HAL
open science

La modélisation des plaques sandwich par éléments finis hybrides et ses applications

Vincent Manet, Han Woo-Suck

To cite this version:

Vincent Manet, Han Woo-Suck. La modélisation des plaques sandwich par éléments finis hybrides et ses applications. CSMA 3, 1997, France. pp.657-663. hal-00664836

HAL Id: hal-00664836

https://hal.science/hal-00664836v1

Submitted on 31 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 1997
3e Colloque National en Calcul des Structures
1997, Presqu'île de Giens (Var)

La modélisation des plaques sandwich par éléments finis hybrides et ses applications

V. MANET[1] et W.-S. HAN[1]

[1] *École des Mines de Saint-Etienne*
Département Mécanique et Matériaux
158, cours Fauriel
42023 Saint-Etienne cedex 2

Résumé : — Nous présentons une série de modélisations par éléments finis qui représentent correctement le comportement mécanique des plaques sandwich, notamment la répartition des contraintes dans l'épaisseur.

Les formulations présentées, valables en 2D comme en 3D, font intervenir des multiplicateurs de Lagrange le long des interfaces entre les couches. Ces multiplicateurs sont identifiés comme les composantes des contraintes devant être continues aux interfaces. Les couches sont modélisées indépendamment les unes des autres, tout en respectant leurs caractéristiques géométriques et matérielles.

Finalement, les modèles présentés sont validés non seulement sur des structures sandwich, mais aussi sur des assemblages collés.

Abstract — We present a series of finite element modellings which represent correctly the mechanical behaviour of sandwich plates, especially the stress distribution through the thickness.

The present formulations, valid in 2D as well as in 3D, make use of Lagrange multipliers along the interfaces between the layers. These multipliers are identified as the stress components which must be continuous across the interfaces. The layers are modelized independently, keeping the differences of their geometrical and mechanical properties into account.

Finally, the presented elements are assessed not only for sandwich structures but also for adhesive joints.

Notations

$\{\ \}$	vecteur (colonne)	U	(petits) déplacements
$\langle\ \rangle$	vecteur transposé (ligne)	σ	contraintes de Cauchy
$[\ ]$	matrice	ε	(petites) déformations
Ω	domaine d'un élément (volume ou surface)	λ	multiplicateur de Lagrange
Γ	contour d'un élément (surface ou courbe)	H_{ijkl}	matrice de Hooke
	$\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$; $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$		$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\}$
Γ_u	partie de Γ où les déplacements sont imposés	$[\mathcal{L}]$	opérateur différentiel
Γ_σ	partie de Γ oùl es forces sont imposées		$\{\varepsilon\} = [\mathcal{L}]\{U\}$
Γ_I	interface	$\overline{f}_\Omega$	forces appliquées dans Ω
$\overline{T}$	forces appliquées sur Γ_σ	$\overline{U}$	déplacements imposés sur Γ_u

1 Introduction

Les plaques sandwich sont devenues un composant structural important dans le domaine industriel, notamment en construction civile, en aéronautique ou encore en automobile. L'intérêt grandissant pour ces composants dans la conception des structures a conduit à un réel besoin d'outils d'analyse puissants, capables de prendre en compte correctement leurs spécificités. Toutefois, leur modélisation souffre toujours d'un manque de précision au niveau de l'analyse numérique.

Une plaque sandwich est un stratifié à trois couches, dont chacune a des propriétés mécaniques très différentes de celles des autres : les peaux, très rigides, travaillent essentiellement en membrane, alors que l'âme, de rigidité et densité beaucoup plus faibles, est soumise aux efforts de cisaillement. Notons enfin qu'une plaque sandwich se comporte de façon très différente d'un stratifié, particulièrement lorsque l'on considère les modes de défaillance (modes de rupture, modes d'instabilité, problèmes locaux...) [1].

Les points essentiels liés à la mod''elisation des plaques sandwich sont les suivants : *i)* les effets du cisaillement transverse sont pris en compte ; *ii)* la continuité des déplacements ainsi que l'état d'équilibre des contraintes dans les interfaces entre peaux et âme sont vérifiées ; *iii)* les propriétés géométriques et mécaniques peuvent être totalement différentes suivant les couches ; *iv)* l'hypothèse de contrainte plane utilisée dans la théorie des plaques stratifiées, inacceptable pour les plaques sandwich, est éliminée.

Le travail présenté concerne le développement d'éléments finis sandwich satisfaisant aux points mentionnés, i.e. représentant le comportement des plaques sandwich en cisaillement d'une manière plus réaliste et respectant en même temps les phénomènes physiques aux interfaces entre peaux et âme.

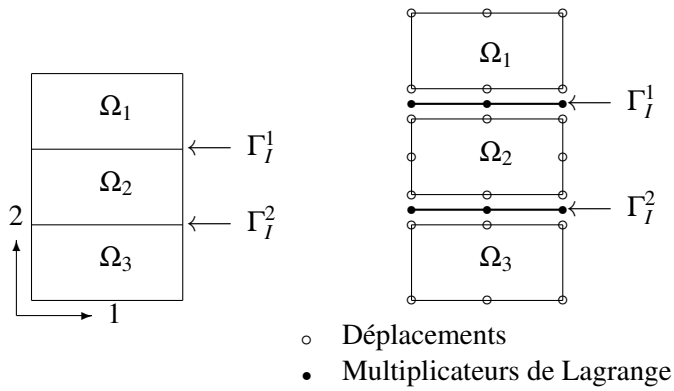
Ces éléments finis sandwich sont basés sur la formulation hybride pour deux raisons principales : *i)* la formulation mixte de Reissner induit un nombre de degrés de libertés

trop élevé ; *ii)* les éléments hybrides peuvent s'incorporer à moindre effort dans des codes existants.

2 Modélisation

Les éléments finis hybrides sandwich sont développés à partir de la fonctionnelle primale qui est la plus simple, puis de la fonctionnelle de Pian et Tong pour pallier la non symétrie du système obtenu par la méthode précédente.

Un sandwich est décomposé en trois sous-domaines, comme montré à la figure 1.a. La figure 1.b donne la décomposition au sens des éléments finis. Les principes variationnels utilisés sont répertoriés dans [2].



a) Sous-domaines b) Élément fini sandwich

Figure 1 – Sous-domaines et élément sandwich

2.1 Modèle 1 : fonctionnelle primale et multiplicateurs de Lagrange

Nous proposons, dans un premier temps, un élément pour lequel chacune des couches du sandwich est modélisée « en déplacements », i.e. à partir de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale. Les vecteurs contraintes sont introduits à l'aide de multiplicateurs de Lagrange le long des interfaces.

Aux interfaces Γ_I^j, les conditions de continuité des déplacements sont réintroduites par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange, i.e. en ajoutant à la fonctionnelle :

$$-\int_{\Gamma_I^j} \lambda_i^j (U_i^j - U_i^{j+1})\, d\Gamma \tag{1}$$

La stationnarité de la fonctionnelle permet d'identifier les multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda_i^j = \sigma_{ij}^j n_j^j = -\sigma_{ij}^{j+1} n_j^{j+1} \tag{2}$$

Ce sont exactement les composantes des contraintes qui doivent être continues aux interfaces, i.e. toutes sauf les composantes normales tangentielles, soit σ_{11} dans le cas 2D.

Le principe variationnel pour cet élément hybride sandwich est donc :

$$\begin{aligned}
\delta\Pi \;=\; & \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{\Omega^i}\left([\mathcal{L}]\,\delta\left\{U^i\right\}\right)^T\left[H^i\right]\left[\mathcal{L}\right]\langle U^i\rangle\, d\Omega - \int_{\Omega^i}\delta\langle U^i\rangle\left\{\overline{f}_\Omega^i\right\}\, d\Omega\right. \\
& \left. -\int_{\Gamma_\sigma^i}\delta\langle U^i\rangle\left\{\overline{T}^i\right\}\, d\Gamma\right) + \sum_{j=1}^{2}\left(\int_{\Gamma_l^j}(\sigma_{ij}^j n_j^j - \lambda_i^j)\delta U_i^j\, d\Gamma\right. \\
& \left. +\int_{\Gamma_l^j}(\sigma_{ij}^{j+1} n_j^{j+1} - \lambda_i^j)\delta U_i^{j+1}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_l^j}(\sigma_{ij}^j n_j^j - \lambda_i^j)(u_i^j - u_i^{j+1})\delta\lambda_i^j\, d\Gamma\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

où i désigne les couches du sandwich, et où n_j^k sont les composantes de la normale extérieurs à Ω^k sur une interface.

La matrice de rigidité d'un tel système n'est ni symétrique, ni définie-positive.

2.2 Modèle 2 : fonctionnelle de Pian et Tong

Afin de pallier la non symétrie du modèle précédent, nous nous tournons maintenant vers la fonctionnelle de Pian et Tong, dont les avantages principaux sont : *i)* qu'elle ne comporte pas de dérivée ; *ii)* que le champ de contraintes peut être condensé statiquement, conduisant à un élément « en déplacements », avec une matrice de rigidité définie-positive.

Cette formulation, aussi appelée mixte hybride, conduit à la continuité des champs de déplacements et de contraintes, comme pour la fonctionnelle mixte de Reissner.

Ce modèle comporte peu de variables nodales une fois le champ de contrainte condensé statiquement, mais conduit à une continuité excessive des contraintes aux interfaces : en effet, aux interfaces, les contraintes normales tangentielles doivent être discontinues.

2.3 Modèle 3 : fonctionnelle Pian et Tong et multiplicateurs de Lagrange

Nous constatons donc que le modèle de Pian et Tong seul conduit à une continuité excessive du champ de contraintes, alors que l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange avec la fonctionnelle primale conduit à une matrice non symétrique.

Nous nous proposons par conséquent d'utiliser une formulation de Pian et Tong dans chaque sous-domaine du sandwich et de réintroduire la continuité des déplacements par des multiplicateurs de Lagrange aux interfaces.

Comme pour le modèle 1, les conditions ajoutées pour la continuité des déplacements sont données par la relation (1). L'identification des multiplicateurs de Lagrange conduit encore à la relation (2). Le principe variationnel de cet élément hybride sandwich est donc :

$$\begin{aligned}\delta\Pi \;=\; & \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{\Omega^i}\delta\langle\sigma\rangle\left[S^i\right]\{\sigma\}\;d\Omega+\int_{\Gamma^i}\delta\langle T\rangle\{U\}+\delta\langle U\rangle\{T\}\;d\Gamma\right.\\ & \left.-\int_{\Gamma^i_\sigma}\delta\langle U\rangle\left\{\overline{T}\right\}\;d\Gamma\right)+\sum_{j=1}^{2}\left(\int_{\Gamma^j_I}\delta\langle\lambda^j\rangle\left(\left\{U^j\right\}-\left\{U^{j+1}\right\}\right)\;d\Gamma\right.\\ & \left.\int_{\Gamma^j_I}\delta\langle\lambda^j\rangle+\delta\langle U^j\rangle\left\{\lambda^j\right\}-\delta\langle U^{j+1}\rangle\left\{\lambda^j\right\}\;d\Gamma\right)\end{aligned} \tag{4}$$

Le système obtenu comporte le même nombre d'inconnues que dans le modèle 1, mais est symétrique, ce qui autorise des applications de plus grande envergure. Cette formulation fait intervenir une matrice qui n'est pas définie-positive.

3 Validation

Dans les résultats présentés, « Déplacements » désigne la solution obtenue par les éléments en déplacements ; « Reissner » par la méthode mixte de Reissner ; « Modèles » 1 à 3 avec les éléments hybrides sandwich décrits aux paragraphes 2.1 à 2.3.

3.1 Poutre sandwich

Considérons une poutre sandwich simplement supportée soumise à une pression uniforme comme montrée à la figureFig-supported. La solution théorique est donnée par Le-

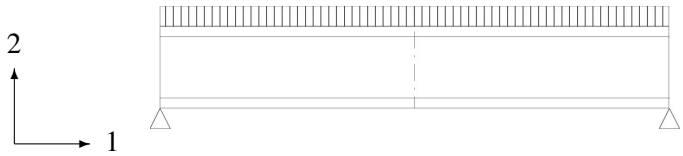


Figure 2 – Poutre sandwich simplement supportée

rooy dans [3].

Pour des raisons de lisibilité les solutions "modèle 1" et "modèle 3", peu différentes, sont confondues, de même pour les solutions « modèle 2 » et « déplacements ».

La convergence de la flèche centrale est donnée : *i)* à la figureFig-aresd.a en fonction du nombre de degrés de libertés du maillage ; et *ii)* à la figureFig-aresd.b en fonction du nombre de découpages longitudinaux de la demi-poutre (par raison de symétrie). Les modèles 1, 2 et 3 convergent à la même vitesse que la méthode en déplacements du point de vue du raffinement du maillage (nombre de découpages) ; mais comme les modèles 1 et 3 ont

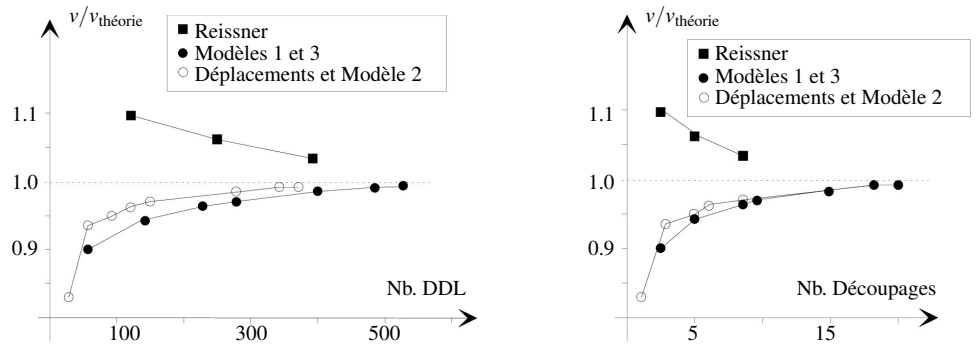
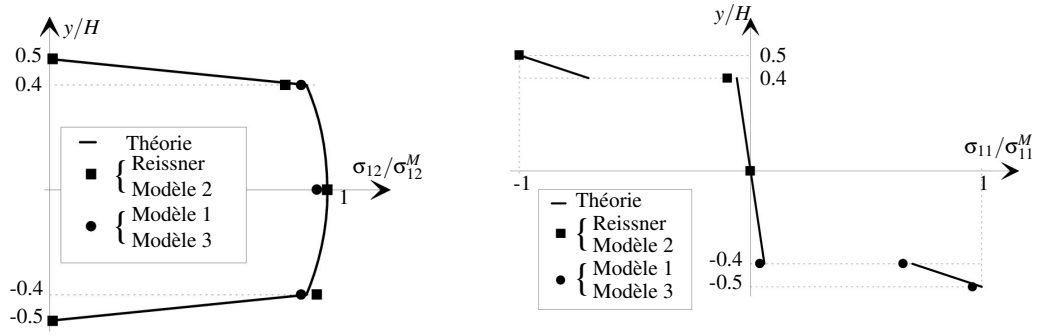


Figure 3 – Convergence de la flèche centrale

plus de degrés de libertés (multiplicateurs de Lagrange), le décalage de la figureFig-aresd.a s'explique.

La répartition de la contrainte de cisaillement transverse suivant l'épaisseur est illustrée à la figureFig-ares.a. Les résultats ne sont pas donnés pour la méthode en déplacements incapable de conduire à la continuité des contraintes.



a) contrainte de cisaillement σ_{12} b) contrainte normale σ_{11}

Figure 4 – Comparaison des répartitions des contraintes suivant l'épaisseur dans la section centrale

Toutes les méthodes mixtes et hybrides donnent de bons résultats.

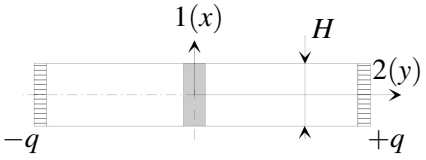
La figureFig-ares.b représente la répartition de σ_{11} suivant l'épaisseur. Les résultats de la méthode de Reissner, confondue avec notre modèle 2, ne sont illustrés que pour $\sigma_{11}/\sigma_{11}^M < 0$, ceux des modèles 1 et 3 (confondus) pour $\sigma_{11}/\sigma_{11}^M > 0$ pour une meilleure lisibilité. Cette composante doit être discontinue aux interfaces. Ainsi, cette figure montre que la méthode de Reissner et le modèle 2 conduisent à la continuité de σ_{11}, ce qui est excessif. Les modèles 1 et 3 donnent une représentation convenable de cette composante discontinue.

Des figures 3 et 4 il est clair que nos méthodes donnent de bons résultats par rapport à la théorie, aussi bien pour les déplacements que pour la répartition des contraintes suivant

l'épaisseur, et particulièrement aux interfaces.

3.2 Joint collé

Considérons maintenant un joint collé, comme illustré à la figureFig-abondx. Les modèles présentés sont à même de le modéliser en prenant la colle comme âme (épaisseur = 1 mm) et les substrats comme peaux (épaisseur = 60 mm). La largeur totale du barreau est $H = 60$ mm.

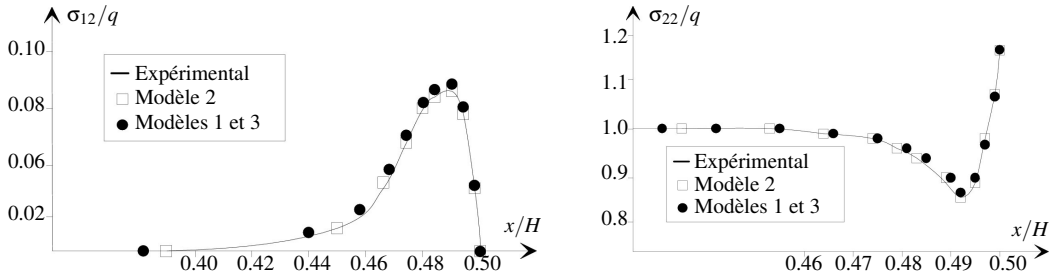


deux pièces d'acier :
$E = 207700$ MPa, $\nu = 0.288$
sont collées avec de l'adhésif Eponal 317 :
$E = 5800$ MPa, $\nu = 0.327$.

Figure 5 – Joint collé

Nous comparons nos résultats avec les résultats expérimentaux donnés dans [4]. Pour des raisons de lisibilité les solutions "modèle 1" et "modèle 3", peu différentes, sont confondues. Les contraintes de cisaillement σ_{12} et normale σ_{22} de la figureFig-abondi2 sont données aux interfaces, dans la direction x. Par symétrie seule la moitié du joint est représentée suivant x.

Là encore, les éléments présentés sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.



a) contrainte de cisaillement σ_{12} b) contrainte normale σ_{22}

Figure 6 – Répartition des contraintes le long de l'interface.

4 Conclusion

Les multiplicateurs de Lagrange permettent de modéliser de façon simple les problèmes liés aux interfaces, sans que les formulations propres à chaque sous-domaine soient changées. Cela permet de choisir, pour chaque couche, la formulation la plus adaptée au problème à traiter.

Dans ce papier, nous avons présenté des formulations d'éléments « sandwich » faisant appel à la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour obtenir les contraintes aux interfaces. Ces éléments ont été validés avec succès non seulement pour les poutres sandwich mais aussi pour les joints collés.

Notons enfin qu'une fois les contraintes aux interfaces déterminées, si elles remplissent un critère de rupture choisi, il est alors possible de supprimer les multiplicateurs de Lagrange sur la partie ainsi déterminée : cela conduit à la modélisation d'une délamination entre les couches, sans avoir à retoucher quoi que ce soit dans ces formulations. Cette possibilité d'introduire un décollement peut se révéler particulièrement précieuse dans des cas de flambement localisé, conduisant généralement à des décollements locaux entre les couches.

Références

[1] R. Teti and G. Caprino. Mechanical behavior of structural sandwiches. In K.-A. Olsonn and R.P. Reichard, editors, *Sandwich Construction 1*, pages 53–67, London, 1989. Chameleon Press LTD.

[2] K. Washizu. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press, 1982.

[3] J.-F. Lerooy. *Calcul des contraintes de cisaillement transversales dans les structures modérément épaisses*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1983.

[4] Y. Gilibert. *Contribution à l'étude de l'adhésivité de matériaux collés par l'intermédiaire de résines époxydiques*. PhD thesis, Reims, 1978.