



**HAL**  
open science

## Méthode de la frontière élargie pour la simulation d'écoulements fluides

Mourad Ismail, Bertrand Maury

► **To cite this version:**

Mourad Ismail, Bertrand Maury. Méthode de la frontière élargie pour la simulation d'écoulements fluides. 35ème Congrès National d'Analyse Numérique, Jun 2003, La Grande Motte "Ponant" (Langue-doc), France. pp.1-25. hal-00666103

**HAL Id: hal-00666103**

**<https://hal.science/hal-00666103>**

Submitted on 3 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode de la frontière élargie pour la simulation d'écoulements fluides.

**Mourad Ismail**

Laboratoire Jacques-Louis LIONS,  
Université P. et M. Curie,  
175, rue du Chevaleret, 75013 Paris France.

&

Laboratoire d'Ingénierie Mathématique,  
École Polytechnique de Tunisie,  
rue El-Khawarizmi B.P 743, 2078 La Marsa, Tunisie.

**Bertrand Maury**

Laboratoire Jacques-Louis LIONS,  
Université P. et M. Curie,  
175, rue du Chevaleret, 75013 Paris France.

**Mots-clefs :** équations de Navier-Stokes, convection-diffusion, domaines perforés, méthode de la frontière élargie (*Fat Boundary Method*, **FBM**).

## 1 Introduction

L'objectif de ce travail est de développer de nouveaux outils adaptés à la simulation d'écoulements tridimensionnels sur un domaine  $\Omega$  de forme simple (typiquement un hypercube) de  $\mathbb{R}^N$ , dans lequel est plongé un domaine *lisse*  $B$ , éventuellement constitué de plusieurs composantes connexes (les particules). La difficulté tient à la complexité géométrique du domaine  $\Omega \setminus \overline{B}$ . La méthode classique consiste à mailler  $\Omega \setminus \overline{B}$  et de faire la résolution sur ce maillage conforme. Mais le maillage lui-même peut être coûteux, et la matrice résultante n'est pas facile à préconditionner. Pour ces raisons, on cherche à se ramener à une résolution sur le domaine  $\Omega$  en entier, de façon à pouvoir utiliser des solveurs rapides. La méthode retenue pour traiter ce genre de problème est la méthode de la frontière élargie, introduite dans [14], et qui consiste à résoudre le problème de Poisson dans un domaine perforé en le découplant en une résolution globale (sur  $\Omega$ ) et une collection de résolutions locales (autour de chacune des composantes connexes de  $B$ ).

## 2 Les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles incompressibles

Considérons un fluide incompressible régi par les équations de Navier-Stokes instationnaires :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = f \text{ dans } \Omega_f(t) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega_f(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega_f(t) \quad (3)$$

$$+ \text{Conditions aux limites sur } \partial\Omega_f(t) \quad (4)$$

où  $\Omega_f(t)$  est le domaine occupé par le fluide à l'instant  $t$  (un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ ),  $\mathbf{u}$  et  $p$  sont respectivement le champ de vitesses et la pression,  $\nu$  est la viscosité du fluide et  $f$  un champ de forces extérieures (le champ de gravité par exemple). L'équation (1) représente la conservation

des moments tandis que l'équation (2) est la contrainte d'incompressibilité assurant la conservation de masse.

Une des principales difficultés liées à la résolution de ce problème est le couplage entre les inconnues  $\mathbf{u}$  et  $p$  par la contrainte d'incompressibilité. Les méthodes de projection de CHORIN-TEMAM, introduites par CHORIN ([3], [4]) et TEMAM [19] sont probablement les méthodes les plus utilisées pour approcher en temps les équations de NAVIER-STOKES. Ce sont des méthodes de marche en temps à pas fractionnaires visant à découpler le calcul de la vitesse et celui de la pression, en résolvant dans un premier temps un problème de convection diffusion telle que la vitesse résultante n'est pas à divergence nulle, puis, dans un deuxième temps, celle-ci est projetée sur un espace de fonctions à divergence nulle afin de satisfaire la contrainte d'incompressibilité. L'analyse de ces méthodes est donnée dans [20] et des preuves de convergence en  $\mathcal{O}(\delta t^2)$  sur la vitesse en norme  $L^2$  sont données dans [10] et [17]. Récemment, une nouvelle variante des méthodes de projection, nommée "correction de la vitesse", a été introduite dans [11], permettant une convergence en  $\mathcal{O}(\delta t^2)$  sur la vitesse en norme  $L^2$  et une convergence en  $\mathcal{O}(\delta t^{\frac{3}{2}})$  sur la vitesse en norme  $H^1$  et la pression en norme  $L^2$ .

## 2.1 Schéma de projection/ Lagrange-Galerkin

Pour la discrétisation en temps des équations de NAVIER-STOKES on a choisi d'utiliser un schéma de projection Lagrange-Galerkin. Cette famille de schémas a été analysée dans [2]. Un des avantages majeurs de cette approche est de traiter le terme convectif de manière explicite et de garder les opérateurs symétriques et invariants en temps. L'idée est de combiner la méthode des éléments finis avec un traitement lagrangien de la dérivée totale par la méthode des caractéristiques, voir [15] et [18].

L'idée principale commune à tous les schémas de projection est de découpler les effets visqueux du fluide de l'incompressibilité de l'écoulement, ils sont ainsi basés sur une stratégie de prédiction-correction.

Soit  $\delta t > 0$  le pas de temps et posons  $t^n = n\delta t$  pour  $0 \leq n \leq N$ . On introduit donc deux suites  $(\mathbf{u}^n)$  et  $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$  pour la vitesse et une suite  $(p^n)$  pour la pression telle que à chaque pas de temps :

- $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$  soit une *prédiction* du champ de vitesse, vérifiant les conditions aux limites mais pas nécessairement la contrainte de divergence nulle,
- $(\mathbf{u}^n)$  soit une *correction* de  $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$  à divergence nulle, mais ne vérifie pas forcément les conditions aux limites,
- $(p^n)$  s'ajuste en fonction de  $(\tilde{\mathbf{u}}^n)$  et apporte la correction nécessaire ; on note que calculer  $(\mathbf{u}^n)$  revient à calculer  $(p^n)$ .

Quant au traitement du terme non linéaire, il est fait par la méthode des caractéristiques dont on rappelle brièvement le principe. La trajectoire d'une particule fluide dans un écoulement ayant une vitesse  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  et se trouvant à la position  $\mathbf{x}$  au temps  $s$  est notée  $\chi(t, s; \mathbf{x})$ .  $\chi$  est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{d\chi(t, s; \mathbf{x})}{dt} = \mathbf{u}(t, \chi(t, s; \mathbf{x})), & t \in [0, s], \\ \chi(s, s; \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (5)$$

Dans la suite on note  $\chi^n(\mathbf{x}) = \chi(t^n, t^{n+1}; \mathbf{x})$ . On utilise l'approximation suivante pour la dérivée totale en temps (la dérivée partielle par rapport à  $t$  + le terme convectif) :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \simeq \frac{\mathbf{u}(t^n, \mathbf{x}) - \mathbf{u}(t^n, \chi^n(\mathbf{x}))}{\delta t} \quad (6)$$

On introduit les espaces  $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega_f)^3$  et  $\mathbf{M}_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega_f)/\mathbb{R}$  comme étant des approximations discrètes par éléments finis de  $\mathbf{H}^1(\Omega_f)^3$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega_f)/\mathbb{R}$  basées sur une triangulation du domaine  $\Omega_f$ . On introduit aussi  $\mathbf{Y}_h$  l'espace défini par  $\mathbf{Y}_h = \mathbf{X}_h + \nabla\mathbf{M}_h$ . Notons que comme les fonctions de l'espace  $\mathbf{M}_h$  sont polynômiales continues par morceaux, celui-ci est donc inclu dans  $\mathbf{H}^1(\Omega_f)$ , et par suite  $\mathbf{Y}_h \subset \mathbf{L}^2(\Omega_f)^3$ . On définit les deux suites  $(\tilde{\mathbf{u}}_h^n)_{0 \leq n \leq N} \subset \mathbf{X}_h$  et  $(\tilde{p}_h^n)_{0 \leq n \leq N} \subset \mathbf{M}_h$ . Le schéma discret de projection/Lagrange-Galerkin est donc le suivant : trouver  $(\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in \mathbf{Y}_h \times \mathbf{M}_h$ , tel que:

$$\text{Prédiction} \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^n \circ \chi_h^n}{\delta t}, \mathbf{v}_h \right) + \nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h) + \\ & (\mathcal{B}_h^T(2p_h^n - p_h^{n-1}), \mathbf{v}_h) = (f^{n+1}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\text{Projection} \left[ \begin{aligned} & \left( \nabla(p_h^{n+1} - p_h^n), \nabla q_h \right) = \frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}, q_h)}{\delta t}, \quad \forall q_h \in \mathbf{M}_h \\ & \mathbf{u}_h^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \delta t \nabla(p_h^{n+1} - p_h^n) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

où  $\mathcal{B}_h$  est l'opérateur de divergence discret de  $\mathbf{X}_h$  dans  $\mathbf{M}_h$  et il est définie par

$$\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{M}_h, \quad (\mathcal{B}_h \mathbf{v}_h, q_h) = \int_{\Omega_f} \mathbf{v}_h \cdot \nabla q_h = (\mathbf{v}_h, \mathcal{B}_h^T q_h). \quad (9)$$

Les problèmes elliptiques issus du schéma discret (7)-(8) et qu'on sera amené à résoudre à chaque pas de temps sont de deux types. Le premier, qui découle de l'étape de prédiction, est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \alpha u - \Delta u = f_1 & \text{dans } \Omega_f \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega_f, \end{cases} \quad (10)$$

où  $\alpha$  est l'inverse du pas de temps,  $u$  désigne l'une des trois composantes de la vitesse  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}$ ,  $f_1$  est le second membre constitué par tous les termes "connus" à l'instant  $t^{n+1}$  et  $g$  représente les conditions aux limites adéquates. Le second problème type qui découle de l'étape de projection est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta p = f_2 & \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_f \end{cases} \quad (11)$$

où  $p$  désigne  $p_h^{n+1}$  et  $f_2$  le second membre correspondant.

### 3 Quelques méthodes adaptées à la résolution des problèmes elliptiques dans des domaine perforés

On considère un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , à frontière Lipschitzienne, dans lequel est plongé une collection de sous-domaines réguliers  $B$  (typiquement des boules). On se propose de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cup \partial B \end{cases} \quad (12)$$

### 3.1 Méthodes existantes

1. **Maillage adaptatif** : La solution approchée est calculée sur un maillage non structuré, raffiné au voisinage des trous (cf figure 1).

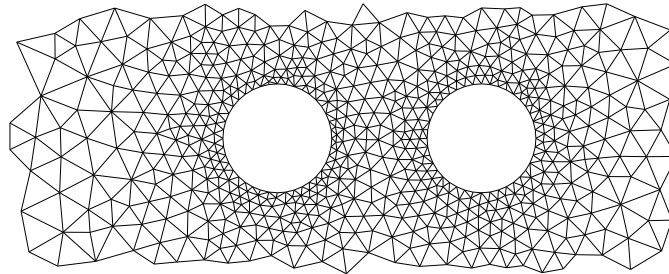


Figure 1: Maillage non structuré.

Voir [13] pour un exemple de simulation numérique d'écoulements fluide-particules basée sur cette approche. L'avantage de cette méthode c'est qu'on peut calculer avec précision au voisinage de  $B$  et se permettre d'être moins précis loin de  $B$ , où la solution est plus régulière. L'inconvénient majeur est surtout la perte de la structure cartésienne, ce qui rend difficile la construction de bons préconditionneurs, et exclut l'utilisation de solveurs rapides.

2. **Domaines fictifs** : (cf [7], [8],[9]) Le domaine global  $\Omega$  est maillé par un maillage cartésien, le trou est maillé par un maillage adapté à sa géométrie (cf figure 2), et les conditions aux bords sont prises en compte par des multiplicateurs de Lagrange.

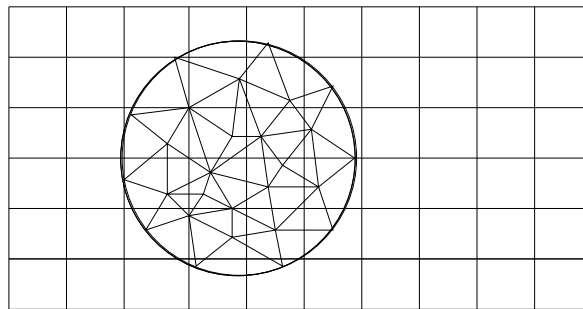


Figure 2: Domaines fictifs avec multiplicateurs de Lagrange.

3. **Domaines fictifs avec pénalisation** : Une autre approche de la méthode des domaines fictifs basée sur une technique de pénalisation (voir [5] et [6] dans le cadre de *FreeFEM3D*<sup>1</sup>). Par exemple pour résoudre le problème (13) sur la géométrie représentée dans la figure 3

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u = g & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (13)$$

<sup>1</sup>FreeFEM3D est un logiciel de calcul *open source* (licence Gnu/GPL), développé au Laboratoire Jacques-Louis Lions, pour la résolution des EDP en 3D. <http://www.freefem.org>

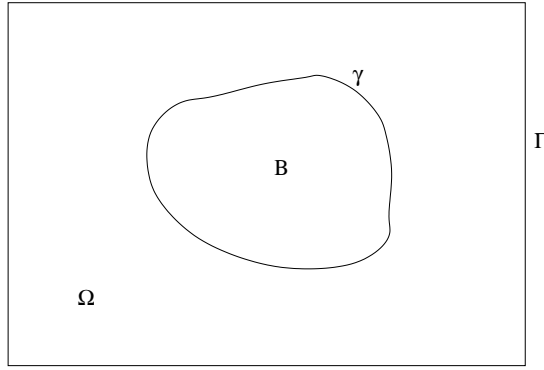


Figure 3: Domaines fictifs avec pénalisation.

par la méthode des domaines fictifs avec pénalisation, on utilise la formulation variationnelle (14) :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \chi_{\Omega \setminus \bar{B}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} uv = \int_{\Omega} f v \chi_{\Omega \setminus \bar{B}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma} g v, \quad (14)$$

où  $\varepsilon$  est un réel strictement positif "assez petit".

#### 4 Méthode de la frontière élargie "Fat Boundary Method" (FBM )

Rappelons que notre objectif est la simulation numérique d'écoulements fluide-particules, ce qui nous ramène en utilisant la méthode de projection et la méthode des caractéristiques décrites précédemment, à la résolution d'une suite de problèmes de types (10)-(11) dans des domaines perforés  $\Omega \setminus \bar{B}$  qu'on note parfois  $\Omega_f$ . La **FBM** a été introduite dans [14] dans l'objectif de garder la possibilité de calculer avec précision dans un voisinage du trou et au même temps utiliser un maillage cartésien dans le domaine global, permettant d'être moins précis là où c'est possible, et surtout pour pouvoir utiliser des solveurs rapides "standards".

Le principe de cette méthode est de décomposer le problème initialement posé sur le domaine perforé  $\Omega_f = \Omega \setminus \bar{B}$  par deux problèmes : un problème local dans un voisinage du trou (là où on peut considérer un maillage assez fin), et un problème global dans tout le domaine (sans tenir compte du trou) basé sur un maillage cartésien (cf figure 4).

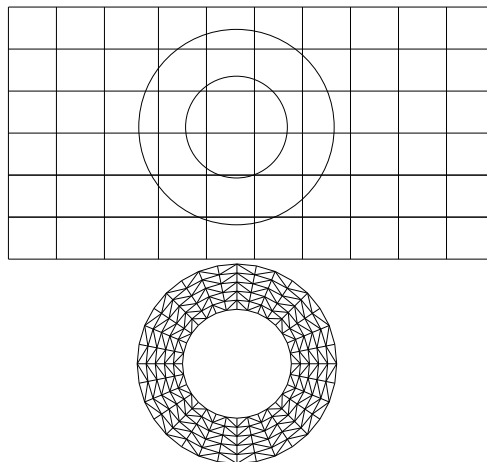


Figure 4: FBM: maillages local et global.

Le lien entre les résolutions globale et locale se fait par:

- une interpolation d'un champ global sur la frontière artificielle autour du trou (comme dans l'approche de décomposition de domaines avec recouvrement total proposé dans [12]),
- un saut de dérivée normale à travers le bord du trou.

#### 4.1 Description de la FBM

On considère un domaine borné, à frontière lipschitzienne,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans lequel est plongé un sous-domaine régulier  $B$ . La figure 5 représente le cas d'un seul trou. Mais cette étude reste encore valable dans le cas où  $B$  est la réunion de plusieurs sous-domaines. Dans ce dernier cas, on va juste supposer que les *couronnes*, de type  $\omega$ , autour de chaque composante de  $B$  ne se recouvrent pas. Les frontières de  $\Omega$  et de  $B$  sont notées respectivement par  $\Gamma$  et  $\gamma$ .

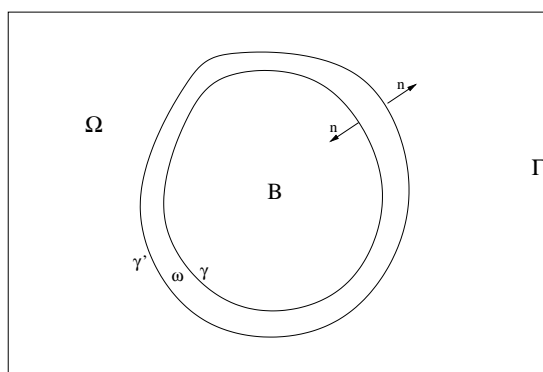


Figure 5: Exemple représentatif du domaine.

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{\hat{u} \in H^1(\Omega); \hat{u}|_{\Gamma} = 0\} \\ H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B}) &= \{u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B}); u|_{\Gamma} = 0\} \end{aligned}$$

Étant donné  $f \in L^2(\Omega \setminus \bar{B})$ . On se propose de résoudre le problème **I** : trouver  $u \in H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$ , tel que

$$\mathbf{I} \begin{cases} \alpha u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B} \\ u = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

On introduit une frontière artificielle régulière  $\gamma'$  autour de  $B$  (cf figure 5), on note par  $\omega$  la *couronne* délimitée par  $\gamma$  et  $\gamma'$  et on définit l'espace  $H_{0\gamma}^1(\omega)$  par

$$H_{0\gamma}^1(\omega) = \{v \in H^1(\omega); v|_{\gamma} = 0\}. \quad (15)$$

Pour une fonction  $f$  définie sur  $\Omega \setminus \bar{B}$ , on note par  $\bar{f}$  son extension par 0 sur  $B$  :

$$\bar{f}|_{\Omega \setminus \bar{B}} = f|_{\Omega \setminus \bar{B}}, \quad \bar{f}|_B = 0. \quad (16)$$

Les espaces  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$  et  $H_{0\gamma}^1(\omega)$  sont munis des normes hilbertiennes

$$|\hat{u}|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2, \quad |u|_{H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})}^2 = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} |\nabla u|^2, \quad |v|_{H_{0\gamma}^1(\omega)}^2 = \int_{\omega} |\nabla v|^2. \quad (17)$$

## 4.2 Formulation à multi-domaines

L'objectif est de remplacer le problème **I** par deux sous-problèmes **II**, l'un posé sur  $\omega$ , et l'autre sur  $\Omega$  tout entier : trouver  $(\hat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_{0\gamma}^1(\omega)$ , tel que

$$\mathbf{II} \begin{cases} \mathbf{II} - a : \begin{cases} \alpha v - \Delta v = f & \text{dans } \omega \\ v = \hat{u} & \text{sur } \gamma' \end{cases} \\ \mathbf{II} - b : \alpha \hat{u} - \Delta \hat{u} = \bar{f} + \frac{\partial v}{\partial n}|_{\gamma} \delta_{\gamma} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où  $\frac{\partial v}{\partial n}|_{\gamma} \delta_{\gamma} \in H^{-1}(\omega)$  désigne la forme linéaire

$$\hat{u} \in H_0^1(\Omega) \longmapsto \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \hat{u}, \quad (18)$$

qui est continue tant que  $v \in H_{0\gamma}^1(\omega)$  et  $\Delta v \in L^2(\omega)$ .

**Proposition 4.1** *Les problèmes **I** et **II** sont équivalents, i.e.*

i) si  $u \in H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$  est solution du problème **I**, alors le couple  $(\bar{u}, u|_{\omega})$  est solution du problème **II**,

ii) si  $(\hat{u}, v)$  est solution du problème **II**, alors  $\hat{u}|_{\Omega \setminus \bar{B}}$  est solution du problème **I**.

*Preuve:* la démonstration de cette proposition est en tout point analogue à celle dans [14].

## 4.3 Méthode de résolution : formulation de point fixe

L'objectif est de transformer le problème **II** en un problème de point fixe. Soit  $\theta$  un paramètre réel de  $]0, 1[$  (paramètre de relaxation). On considère l'opérateur

$$\mathbf{T}_{\theta} : (\hat{u}, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_{0\gamma}^1(\omega) \longmapsto (\hat{U}, V), \quad (19)$$

où  $V \in H_{0\gamma}^1(\omega)$  et  $\hat{U} \in H_0^1(\Omega)$  sont respectivement les solutions de

$$\begin{cases} \alpha V - \Delta V = f & \text{dans } \omega \\ V|_{\gamma'} = (\theta v + (1 - \theta)\hat{u})|_{\gamma'} \end{cases} \quad (20)$$

et

$$\alpha \hat{U} - \Delta \hat{U} = \bar{f} + \frac{\partial V}{\partial n} \delta_{\gamma} \quad \text{dans } \Omega, \quad (21)$$

Par définition de  $\mathbf{T}_{\theta}$ , on a la formulation du point fixe suivante:  $\forall \theta \neq 1$ ,

$$(\hat{u}, v) \text{ est solution de } \mathbf{II} \iff \mathbf{T}_{\theta}(\hat{u}, v) = (\hat{u}, v). \quad (22)$$

La recherche de ce point fixe (solution du problème **II**) se fait par un processus itératif en considérant la suite récurrente de  $H_0^1(\Omega) \times H_{0\gamma}^1(\omega)$  définie par:

$$(\hat{u}^{m+1}, v^{m+1}) = \mathbf{T}_{\theta}(\hat{u}^m, v^m). \quad (23)$$

Voir [14] pour la preuve de la convergence de cette suite, pour  $\theta$  assez proche de 1.



#### 4.4 Discrétisation en espace. Algorithme

On introduit des espaces éléments finis classiques

$$X_h^\Omega \subset H_0^1(\Omega), \quad X_h^\omega \subset H_{0\gamma}^1(\omega). \quad (24)$$

L'espace  $X_h^\Omega$  est basé sur un maillage cartésien de  $\Omega$ , et  $X_h^\omega$  correspond à un maillage similaire à celui représenté dans la figure 4. Une itération de l'algorithme est:

1. Calculer  $\widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_h}$ , l'interpolé de  $\widehat{u}_h^{k-1}$  sur  $\gamma'_h$ , et poser

$$\beta_h^k = \theta \alpha_h^{k-1} + (1 - \theta) \widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_h}. \quad (25)$$

2. Calculer  $v_h^k \in X_h^\omega$ , la solution de

$$\begin{cases} \alpha \int_\omega v_h^k w + \int_\omega \nabla v_h^k \cdot \nabla w = \int_\omega f w & \forall w \in X_h^\omega \quad w|_{\gamma'_h} = 0 \\ v_h^k|_{\gamma'} = \beta_h^k \end{cases} \quad (26)$$

3. Calculer

$$\varphi_h^k = \frac{\partial v_h^k}{\partial n} \Big|_{\gamma_h}. \quad (27)$$

4. Calculer  $\widehat{u}_h^k \in X_h^\Omega$ , la solution de

$$\alpha \int_\Omega \widehat{u}_h^k + \int_\Omega \nabla \widehat{u}_h^k \cdot \nabla w = \int_\omega \bar{f} w + \int_{\gamma_h} \varphi_h^k w \quad \forall w \in X_h^\Omega. \quad (28)$$

#### 4.5 Approche simplifiée

Nous avons choisi, dans un premier temps, de remplacer la résolution locale dans  $\omega$  (i.e l'étape 2. de l'algorithme précédent) par un calcul plus simple. Pour ce faire, on place la frontière artificielle  $\gamma'$  tout près de  $\gamma$ . Par exemple dans le cas où  $B$  est une boule de rayon  $R$ , on prend  $\gamma'$  une sphère de même centre que  $B$  et de rayon  $R + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \ll R$ .

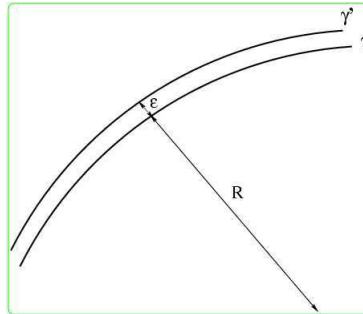


Figure 6: Approche simplifiée.

La restriction que l'on considère est qu'on suppose ici  $v$  est radiale ce qui nous permet de résoudre explicitement le problème local qui devient (pour le cas homogène  $f = 0$ )

$$\begin{cases} -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dv}{dr} \right] = 0 & \text{pour } r \in ]R, R + \varepsilon[ \\ v(R) = 0, \quad v(R + \varepsilon) = \widehat{u}(R + \varepsilon) \end{cases} \quad (29)$$

L'algorithme du paragraphe précédent devient donc:

1. Calculer  $\widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_h}$ , l'interpolé de  $\widehat{u}_h^{k-1}$  sur  $\gamma'_h$ , et poser

$$\varphi_h^k = \theta \varphi_h^{k-1} + (1 - \theta) \left[ -\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right) \frac{1}{\varepsilon} \widehat{u}_h^{k-1}|_{\gamma'_h} \right]. \quad (30)$$

2. Calculer  $\widehat{u}_h^k \in X_h^\Omega$ , la solution de

$$\alpha \int_{\Omega} \widehat{u}_h^k w + \int_{\Omega} \nabla \widehat{u}_h^k \cdot \nabla w = \int_{\omega} \bar{f} w + \int_{\gamma_h} \varphi_h^k w \quad \forall w \in X_h^\Omega. \quad (31)$$

**Remarque 4.1** Dans le cas où on s'intéresse à des solutions radiales, remplacer l'algorithme initial par celui de l'approche simplifiée n'introduit pas une erreur supplémentaire, puisque la résolution est exacte en  $v$ . Mais d'une manière générale, il n'y a aucune raison pour que  $v$  soit radiale, et par suite en résolvant le problème par ce dernier algorithme, on introduit une nouvelle erreur qui, a priori, dépend de  $\varepsilon$  et de la régularité de la solution. L'étude mathématique de cet algorithme, notamment la convergence et les estimations des erreurs, est encore en cours mais comme on va le voir, les premiers tests numériques sont satisfaisants.

#### 4.6 Prise en compte des conditions de Neumann au bord de $B$

On garde toujours la même donnée géométrique représentée par la figure 7

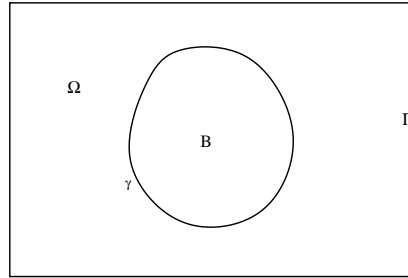


Figure 7: Donnée géométrique.

Étant donnée  $f \in L^2(\Omega \setminus \overline{B})$ , on s'intéresse à présent à la résolution du problème suivant: trouver  $u \in H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \overline{B})$ , tel que

$$\mathbf{I}_N \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

La formulation variationnelle naturelle de ce problème est : trouver  $u \in H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \overline{B})$ , tel que

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}} \nabla u \cdot \nabla w = \int_{\Omega \setminus \overline{B}} f w, \quad \forall w \in H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \overline{B}). \quad (32)$$

Pour résoudre (32) en se ramenant à une résolution dans tout le domaine  $\Omega$  (dans lequel on a un maillage cartésien), on propose l'algorithme suivant:  $u^n \in H_0^1(\Omega)$  étant donné, trouver  $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ , tel que

$$\mathbf{II}_N \quad \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \cdot \nabla w = \int_B \nabla u^n \cdot \nabla w + \int_{\Omega} \bar{f} w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

où  $\bar{f}$  est le prolongement par 0 de  $f$  sur  $B$ .

Il est clair que les problèmes (32) et  $\mathbf{II}_N$  sont bien posés, dans ce qui suit on va établir le lien entre les solutions des problèmes  $\mathbf{II}_N$  et la solution du problème initial. Soit  $\tilde{u}$  un prolongement de  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on a le résultat suivant :

**Lemme 4.1** *Si  $u \in H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$  est la solution du problème (32), alors tout prolongement  $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$  de  $u$  vérifie:*

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w = \int_B \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w + \int_{\Omega} \bar{f} w, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (33)$$

*Preuve:* par construction de  $\tilde{u}$ , on a

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w = \int_B \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \nabla u \cdot \nabla w$$

d'où le résultat, puisque  $u$  est solution de (32). □

L'algorithme  $\mathbf{II}_N$  est un processus itératif de point fixe qui converge vers la solution de (32). En effet,

**Proposition 4.2** *La suite  $(u^n|_{\Omega \setminus \bar{B}})_n$  converge fortement vers  $u$  (la solution de (32)) dans  $H_{0\Gamma}^1(\Omega \setminus \bar{B})$ .*

*Preuve:* en faisant la différence des deux équations (33) et  $\mathbf{II}_N$  et en prenant  $u^{n+1} - \tilde{u}$  comme fonction test, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla(u^{n+1} - \tilde{u})|^2 = \int_B \nabla(u^n - \tilde{u}) \cdot \nabla(u^{n+1} - \tilde{u}). \quad (34)$$

Ce qui implique, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|u^{n+1} - \tilde{u}|_{\Omega}^2 \leq |u^n - \tilde{u}|_B |u^{n+1} - \tilde{u}|_B, \quad (35)$$

et par suite

$$|u^{n+1} - \tilde{u}|_{\Omega \setminus \bar{B}}^2 + |u^{n+1} - \tilde{u}|_B^2 \leq |u^n - \tilde{u}|_B |u^{n+1} - \tilde{u}|_B, \quad (36)$$

ce qui implique en particulier

$$|u^{n+1} - \tilde{u}|_B \leq |u^n - \tilde{u}|_B, \quad (37)$$

et donc la suite positive  $\xi_n = |u^n - \tilde{u}|_B$  est décroissante et par suite elle converge. D'où le résultat en passant à la limite dans (36). □

## 4.7 Solveur rapide pour la résolution globale

La **FBM** est basée sur un algorithme de point fixe, dont chaque itération consiste à résoudre un problème elliptique dans le domaine global. Le maillage considéré sur le domaine global étant choisie cartésien dans le but de pouvoir utiliser des solveurs rapides. Celui qu'on utilise a été développé par Rossi et Toivanen de l'université de Jyväskylä (Finlande) (voir [16] et [1]). L'idée de base pour la méthode de résolution est expliquée dans [1]. Elle consiste à utiliser des techniques de tensorisation et de résolutions partielles.

Ce solveur est dédié à la résolution des systèmes linéaires  $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$ , où  $\mathcal{A}$  est une matrice  $N \times N$ , symétrique, définie positive et se décompose de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = A_1 \otimes M_2 \otimes M_3 + M_1 \otimes A_2 \otimes M_3 + M_1 \otimes M_2 \otimes A_3 \quad (38)$$

avec les  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des matrices  $n_i \times n_i$  (avec  $n_1 n_2 n_3 = N$ ) symétriques, tridiagonales et définies positives (ou semi-définies positives). Les  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des matrices  $n_i \times n_i$  symétriques, tridiagonales (ou diagonales) et définies positives. Le symbole  $\otimes$  désigne le produit tensoriel et il est définie par:

pour tout  $R = (r_{ij}) \in \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$  et  $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,

$$T = R \otimes S = \begin{bmatrix} s_{11}R & \dots & s_{1n}R \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{m1}R & \dots & s_{mn}R \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{km,ln}(\mathbb{R}). \quad (39)$$

Par exemple la matrice du système linéaire issu de la discrétisation du Laplacien par éléments finis  $Q^1$  sur le cube  $] -1, 1[^3$  admet une décomposition de type (38), où

$$A_i = \text{tridiag}\left\{-\frac{1}{h_i}, \frac{2}{h_i}, -\frac{1}{h_i}\right\} \text{ et } M_i = \text{tridiag}\left\{\frac{h_i}{6}, \frac{2h_i}{3}, \frac{h_i}{6}\right\}, \quad i = 1, 2, 3$$

avec  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  sont respectivement les pas de discrétisations dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le système algébrique (38) s'écrit sous cette forme de blocs:

$$C_i u_{i-1} + D_i u_i + C_{i+1} u_{i+1} = f_i \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (40)$$

plus précisément,

$$\begin{bmatrix} D_1 & C_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_2 & D_2 & C_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_i & D_i & C_{i+1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \ddots & C_{n_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{n_1} & D_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n_1} \end{bmatrix}$$

où  $u_i$  et  $f_i$  sont respectivement les  $i^{\text{èmes}}$  blocs de longueurs  $n_2 n_3$  de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}$ ,

$$C_i = A_1^{i,i+1} M_2 \otimes M_3 + M_1^{i,i+1} [A_2 \otimes M_3 + M_2 \otimes A_3] \in \mathcal{M}_{n_2 n_3, n_2 n_3}(\mathbb{R})$$

et

$$D_i = A_1^{i,i} M_2 \otimes M_3 + M_1^{i,i} [A_2 \otimes M_3 + M_2 \otimes A_3] \in \mathcal{M}_{n_2 n_3, n_2 n_3}(\mathbb{R})$$

En utilisant cette écriture par blocs, chaque étape de la résolution partielle du système algébrique se fait sur un plan  $x = \ell h_1$ ,  $\ell = 1, \dots, n_1$ .

Pour avoir une idée sur la rapidité du solveur, on a mesuré le temps de calcul effectif (sans compter l'étape de pré-traitement) pour résoudre un Laplacien sur le cube  $] -1, 1[^3$  avec 129 points de discrétisation dans chacune des trois directions (un peu plus de 2 millions de degrés de liberté) est 15.66 secondes CPU. <sup>2</sup>

<sup>2</sup>Le calcul a été fait sur *Hydre*, le cluster du Laboratoire Jacques-Louis LIONS.

## 5 Validations numériques

### 5.1 Ordre de la FBM

L'objectif de cette section est l'illustration des résultats théoriques, travail en cours en collaboration avec S. BERTOLUZZA, qui montrent que la méthode **FBM** est localement d'ordre optimal (au sens des éléments finis). Pour simplifier, on se met dans le cadre du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ u = 0 & \text{sur } \gamma \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (41)$$

Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, résoudre ce problème par **FBM** revient à le remplacer par une suite de résolutions locales et globales. Dans un premier temps on suppose que la résolution locale est faite d'une manière exacte, ce qui revient à remplacer le problème (41) par le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u} = \bar{f} + \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\gamma} \delta_{\gamma} & \text{dans } \Omega \\ \hat{u} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (42)$$

où  $v$  est la solution du problème local suivant : (dans une *couronne*  $\omega$  autour de  $B$  de frontière  $\partial\omega = \gamma \cup \gamma'$ )

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \omega \\ v = 0 & \text{sur } \gamma \\ v = \hat{u} & \text{sur } \gamma' \end{cases} \quad (43)$$

$\omega$  étant une *couronne* autour de  $B$  de frontière  $\partial\omega = \gamma \cup \gamma'$ . Dans ce cas particulier, puisqu'on suppose qu'on résoud d'une manière exacte le problème local (43), il suffit de remplacer dans (42)  $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\gamma}$  par son expression en prenant  $v$  égale à la restriction de la solution analytique  $\hat{u}$  sur  $\omega$ .

On note par

- $|\hat{e}|_{1,\Omega}$  la semi-norme  $H^1(\Omega)$  de l'erreur globale entre la solution approchée  $\hat{u}_h$  et la solution exacte. Elle est donnée par:

$$|\hat{e}|_{1,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\nabla(\hat{u} - \hat{u}_h)|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

- $\|\hat{e}\|_{0,\Omega}$  la norme  $L^2(\Omega)$  de l'erreur globale et elle est donnée par:

$$\|\hat{e}\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\hat{u} - \hat{u}_h|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

Pour l'erreur locale, on introduit un sous domaine  $\tilde{\Omega}$  de  $\Omega \setminus \overline{B}$ . Dans les tests numériques on a pris  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \overline{\tilde{B}}$ , où  $\tilde{B}$  est une boule du même centre que  $B$  et de rayon plus grand que  $R$ . On note par

- $|e|_{1,\tilde{\Omega}}$  la semi-norme  $H^1(\tilde{\Omega})$  de l'erreur locale entre les restrictions sur  $\tilde{\Omega}$  de la solution approchée  $\hat{u}_h$  et la solution exacte. Ces restrictions sont respectivement notées  $u_h$  et  $u$ . Cette erreur locale est donnée par :

$$|e|_{1,\tilde{\Omega}} = \left( \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla(u - u_h)|^2 d\tilde{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

- $\|e\|_{0,\tilde{\Omega}}$  la norme  $L^2(\tilde{\Omega})$  de l'erreur globale et elle est donnée par:

$$\|e\|_{0,\tilde{\Omega}} = \left( \int_{\tilde{\Omega}} |u - u_h|^2 d\tilde{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

Numériquement ces erreurs sont calculées en décomposant les intégrales en la somme des intégrales sur les mailles, par exemple

$$|\hat{e}|_{1,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |\nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}_h|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

$$= \left( \sum_{C \in \Omega} \int_C |\nabla \hat{u} - \nabla \hat{u}_h|^2 dC \right)^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

Afin d'éviter les phénomènes de superconvergence souvent rencontrés lors des résolutions numériques par éléments finis  $Q^1$  sur un maillage cartésien, une intégrale sur une maille  $C$  du sous domaine est approchée par une formule de quadrature de Gauss-Legendre à 27 points (exacte pour les polynômes de degrés 5 par rapport à chacune des trois variables).

Pour le calcul du gradient de la solution approchée, on utilise la base des fonctions chapeaux  $Q^1$ . En effet, en notant par  $\varphi_i$  la fonction chapeau associée à la  $i$ ème sommet du maillage, on a  $\hat{u}_h = \sum_i \hat{u}_h^i \varphi_i$  et donc  $\nabla \hat{u}_h = \sum_i \hat{u}_h^i \nabla \varphi_i$ .

### 5.1.1 Test numérique dans le cadre d'une résolution locale exacte

$\Omega$  est le cube  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3$  et  $B$  est la boule de centre  $o = (0, 0, 0)$  et de rayon  $R = \frac{1}{4}$  (sa frontière est notée  $\gamma$ ).  $f$  et  $g$  sont choisies telle que la solution du problème (42) soit

$$\hat{u} = \sin(\beta(\rho^2 - R^2)), \quad \text{avec } \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ et } \beta = 2\pi.$$

Dans ce cas particulier puisqu'on suppose qu'on résout d'une manière exacte le problème local (43), il suffit de remplacer dans (42)  $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\gamma}$  par son expression en prenant  $v$  égale à la restriction de  $\hat{u}$  sur  $\omega$ . Soit

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\gamma} = -2\beta R. \quad (50)$$

$\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \bar{B}$  où  $\tilde{B}$  est la boule de centre  $o = (0, 0, 0)$  et de rayon  $R' = 0.3$ .

Dans les courbes de la figure 8 on présente les erreurs globales  $|\hat{e}|_{1,\Omega}$  et  $\|\hat{e}\|_{0,\Omega}$  et les erreurs locales  $|e|_{1,\tilde{\Omega}}$  et  $\|e\|_{0,\tilde{\Omega}}$  dans  $\tilde{\Omega}$  pour différentes valeurs de  $h$  ( $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{224}$ ).

Ces courbes montrent qu'on retrouve les résultats théoriques, à savoir que localement on garde l'ordre des éléments finis classiques. En effet puisqu'on a utilisé des éléments  $Q^1$  on s'attendait à ce que la norme  $L^2$  de l'erreur se comporte comme un  $\mathcal{O}(h^2)$  et que la norme  $H^1$  se comporte comme  $\mathcal{O}(h)$ . Ce qui est le cas ici.

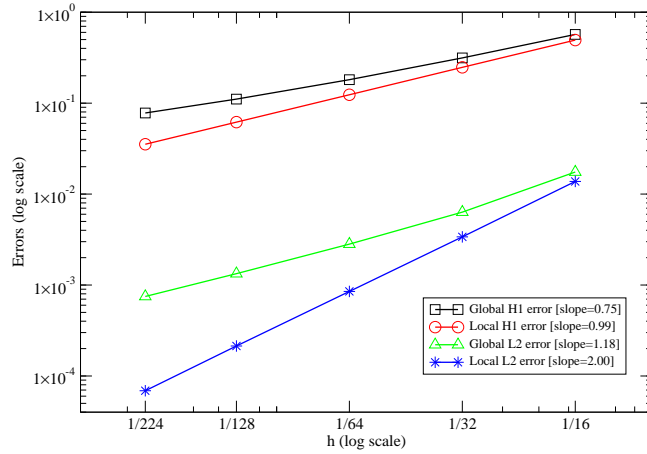


Figure 8: Courbes d'erreurs numériques pour une résolution locale exacte.

### 5.1.2 Test numérique dans le cadre d'une approximation de $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\gamma}$

On refait le même test que précédemment mais au lieu d'"injecter" la dérivée normale exacte de  $v$ , on l'approxime par le biais de l'algorithme de point fixe de l'approche simplifiée en ajustant  $\varepsilon$  pour chaque valeur de  $h$ . Notons que pour qu'il ne pollue pas l'erreur,  $\varepsilon$  doit être assez petit (on l'a pris de l'ordre de  $h^2$ ) et par suite le paramètre de relaxation doit être très proche de 1. Ce qui ralentit la convergence de l'algorithme du point fixe !

On remarque qu'on retrouve les mêmes résultats de la section précédente. (cf figure 9)

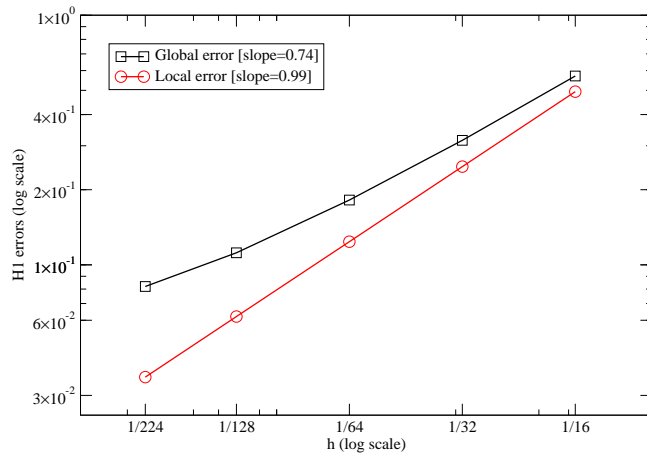


Figure 9: Courbes d'erreurs numériques pour une résolution locale approchée.

### 5.1.3 Conditions aux limites sur $\gamma$ de type Neumann homogène

On garde toujours la même configuration géométrique et les mêmes données numériques que précédemment mais cette fois on cherche à approcher  $\hat{u} = \cos(\beta(\rho^2 - R^2))$  en tant que solution du problème  $\mathbf{I}_N$  :

$$\mathbf{I}_N \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

Dans les courbes de la figure 10 on présente les erreurs locales  $|e|_{1,\tilde{\Omega}}$  et  $\|e\|_{0,\tilde{\Omega}}$  dans  $\tilde{\Omega}$  pour différentes valeurs de  $h$  ( $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{224}$ ). Les erreurs globales ne sont pas présentées parce qu'elles coïncident exactement avec celles dans  $\tilde{\Omega}$ .

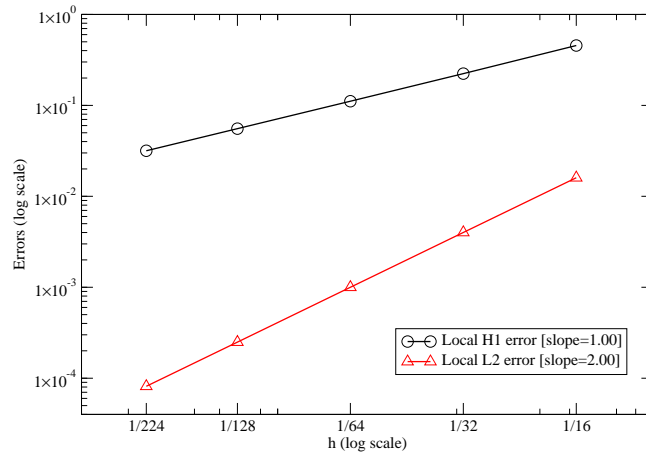


Figure 10: Courbes d'erreurs numériques pour le cas des conditions de Neumann sur  $\gamma$ .

L'objectif du test suivant est de montrer qu'on peut capter les éventuelles oscillations sur la surface  $\gamma$ . Pour y parvenir, on considère la fonction  $\frac{1}{4}(\rho^2 - 2R^2)\rho^2 \sin^2(\theta) \cos(2\varphi)$  solution du problème  $I_N$ . Ici le triplet  $(\rho, \theta, \varphi)$  désigne les coordonnées sphériques. Les erreurs locales  $|e|_{1,\tilde{\Omega}}$  et  $\|e\|_{0,\tilde{\Omega}}$  dans  $\tilde{\Omega}$  pour différentes valeurs de  $h$  sont présentées dans les courbes de la figure 11. Notons que dans ce cas on n'a même pas cherché à calculer les erreurs globales puisqu'on ne dispose pas d'un prolongement harmonique explicite de la solution à l'intérieure de la boule.

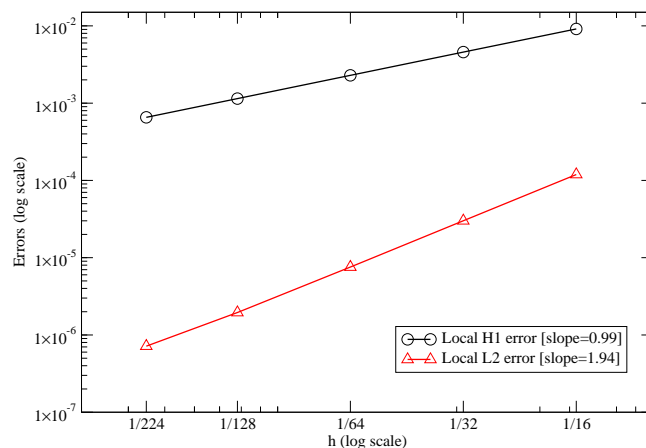


Figure 11: Courbes d'erreurs numériques pour le cas d'une solution qui *oscille* sur  $\gamma$ .



## 5.2 Un nombre "assez grand" de particules

Dans ce paragraphe, on va juste présenter deux tests numériques pour montrer qu'avec la méthode de la frontière élargie **FBM**, et en utilisant le solveur rapide décrit précédemment, on peut traiter le cas où l'on a un nombre assez grand de particules tout en gardant un temps de calcul raisonnable.

Dans les deux tests numériques qui suivent, le domaine de calcul  $\Omega$  est le cube  $] - 1, 1[ \times ] - 1, 1[ \times ] - 1, 1[$ . On s'intéresse à la résolution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B} \\ u = 0 & \text{sur } \partial(\Omega \setminus \overline{B}) = \Gamma \cup \gamma \end{cases} \quad (51)$$

où  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\gamma = \partial B$  et  $B$  est une collection de 163 boules, de rayon commun  $R = 0.06$ , disposées d'une manière aléatoire tout en imposant le fait qu'elles ne s'intersectent pas. La méthode de résolution est l'approche simplifiée de la méthode de la frontière élargie (cf paragraphe 4.5), avec  $\theta = 0.98$  et  $\varepsilon = \frac{R}{10}$ . Dans la figure 12 on présente sur la partie  $] - 1, 0.5[ \times ] - 1, 0.5[ \times ] - 1, 0[$  du domaine  $\Omega$  la solution calculée  $u$ .

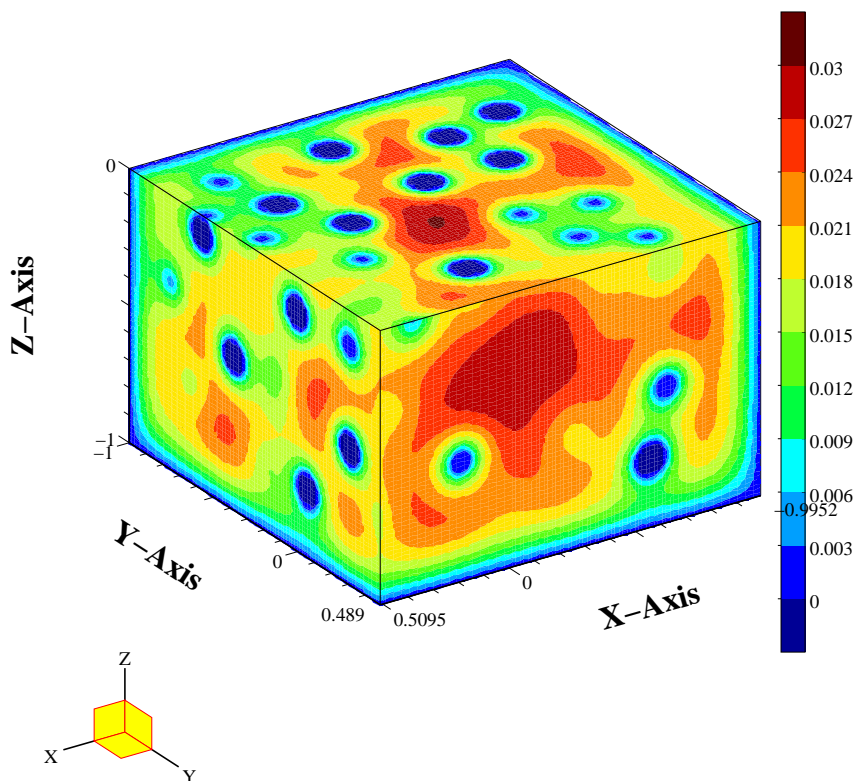


Figure 12: La solution calculée.

Dans la figure 13 on présente juste l'isosurface  $u = 0$ , et on voit bien qu'on retrouve la géométrie du problème, puisqu'on a pris comme conditions aux bords  $u = 0$  sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  et sur la frontière de  $B$  (réunion des boules).

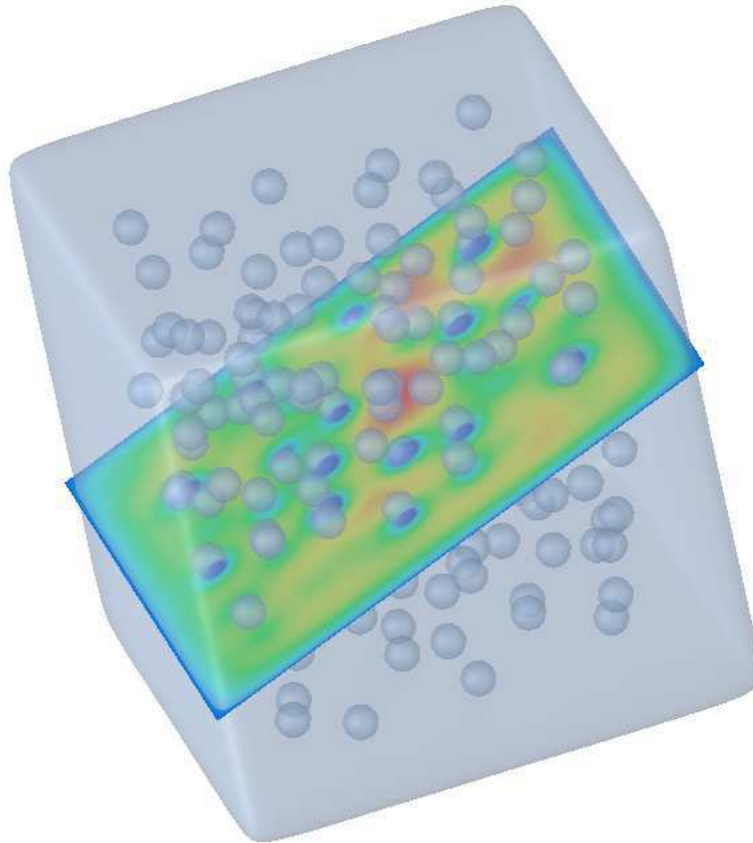


Figure 13: Isosurface  $u = 0$ .

Dans la deuxième expérience, On refait le même test numérique mais avec 343 particules disposées d'une manière structurée. Le résultat est représenté par les figure 14 et 15.

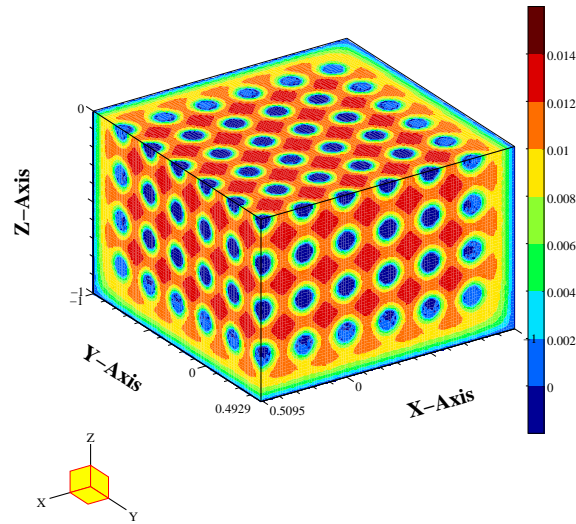


Figure 14: La solution calculée dans le cas de 343 particules.

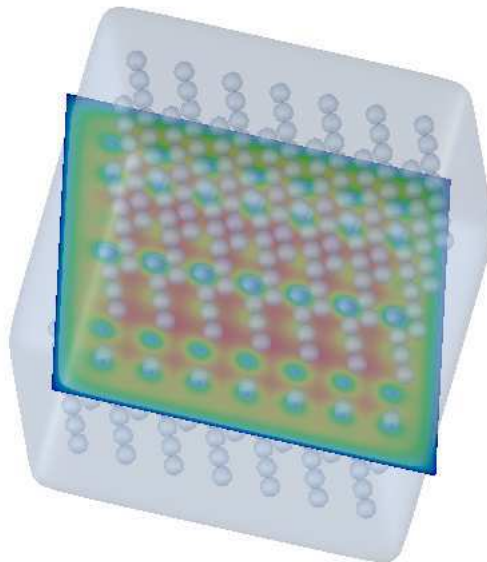


Figure 15: Isosurface  $u = 0$ .

## 6 Simulations numériques

### 6.1 Simulation numérique de la convection-diffusion autour de deux boules en mouvement

On se place dans un parallélépipède  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lequel il y a deux boules en mouvement dont les trajectoires sont **imposées** à l'avance. Sur cinq des faces de  $\Omega$  on maintient une température égale à 1 et à la sixième face on prend des conditions de Neumann homogènes. Sur les bords des deux boules la température vaut toujours 0. La chaleur est convectée par un champ de vitesse potentiel. On s'attend à avoir une "trainée" de zones "fraîches" qui suivent les boules en leurs mouvements.

On a pris comme domaine  $\Omega$  le parallélépipède  $] - 3, 3[ \times ] - 3, 3[ \times ] - 6, 6[$ .  $B$  comme étant la réunion des deux boules  $B_1$  et  $B_2$  de centres respectifs  $a = (x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 1)$  et  $b = (x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = -1)$  et de rayon commun  $R = 0.4$ . La trajectoire de la boule  $B_1$  est définie par :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + 2 \cos(t) \\ y(t) = y_0 + 2 \sin(t) \\ z(t) = z_0 + \frac{9}{2} \sin\left(\frac{t}{10}\right) \end{cases}$$

Et celle de la boule  $B_2$  est définie par :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{1}{2} \sin(t) \\ y(t) = y_0 + \frac{1}{2} \cos(t) \\ z(t) = z_0 - \frac{9}{2} \sin\left(\frac{3t}{10}\right) \end{cases}$$

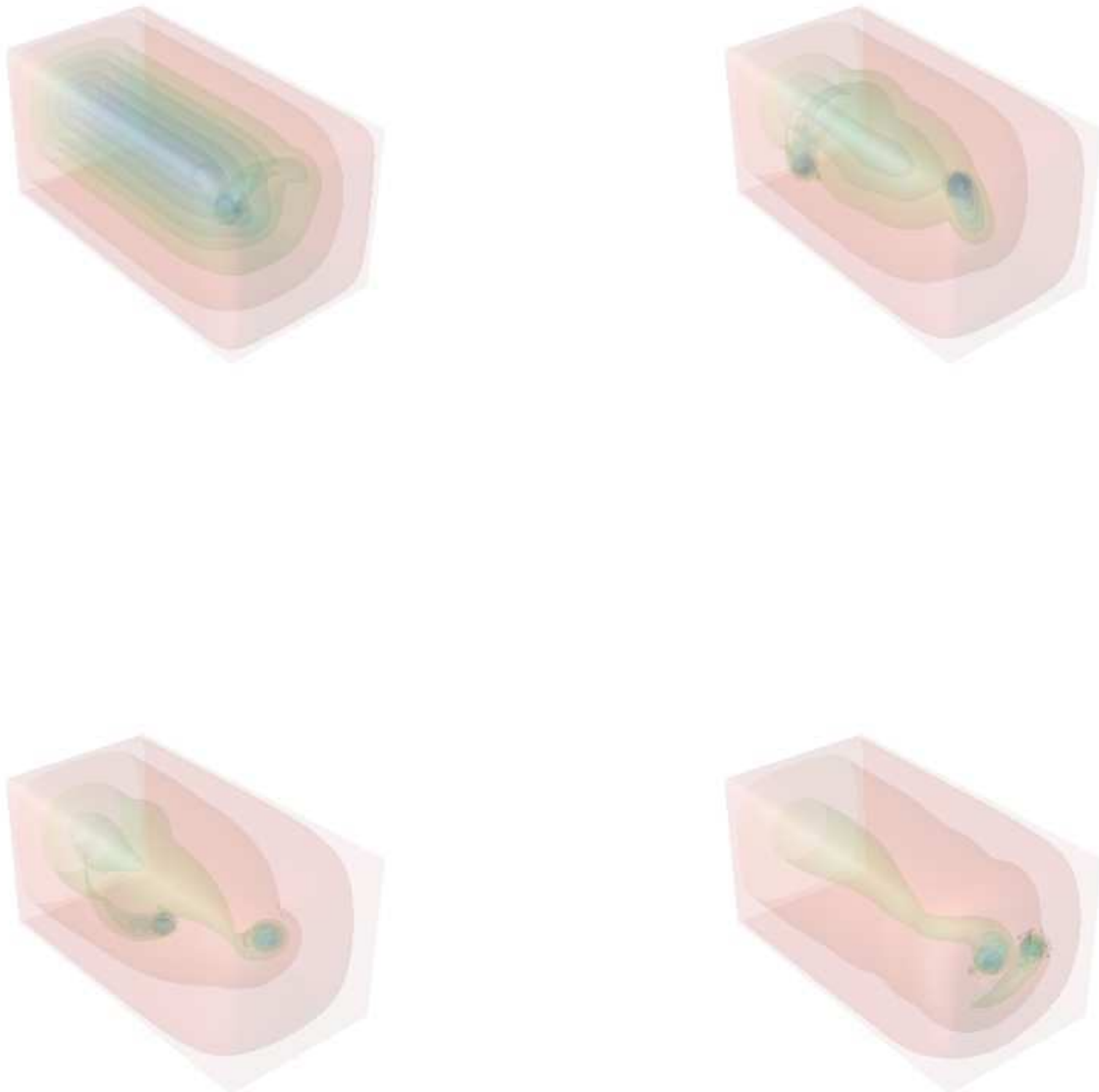
La vitesse de convection  $v$  est égale à  $\nabla \phi$ , où  $\phi$  est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus (z = z_{min}, z = z_{max}) \\ \phi = 1 & \text{sur } (z = z_{min}) \\ \phi = 1 & \text{sur } (z = z_{max}) \end{cases}$$

Quant à la température  $T$ , elle est solution du problème suivant :

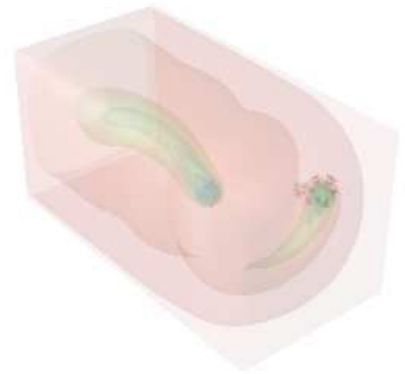
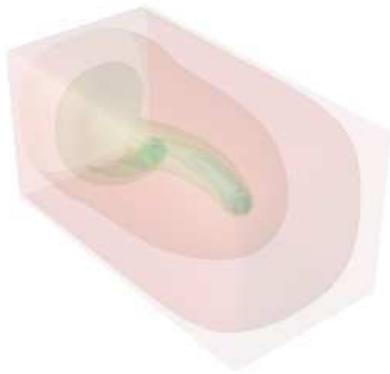
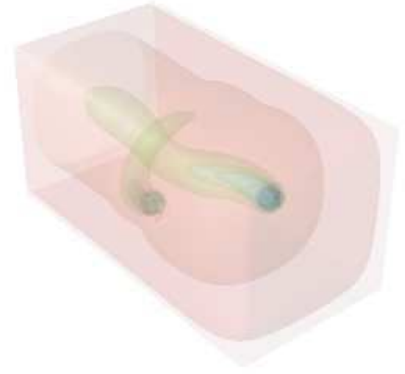
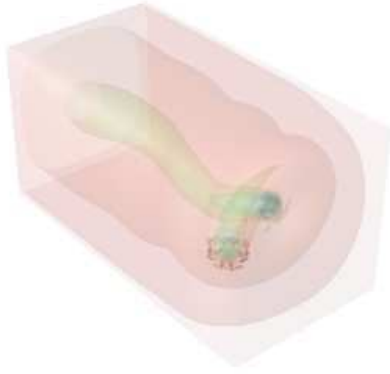
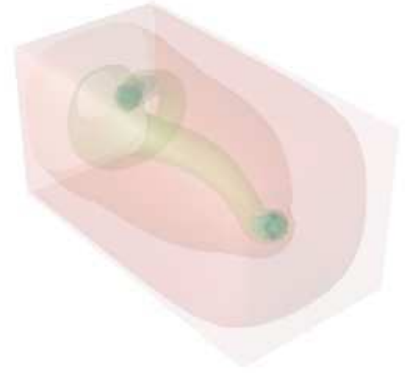
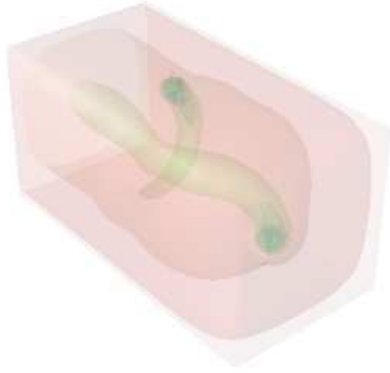
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \nu \Delta T + \nabla \phi \cdot \nabla T = 0 & \text{dans } \Omega \setminus B \\ T = 0 & \text{sur } \gamma \\ T = 1 & \text{sur } \Gamma \setminus (z = z_{min}) \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } (z = z_{min}) \end{cases}$$

La conductivité  $\nu$  est égale à  $3.10^{-2}$  et le pas de temps  $\delta t$  est égale à  $2.10^{-1}$ . La résolution des deux problèmes ci-dessus est faite par la **FBM** sur un maillage cartésien de  $33 \times 33 \times 65$  points. Une itération en temps coûte en moyenne 5 secondes CPU (notons que dans une itération en temps on fait une dizaine d'itérations du point fixe pour le problème en  $\phi$  et une quarantaine d'itérations pour le problème en  $T$ ). Ce calcul a été fait sur *Hydre*.<sup>3</sup> Les figures suivante représentent l'évolution en temps de la température sous forme d'isosurfaces après 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 et 999 itérations.



---

<sup>3</sup>Le cluster du Laboratoire Jacques-Louis LIONS.



## 6.2 Cavité entraînée en présence d'un obstacle sphérique

On se place dans le cube  $\Omega = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3$  dans lequel il y a un obstacle sphérique centré à l'origine et de rayon 0.1. On considère la cavité entraînée par une paroi se déplaçant à vitesse constante  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)^T$  en  $z = \frac{1}{2}$ . Initialement le fluide est au repos, *i.e.*  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Le fluide circule dans le domaine  $\Omega_f = \Omega \setminus B$  et le calcul, en utilisant **FBM**, s'effectue dans le cube  $\Omega$  tout entier. La vitesse au bord du cube est maintenue égale à  $\mathbf{0}$  excepté à  $z = \frac{1}{2}$ . On impose également des conditions de Dirichlet homogènes sur l'obstacle. Ces dernières sont prises en compte par la **FBM** comme on l'a décrit dans les sections précédentes. On résout un problème de Poisson avec des conditions de Neumann sur la pression.

Les paramètres de la simulation sont les suivants : on a utilisé le schéma de projection Lagrange/Galerkin décrit dans le premier paragraphe avec un pas de temps  $\delta t = 10^{-2}$  et une viscosité  $\nu = 10^{-1}$ . Le maillage de  $\Omega$  comporte  $33 \times 33 \times 33$  sommets.

Les figures 16 et 17 présentent des coupes suivant le plan  $y = 0$  du champ de vitesses à des instants différents.

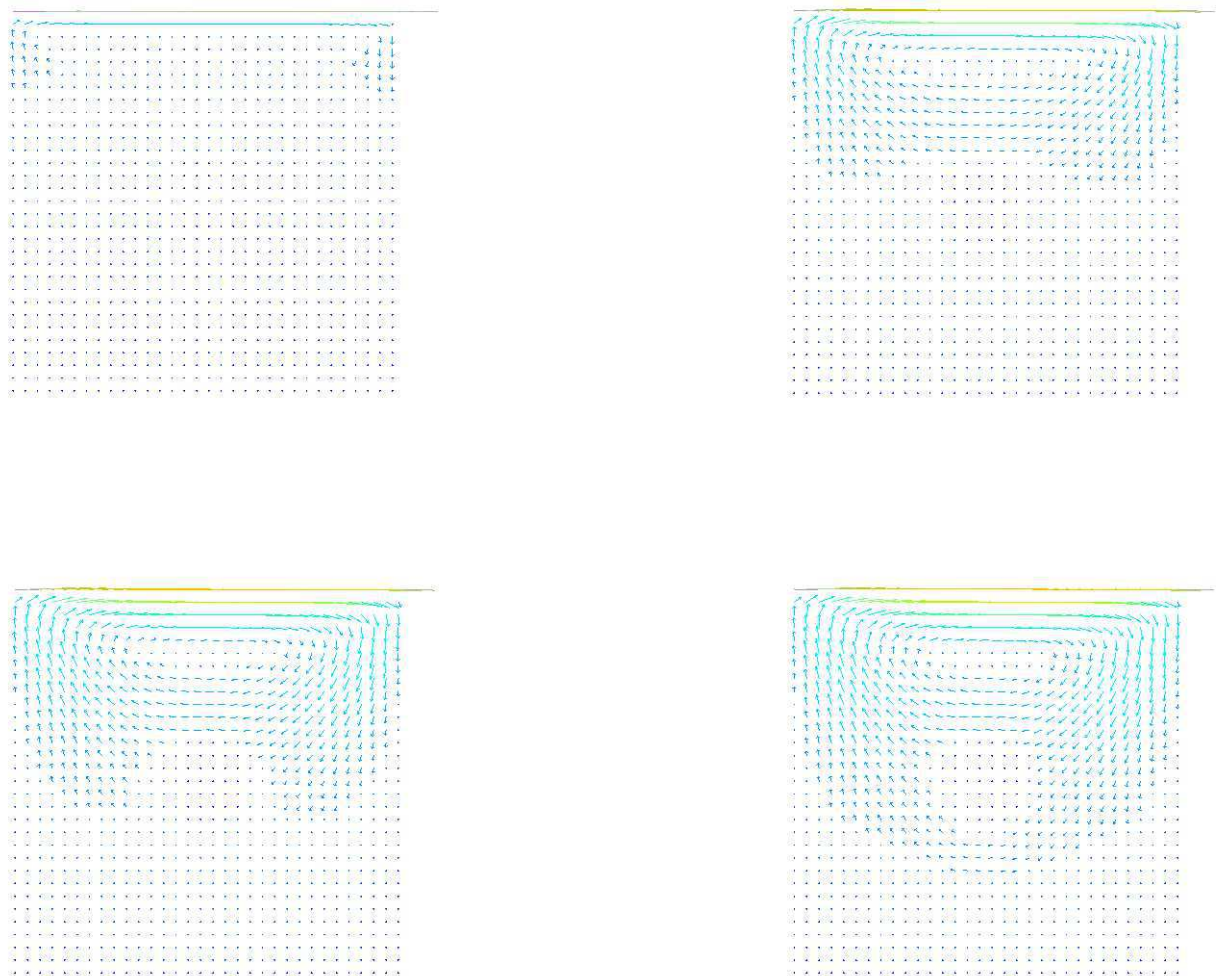


Figure 16: Champ de vitesses après 1, 5, 10 et 15 itérations en temps.



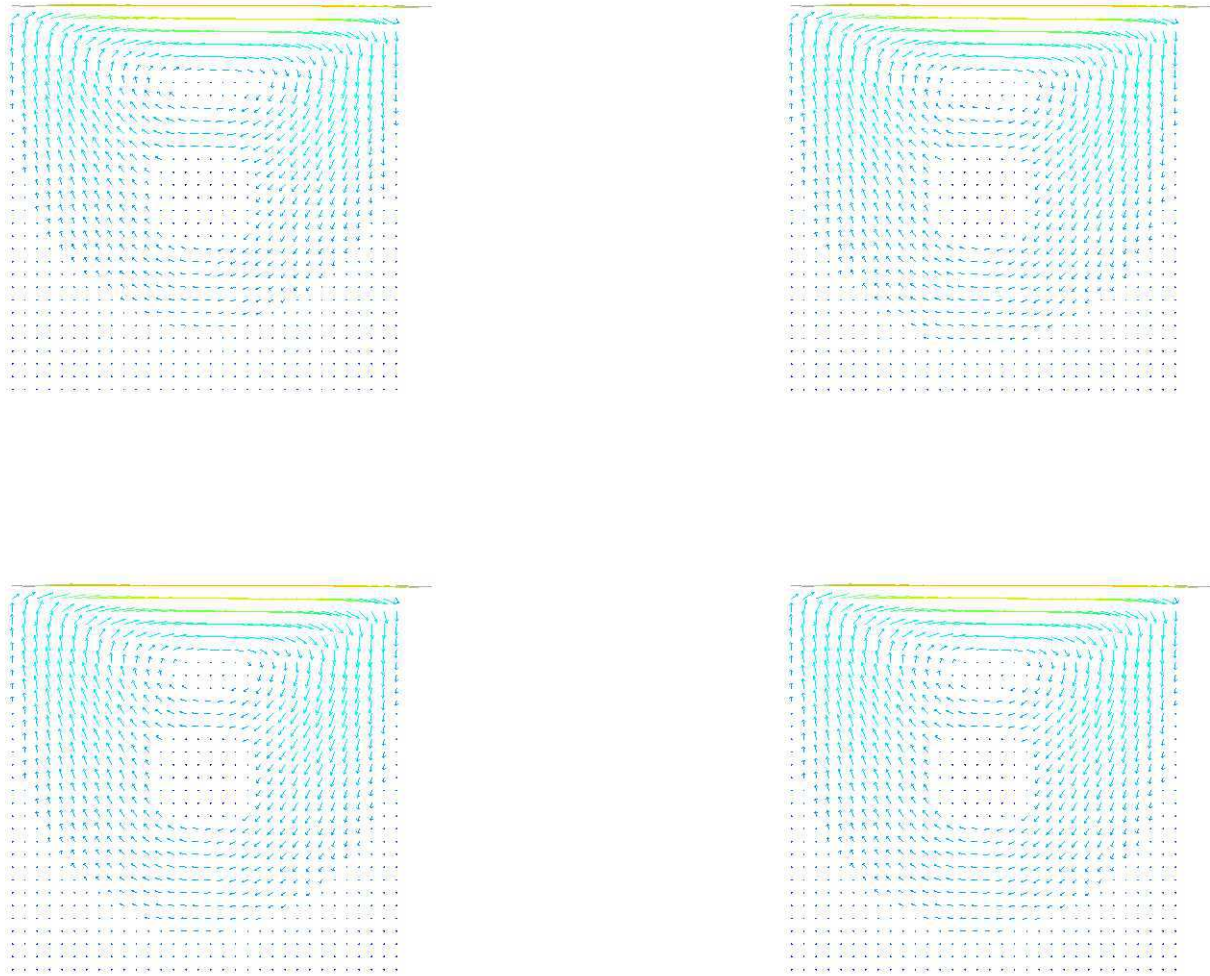


Figure 17: Champ de vitesses après 25, 50, 100 et 500 itérations en temps.

La figure 18 présente la norme euclidienne de la vitesse, sous forme d'isosurfaces dans tout le domaine  $\Omega$  y compris l'obstacle, et sous forme de lignes de courant sur la coupe suivant le plan  $y = 0$ .



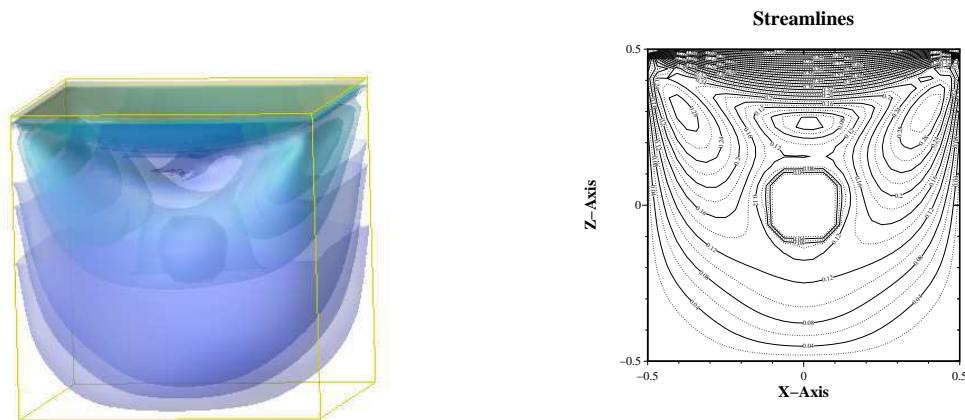


Figure 18: Isosurfaces de la norme euclidienne de la vitesse et lignes de courant.

## Références

- [1] A. A. ABAKUMOV, A. YU. YEREMIN AND YU. A. KUZNETSOV, *Efficient fast direct method for solving Poisson's equation on a parallelepiped and its implementation in an array processor*, Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling 3: 1-20, 1988.
- [2] Y. ACHDOU AND J.-L. GUERMOND, *Convergence analysis of a finite element projection/Lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., 37(3): 799-826, 2000.
- [3] A. J. CHORIN, *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*, Math. Comp., 22: 745-762, 1968.
- [4] A. J. CHORIN, *On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations*, Math. Comp., 23: 341-353, 1969.
- [5] S. DEL PINO, *Une méthode d'éléments finis pour la résolution d'EDP dans des domaines décrits par géométrie constructive*, PhD thesis, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2002.
- [6] S. DEL PINO AND O. PIRONNEAU, *FreeFEM3D. A 3D finite element PDE solver*, <http://www.freefem.org>.
- [7] V. GIRAULT AND R. GLOWINSKI, *Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem*, Japan J. Indust Appl. Math. 12: 487-514, 1995.
- [8] R. GLOWINSKI AND Y. KUZNETSOV, *On the solution of the Dirichlet problem for linear elliptic operators by a distributed Lagrange multiplier method*, C .R. Acad. Sci. Paris, t.327, série I, 693-698, 1998.
- [9] R. GLOWINSKI, T.-W. PAN, T.I. HESLA, AND D.D. JOSEPH, *A distributed Lagrange Multiplier/fictitious domain method for particulate flows*, Int. J. of Multiphase Flow, 25: 755, 1999.

- [10] J.-L. GUERMOND, *Un résultat de convergence à l'ordre deux en temps pour l'approximation des équations de Navier-Stokes par une technique de projection*, Modél. Math. Anal. Numér. (M2AN), 33(1): 169-189, 1999.
- [11] J.-L. GUERMOND AND J. SHEN, *Velocity-correction projection methods for incompressible flows*, To appear in SIAM J. Numer. Anal..
- [12] P. LE TALLEC AND M. D. TIDRIRI, *Convergence analysis of domain decomposition algorithms with full overlapping for the advection-diffusion problem*, Math. Comp., 68: 585-606, 1999.
- [13] B. MAURY, *Direct simulation of 2D fluid particle flows in bi-periodic domains*, J. of Comp. Physics, 156: 325-351, 1999.
- [14] B. MAURY, *A Fat Boundary Method for the Poisson problem in a domain with holes*, J. of Sci. Comput., 16(3): 319-339, 2001.
- [15] O. PIRONNEAU, *On the transport diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equations*, Numer. Math., 38: 309-332, 1982.
- [16] T. ROSSI AND J. TOIVANEN, *A parallel fast direct solver for block tridiagonal systems with separable matrices of arbitrary dimension*, Siam J. Sci. Comput., vol. 20, No. 5: 1778-1796, 1999.
- [17] J. SHEN, *On error estimates of the projection methods for Navier-Stokes equations : second order schemes*, Math. Comp., 65(215): 1039-1065, 1996.
- [18] E. SÜLI, *Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method*, Numer. Math., 53: 459-483, 1988.
- [19] R. TEMAM, *Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*, Bull. Soc. Math. France, 98: 115-152, 1968.
- [20] R. TEMAM, *Naviers-Stokes equations*, Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland, 2<sup>nd</sup> edition, 1979.