seulement si pour tout $m \in \sigma^{\vee}$, $h_{\Delta}(m) = \min_{v \in S} m(v)$. En particulier, pour tout $m \in \sigma^{\vee}$, $h_{\Delta}(m) = \min_{v \in V(\Delta)} m(v)$.

Démonstration. Supposons que $\Delta = \text{Conv}(S) + \sigma$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ tels que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, $v_1, \dots, v_r \in S$ et $c \in \sigma$ alors pour tout $m \in \sigma^{\vee}$,

$$m \left(c + \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \right) \geq \min_{i=1,2,\dots,r} m(v_i) \geq \min_{v \in S} m(v).$$

Donc pour tout $m \in \sigma^{\vee}$, $h_{\Delta}(m) \geq \min_{v \in S} m(v)$ et puisque $S \subset \Delta$, $h_{\Delta}(m) = \min_{v \in S} m(v)$.

Réciproquement, notons $\Delta' = \text{Conv}(S) + \sigma$. Comme $S \subset \Delta'$, on a pour tout $m \in \sigma^{\vee}$,

$$h_{\Delta}(m) = \min_{v \in S} m(v) \geq h_{\Delta'}(m)$$

et puisque $\Delta' \subset \Delta$, $h_{\Delta} = h_{\Delta'}$. Donc par [AH, Proposition 1.5], $\Delta = \Delta'$. Pour la seconde affirmation, comme σ est saillant, $V(\Delta)$ est non vide. Puisque $\Delta = \text{Conv}(V(\Delta)) + \sigma$, on peut conclure. \square

La terminologie suivante est classique pour les surfaces affines avec opérations algébriques de \mathbf{k}^* [FZ]. Elle est introduite dans [Li] pour les opérations algébriques de \mathbb{T} de complexité 1 dans les variétés affines.

Définition 1.5.5. Soit X une variété affine. Une opération algébrique de \mathbb{T} de complexité 1 dans X est dite *elliptique*⁴ si l'algèbre multigradée correspondante

$$A = \mathbf{k}[X] = \bigoplus_{m \in M} A_m \quad \text{avec} \quad A_m = \{f \in A \mid \forall t \in \mathbb{T}, t \cdot f = \chi^m(t)f\}$$

vérifie $A_0 = \mathbf{k}$.

Remarques 1.5.6. Si $A = A[C, \mathfrak{D}]$ alors A est elliptique si et seulement si C est projective.

Par ailleurs dans [LS, Proposition 2.6], on montre que les \mathbb{T} -algèbres qui ne sont pas elliptiques n'admettent que des singularités toriques. Tandis que lorsque C est projective de genre $g \geq 1$, $X[C, \mathfrak{D}]$ est toujours singulière et admet au moins une singularité qui n'est pas rationnelle [LS, Propositions 5.1, 5.5].

La proposition suivante peut être vue comme une généralisation de [FZ, Lemma 1.3(a)].

Proposition 2. Soit X une \mathbb{T} -variété affine de complexité 1 et notons $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ le dual du cône des poids de l'algèbre multigradée

$$A = \mathbf{k}[X] = \bigoplus_{m \in M} A_m \quad \text{avec} \quad A_m = \{f \in A \mid \forall t \in T, t \cdot f = \chi^m(t)f\}$$

obtenue par l'opération de \mathbb{T} . Si l'opération de \mathbb{T} n'est pas elliptique alors le semi-groupe des poids de $\mathbf{k}[X]$ est σ_M^{\vee} et pour tout $m \in \sigma_M^{\vee}$, A_m est localement libre de rang 1 comme A_0 -module. Si l'opération est elliptique alors $\sigma \neq \{0\}$ et l'intersection du sous-ensemble

$$E = \{m \in \sigma_M^{\vee} \mid A_m \neq \{0\}\} \subset M_{\mathbb{Q}}$$

avec toute droite vectorielle rencontrant l'intérieur relatif de σ^{\vee} est finie.

4. Dans ce cas, on dit également que l'algèbre multigradée A est elliptique.

Démonstration. Si l'opération de \mathbb{T} n'est pas elliptique alors par le théorème 1, on peut supposer qu'il existe une courbe algébrique affine lisse C et un diviseur σ -polyédral propre \mathfrak{D} sur C tels que pour tout $m \in \sigma_M^\vee$,

$$(2) \quad A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C([\mathfrak{D}(m)]))\chi^m \text{ et } \mathbf{k}[X] = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} A_m.$$

Comme C est affine, pour tout $m \in \sigma_M^\vee$, $A_m \neq \{0\}$. D'où la première assertion.

Si l'opération est elliptique alors on peut supposer que $\mathbf{k}[X]$ vérifie (2) avec C une courbe projective lisse de genre g . Si $\sigma = \{0\}$ alors $\sigma^\vee = M_{\mathbb{Q}}$ et il existe $m \in \sigma_M^\vee$ tel que $\deg(\mathfrak{D}(m)) > 0$. Donc l'inégalité $\mathfrak{D}(-m) + \mathfrak{D}(m) \leq \mathfrak{D}(0) = 0$ implique $\deg(\mathfrak{D}(-m)) < 0$, ce qui contredit la propriété de \mathfrak{D} .

Soit maintenant $m \in \sigma_M^\vee$ appartenant à l'intérieur relatif de σ^\vee . Alors il existe $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout $z \in \text{supp}(\mathfrak{D})$ et tout $v \in V(\Delta_z)$, $r_0 v$ appartient à N . Ainsi, par la proposition 1,

$$(3) \quad \mathfrak{D}(r_0 m) = [\mathfrak{D}(r_0 m)].$$

Grâce à la propriété de \mathfrak{D} , quitte à multiplier r_0 par un entier strictement positif, on peut supposer que

$$\deg(\mathfrak{D}(r_0 m)) = \deg([\mathfrak{D}(r_0 m)]) > d + g - 1$$

où d est le cardinal de $\text{supp}(\mathfrak{D})$. Donc pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$(4) \quad \deg([\mathfrak{D}((r_0 + r)m)]) = \deg([\mathfrak{D}(r_0 m)]) + \deg([\mathfrak{D}(rm)]) \geq \deg([\mathfrak{D}(r_0 m)]) - d > g - 1.$$

Dans (4), la première égalité provient de (3) et l'inégalité \geq de $\deg(\mathfrak{D}(rm)) \geq 0$. Comme $\sigma \neq \{0\}$, la demi-droite $\mathbb{Q}_{\leq 0} \cdot m$ ne rencontre σ^\vee qu'en l'origine [CLS, Exercice 1.2.4]. D'après le théorème de Riemann-Roch et les inégalités de (4), pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $A_{(r+r_0)m} \neq \{0\}$. Par conséquent, on a l'inclusion

$$\mathbb{Q} \cdot m \cap E \subset \{0, m, 2m, \dots, (r_0 - 1)m\}.$$

D'où le résultat. □

Remarques 1.5.7. En général, E n'est pas un ensemble fini. Par exemple

$$\mathfrak{D} = \Delta_0(0) + \Delta_\infty(\infty), \quad N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^2, \quad \sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}^2, \quad \Delta_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma, \quad \Delta_\infty = \left(-\frac{1}{3}, 0\right) + \sigma.$$

Le diviseur polyédral \mathfrak{D} est propre sur \mathbb{P}^1 et pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}([\mathfrak{D}(1, r)]))\chi^{(1, r)} = \{0\}.$$

De plus, l'exemple du diviseur polyédral propre

$$\mathfrak{D}' = \Delta'_0(0) + \Delta'_1(1) + \Delta'_\infty(\infty), \quad \Delta'_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma, \quad \Delta'_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) + \sigma, \quad \Delta'_\infty = [(1, 0), (0, 1)] + \sigma$$

montre qu'en général, il existe des demi-droites vectorielles contenues dans le bord relatif de σ^\vee qui rencontrent E avec une infinité de points. En effet, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}([\mathfrak{D}'(2r + 1, 0)]))\chi^{(2r+1, 0)} = \{0\}.$$

1.5.8. Lacunes. La partie E de la proposition 2 est appelée *ensemble des lacunes* de l'algèbre M -graduée A (ou ensemble des lacunes de \mathfrak{D} si A est l'algèbre multigradué $A[C, \mathfrak{D}]$). On vérifie aisément que $\sigma_M^\vee - E$ est un sous-semi groupe de σ_M^\vee .

1.6. Description combinatoire de Timashev. Nous passons à la description des \mathbb{T} -variétés affines de complexité 1 selon [Ti]. Cette description est obtenue en examinant l'ensemble des valuations invariantes du corps des fonctions rationnelles de chaque \mathbb{T} -variété $X = \text{Spec } A$. Elle nous permet de ce point de vue d'obtenir une donnée combinatoire $(C, \sigma, \mathfrak{D})$ de l'algèbre M -graduée A (voir le corollaire 1 ci-après).

Soit \tilde{C} une courbe algébrique projective lisse. On considère la \mathbb{T} -algèbre⁵

$$\mathbf{k}(\tilde{C}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}] = \bigoplus_{m \in M} \mathbf{k}(\tilde{C}) \chi^m$$

dont l'opération est donnée par $t \cdot f \chi^m = \chi^m(t) f \chi^m$ avec $t \in \mathbb{T}$, $f \in \mathbf{k}(\tilde{C})$ et $m \in M$. Notons K le corps des fractions de $\mathbf{k}(\tilde{C}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$. Alors l'opération de \mathbb{T} dans $\mathbf{k}(\tilde{C}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ se prolonge naturellement dans K .

Une valuation ν de K/\mathbf{k} est dite \mathbb{T} -invariante si elle est constante sur les \mathbb{T} -orbites de K . Par exemple, à partir d'un triplet $(z, \lambda, v) \in \tilde{C} \times \mathbb{Q}_{\geq 0} \times N_{\mathbb{Q}}$, on définit une valuation invariante ν de K/\mathbf{k} par la relation

$$(5) \quad \nu \left(\sum_{i=1}^r f_i \chi^{m_i} \right) = \min_{i \in \{1, \dots, r\}} (\lambda \nu_z(f_i) + m_i(v)),$$

pour tous $m_1, \dots, m_r \in M$ distincts et pour tous $f_1, \dots, f_r \in \mathbf{k}(\tilde{C})^*$, où $\nu_z(f_i)$ est l'ordre de f_i le long de z .

On appelle *hyper-espace* l'ensemble

$$\mathcal{V} = \frac{\tilde{C} \times \mathbb{Q}_{\geq 0} \times N_{\mathbb{Q}}}{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R} est la relation d'équivalence définie sur l'ensemble $\tilde{C} \times \mathbb{Q}_{\geq 0} \times N_{\mathbb{Q}}$ de la manière suivante; $(z, \lambda, v) \mathcal{R} (z', \lambda', v')$ si $v = v'$ lorsque $\lambda = 0$ et $(z, \lambda, v) = (z', \lambda', v')$ sinon. Par (5) et [Ti, Lemma 1], on obtient une bijection naturelle entre l'ensemble des valuations discrètes \mathbb{T} -invariantes de K/\mathbf{k} à valeurs dans \mathbb{Q} et \mathcal{V} .

Définition 1.6.1. Une partie

$$\mathcal{C} = \frac{\bigcup_{z \in \tilde{C}} \{z\} \times \mathcal{C}_z}{\mathcal{R}} \subset \mathcal{V}$$

avec $\mathcal{C}_z \subset \mathbb{Q}_{\geq 0} \times N_{\mathbb{Q}}$ pour tout $z \in \tilde{C}$, est appelée *hypercône* si elle vérifie les conditions suivantes.

(H1) Pour tout $z \in \tilde{C}$, $\mathcal{C}_z \subset \mathbb{Q} \times N_{\mathbb{Q}}$ est un cône polyédral saillant et

$$\sigma = \mathcal{C}_z \cap (\{0\} \times N_{\mathbb{Q}})$$

ne dépend pas du point z .

5. On écrit $\mathbf{k}(\tilde{C}) \chi^m$ au lieu de $\mathbf{k}(\tilde{C}) \otimes \chi^m$.

(H2) Pour presque tout $z \in \tilde{C}$, on a l'égalité $\mathcal{C}_z = \mathbb{Q}_{\geq 0} \times \sigma$.

(H3) Notons pour tout $z \in \tilde{C}$, Q_z l'enveloppe convexe de la projection sur $N_{\mathbb{Q}}$ des sommets de

$$\mathcal{C}_z \cap (\mathbb{Q}_{\geq 1} \times N_{\mathbb{Q}}).$$

Alors la somme⁶ $Q = \sum_{z \in \tilde{C}} Q_z$ est incluse dans $\sigma - \{0\}$.

(H4) Pour toute face F de σ rencontrant Q et pour tout $m \in \sigma_M^{\vee}$ s'annulant sur F , si pour $z \in \tilde{C}$, $a_z := \min_{v \in Q_z} m(v)$, alors un multiple entier non nul de $\sum_{z \in \tilde{C}} a_z \cdot z$ est un diviseur principal sur \tilde{C} .

Remarque 1.6.2. Avec les mêmes notations et conditions que dans 1.6.1, posons

$$C = \{z \in \tilde{C} \mid Q_z \neq \emptyset\},$$

et pour tout $z \in C$, $\Delta_z = Q_z + \sigma$. D'après (H2), C est un ouvert non vide de \tilde{C} . Par 1.6.1 et par la proposition 1, le diviseur σ -polyédral $\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$ est propre sur C .

Notation 1.6.3. À partir d'un hypercône $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$, on construit une sous-algèbre \mathbb{T} -stable de $\mathbf{k}(\tilde{C}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$,

$$\text{vect}_{\mathbf{k}} \left\{ f \chi^m \mid f \in \mathbf{k}(\tilde{C}), m \in M \text{ et } \forall \overline{(z, \lambda, v)} \in \mathcal{C}, \lambda \nu_z(f) + m(v) \geq 0 \right\}$$

notée par $A[\tilde{C}, \mathcal{C}]$.

Le lemme suivant sera utile pour la suite. Par commodité, nous donnons une courte preuve.

Lemme 1. *Soit C une courbe algébrique lisse et soit A une sous-algèbre \mathbb{T} -stable de $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$. Si $\text{Frac } A = \text{Frac } \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ alors le semi-groupe S des poids de A n'est contenu dans aucun sous-réseau propre de M et on a l'égalité $(\text{Frac } A)^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}(C)$.*

Démonstration. Supposons que l'égalité $\text{Frac } A = \text{Frac } \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ est vraie. Soit $m \in M$. Alors il existe $f, g \in A$ avec g non nul tels que $g \chi^m = f$. Notons

$$f = \sum_{i=1}^r a_i \chi^{m_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{r'} b_j \chi^{m'_j},$$

avec pour tous i, j , $a_i, b_j \in \mathbf{k}(C)$ et m_1, \dots, m_r (resp $m'_1, \dots, m'_{r'}$) des éléments distincts de S . Pour tout $j \in \{1, \dots, r'\}$ tel que $b_j \neq 0$, il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $b_j \chi^{m+m'_j} = a_i \chi^{m_i}$. Ce qui donne $m = m_i - m'_j$ et m appartient donc au sous-réseau de M engendré par S . L'autre affirmation est claire. \square

La preuve du théorème suivant se déduit du lemme 1 et de [Ti, Theorem 2].

Théorème 3. *Soit \tilde{C} une courbe algébrique projective lisse et $A \subset \mathbf{k}(\tilde{C}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ une sous-algèbre normale M -graduée de type fini sur \mathbf{k} et de corps des fractions K . Alors il existe un unique hypercône $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ tel que $A = A[\tilde{C}, \mathcal{C}]$. Le cône $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ dans (H1) correspond au dual du cône des poids de A .*

6. S'il existe $z \in \tilde{C}$ tel que Q_z est vide alors on convient que (H3) et (H4) sont vraies. Dans le cas contraire, les conditions (H1), (H2) entraînent que la somme formelle $\sum_{z \in \tilde{C}} a_z \cdot z$ est un \mathbb{Q} -diviseur sur \tilde{C} .

Le corollaire suivant est bien connu (voir [Ti, §6]). Par commodité, nous donnons un court argument.

Corollaire 1. *Soit C une courbe algébrique lisse et A une sous-algèbre normale M -graduée de $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$, de type fini sur \mathbf{k} , de corps des fractions $\text{Frac } \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ et vérifiant $A^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}[C]$. Si $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ est le dual du cône des poids de A alors il existe un unique diviseur σ -polyédral propre \mathfrak{D} sur C tel que $A = A[C, \mathfrak{D}]$.*

Démonstration. Par le théorème 3, il existe un hypercône $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ tel que $A = A[\tilde{C}, \mathcal{C}]$ où \tilde{C} est la compactification lisse de C [Ha, §I.6]. L'hypothèse entraîne $C = \{z \in \tilde{C} \mid Q_z \neq \emptyset\}$. Considérons le diviseur σ -polyédral propre \mathfrak{D} sur C comme dans la remarque 1.6.2.

Montrons que $A[\tilde{C}, \mathcal{C}] = A[C, \mathfrak{D}]$. Il suffit de montrer que ces algèbres ont les mêmes éléments homogènes. Considérons un élément homogène $f\chi^m \in A[C, \mathfrak{D}]$. Soit $z \in C$ et $(z, \lambda, v) \in \mathcal{C}$. Si $\lambda \neq 0$ alors par la condition (H3),

$$\text{div}(f) + \mathfrak{D}(m) \geq 0 \text{ et } \frac{v}{\lambda} \in \Delta_z,$$

et on a

$$\lambda \nu_z(f) + m(v) = \lambda \left(\nu_z(f) + m \left(\frac{v}{\lambda} \right) \right) \geq 0.$$

Si $\lambda = 0$ alors par (H1), $v \in \sigma$ et puisque $m \in \sigma_M^{\vee}$,

$$\lambda \nu_z(f) + m(v) = m(v) \geq 0.$$

En outre, par (H1), si $z' \in \tilde{C} - C$ alors $\mathcal{C}_{z'} = \{0\} \times \sigma$. On conclut que $f\chi^m$ appartient à $A[\tilde{C}, \mathcal{C}]$.

Réciproquement, si $f\chi^m \in A[\tilde{C}, \mathcal{C}]$ alors par (H1), $m \in \sigma_M^{\vee}$, et pour tous $z \in C$ et $v \in Q_z$, on a l'inégalité $\nu_z(f) + m(v) \geq 0$. Donc par la proposition 1, $f\chi^m \in A[C, \mathfrak{D}]$. Cela montre l'existence de \mathfrak{D} . L'unicité provient du théorème 3, voir aussi [AH, Lemma 9.1]. \square

2 Normalisation des algèbres affines multigraduées de complexité 1.

Le but de cette section est de donner une méthode pour calculer explicitement la normalisation des algèbres affines multigraduées de complexité 1.

Le cas de la complexité 0 est bien connu. Toute algèbre affine M -graduée sans multiplicité peut être réalisée comme sous-algèbre \mathbb{T} -stable de $\mathbf{k}[\mathbb{T}]$. La normalisation de A est décrite dans $\mathbf{k}[\mathbb{T}]$. Elle est obtenue par saturation de son semi-groupe des poids [CLS, Theorem 1.3.5]. Voir également [Ho, Proposition 1] pour le cas monomial.

Par analogie, toute algèbre affine M -graduée de complexité 1 est plongée dans une algèbre $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ où C est une courbe algébrique lisse, voir [Ti, Corollary 5], [AH, §6]. Nous rappelons comment obtenir un tel plongement.

2.1. Soit $A = \bigoplus_{m \in M} A_m$ une algèbre intègre M -graduée de type fini sur \mathbf{k} . Notons K son corps des fractions. On suppose que $\text{deg}_{\text{tr}_{\mathbf{k}}} K^{\mathbb{T}} = 1$. Sans perte de généralités, on peut supposer que la M -gradation de A est fidèle. Alors pour tout $m \in M$,

$$K_m := \{f/g \mid f \in A_{m+e}, g \in A_e, g \neq 0\} \subset K$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 1 sur $K_0 = K^{\mathbb{T}}$. Le choix d'une base de M permet de construire une famille $(\chi^m)_{m \in M}$ de K^* vérifiant pour tous $m, m' \in M$,

$$K_m = K_0 \chi^m \text{ et } \chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}.$$

Quitte à remplacer A_0 par \bar{A}_0 , on peut supposer que A_0 est normale. Notons que A_0 est de type fini sur \mathbf{k} , voir par exemple [AH, Lemma 4.1]. Soit \tilde{C} la courbe algébrique complète lisse sur \mathbf{k} obtenue à partir de l'ensemble des valuations discrètes de K_0/\mathbf{k} (voir [Ha, §I,6]). Alors on a l'égalité $K_0 = \mathbf{k}(\tilde{C})$.

Si l'opération de \mathbb{T} dans $X = \text{Spec } A$ n'est pas elliptique alors K_0 est le corps des fractions de A_0 . En effet, si $b \in K_0$ alors b est un élément algébrique sur $\text{Frac } A_0$ et il existe donc $a \in A_0$ non nul tel que ab soit entier sur A_0 . Par normalité de A , $ab \in A \cap K_0 = A_0$ et on a l'inclusion $K_0 \subset \text{Frac } A_0$. L'inclusion inverse est immédiate.

On conclut que dans tous les cas, il existe un unique ouvert non vide $C \subset \tilde{C}$ tel que

$$A_0 = \mathbf{k}[C] \quad \text{et} \quad A \subset \bigoplus_{m \in M} K_m = \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}].$$

L'égalité $K = \text{Frac } \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ montre que l'algèbre M -graduée \bar{A} vérifie les hypothèses du corollaire 1.

Fixons un système de générateurs homogènes

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}]$$

avec f_1, \dots, f_r des fonctions rationnelles non nulles sur C et m_1, \dots, m_r des éléments de M . Notons \bar{A} la normalisation de l'anneau A . Il s'agit de déterminer le diviseur polyédral \mathfrak{D} sur C correspondant à \bar{A} en fonctions de $((f_1, m_1), \dots, (f_r, m_r))$. Dans [FZ], on donne la décomposition *D.P.D.* de \bar{A} pour le cas des surfaces affines complexes avec opérations paraboliques et hyperboliques de \mathbb{C}^* . Nous rappelons ces résultats dans le corollaire 2.

Le résultat suivant nous sera utile pour la suite.

Lemme 2. *Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant et Δ_1, Δ_2 des σ -polyèdres. Alors $\Delta_1 = \Delta_2$ si et seulement si pour tout $m \in \sigma_M^{\vee}$ appartenant à l'intérieur relatif de σ^{\vee} , $h_{\Delta_1}(m) = h_{\Delta_2}(m)$.*

Démonstration. Supposons que l'égalité $h_{\Delta_1}(m) = h_{\Delta_2}(m)$ est vraie pour tout $m \in M$ dans l'intérieur relatif de σ^{\vee} . Soit $m \in \sigma^{\vee}$ appartenant à l'intérieur relatif. Alors il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $rm \in \sigma_M^{\vee}$. Donc :

$$rh_{\Delta_1}(m) = h_{\Delta_1}(rm) = h_{\Delta_2}(rm) = rh_{\Delta_2}(m),$$

et $h_{\Delta_1}, h_{\Delta_2}$ sont égales sur l'intérieur relatif de σ^{\vee} . Un argument de topologie donne $h_{\Delta_1} = h_{\Delta_2}$ et par [AH, Proposition 1.5], $\Delta_1 = \Delta_2$. La réciproque est facile. \square

Notations 2.2. Soient C une courbe algébrique lisse et $f = (f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r})$ un r -uplet d'éléments homogènes de $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ tels que $\sum_{i=1}^r \mathbb{Q}m_i = M_{\mathbb{Q}}$. Alors posons $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ le cône polyédral saillant dual de $\sum_{i=1}^r \mathbb{Q}_{\geq 0} m_i$ et pour tout $z \in C$, $\Delta_z[f] \subset N_{\mathbb{Q}}$ le σ -polyèdre défini par les inégalités

$$m_i \geq -\nu_z(f_i) \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

On note $\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}[C, f]$ le diviseur σ -polyédral $\sum_{z \in C} \Delta_z[f] \cdot z$ sur C . Le support de $\mathfrak{D}[f]$ est contenu dans la réunion réduite des supports des diviseurs principaux associés à f_1, \dots, f_r .

L'assertion suivante donne le diviseur polyédral \mathfrak{D} de la normalisation de l'algèbre $A = \bigoplus_{m \in M} A_m$ donnée dans 2.1.

Théorème 4. *Soit C une courbe algébrique lisse et*

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}] \subset \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$$

une sous-algèbre \mathbb{T} -stable engendrée par des éléments homogènes $f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}$. Si A a même corps des fractions que $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ et si \bar{A} est la normalisation de A , vu comme sous-algèbre de $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$, alors le dual σ du cône polyédral $\sum_{i=1}^r \mathbb{Q}_{\geq 0} m_i$ est saillant et

$$\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}[f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}]$$

est l'unique diviseur σ -polyédral propre sur C vérifiant $\bar{A} = A[C, \mathfrak{D}[f]]$.

Démonstration. D'après [HS, Theorem 2.3.2], la sous-algèbre $\bar{A} \subset \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ est M -graduée. Donc par le lemme 1, le cône σ est saillant et par le corollaire 1, il existe un unique diviseur σ -polyédral propre \mathfrak{D} sur C tel que $\bar{A} = A[C, \mathfrak{D}]$.

Posons $B := A[C, \mathfrak{D}[f]]$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $z \in C$, on a l'inégalité

$$h_{\Delta_z[f]}(m_i) \geq -\nu_z(f_i),$$

de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$\mathfrak{D}[f](m_i) = \sum_{z \in C} h_{\Delta_z[f]}(m_i) \cdot z \geq -\text{div}(f_i).$$

On obtient l'inclusion $A \subset B$. En appliquant le même argument que dans l'étape 6 de la preuve de [AH, Theorem 3.1], on déduit que B est normale. (Les coefficients d'une relation de dépendance intégrale d'un élément homogène de \bar{B} de degré m peuvent être supposés homogènes et appartenant à l'algèbre graduée normale

$$B_{(m)} = \bigoplus_{r \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor r\mathfrak{D}[f](m) \rfloor)) \chi^{rm},$$

voir aussi [De, 2.7, Lemme]). Cet argument existe également dans [FZ]. D'où l'inclusion $\bar{A} = A[\mathfrak{D}] \subset B$.

Montrons l'égalité $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}[f]$. Supposons que C est une courbe algébrique projective lisse de genre g . Alors on a pour tout $m' \in \sigma_M^\vee$,

$$(6) \quad H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}(m') \rfloor)) \subset H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}[f](m') \rfloor)).$$

Soit $m \in \sigma_M^\vee$ appartenant à l'intérieur relatif de σ^\vee et $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $s\mathfrak{D}(m)$ et $s\mathfrak{D}[f](m)$ soient des diviseurs de Weil à coefficients entiers. Alors par (6), par le théorème de Riemann-Roch et puisque \mathfrak{D} est propre, il existe $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout entier $r \geq r_0$,

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(rs\mathfrak{D}[f](m))) \geq r \text{deg}(s\mathfrak{D}(m)) + 1 - g > 1.$$

D'après [Ha, IV, Lemma 1.2], pour tout entier $r \geq r_0$, $\text{deg}(rs\mathfrak{D}[f](m)) > 0$ et donc $\mathfrak{D}[f](m)$ est semi-ample. Donc par [AH, Lemma 9.1], $\mathfrak{D}[f](m) \geq \mathfrak{D}(m)$. Cette inégalité est aussi vraie lorsque C est une courbe algébrique affine lisse.

Revenons à l'hypothèse où C est une courbe algébrique lisse quelconque. Notons $\{z_1, \dots, z_d\}$ la réunion réduite des supports des diviseurs principaux de f_1, \dots, f_r . Écrivons $\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$. Soit

$z \in C$ tel que $z \notin \{z_1, \dots, z_d\}$. Alors $z \notin \text{supp}(\mathfrak{D}[f])$ et pour tout $m \in \sigma_M^\vee$ appartenant à l'intérieur relatif de σ^\vee , $h_{\Delta_z}(m) \leq 0$. Par ailleurs, pour tous $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathfrak{D} \left(\sum_{i=1}^r a_i m_i \right) + \text{div} \left(\prod_{i=1}^r f_i^{a_i} \right) \geq 0 \text{ soit } h_{\Delta_z} \left(\sum_{i=1}^r a_i m_i \right) \geq 0$$

et h_{Δ_z} est positive sur σ_M^\vee . Par le lemme 2, $\Delta_z = \sigma$ et donc $z \notin \text{supp}(\mathfrak{D})$. On conclut que $\text{supp}(\mathfrak{D}) \subset \{z_1, \dots, z_d\}$.

Ainsi, on peut écrire pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$\mathfrak{D}(m_i) = \sum_{j=1}^d h_{\Delta_{z_j}}(m_i) \cdot z_j.$$

Les inégalités

$$\mathfrak{D}(m_i) + \text{div}(f_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r$$

entraînent que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\Delta_{z_j} \subset \Delta_{z_j}[f]$. Donc pour tout $m \in \sigma^\vee$, $\mathfrak{D}(m) \geq \mathfrak{D}[f](m)$ et par le lemme 2, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}[f]$. \square

Exemple 2.3. Soit z une variable et soit \mathbb{T} le tore $(\mathbf{k}^\star)^2$. Considérons la sous-algèbre \mathbb{T} -stable

$$A = \mathbf{k} \left[\frac{z}{z-1} \chi^{(2,0)}, \chi^{(0,1)}, z\chi^{(2,2)}, \frac{z^2}{z-1} \chi^{(3,2)} \right] \subset \mathbf{k}[\mathbb{T}] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(z).$$

Alors on a les égalités $A^\mathbb{T} = \mathbf{k}$ et $(\text{Frac } A)^\mathbb{T} = \mathbf{k}(z)$. Le cône des poids $\sigma^\vee \subset \mathbb{Q}^2$ de A est le quadrant positif. Donc par le théorème 4, la normalisation \bar{A} de A est égale à $A[\mathbb{P}^1, \mathfrak{D}]$ où $\mathfrak{D} = \Delta_0(0) + \Delta_1(1) + \Delta_\infty(\infty)$ est le diviseur σ -polyédral propre sur \mathbb{P}^1 défini par

$$\Delta_0 = - \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \sigma, \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \sigma, \quad \Delta_\infty = \left[\left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2} \right) \right] + \sigma.$$

Par exemple, le polyèdre Δ_0 est donné par les inégalités

$$2x \geq -\nu_0 \left(\frac{z}{z-1} \right) = -1, \quad y \geq -\nu_0(1) = 0, \quad 2x + 2y \geq -\nu_0(z) = -1,$$

$$3x + 2y \geq -\nu_0 \left(\frac{z^2}{z-1} \right) = -2.$$

Un calcul direct montre qu'en fait $A = A[\mathbb{P}^1, \mathfrak{D}]$. Si l'on pose

$$t_1 := \frac{z}{z-1} \chi^{(2,0)}, \quad t_2 := \chi^{(0,1)}, \quad t_3 := z\chi^{(2,2)}, \quad t_4 := \frac{z^2}{z-1} \chi^{(3,2)},$$

alors les fonctions t_1, t_2, t_3, t_4 vérifie la relation irréductible

$$t_4^2 - t_1^2 t_2^2 t_3 - t_1 t_3^2 = 0.$$

On conclut que l'hypersurface $V(x_4^2 - x_1^2 x_2^2 x_3 - x_1 x_3^2) \subset \mathbb{A}^4$ est normale.

Rappelons que pour une variété algébrique affine X , on note $\text{SAut } X$ le sous-groupe des automorphismes de X engendré par toutes les opérations algébriques de \mathbb{G}_a dans X . Pour plus d'informations voir [AKZ] et [AFKKZ] où la notion de variété flexible est introduite. L'exemple suivant est inspiré de [LS, Example 1.1] correspondant à $d = 2$ et $e = 3$.

Exemple 2.4. Soient $d, e \geq 2$ des entiers tels que $d + 1 = e^2$. Notons

$$\mathfrak{D}_{d,e} = \Delta_0^{d,e}(0) + \Delta_1^{d,e}(1) + \Delta_\infty^{d,e}(\infty)$$

le diviseur polyédral propre sur \mathbb{P}^1 avec

$$\Delta_0^{d,e} = [(1,0), (1,1)] + \sigma_{d,e}, \quad \Delta_1^{d,e} = \left(-\frac{1}{e}, 0\right) + \sigma_{d,e}, \quad \Delta_\infty^{d,e} = \left(\frac{e}{d} - 1, 0\right) + \sigma_{d,e},$$

où $\sigma_{d,e}$ est le cône de \mathbb{Q}^2 engendré par les vecteurs $(1,0)$ et $(1,de)$, et $X_{d,e} := X[\mathfrak{D}_{d,e}]$. Alors $X_{d,e}$ n'est pas torique. En effet, $X_{d,e}$ n'est pas \mathbb{T} -isomorphe à $X[\mathfrak{D}]$ avec \mathfrak{D} un diviseur polyédral propre sur \mathbb{P}^1 porté par au plus 2 points, i.e $\text{Card Supp } \mathfrak{D} \leq 2$ (voir [AL, Corollary 1.4] et le théorème 2).

Montrons que le groupe $\text{SAut } X_{d,e}$ opère infiniment transitivement dans le lieu lisse de $X_{d,e}$. Pour cela considérons la sous-algèbre

$$A_{d,e} := \mathbf{k} \left[\chi^{(0,1)}, \frac{(1-z)^d}{z^{de-1}} \chi^{(de,-1)}, \frac{1-z}{z^e} \chi^{(e,0)}, \frac{(1-z)^e}{z^d} \chi^{(d,0)} \right] \subset \mathbf{k}(z) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$$

où \mathbb{T} est le tore $(\mathbf{k}^\star)^2$ et z est une variable sur $\mathbf{k}(\mathbb{T})$. Si l'on pose

$$u := \chi^{(0,1)}, \quad v := \frac{(1-z)^d}{z^{de-1}} \chi^{(de,-1)}, \quad x := \frac{1-z}{z^e} \chi^{(e,0)}, \quad y := \frac{(1-z)^e}{z^d} \chi^{(d,0)},$$

alors les fonctions u, v, x, y vérifient la relation irréductible

$$uv + x^d - y^e = 0 \quad (E)$$

identifiant $\text{Spec } A_{d,e}$ avec l'hypersurface $H_{d,e}$ d'équation (E) de \mathbb{A}^4 . L'origine O de \mathbb{A}^4 est l'unique point singulier de $H_{d,e}$.

D'après [Vie, Proposition 2], $H_{d,e}$ est normale en O et par [KZ, §5] ou [AKZ, Theorem 3.2], $\text{SAut } H_{d,e}$ opère infiniment transitivement dans $H_{d,e} - \{O\}$ vu comme suspension du plan affine. Par ailleurs,

$$\frac{x^d}{y^e} = \frac{1}{1-z},$$

de sorte que $(\text{Frac } A_{d,e})^\mathbb{T} = \mathbf{k}(z)$ et $\text{Frac } A_{d,e} = \text{Frac } \mathbf{k}(z) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$. Un calcul facile montre que $\mathfrak{D}[u, v, x, y] = \mathfrak{D}_{d,e}$. On conclut par le théorème 4. Notons que le calcul de $\mathfrak{D}_{d,e}$ peut être obtenue à partir de $H_{d,e}$ en utilisant [AH, §11].

Le théorème 4 appliqué à $\mathbb{T} = \mathbf{k}^\star$ donne le corollaire suivant. Les parties concernant les cas paraboliques et hyperboliques ont été établies dans [FZ, 3.9, 4.6].

Corollaire 2. Soit C une courbe algébrique lisse, χ une variable sur $\mathbf{k}(C)$ et $X = \text{Spec } A$ une surface affine avec une opération algébrique fidèle de $\mathbf{k}^\star = \text{Spec } \mathbf{k}[\chi, \chi^{-1}]$ où $(\text{Frac } A)^{\mathbf{k}^\star} = \mathbf{k}(C)$. Si l'opération est parabolique ou elliptique et

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}] \subset \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\chi, \chi^{-1}],$$

avec $f_i \in \mathbf{k}(C)^\star$ et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ premiers entre eux, alors la décomposition de Dolgachev-Pinkham-Demazure (D.P.D.) de $\bar{A} = A_{C,D}$ est donnée par le \mathbb{Q} -diviseur sur C

$$D = - \min_{1 \leq i \leq r} \frac{\operatorname{div}(f_i)}{m_i}.$$

Si l'opération est hyperbolique, $C = \operatorname{Spec} A_0$,

$$A = \mathbf{k}[C][f_1 \chi^{-m_1}, \dots, f_r \chi^{-m_r}, g_1 \chi^{n_1}, \dots, g_s \chi^{n_s}] \subset \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\chi, \chi^{-1}],$$

avec $\operatorname{Frac} A = \operatorname{Frac} \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\chi, \chi^{-1}]$ et $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ resp $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}_{>0}$, alors la décomposition D.P.D. de $\bar{A} = A_0[D_-, D_+]$ est donnée par les \mathbb{Q} -diviseurs

$$D_- = - \min_{1 \leq i \leq r} \frac{\operatorname{div}(f_i)}{m_i} \quad \text{et} \quad D_+ = - \min_{1 \leq i \leq s} \frac{\operatorname{div}(g_i)}{n_i}.$$

Rappelons que dans [FZ, Theorem 3.11], on montre que toute surface normale affine avec une opération parabolique de \mathbb{C}^\star et fibrée sur \mathbb{A}^1 est obtenue comme normalisation d'une hypersurface $x^d - P(z)y = 0$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ pour $d \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme. L'exemple suivant est une généralisation de ce fait.

Exemple 2.5. Soit \mathfrak{D} un diviseur polyédral propre sur $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[z]$ selon un cône $\sigma \subset \mathbb{Q}^n$ engendré par une base de \mathbb{Z}^n . Supposons que l'évaluation de \mathfrak{D} soit linéaire. Nous allons donner une interprétation géométrique de $X[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}]$.

D'après le théorème 2, on peut supposer que $\sigma = (\mathbb{Q}_{\geq 0})^n$,

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^r (v_i + \sigma)(a_i)$$

avec a_1, \dots, a_r des points distincts de \mathbb{A}^1 et $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Q}^n$ des vecteurs satisfaisant les conditions suivantes. Il existe $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une décomposition

$$v_i = \left(\frac{e_{i,1}}{d}, \frac{e_{i,2}}{d}, \dots, \frac{e_{i,n}}{d} \right) \in \mathbb{Q}^n$$

où pour j vérifiant $1 \leq j \leq n$, on a

$$e_{ij} \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \frac{e_{ij}}{d} < 1.$$

Posons $\mathbb{T} := (\mathbf{k}^\star)^n$. Soient m_1, \dots, m_n les vecteurs de la base canonique de $M = \mathbb{Z}^n$ et considérons la sous-algèbre \mathbb{T} -stable

$$A = \mathbf{k}[z] \left[\chi^{m_1}, \frac{\chi^{dm_1}}{P_1(z)}, \dots, \chi^{m_n}, \frac{\chi^{dm_n}}{P_n(z)} \right] \subset \mathbf{k}(z) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$$

où pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$P_j(z) := \prod_{i=1}^r (z - a_i)^{e_{ij}}.$$

Par le théorème 4, $\bar{A} = A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}]$ et $X[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}]$ est la normalisation de la sous-variété X de \mathbb{A}^{2n+1} d'équations

$$x_j^d = P_j(z) \cdot y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

La projection

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^1, \quad (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z) \mapsto z$$

est un bon quotient et pour tout $t \in \mathbb{A}^1 - \{a_1, \dots, a_r\}$, $\pi^{-1}(z)$ s'identifie à \mathbb{A}^n .

Notation 2.6. Pour un \mathbb{Q} -diviseur $D = \sum_{z \in C} a_z \cdot z$ et $y \in C$, on dénote par D_y l'élément a_y appelé *spécialisation* de D en y . On a la décomposition $D = \sum_{z \in C} D_z \cdot z$.

Remarque 2.7. Si $\mathfrak{D} = \sum_{z \in C} \Delta_z \cdot z$ est un diviseur σ -polyédral sur une courbe algébrique lisse C , alors on peut toujours trouver des éléments $m_1, \dots, m_r \in M$ générateurs de σ_M^\vee , $d \in \mathbb{N}$ un entier non nul et des diviseurs de Weil D_1, \dots, D_r sur C à coefficients entiers tels que pour tout $z \in C$,

$$\Delta_z = \left\{ v \in N_{\mathbb{Q}} \mid m_i(v) \geq \frac{1}{d}(D_i)_z, \quad i = 1, \dots, r \right\}.$$

Plus généralement, nous avons le résultat suivant vrai pour toute \mathbb{T} -variété affine de complexité 1 obtenue par diviseur polyédral sur \mathbb{A}^1 .

Corollaire 3. Soit $\mathfrak{D} = \sum_{z \in \mathbb{A}^1} \Delta_z \cdot z$ un diviseur polyédral propre selon un cône polyédral saillant $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ et représenté par $(d, m_1, \dots, m_r, D_1, \dots, D_r)$ comme dans la remarque 2.7. Alors $A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}]$ est la normalisation de l'algèbre

$$A := \mathbf{k}[z] \left[g_1(z)\chi^{m_1}, f_1(z)\chi^{dm_1}, \dots, g_r(z)\chi^{m_r}, f_r(z)\chi^{dm_r} \right] \subset \mathbf{k}(z) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$$

avec $\mathbf{k}[\mathbb{A}^1] = \mathbf{k}[z]$ et pour tous indices i, j ,

$$f_i(z) := \prod_{y \in \mathbb{A}^1} (z - y)^{-(D_i)_y}, \quad g_i(z) := \prod_{y \in \mathbb{A}^1} (z - y)^{-\lfloor \frac{1}{d}(D_i)_y \rfloor}.$$

Démonstration. Puisque m_1, \dots, m_r engendrent σ_M^\vee , on a $\text{Frac } A = \text{Frac } \mathbf{k}(z) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$. Un calcul direct montre que

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \left[g_1(z)\chi^{m_1}, f_1(z)\chi^{dm_1}, \dots, g_r(z)\chi^{m_r}, f_r(z)\chi^{dm_r} \right].$$

On conclut par le théorème 4. □

Le résultat suivant sera utile dans la section 3.

Proposition 3. Soient C une courbe algébrique lisse, $f_1, \dots, f_r \in \mathbf{k}(C)^*$ des fonctions rationnelles et m_1, \dots, m_r des éléments non nuls de M tels que

$$A = \mathbf{k}[C][f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}] \subset \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$$

ait même corps des fractions que $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$. Notons σ le dual du cône engendré par m_1, \dots, m_r , f le r -uplet $(f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r})$ et \mathcal{A} le faisceau de \mathcal{O}_C -algèbres

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in \sigma_M^\vee} \mathcal{O}_C(\lfloor \mathfrak{D}[f, C](m) \rfloor) \chi^m.$$

Alors pour tout ouvert non vide $U \subset C$, $\mathcal{A}(U)$ est la normalisation de l'algèbre

$$A(U) := \mathbf{k}[U][f_1\chi^{m_1}, \dots, f_r\chi^{m_r}]$$

vu comme sous-algèbre de $\mathbf{k}(U) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$.

Démonstration. Soit $U \subset C$ un ouvert non vide. Puisque $\text{Frac } A = \text{Frac } \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$, le lemme 1 montre que les vecteurs m_1, \dots, m_r engendrent le réseau M . Donc le corps des fractions de l'anneau $A(U)$ est égal à celui de $\mathbf{k}(U) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$. Par le théorème 4, la normalisation de $A(U)$ est $A[U, \mathfrak{D}[f, U]]$. On conclut en remarquant que $\mathfrak{D}[f, U] = \mathfrak{D}[f, C]|_U$. □

3 Idéaux homogènes intégralement clos des algèbres affines normales multigraduées de complexité 1.

Dans cette section, on étudie les idéaux homogènes intégralement clos des \mathbb{T} -variétés affines de complexité 1. Comme motivation, cette caractérisation peut être mise en parallèle avec la description connue dans le cas torique (complexité 0) que l'on rappelle ci-après.

En utilisant les résultats de la section 2, on donne une méthode pour calculer explicitement la clôture intégrale des idéaux à partir d'un système de générateurs homogènes.

3.1. Idéaux intégralement clos. Puisque nous restons dans un contexte géométrique, la lettre A désigne une algèbre intègre de type fini sur \mathbf{k} . Soit $I \subset A$ un idéal. Un élément $a \in A$ est dit *entier* (ou satisfaisant une relation de dépendance intégrale) sur I s'il existe $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ et des éléments

$$\lambda_1 \in I, \lambda_2 \in I^2, \dots, \lambda_r \in I^r \quad \text{tels que} \quad a^r + \sum_{i=1}^r \lambda_i a^{r-i} = 0.$$

L'idéal I est dit *intégralement clos* (ou complet) si tout entier de A sur I appartient à I . On dit que I est *normal* si pour tout entier $i \geq 1$, I^i est intégralement clos.

Le sous-ensemble $\bar{I} \subset A$, appelé *clôture intégrale* (ou fermeture intégrale) de I dans A , est l'ensemble des éléments entiers sur I . C'est le plus petit idéal intégralement clos de A contenant I [HS, Corollary 1.3.1]. La démonstration de ce fait utilise les réductions d'idéaux (voir [NR]).

Pour plus d'informations sur les idéaux intégralement clos, voir par exemple [LeTe], [HS], [Va].

Considérons l'algèbre de Rees

$$B = A[It] = A \oplus \bigoplus_{i \geq 1} I^i t^i$$

correspondante à un idéal I de A . Alors la normalisation de B est

$$(7) \quad \bar{B} = \bar{A} \oplus \bigoplus_{i \geq 1} \overline{A I^i t^i}$$

où \bar{A} est la normalisation de A (voir aussi [Ri]). La normalisation de B est égale à celle de $\bar{A}[\bar{A}It]$ (voir [HS, Proposition 5.2.4]) et si A est normale alors $A[It]$ est normale si et seulement si I est normal.

Supposons maintenant que A est M -graduée normale. Un idéal I de A est dit *homogène* si I est non nul et si I est stable par l'opération de \mathbb{T} correspondante à la M -graduation de A (ou de manière équivalente, si I est engendré par des éléments homogènes de A). Chaque idéal homogène de A est un \mathbb{T} -module rationnel [Br, §1.1] et admet donc une décomposition en somme directe de sous-espaces propres. D'après [HS, Corollary 5.2.3], si I est homogène alors \bar{I} est homogène.

Voir [Fa] pour des exemples d'idéaux homogènes normaux dans les anneaux positivement gradués.

Le résultat suivant est bien connu. En l'absence de références, nous donnons un court argument.

Lemme 3. *Soit A une algèbre normale de type fini sur \mathbf{k} et soit I un idéal de A . Alors la fermeture intégrale de $A[It]$ dans son corps des fractions est égale à celle de $A[\bar{I}t]$. En particulier, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\overline{I^i} = \bar{I}^i$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{Z}_{>0}$, on a $I^i \subset \bar{I}^i$, soit $A[It] \subset A[\bar{I}t]$. D'où on a $\overline{A[It]} \subset \overline{A[\bar{I}t]}$. Par (7) et puisque $A = \bar{A}$ est normale, $\bar{I}t$ est inclus dans $\overline{A[\bar{I}t]}$, donc $A[\bar{I}t] \subset \overline{A[\bar{I}t]}$ et finalement $\overline{A[It]} \subset \overline{A[\bar{I}t]}$. La deuxième affirmation est une conséquence de (7) et de l'égalité $\overline{A[It]} = \overline{A[\bar{I}t]}$. \square

3.2. Polyèdres entiers. La théorie des idéaux homogènes intégralement clos en complexité inférieure à 1 fait intervenir celle des polyèdres.

Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant. Une partie $P \subset M_{\mathbb{Q}}$ est un σ^{\vee} -polyèdre entier s'il existe un polytope $Q \subset M_{\mathbb{Q}}$ dont l'ensemble de ses sommets est contenu dans M tel que $P = Q + \sigma^{\vee}$ est la somme de Minkowski de Q et de σ^{\vee} . On note $\text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M)$ le semi-groupe abélien des σ^{\vee} -polyèdres entiers de $M_{\mathbb{Q}}$. Pour un diviseur σ -polyédral \mathfrak{D} propre sur une courbe algébrique lisse C , $\text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M, \mathfrak{D})$ est la partie de $\text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M)$ des polyèdres contenus dans σ^{\vee} dont l'ensemble de leurs sommets est disjoint de l'ensemble des lacunes de \mathfrak{D} (voir 1.5.8).

Si $P \in \text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M)$ alors pour tout entier $e \geq 1$, on pose $eP := P + \dots + P$ la somme de Minkowski de e exemplaires de P . Le polyèdre eP est l'image de P par l'homothétie de centre 0 et de rapport e . Si $e = 0$ alors on pose $eP = \sigma^{\vee}$. On dit que P est *normal* si pour tout entier $e \geq 1$,

$$(eP) \cap M = \{m_1 + \dots + m_e \mid m_1, \dots, m_e \in P \cap M\}.$$

Lemme 4. Pour un cône polyédral saillant $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ et un polyèdre entier $P \in \text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M)$, on note

$$S = S_P = \{(m, e) \in M \times \mathbb{N} \mid m \in (eP) \cap M\}.$$

Alors S est un sous-semi-groupe saturé de $M \times \mathbb{Z}$. De plus, pour tout $e \geq 1$, l'enveloppe convexe de

$$E_{[e, P]} := \{m_1 + \dots + m_e \mid m_1, \dots, m_e \in P \cap M\}$$

dans $M_{\mathbb{Q}}$ est égale à eP .

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $(m, e) \in M \times \mathbb{Z}_{>0}$ tels que $s(m, e) \in S$. Alors $sm \in (seP) \cap M$. Donc il existe $m_{ij} \in P$ avec $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq e$ tels que $sm = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^e m_{ij}$, de sorte que

$$m = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^e m_{1j} + \dots + \frac{1}{s} \sum_{j=1}^e m_{sj} \in (eP) \cap M.$$

Donc $(m, e) \in S$. Puisque σ_M^{\vee} est un sous-semi-groupe saturé de M , on conclut que S est saturé. Cela montre la première assertion.

On montre la seconde par récurrence sur $e \geq 1$. Puisque $P \in \text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M)$, il existe un polytope Q dont l'ensemble de ses sommets $V(Q)$ est contenu dans M et tel que $P = Q + \sigma^{\vee}$. On a pour tout $m \in \sigma_M^{\vee}$,

$$m + Q = \text{Conv}(m + V(Q)) \subset \text{Conv}(P \cap M) \text{ soit : } \sigma_M^{\vee} + Q \subset \text{Conv}(P \cap M).$$

Donc pour tout $m' \in Q$,

$$m' + \sigma^{\vee} = \text{Conv}(m' + \sigma_M^{\vee}) \subset \text{Conv}(\sigma_M^{\vee} + Q) \subset \text{Conv}(P \cap M).$$

D'où dans le cas $e = 1$ on a $P = \text{Conv}(P \cap M)$.

Supposons le résultat établi pour un entier $e \geq 1$ fixé. Alors pour tout $m \in P \cap M$,

$$m + eP = \text{Conv}(m + E_{[e, P]}) \subset \text{Conv}(E_{[e+1, P]}),$$

par le cas $e = 1$. Pour tout $m' \in eP$, on a les égalités

$$m' + P = \text{Conv}(m' + P \cap M) \subset \text{Conv}(E_{[e+1, P]}).$$

Il s'ensuit que $(e+1)P = \text{Conv}(E_{[e+1, P]})$. D'où le résultat. \square

3.3. Cône associé à un polyèdre entier. D'après le lemme 3, pour tout σ^\vee -polyèdre entier $P \subset M_{\mathbb{Q}}$, il existe un unique cône polyédral saillant $\tilde{\sigma} \subset N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ tel que son dual intersecté avec $M \times \mathbb{Z}$ soit $S = S_P$. Nous dirons que $\tilde{\sigma}$ est le *cône associé* à P . Le cône $\tilde{\sigma}$ vérifie pour tout entier $e \geq 0$,

$$(eP) \cap M = \{m \in M \mid (m, e) \in \tilde{\sigma}\}.$$

3.4. Idéaux intégralement clos et variétés toriques affines. Rappelons que chaque idéal homogène intégralement clos d'une variété torique est caractérisé par son polyèdre de Newton. Voir par exemple [Vit, 3.1], [HS, §1.4] pour les faits basiques sur les idéaux monomiaux.

Dans [Br], on donne une description des idéaux invariants intégralement clos des variétés sphériques affines généralisant l'approche de ce paragraphe. Ce point de vue ne sera pas utilisé dans cet article.

Les preuves des résultats suivants (théorèmes 5 et 6) sont disponibles dans [CLS, Propositions 7.19 et 11.3.4].

Théorème 5. *Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant de dimension $n = \dim(N_{\mathbb{Q}})$ et soit X_{σ} la variété torique⁷ associée. Alors l'application*

$$P \mapsto I[P] = \bigoplus_{m \in P \cap M} \mathbf{k} \chi^m$$

est une bijection entre l'ensemble des σ^\vee -polyèdres entiers contenus dans σ^\vee et l'ensemble des idéaux homogènes intégralement clos de $\mathbf{k}[X_{\sigma}]$. Plus précisément, si $I = (\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_r})$ est un idéal homogène de $\mathbf{k}[X_{\sigma}]$ alors sa fermeture \bar{I} est $I[P]$ où

$$P = \text{Conv}(m_1, \dots, m_r) + \sigma^\vee.$$

De plus, si $P \subset \sigma^\vee$ est un σ^\vee -polyèdre entier alors P est normal si et seulement si $I[P]$ est normal.

Le théorème suivant est une conséquence d'un résultat important sur la normalité des polytopes entiers de dimension n [BGT, Theorem 1.3.3].

Théorème 6. *Soit $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ un cône polyédral saillant de dimension $n = \dim(N_{\mathbb{Q}}) \geq 1$ et $P \subset M_{\mathbb{Q}}$ un σ^\vee -polyèdre entier. Alors pour tout $e \geq n - 1$, eP est normal. En particulier, si X_{σ} est une surface torique affine alors tout idéal complet homogène de $\mathbf{k}[X_{\sigma}]$ est normal.*

Remarques 3.4.1. Notons que dans le cas particulier où $\mathbf{k}[X_{\sigma}] = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ est l'algèbre des polynômes à n variables, un idéal monomial I de $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ est normal si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, I^i est intégralement clos [RRV, 3.1].

Par ailleurs, d'après la théorie de Lipman-Zariski (voir [ZS, Appendix 5], [HS, §14.4.4]) et puisque la notion d'intégralité des idéaux est locale (voir [HS, 1.1.4]), tout idéal intégralement clos d'une surface affine lisse est normal. Cependant cela ne s'applique pas aux variétés toriques affines de dimension 3. En effet, si $\sigma \subset \mathbb{Q}^3$ est l'octant positif et si l'on pose

$$P := \text{Conv}((2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 7)) + \sigma^\vee$$

alors $I[P]$ n'est pas normal. Ceci est une traduction dans le langage torique d'un exemple de Jockush et Swanson (voir [HS, Exercice 1.14]).

7. L'étude des idéaux stables se réduit au cas des variétés toriques affines X_{σ} qui ne sont pas produit d'un tore non trivial et d'une variété torique affine.

3.5. Calcul explicite de la clôture intégrale des idéaux homogènes des \mathbb{T} -variétés affines de complexité 1.

Jusqu'à la fin de cet article, C désigne une courbe algébrique lisse, le sous-ensemble $\sigma \subset N_{\mathbb{Q}}$ est un cône polyédral saillant et nous fixons un diviseur σ -polyédral \mathfrak{D} propre sur C . Nous posons $A := A[C, \mathfrak{D}]$.

Nous allons tout d'abord attacher un polyèdre entier à chaque idéal homogène intégralement clos comme dans le cas torique. Pour cela nous décrivons le cône des poids de l'algèbre de Rees de A par rapport à un idéal homogène I .

Proposition 4. *Soit $I \subset A$ un idéal homogène. Alors il existe un unique polyèdre $P \in \text{Pol}_{\sigma^\vee}(M, \mathfrak{D})$ tel que le dual du cône des poids de la sous-algèbre $\mathbb{T} \times \mathbf{k}^*$ -stable*

$$A[It] \subset \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T} \times \mathbf{k}^*] = \bigoplus_{(m,e) \in M \times \mathbb{Z}} \mathbf{k}(C) \chi^{mte}$$

soit le cône $\tilde{\sigma} \subset N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ associé à P .

Démonstration. Montrons l'existence du σ^\vee -polyèdre entier $P \subset M_{\mathbb{Q}}$. Soient

$$g_1 \chi^{m'_1}, \dots, g_{r'} \chi^{m'_{r'}}, f_1 \chi^{m_1}, \dots, f_r \chi^{m_r}$$

des éléments homogènes de $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ tels que

$$A = \mathbf{k}[C] \left[g_1 \chi^{m'_1}, \dots, g_{r'} \chi^{m'_{r'}} \right], \text{ et } I = (f_1 \chi^{m_1}, \dots, f_r \chi^{m_r}).$$

On a donc

$$A[It] = \mathbf{k}[C] \left[g_1 \chi^{m'_1}, \dots, g_{r'} \chi^{m'_{r'}}, f_1 \chi^{m_1} t, \dots, f_r \chi^{m_r} t \right].$$

Notons

$$\mathfrak{D}[g] := \mathfrak{D} \left[g_1 \chi^{m'_1}, \dots, g_{r'} \chi^{m'_{r'}} \right], \quad \mathfrak{D}[f] := \mathfrak{D} \left[g_1 \chi^{m'_1}, \dots, g_{r'} \chi^{m'_{r'}}, f_1 \chi^{m_1} t, \dots, f_r \chi^{m_r} t \right]$$

(voir 2.2) et $B = \overline{A[It]}$.

Comme l'opération de \mathbb{T} est fidèle les vecteurs $m'_1, \dots, m'_{r'}$ engendrent le réseau M . Donc chaque vecteur m_i s'exprime comme combinaison \mathbb{Z} -linéaire de $m'_1, \dots, m'_{r'}$. Ainsi les vecteurs

$$(m_1, 0), \dots, (m_r, 0), (m'_1, 1), \dots, (m'_{r'}, 1)$$

forment une famille génératrice du réseau $M \times \mathbb{Z}$. Le semi-groupe des poids de B n'est pas contenu dans un sous-réseau propre.

D'après [A-H, Lemma 6.4(i)], on a $(\text{Frac } A)^{\mathbb{T}} = \mathbf{k}(C)$, soit $(\text{Frac } B)^{\mathbb{T} \times \mathbf{k}^*} = \mathbf{k}(C)$ et on conclut que $\text{Frac } B$ est le corps des fractions de $\mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T} \times \mathbf{k}^*]$. Donc par le théorème 4, $B = A[C, \mathfrak{D}[f]]$. Soit $U \subset C$ un ouvert affine non vide. Alors d'après la proposition 3, on a les égalités

$$\begin{aligned} A[U, \mathfrak{D}[f]|U] &= \overline{k[U] \left[g_1 \chi^{m'_1}, \dots, g_{r'} \chi^{m'_{r'}}, f_1 \chi^{m_1} t, \dots, f_r \chi^{m_r} t \right]} \\ &= \overline{A[U, \mathfrak{D}[g]|U] [f_1 \chi^{m_1} t, \dots, f_r \chi^{m_r} t]} = \overline{A[U, \mathfrak{D}[g]|U] [Jt]} \end{aligned}$$

où J est l'idéal de $A[U, \mathfrak{D} | U]$ engendré par $f_1 \chi^{m_1}, \dots, f_r \chi^{m_r}$. Comme $A[U, \mathfrak{D}[f] | U]$ a même cône des poids que B , par l'égalité $A[U, \mathfrak{D}[f] | U] = \overline{A[U, \mathfrak{D} | U][Jt]}$, on peut supposer que C est affine et que I est homogène intégralement clos (voir le lemme 3).

Avec ces nouvelles hypothèses, notons $\omega \subset M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ le cône des poids de B , $I = \bigoplus_{m \in F} I_m$ la décomposition de $I = (f_1 \chi^{m_1}, \dots, f_r \chi^{m_r})$ en homogènes,

$$\omega_{[1]} := \{m \in M_{\mathbb{Q}} \mid (m, 1) \in \omega\} \text{ et } P := \text{Conv}(m_1, \dots, m_r) + \sigma^{\vee}.$$

Alors P est un σ^{\vee} -polyèdre entier. Par 3.1(7), on a

$$It = \bar{I}t = \bigoplus_{m \in \omega_{[1]} \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C([\mathfrak{D}[f]])) \chi^m t.$$

Comme C est affine, $F = \omega_{[1]} \cap M$.

Montrons l'égalité $F = P \cap M$. Par convexité de $\omega_{[1]}$, on a pour tout $m \in F$,

$$m + \sigma^{\vee} = \text{Conv}(m + \sigma_M^{\vee}) \subset \text{Conv}(F) \subset \omega_{[1]}, \text{ soit } F + \sigma^{\vee} \subset \omega_{[1]}.$$

En outre, pour tout $m' \in \sigma^{\vee}$,

$$m' + \text{Conv}(F) = \text{Conv}(m' + F) \subset \omega_{[1]} \text{ donc } P \subset \text{Conv}(F) + \sigma^{\vee} \subset \omega_{[1]}$$

et il s'ensuit que $P \cap M \subset \omega_{[1]} \cap M = F$.

Inversement, soit $m \in F$. Alors I contient un élément homogène $a \chi^m$ et il existe $a_1, \dots, a_r \in A$ tels que $a \chi^m = \sum_{i=1}^r a_i g_i \chi^{m_i}$. On peut supposer que chaque a_i est homogène ou nul. Donc pour $i = 1, \dots, r$, tel que $a_i \neq 0$, on a l'égalité

$$m = m_i + \deg a_i \in P \cap M.$$

On conclut que $F = P \cap M$.

Notons $\tilde{\sigma} \subset N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$ le cône associé à P . Alors

$$\sigma^{\vee} \times \{0\} \subset \text{Conv}(\sigma_M^{\vee} \times \{0\}) \subset \omega.$$

Par le lemme 4 et l'inclusion $P \cap M \times \{1\} \subset \omega$, quelque soit $e \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$eP \times \{e\} = \text{Conv}(E_{[e, P]} \times \{e\}) \subset \omega$$

et donc $\tilde{\sigma}^{\vee} \subset \omega$. Notons $S \subset M \times \mathbb{Z}$ le semi-groupe des poids de $A[It]$. Alors par l'inclusion $F \subset P \cap M$, $\tilde{\sigma}^{\vee}$ contient $(\sigma_M^{\vee} \times \{0\}) \cup (F \times \{1\})$. Donc S est contenu dans $\tilde{\sigma}^{\vee}$. D'où

$$\omega = \text{Cone}(S) \subset \tilde{\sigma}^{\vee} \text{ et } \omega = \tilde{\sigma}^{\vee}.$$

La construction de P montre que $P \in \text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M, \mathfrak{D})$. L'existence de P provient du fait que B a même cône des poids que $A[It]$.

L'unicité est aisée compte tenu de la définition de $\tilde{\sigma}$. □

Définition 3.5.1. Soit $I \subset A$ un idéal homogène. On dit qu'un élément P de $\text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M, \mathfrak{D})$ est le *polyèdre de Newton* de I si le dual du cône associé à P est le cône des poids de $A[It]$.

Remarque 3.5.2. On observe que tout élément de $\text{Pol}_{\sigma^\vee}(M, \mathfrak{D})$ est le polyèdre de Newton d'au moins un idéal homogène de A . De plus, si $I \subset A$ est un idéal engendré par des éléments homogènes de degrés m_1, \dots, m_r alors d'après la preuve de la proposition 4,

$$P := \text{Conv}(m_1, \dots, m_r) + \sigma^\vee$$

est le polyèdre de Newton de I . Ce polyèdre ne dépend donc pas du choix d'un système de générateurs homogènes de I .

Le théorème suivant donne un calcul explicite de la clôture intégrale des idéaux homogènes de A . La preuve de ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 4 et de la proposition 4.

Théorème 7. Soit I un idéal de $A = A[C, \mathfrak{D}]$ donné par un système de générateurs homogènes

$$I = (f_1 \chi^{m_1}, \dots, f_r \chi^{m_r}).$$

Notons P le polyèdre de Newton de I , $\tilde{\sigma}$ le cône associé à P et $\tilde{\mathfrak{D}} = \sum_{z \in C} \tilde{\Delta}_z$. z le diviseur $\tilde{\sigma}$ -polyédral défini par les égalités

$$\tilde{\Delta}_z = \bigcap_{i=1}^r \{ (v, p) \in N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}, m_i(v) + p \geq -\nu_z(f_i) \} \cap (\Delta_z \times \mathbb{Q}),$$

pour tout $z \in C$. Alors pour tout entier $e \geq 1$, on a

$$\overline{I^e} = \bigoplus_{m \in (eP) \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C([\tilde{\mathfrak{D}}(m, e)])) \chi^m.$$

Exemple 3.5.3. Reprenons l'exemple 2.3. On considère l'idéal homogène

$$I = (t_2, t_3, t_4) \subset A = k[t_1, t_2, t_3, t_4] \cong \frac{k[x_1, x_2, x_3, x_4]}{(x_4^2 - x_1^2 x_2^2 x_3 - x_1 x_3^2)}.$$

Le polyèdre P de Newton de I est $(0, 1) + (\mathbb{Q}_{\geq 0})^2$. Notons $\tilde{\sigma} \subset \mathbb{Q}^3$ le cône associé à P . Soit $\tilde{\mathfrak{D}}$ le diviseur $\tilde{\sigma}$ -polyédral sur \mathbb{P}^1 construit par les générateurs t_2, t_3, t_4 comme dans le théorème 7. Le diviseur polyédral $\tilde{\mathfrak{D}}$ est porté par les points $0, 1, \infty$. Les coefficients correspondants sont

$$\tilde{\Delta}_0 = -\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \tilde{\sigma}, \quad \tilde{\Delta}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \tilde{\sigma}, \quad \tilde{\Delta}_\infty = \text{Conv}\left(\left(0, 1, -1\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)\right) + \tilde{\sigma}.$$

Exemple 3.5.4. Nous considérons l'opération de $\mathbb{T} = (\mathbf{k}^*)^2$ dans $\mathbb{A}^3 = \text{Spec } \mathbf{k}[x, y, z]$ où les fonctions coordonnées x, y, z satisfont $\deg x = (0, 0)$, $\deg y = (1, 0)$ et $\deg z = (0, 1)$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{>0}$. Par le théorème 8, on a pour tout $e \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\overline{(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)^e} = \bigoplus_{(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2} H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}([\tilde{\mathfrak{D}}(m_1, m_2, e)])) y^{m_1} z^{m_2}$$

où $\mathbb{A}^1 = \text{Spec } \mathbf{k}[x]$ et $\tilde{\mathfrak{D}} = \tilde{\Delta}_0 \cdot (0)$, avec

$$\tilde{\Delta}_0 = \{(u, v, w) \in \mathbb{Q}^3, u \geq 0, v \geq 0, w \geq -\alpha, \beta u + w \geq 0, \gamma v + w \geq 0\}$$

$$= \text{Conv}\left(\left(0, 0, 0\right), \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\gamma}, -\alpha\right)\right) + (\mathbb{Q}_{\geq 0})^3.$$

Les pièces graduées de $\overline{(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma)^e}$ sont décrites de la manière suivante. Si $\frac{\alpha}{\beta}m_1 + \frac{\alpha}{\gamma}m_2 - e\alpha \geq 0$ alors

$$H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}([\tilde{\mathfrak{D}}(m_1, m_2, e)]))y^{m_1}z^{m_2} = k[x]y^{m_1}z^{m_2}.$$

Si $\frac{\alpha}{\beta}m_1 + \frac{\alpha}{\gamma}m_2 - e\alpha < 0$ alors

$$H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}([\tilde{\mathfrak{D}}(m_1, m_2, e)]))y^{m_1}z^{m_2} = x^{-\lfloor \frac{\alpha}{\beta}m_1 + \frac{\alpha}{\gamma}m_2 - e\alpha \rfloor} k[x]y^{m_1}z^{m_2}.$$

Remarque 3.5.5. Voir [Vit], [RRV], [Al] pour plus de renseignements sur la normalité de la clôture intégrale des idéaux de la forme

$$(x_1^{\lambda_1}, \dots, x_n^{\lambda_n}) \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$$

de l'algèbre des polynômes à n variables.

Remarque 3.5.6. Rappelons que pour une extension d'anneaux entière S/R , si $I \subset R$ est un idéal alors on a l'égalité $\bar{I} = \overline{IS} \cap R$ [H-S, Proposition 1.6.1.]. Ainsi, les théorèmes 4 et 7 permettent également de décrire la clôture intégrale des idéaux homogènes des algèbres affines multigraduées de complexité 1 qui ne sont pas normales.

3.6. Diviseurs polyédraux verticalement négatifs.

Tout au long de ce paragraphe, on fixe un polyèdre P de $\text{Pol}_{\sigma^v}(M, \mathfrak{D})$ et on considère $\tilde{\sigma}$ le cône associé à P . Notons

$$p_1 : N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q} \rightarrow N_{\mathbb{Q}} \text{ et } p_2 : N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

les projections usuelles sur le premier et le second facteur. Pour un diviseur $\tilde{\sigma}$ -polyédral $\tilde{\mathfrak{D}}$, nous notons par $\tilde{\Delta}_z$ le coefficient de $\tilde{\mathfrak{D}}$ correspondant au point $z \in C$. On vérifie aisément que $p_1(\tilde{\sigma}) = \sigma$ et que pour tout $z \in C$, $p_1(\tilde{\Delta}_z) \in \text{Pol}_{\sigma}(N_{\mathbb{Q}})$.

Lorsque la mention de $\tilde{\mathfrak{D}}$ est claire, nous posons pour tout $e \in \mathbb{N}$,

$$I_{[e]} := \bigoplus_{m \in (eP) \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C([\tilde{\mathfrak{D}}(m, e)]))\chi^m.$$

On a donc l'égalité $A[\tilde{\mathfrak{D}}] = \bigoplus_{e \in \mathbb{N}} I_{[e]}t^e$.

Afin d'étudier les idéaux homogènes intégralement clos de $A[C, \mathfrak{D}]$, nous introduisons la notion suivante.

Définition 3.6.1. Un diviseur $\tilde{\sigma}$ -polyédral $\tilde{\mathfrak{D}}$ est *verticalement négatif* (ou a ses sommets verticalement négatifs) sur \mathfrak{D} si pour tout $z \in C$, $p_1(\tilde{\Delta}_z) = \Delta_z$ et ⁸ $p_2(V(\tilde{\Delta}_z)) \subset \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

8. On rappelle que $V(\tilde{\Delta}_z)$ désigne l'ensemble des sommets de $\tilde{\Delta}_z$.

L'assertion suivante donne une caractérisation algébrique des diviseurs $\tilde{\sigma}$ -polyédraux verticalement négatif au dessus de \mathfrak{D} .

Lemme 5. *Soit $\tilde{\mathfrak{D}}$ un diviseur $\tilde{\sigma}$ -polyédral sur C . Alors $\tilde{\mathfrak{D}}$ est verticalement négatif sur \mathfrak{D} si et seulement si pour tout entier positif e , $I_{[e]}$ est un idéal homogène de $A[C, \mathfrak{D}]$ et $I_{[0]} = A[C, \mathfrak{D}]$.*

Démonstration. Soit $z \in C$ et posons $A := A[C, \mathfrak{D}]$. Alors par [AH, Proposition 1] et lemme 2, on a $p_1(\tilde{\Delta}_z) = \Delta_z$ si et seulement si pour tout $m \in \sigma_M^\vee$,

$$h_{\tilde{\Delta}_z}(m, 0) = h_{\Delta_z}(m), \text{ i.e. } I_{[0]} = A.$$

On suppose jusqu'à la fin de la démonstration que l'égalité $I_{[0]} = A$ est vraie. Pour tout $e \in \mathbb{N}$, la partie $I_{[e]}$ est un sous- A -module M -gradué de $E := \mathbf{k}(C) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\mathbb{T}]$ pour la multiplication usuelle $A \times E \rightarrow E$. Ainsi, l'inclusion $I_{[e]} \subset A$ comme \mathbb{T} -module est équivalente à ce que $I_{[e]}$ soit un idéal homogène de A .

Supposons que l'inclusion

$$p_2(V(\tilde{\Delta}_z)) \subset \mathbb{Q}_{\leq 0}$$

est vraie. Soit $(m, e) \in \tilde{\sigma}_{M \times \mathbb{Z}}^\vee$. Alors on a

$$h_{\tilde{\Delta}_z}(m, e) \leq \min_{v \in p_1(\tilde{\Delta}_z)} m(v) = h_{\Delta_z}(m).$$

Donc pour tout entier $e \geq 0$, $I_{[e]}$ est un idéal homogène de A . Réciproquement, soient $(v, p) \in V(\tilde{\Delta}_z)$. Alors la partie

$$\lambda = \left\{ (m, e) \in M_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}, h_{\tilde{\Delta}_z}(m, e) = m(v) + ep \right\}$$

est un cône polyédral contenu dans $\tilde{\sigma}^\vee$ et d'intérieur non vide dans $M_{\mathbb{Q}}$ [AH, §1]. Il existe donc un élément (m', e') de $\lambda_{M \times \mathbb{Z}}$ tel que $e' \geq 1$. Soit $v' \in \Delta_z$ tels que

$$m'(v') = h_{\Delta_z}(m').$$

Par hypothèse et par [AH, Lemma 9.1], on a

$$m'(v) + e'p = h_{\tilde{\Delta}_z}(m', e') \leq h_{\Delta_z}(m') = m'(v').$$

Puisque v appartient à $\Delta_z = p_1(\tilde{\Delta}_z)$, $m'(v')$ est plus petit que $m'(v)$. L'inégalité ci-dessus montre que p est négatif. D'où le résultat. \square

Lemme 6. *Soit $\tilde{\mathfrak{D}}$ un diviseur $\tilde{\sigma}$ -polyédral sur C verticalement négatif sur \mathfrak{D} . Alors pour tout $e \in \mathbb{N}$, $I_{[e]}$ est un idéal homogène intégralement clos.*

Démonstration. Soit $e \in \mathbb{N}$ et posons $A := A[C, \mathfrak{D}]$. Montrons que $I_{[e]}$ est intégralement clos. Il suffit de montrer que tout élément homogène de $\tilde{I}_{[e]}$ appartient à $I_{[e]}$.

Soit $a \in \tilde{I}_{[e]}$ un élément homogène de degré $m \in \sigma_M^\vee$. Alors il existe un entier $r \geq 1$ et $\lambda_i \in I_{[e]}^i$, pour tout $i = 1, 2, \dots, r$, tels que :

$$a^r = \lambda_1 a^{r-1} + \lambda_2 a^{r-2} + \dots + \lambda_r \text{ avec } \lambda_r \neq 0.$$

On peut supposer que chaque λ_i est homogène de degré im ou nul, et que pour tout $i = 1, 2, \dots, r$, il existe un polynôme $Q \in A[x_1, \dots, x_d]$ homogène de degré i et $a_1, \dots, a_d \in I_{[e]}$ homogènes de degré m_j tels que $\lambda_i = Q(a_1, \dots, a_d)$.

Quitte à agrandir (a_1, \dots, a_d) , on peut supposer que tous les coefficients non nuls de Q sont égaux à 1. Ainsi, pour tout $i = 1, 2, \dots, r$, λ_i est somme de monômes de la forme $a_1^{n_1} \dots a_d^{n_d}$ ($n_j \in \mathbb{N}$) avec $\sum_{j=1}^d n_j = i$ et $\sum_{j=1}^d n_j m_j = im$. Donc $m \in (eP) \cap M$ et

$$\operatorname{div}(a_1^{n_1} \dots a_d^{n_d}) + i\tilde{\mathfrak{D}}(m, e) \geq \sum_{j=1}^d n_j \left(\operatorname{div}(a_j) + \tilde{\mathfrak{D}}(m_j, e) \right) \geq 0.$$

Donc pour tout i , $\lambda_i \in H^0(C, \mathcal{O}(\lfloor i\tilde{\mathfrak{D}}(m, e) \rfloor))\chi^{im}$ et d'après [De, 2.7 Lemme], l'algèbre graduée

$$A_{(m,e)} = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}(\lfloor i\tilde{\mathfrak{D}}(m, e) \rfloor))\chi^{im}$$

est normale comme intersection d'anneaux de valuation discrète de $\operatorname{Frac} A_{(m,e)}$. L'élément a appartient à la normalisation de $A_{(m,e)}$ et donc $a \in I_{[e]}$. On conclut que $I_{[e]}$ est intégralement clos. \square

L'exemple suivant montre qu'il existe des diviseurs $\tilde{\sigma}$ -polyédraux $\tilde{\mathfrak{D}}$ verticalement négatif sur \mathfrak{D} tels que $A[C, \tilde{\mathfrak{D}}]$ n'est pas une algèbre de Rees normalisée de $A[C, \mathfrak{D}]$ par rapport à un idéal homogène. Ce qui signifie qu'en général l'égalité $\overline{I_{[e]}} = I_{[re]}$, pour tous $r, e \in \mathbb{Z}_{>0}$, est fausse.

Exemple 3.6.2. Considérons l'algèbre graduée

$$A = A_0[D] = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0\left(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}\left(\left\lfloor \frac{m}{2}(0) \right\rfloor\right)\right)\chi^m \text{ avec } A_0 = \mathbf{k}[z]$$

l'algèbre des polynômes à une variable et $D = \frac{1}{2}(0)$. Alors $X = \operatorname{Spec} A$ s'identifie à la surface torique dans \mathbb{A}^3 donnée par l'équation $x_1^2 = x_2 x_3$. Soit R l'algèbre \mathbb{Z}^2 -graduée normale

$$\bigoplus_{(m,e) \in \tilde{\sigma}_{\mathbb{Z}^2}^\vee} H^0\left(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}\left(\left\lfloor \frac{m}{2}(0) \right\rfloor\right)\right)\chi^{mte}$$

où $\tilde{\sigma} \subset \mathbb{Q}^2$ est le cône associé au $\sigma^\vee = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ -polyèdre entier $P = \mathbb{Q}_{\geq 1}$. Alors on a $R = A[\mathbb{A}^1, \tilde{\mathfrak{D}}]$ avec $\tilde{\mathfrak{D}} = ((\frac{1}{2}, 0) + \tilde{\sigma})(0)$. Pour tout $e \in \mathbb{N}$,

$$I_{[e]} = \bigoplus_{m \geq e} H^0\left(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}\left(\left\lfloor \frac{m}{2}(0) \right\rfloor\right)\right)\chi^m$$

est un idéal de A . Cependant, R n'est pas la normalisation de l'algèbre de Rees $A[I_{[1]}t]$. En effet, on a $A[I_{[1]}t] = \mathbf{k}[z, \chi, \frac{1}{z}\chi^2, \chi t, \frac{1}{z}\chi^2 t]$ et par le théorème 4, sa normalisation est $A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}']$ avec $\mathfrak{D}' = ((\frac{1}{2}, 0), (1, -1) + \tilde{\sigma})(0)$.

3.7. Complément sur les \mathbb{Q} -diviseurs.

Nous définissons une opération sur certains \mathbb{Q} -diviseurs de C qui nous sera utile pour le paragraphe 3.8.

Lemme 7. Soit D un \mathbb{Q} -diviseur sur C tel que le module des sections globales $V := H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor D \rfloor))$ est non nul. Alors le diviseur

$$[D] := -\min_{f \in G} \operatorname{div}_f(f)$$

est indépendant du choix d'un ensemble G de générateurs de V ne contenant pas 0. De plus, avec les mêmes hypothèses sur D , l'opération $[\cdot]$ a les propriétés suivantes.

- (i) $[D]$ est à coefficients entiers et $[D] \leq \lfloor D \rfloor$;
- (ii) $[\lfloor D \rfloor] = [D]$;
- (iii) Si C est affine alors $[D] = \lfloor D \rfloor$;
- (iv) Si C est projective de genre g et $\deg \lfloor D \rfloor \geq 2g + 1$ ou D est principal alors $[D] = \lfloor D \rfloor$;
- (v) Si D est semi-ample alors $\lim_{r \rightarrow \infty} [rD]/r = D$;
- (vi) Si D_1, D_2 sont des \mathbb{Q} -diviseurs vérifiant les mêmes hypothèses que D alors $D_1 \leq D_2$ implique $[D_1] \leq [D_2]$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $z \in C$ et $h \in V$ non nuls tels que

$$\nu_z(h) < \min_{f \in G} \nu_z(f).$$

Alors il existe $f_1, \dots, f_r \in G$ et $a_1, \dots, a_r \in k[C]$ non nuls tels que $h = \sum_{i=1}^r a_i f_i$. Comme pour tout i , $\nu_z(a_i) \geq 0$, il vient

$$\nu_z(h) \geq \min_{i=1, \dots, r} (\nu_z(a_i) + \nu_z(f_i)) \geq \min_{f \in G} \nu_z(f).$$

D'où une contradiction. On conclut que $[D]$ ne dépend pas du choix de G .

Supposons que C est affine ou projective de genre g avec $\deg \lfloor D \rfloor \geq 2g + 1$ alors la $\mathbf{k}[C]$ -algèbre

$$A_{C, [D]} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(C, \mathcal{O}_C(m \lfloor D \rfloor)) \chi^m$$

est engendrée par $H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor D \rfloor)) \chi$ (comparer avec [OS, Lemma 5.2]). Donc par le corollaire 2, $[D] = \lfloor D \rfloor$. D'où (iii) et (iv).

Si D est semi-ample alors par (iii) et (iv), il existe $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que pour tout $r \geq r_0$, $[rD] = \lfloor rD \rfloor$ et donc $\lim_{r \rightarrow \infty} [rD]/r = \lim_{r \rightarrow \infty} \lfloor rD \rfloor / r = D$, ce qui donne (v).

Les assertions (i), (ii), (vi) sont évidentes. □

3.8. Idéaux homogènes intégralement clos de $A[C, \mathfrak{D}]$.

Dans ce paragraphe, on conserve les mêmes notations que dans 3.5 et 3.6. On fixe un diviseur $\tilde{\sigma}$ -polyédral $\tilde{\mathfrak{D}}$ verticalement négatif sur \mathfrak{D} . Pour tout vecteur $m \in P \cap M$, nous posons

$$D_m := \tilde{\mathfrak{D}}(m, 1).$$

Nous notons P_M^{nl} l'ensemble des vecteurs m de $P \cap M$ tels que $(m, 1)$ n'est pas une lacune de $\tilde{\mathfrak{D}}$ (voir 1.5.8). Pour les énoncés qui suivent, nous utiliserons 3.7. Notons que si m est un élément de P_M^{nl} alors l'expression $[D_m]$ est bien définie.

Nous allons donner un critère géométrique sur $\tilde{\mathfrak{D}}$ pour que $A[C, \tilde{\mathfrak{D}}]$ soit une algèbre de Rees normalisée de $A[C, \mathfrak{D}]$ selon un idéal homogène. Notre but est d'établir pour la complexité 1 une correspondance analogue au théorème 5.

Nous introduisons ici la notion clé de ce paragraphe.

Définition 3.8.1. On dit que $\tilde{\mathfrak{D}}$ est un diviseur polyédral de Rees sur \mathfrak{D} si pour tout point z de C , le polyèdre $\tilde{\Delta}_z$ est l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ d'un nombre fini de demi-espaces de la forme

$$\Delta_{m,e} = \{(m, 1) \geq e\} := \{(v, p) \in N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}, m(v) + p \geq e\}$$

avec $m \in P_M^{\text{nl}}$ et $e \in \mathbb{Z}$ satisfaisant l'inégalité⁹ $e \leq [D_m]_z$.

Exemple 3.8.2. Reprenons l'exemple 3.6.2 de la surface torique affine d'équation $x_1^2 = x_2x_3$. On vérifie aisément que $\tilde{\mathfrak{D}} = ((\frac{1}{2}, 0) + \tilde{\sigma})(0)$ n'est pas de Rees, tandis que $\mathfrak{D}' = ((\frac{1}{2}, 0), (1, -1)] + \tilde{\sigma})(0)$ l'est.

Lorsque C est affine, la caractérisation des diviseurs polyédraux de Rees se simplifie.

Proposition 5. *Supposons que C est une courbe algébrique affine lisse. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\tilde{\mathfrak{D}}$ est un diviseur polyédral de Rees sur \mathfrak{D} ;
- (ii) Pour tout $z \in C$, $\tilde{\Delta}_z$ est l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ d'un nombre fini de demi-espaces de la forme $\Delta_{m,e}$ avec $m \in P \cap M$ et $e \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Fixons $z \in C$. Montrons l'implication (ii) \Rightarrow (i). Soient $m_1, \dots, m_r \in P \cap M$ et $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{Z}$ tels que l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ des demi-espaces Δ_{m_i, e_i} soit le polyèdre $\tilde{\Delta}_z$. Comme C est affine, on a

$$P_M^{\text{nl}} = P \cap M.$$

Pour tout $(v, p) \in \tilde{\Delta}_z$ et tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$m_i(v) + p \geq e_i,$$

de sorte que par le lemme 7 (iii), on a

$$[D_{m_i}]_z = [D_{m_i}]_z \geq e_i.$$

D'où l'assertion (i). La réciproque est facile. □

Notations 3.8.3. Pour tout $m \in P_M^{\text{nl}}$ et tout $z \in C$, nous notons

$$\Delta_{m,z} := \{(m, 1) \geq [D_m]_z\}.$$

Pour $z \in C$ fixé, l'ensemble $\Delta_{\star, z}$ est l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ de tous les demi-espaces $\Delta_{m,z}$ où m parcourt l'ensemble P_M^{nl} .

Pour tous $z \in C$, $m \in P_M^{\text{nl}}$ et $v \in \Delta_z$, on a les inégalités

$$m(v) \geq h_{\Delta_z}(m) \geq [D_m]_z.$$

Quelque soit $z \in C$, $\Delta_{\star, z}$ est donc une partie non vide de $N_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$.

9. Voir la notation 2.6 et le paragraphe 3.7.

Lemme 8. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) $\tilde{\mathfrak{D}}$ est un diviseur polyédral de Rees sur \mathfrak{D} ;
- (ii) Pour tout $z \in C$, $\tilde{\Delta}_z = \Delta_{\star, z}$;
- (iii) Il existe $m_1, \dots, m_r \in M$ et $f_1, \dots, f_r \in \mathbf{k}(C)^\star$ tels que

$$A[C, \tilde{\mathfrak{D}}] = \overline{A[C, \mathfrak{D}][f_1 \chi^{m_1} t, \dots, \chi^{m_r} t]}.$$

Démonstration. Soit $z \in C$. Montrons l'implication (i) \Rightarrow (ii). Supposons que $\tilde{\Delta}_z$ est l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ des demi-espaces Δ_{m_i, e_i} avec $e_i \leq [D_{m_i}]$ et $m_i \in P_M^{\text{nl}}$, pour $i = 1, \dots, r$. Pour chaque i , on a $\Delta_{m_i, z} \subset \Delta_{m_i, e_i}$, donnant l'inclusion

$$\Delta_{\star, z} \subset \tilde{\Delta}_z$$

De plus, l'inégalité

$$h_{\tilde{\Delta}_z}(m, 1) \geq [D_m]_z,$$

pour tout vecteur $m \in P_M^{\text{nl}}$, implique $\tilde{\Delta}_z \subset \Delta_{\star, z}$ (voir la preuve de [AH, Proposition 1.5]). Ce qui montre (ii).

Montrons (ii) \Rightarrow (iii). Soit $f \chi^m \in I_{[1]}$ un élément homogène. Par le lemme 5, $I_{[1]}$ est un idéal homogène de $A[C, \mathfrak{D}]$. Soit

$$I_{[1]} = (f_1 \chi^{m_1}, \dots, f_r \chi^{m_r})$$

un système de générateurs homogènes. Alors il existe un sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, r\}$ non vide et des éléments homogènes $a_j \chi^{s_j} \in A[C, \mathfrak{D}]$ tels que pour tout $j \in J$,

$$f \chi^m = \sum_{j \in J} a_j \chi^{s_j} \cdot f_j \chi^{m_j}$$

et $m = m_j + s_j$. Notons Δ'_z l'intersection dans $\Delta_z \times \mathbb{Q}$ des polyèdres $\Delta_{m_j, -\nu_z(f_j)}$ où j parcourt J . Soit (v, p) un élément de Δ'_z . Alors pour tout $j \in J$, on a l'inégalité

$$m(v) + p = s_j(v) + m_j(v) + p \geq h_{\Delta_z}(s_j) - \nu_z(f_j) \geq -\nu_z(a_j f_j).$$

Donc

$$m(v) + p \geq \max_{j \in J} (-\nu_z(a_j f_j)) = -\min_{j \in J} (\nu_z(a_j f_j)) \geq -\nu_z(f).$$

Comme ceci est vrai pour tout $m \in P_M^{\text{nl}}$ et tout

$$f \in H^0(C, \mathcal{O}_C([\tilde{\mathfrak{D}}(m, 1)]) - \{0\},$$

on obtient $(v, p) \in \Delta_{\star, z}$. D'où l'inclusion $\Delta'_z \subset \Delta_{\star, z} = \tilde{\Delta}_z$. Par les mêmes arguments que précédemment, on obtient $\Delta'_z = \tilde{\Delta}_z$. L'assertion (iii) suit du théorème 4.

L'implication (iii) \Rightarrow (i) est aussi une conséquence immédiate du théorème 4. \square

Comme conséquence du théorème 4, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4. *Si $\tilde{\mathfrak{D}}$ est un diviseur polyédral de Rees sur \mathfrak{D} alors $\tilde{\mathfrak{D}}$ est propre sur C .*

L'exemple suivant montre l'équivalence de la proposition 5 est fausse lorsque $A[C, \tilde{\mathfrak{D}}]$ est elliptique.

Exemple 3.8.4. Dans cet exemple, on suppose $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Soient g_2, g_3 des nombres complexes vérifiant

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Considérons la courbe elliptique $E \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ d'équation de Weierstrass

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Notons O_{∞} le point à l'infini de E et $\wp(z), \wp'(z)$ les fonctions coordonnées de Weierstrass sur $E - \{O_{\infty}\} \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ satisfaisant la relation ci-dessus. On considère l'algèbre graduée

$$A = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(E, \mathcal{O}_E(mO_{\infty})) \chi^m.$$

En utilisant [Ha, Proposition IV.4.6], on obtient l'égalité

$$A = \mathbb{C} [\chi, \wp(z)\chi^2, \wp'(z)\chi^3].$$

Donc $X = \text{Spec } A$ s'identifie à la surface affine complexe dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ d'équation

$$y^2 - (x - \alpha_1 u^2)(x - \alpha_2 u^2)(x - \alpha_3 u^2) = 0$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les racines distinctes du polynôme $4x^3 - g_2x - g_3$ (voir [Ha, Exercice IV,4.1]). Notons

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{Q}_{\geq 0}(1, -1) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(0, 1)$$

et $\tilde{\mathfrak{D}} := \tilde{\Delta}_{O_{\infty}} \cdot O_{\infty}$ avec $\tilde{\Delta}_{O_{\infty}} = (1, 0) + \tilde{\sigma}$. Alors $\tilde{\mathfrak{D}}$ est propre sur E , verticalement négatif sur $\mathfrak{D} := [1, \infty[\cdot O_{\infty}$ et vérifie la condition (ii) de la proposition 5. Cependant un calcul aisé montre que $\Delta_{*, O_{\infty}} \neq \tilde{\Delta}_{O_{\infty}}$. D'après le lemme 8, $\tilde{\mathfrak{D}}$ n'est pas un diviseur polyédral de Rees.

Remarque 3.8.5. On constate des résultats précédents que si $\tilde{\mathfrak{D}}$ est un diviseur polyédral de Rees alors pour tout ouvert affine non vide $U \subset C$, $\tilde{\mathfrak{D}}|_U$ l'est aussi. L'exemple 3.8.4 montre que la réciproque est fausse en général.

Le théorème suivant donne une classification des idéaux homogènes intégralement clos de $A[C, \mathfrak{D}]$.

Théorème 8. *On a une bijection entre l'ensemble des couples $(P, \tilde{\mathfrak{D}})$ où P est un polyèdre de $\text{Pol}_{\sigma^{\vee}}(M, \mathfrak{D})$ et $\tilde{\mathfrak{D}}$ est un diviseur polyédral de Rees sur \mathfrak{D} (c'est à dire $\tilde{\mathfrak{D}}$ est verticalement négatif sur \mathfrak{D} et vérifie 3.8.1.) selon le cône associé à P , et l'ensemble des idéaux homogènes intégralement clos de $A[C, \mathfrak{D}]$. L'application est donnée par*

$$(P, \tilde{\mathfrak{D}}) \mapsto \bigoplus_{m \in P \cap M} H^0(C, \mathcal{O}_C([\tilde{\mathfrak{D}}(m, 1)])\chi^m.$$

Démonstration. Les lemmes 5 et 6 montrent que l'application est bien définie. La surjectivité est une conséquence immédiate du théorème 7, du lemme 5 et du lemme 8. L'injectivité provient de l'égalité

$$A[C, \tilde{\mathfrak{D}}] = \overline{A[C, \mathfrak{D}][I_1 t]}$$

obtenue par la condition (iii) du lemme 8. On conclut par l'égalité 3.1(7). □

Exemple 3.8.6 Soit D un \mathbb{Q} -diviseur sur une courbe algébrique affine lisse C et $A = A_0[D]$ l'algèbre de la \mathbf{k}^* -surface correspondante [F-Z, §3]. Alors l'ensemble des idéaux homogènes intégralement clos est bijection avec l'ensemble des couples $(d, \tilde{\mathcal{D}})$ vérifiant les conditions suivantes.

(i) d est un nombre entier positif et $\tilde{\mathcal{D}}$ est un diviseur polyédral selon le cône

$$\sigma_d := \mathbb{Q}_{\geq 0}(1, -d) + \mathbb{Q}_{\geq 0}(0, 1).$$

(ii) Pour tout $z \in C$, la projection de $\tilde{\Delta}_z \subset \mathbb{Q}^2$ sur le premier facteur est $[D_z, +\infty[$ et les sommets

de $\tilde{\Delta}_z$ appartiennent au demi-plan inférieur $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

(iii) Pour tout $z \in C$, toute droite L contenant une face de dimension 1 de $\tilde{\Delta}_z$ et qui n'est pas

$\{D_z\} \times \mathbb{Q}$ a sa pente appartenant à $\mathbb{Z}_{\leq -d}$. L'ordonnée à l'origine d'une telle droite L est un nombre entier.

Comme application, nous donnons une description des idéaux d'augmentation de l'algèbre des surfaces affines normales avec opérations paraboliques de \mathbf{k}^* .

Corollaire 5. Soient une courbe C affine lisse et $D = \sum_{z \in C} a_z \cdot z$ un \mathbb{Q} -diviseur sur C . Notons $A = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} A_m$ avec pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor mD \rfloor))\chi^m$. Si

$$A_+ = \bigoplus_{m > 0} A_m$$

est l'idéal d'augmentation de A alors A_+ est intégralement clos et pour tout entier $e \geq 1$,

$$\overline{A_+^e} = \bigoplus_{m \geq e} H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \tilde{\mathcal{D}}(m, e) \rfloor))\chi^m$$

où $\tilde{\mathcal{D}} = \sum_{z \in C} \tilde{\Delta}_z \cdot z$ est le diviseur polyédral défini par

$$\tilde{\Delta}_z = \{(u, v) \in \mathbb{Q}^2, u + v \geq 0, u \geq 0, \forall m \geq 1, mu + v \geq \lfloor ma_z \rfloor\},$$

pour tout $z \in C$.

Démonstration. Puisque A_+ est premier, A_+ intégralement clos. Le reste provient du théorème 8 et de la caractérisation (ii) du lemme 8. \square

Références

- [AFKKZ] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. *Flexible varieties and automorphism groups*. arxiv : 10011.5375. (2001). 41p.
- [AH] K. Altmann, J. Hausen. *Polyhedral divisors and algebraic torus actions*. Math. Ann. **334**. (2006). 557-607.
- [AHS] K. Altmann, J. Hausen, H. Süß. *Gluing affine torus actions via divisorial fans*. Transform. Groups. **13**. (2008). 215-242.
- [AKZ] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. *Flag varieties, toric varieties, and suspensions : three instances of infinite transitivity*. Sb. Mat. (à paraître); arxiv : 1003.3164. (2010). 25p.

- [Al] I. Al-Ayyoub. *Normality of monomial ideals*. Rocky Mountain J. Math. **39**. (2009). 1-9.
- [AL] I.V. Arzhantsev, A. Liendo. *Polyhedral divisors and SL_2 -actions on affine T -varieties*. arxiv : 1105.4494. (2011). 26p.
- [AOPSV] K. Altmann, N. Owen Ilten, L. Petersen, H. Süß, R. Volmert. *The geometry of T -varieties*. arxiv : 1102.5760. (2011). 42p.
- [BGT] W. Bruns, J. Gubeladze, T. Ngô Việt. *Normal polytopes, triangulations, and Koszul algebras*. J. Reine Angew. Math. **485**. (1997). 123-160.
- [Br] M. Brion. *Sur la géométrie des variétés sphériques*. Comment. Math. Helv. **66**. (1991). 237-262.
- [CLS] D. Cox, J. Little, H. Schenck. *Toric Varieties*. Graduate Studies in Mathematics. AMS. **124**. (2011).
- [Da] V.I. Danilov. *The Geometry of Toric Varieties*. Russian Math. Surveys. **33**. (1978). 97-154.
- [De] M. Demazure. *Anneaux gradués normaux*. Trav. Cours 37. (1988). 35-68.
- [Du] A. Dubouloz. *Quelques remarques sur la notion de modification affine*. arxiv : 0503142. (2005). 5p.
- [Fa] S. Faridi. *Normal Ideals of Graded Rings*. Comm. Algebra. **28**. (2000). 1971-1977.
- [Fu] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*. Princeton University Press. **131**. (1993).
- [FZ] H. Flenner, M. Zaidenberg. *Normal affine surfaces with \mathbb{C}^* -actions* Osaka J.Math. **40**. (2003). 981-1009.
- [Ha] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. **52**. (1977).
- [Ho] M. Hochster. *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials and Polytopes*. Ann. of Math. **96**. (1972). 318-337.
- [HS] C. Huneke, I. Swanson. *Integral Closure of Ideals, Rings and Modules*. Polycopié : <http://people.reed.edu/~iswanson/book/>.
- [KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings. I*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. **339**. (1973).
- [KZ] S. Kaliman, M. Zaidenberg. *Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group*. Transform. Groups. **4**. (1999). 53-95.
- [LeTe] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier. *Clôture intégrale des idéaux et equisingularité*. Séminaire Lejeune-Teissier, Centre de Mathématiques École Polytechnique. (1974).
- [Li] A. Liendo. *Affine T -varieties of complexity one and locally nilpotent derivations*. Transform. Groups. **15**. (2010). 389-425.
- [LS] A. Liendo, H. Süß. *Normal Singularities with Torus Actions*. arxiv : 1005.2462. (2010). 23p.
- [LV] D. Luna, T. Vust. *Plongements d'espaces homogènes*. Comment. Math. Helv. **58**. (1983). 186-245.
- [NR] D.G. Northcott, D. Rees. *Reductions of ideals in local rings*. Proc. Cambridge. Philos. Soc. **50**. (1954). 145-158.
- [Od] T. Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*. Springer-Verlag, Berlin. **131**. (1985).
- [OS] N. Owen Ilten, H. Süß. *Polarized Complexity-One T -Varieties*. Michigan Math. J. **60**. (2011). 561-578.
- [Ri] P. Ribenboim. *Anneaux de Rees intégralement clos*. J.Reine Angew. Math. **204**. (1960). 99-107.
- [RRV] L. Reid, L. G. Roberts, M. A. Vitulli. *Some results on normal homogeneous ideals*. Comm. in Alg. **31**. (2003). 4485-4506.
- [Ti] D. Timashev. *Torus actions of complexity one*. In : Toric topology. Contemp. Math. AMS. **60**. (2008). 349-364.
- [Ti 2] D. Timashev. *Classification of G -manifolds of complexity 1*. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **61**. (1997). 127-162.
- [Vie] E. Viehweg. *Rational singularities of higher dimensional schemes*. Proc. Amer. Soc. **63**. (1977). 6-8.
- [Vit] M. A. Vitulli. *Some normal monomial ideals*. Contemp. Math. **324**. (2003). 205-217.
- [Va] W. Vasconcelos. *Integral closure : Rees algebras, multiplicities, algorithms*. Springer. Monographs in Mathematics. XII. (2005). 519p.
- [Vo] R. Vollmert. *Toroidal embeddings and polyhedral divisors*. arxiv : 0707.0917. (2007). 5p.
- [ZS] O. Zariski, P. Samuel. *Commutative Algebra*. Van Nostrand, Princeton. Vol. II. (1960).

Adresse :

Université Grenoble I, Institut Fourier,
UMR 5582 CNRS-UJF, BP 74,
38402 St. Martin d'Hères cédex, France.

Courriel :

Kevin.Langlois@ujf-grenoble.fr.