HAL
open science

Le calcul des structures sandwich par éléments finis

Vincent Manet, Han Woo-Suck

To cite this version:

Vincent Manet, Han Woo-Suck. Le calcul des structures sandwich par éléments finis. 11ème Journées Nationales sur les Composites, Nov 1998, Arcachon, France. pp.1227-1234. hal-00663228

HAL Id: hal-00663228

https://hal.science/hal-00663228v1

Submitted on 26 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le calcul des structures sandwich par éléments finis

Computation of sandwich structures by finite elements

V. Manet* & W.-S. Han*

* Département Mécanique et Matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 158, cours Fauriel, 42023 Saint-Etienne cedex 2

RESUME

Les matériaux sandwich, pourtant couramment utilisés, souffrent encore d'un manque de précision dans leur modélisation, même en statique linéaire, et ce spécialement le long des interfaces entre les couches, où l'état d'équilibre des forces n'est généralement pas vérifié.

Dans ce papier, contrairement aux méthodes généralement utilisées pour recouvrer les contraintes à partir des déplacements nodaux et basées sur un processus de minimisation de la différence entre les formulations en déplacements et mixte, nous proposons ici d'utiliser une méthode de post-traitement, basée sur le principe d'Hellinger-Reissner (Washizu, 1992), mais que nous n'appliquons que localement le long des interfaces, *i.e.* de modifier le calcul des contraintes, mais seulement sur un nombre très restreint d'éléments.

La validation et l'efficacité de la méthode sont montrées par deux études sur des poutres sandwich en statique linéaire. Les résultats sont comparés aux solutions analytiques et EF d'ANSYS.

ABSTRACT

Sandwich materials, which are still widely used, still suffer from a lack of accuracy of their modelling, even in linear static, especially along interfaces where the equilibrium state of forces is generally not verified.

In this paper, contrary to the methods generally used to determine the stresses from the nodal displacements and based on the minimization of the difference between the displacements formulation and the mixed one, we propose to directly use a post-processing method, based on the Hellinger-Reissner principle, but only applied locally along the interfaces between the different layers, *i.e.* to modify the computation of stresses, but only on a very limited number of elements.

The validation and efficiency of the method are shown with two studies in static linear analysis of sandwich beams. Comparisons are made with analytical and ANSYS FE results.

SANDWICH - STATIQUE - CONTRAINTES D'INTERFACE - ANSYS - POST-TRAITEMENT
SANDWICH - STATIC ANALYSIS - INTERFACE STRESSES - ANSYS - POST-PROCESSING

INTRODUCTION

Les plaques sandwich en matériaux composites sont devenues des composants structuraux importants dans le domaine industriel, notamment en génie civil, en aéronautique ou encore en automobile. L'intérêt grandissant pour ces composants dans la conception des structures a conduit à un réel besoin d'outils d'analyse puissants, capables de prendre en compte correctement leurs spécificités. Toutefois, leur modélisation souffre toujours d'un manque de précision au niveau de l'analyse numérique.

Une plaque sandwich est un stratifié en matériaux composites à trois couches, dont chacune a des propriétés mécaniques très différentes de celles des autres: les peaux, très rigides, travaillent essentiellement en membrane, alors que l'âme, de rigidité et densité comparativement beaucoup plus faibles, est soumise aux efforts de cisaillement.

La conception même d'une plaque sandwich fait qu'elle se comporte de façon très différente d'un laminé, particulièrement lorsque l'on considère les modes de défaillance (modes de rupture, modes d'instabilité, problèmes locaux...) comme exposé dans (Teti & Caprino, 1989).

Pour une modélisation convenable des plaques sandwich, il est nécessaire de prendre en compte les effets du cisaillement transverse, ainsi que d'assurer la continuité des déplacements et l'état d'équilibre des contraintes aux interfaces entre peaux et âme. Par contre, l'hypothèse de contrainte plane utilisée dans la théorie des plaques stratifiées, inacceptable pour les plaques sandwich, doit être éliminée.

METHODE «REISSNER LOCAL»

Afin d'améliorer la précision des contraintes, nous devons nous demander comment sont calculées les contraintes nodales $\{\tau\}$ à partir des déplacements nodaux $\{q\}$.

Dans la méthode des moindres carrés, on résout (Hinton & Campbell, 1974) :

(1) $$\int_{\Omega} \left(\{\sigma_m\} - \{\sigma_u\} \right)^2 d\Omega = 0$$

avec Ω le volume considéré pour le calcul et où $\{\sigma_m\}$ est la façon « mixte » de calculer les contraintes :

(2) $$\{\sigma_m\} = \left[N_\sigma \right] \{\tau\}$$

avec $\left[N_\sigma \right]$ la matrice de forme du champ de contraintes et $\{\sigma_u\}$ la façon « en déplacements » de calculer les contraintes:

(3) $$\{\sigma_u\} = \left[D \right] \left[\partial \right] \left[N_u \right] \{q\}$$

avec $[N_u]$ la matrice de forme du champ de déplacements, $[D]$ la matrice de Hooke et $[\partial]$ celle de l'opérateur de dérivation reliant les déformations aux déplacements; ou en utilisant une méthode équivalente de projection de contrainte (Zienkiewicz & Taylor, 1994) :

(4) $$\int_\Omega \left(\{\sigma_m\} - \{\sigma_u\} \right) d\Omega = 0$$

Notons que toutes ces méthodes convergent vers la solution de Reissner, qu'elles soient calculée sur l'ensemble de la structure ou localement dans chaque élément (Hinton & Campbell, 1974).

Dans cette dernière méthode (découplée), les contraintes nodales sont calculées par :

(5) $$\{\tau\} = [A]^{-1}[B]\{q\}$$

avec :

(6) $$[A] = \int_\Omega [N_\sigma]^T [S][N_\sigma] d\Omega \quad \text{et} \quad [B] = \int_\Omega [N_\sigma]^T [\partial][N_u] d\Omega$$

Ainsi, au lieu de minimiser la différence entre deux solutions, nous utilisons directement la formulation de Reissner que nous appliquons :

- le long des *interfaces* entre peaux et âme ;
- sur *deux éléments* situés de part et d'autre d'une interface.

C'est cette technique que nous appelons la méthode de *Reissner local.*

ILLUSTRATIONS

Poutre sandwich

Le premier exemple que nous nous proposons d'étudier est celui de la poutre sandwich simplement supportée et soumise à une pression uniforme sur sa face supérieure, comme illustré à la Fig.1.

La longueur totale de la poutre est L=24 mm, sa hauteur totale H=2 mm et l'âme, de hauteur H_c, représente 80% de sandwich symétrique. Les peaux sont en aluminium (E_s=70000 MPa, ν_s=0,3), l'âme en mousse avec un module d'Young variant de E_c=350 MPa à 70 MPa (ν_c=0,34) et l'intensité de la pression q=1 N/mm^2.

Nous nous intéressons aux résultats au point A. En ce point (comme en tous les points des interfaces), les composantes σ_{xz} et σ_{zz} doivent être continues et la composante σ_{xx} discontinue.

Dans un code de calcul comme ANSYS, les composantes continues sont obtenues comme « nodal results » (par défaut), les composantes discontinues en exploitant les résultats élément par élément.

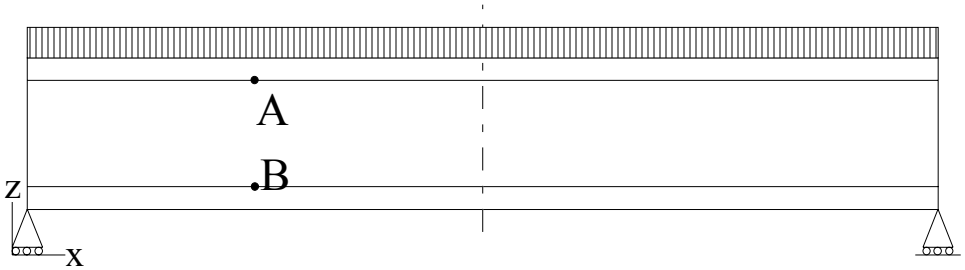

Fig.1- Poutre sandwich
sandwich beam

La Fig.2 représente σ_{xz} en fonction du rapport E_s/E_c pour différentes modélisations. La solution de référence est celle donnée dans (Lerooy, 1983).

Plane 82 (élément quadrilatère 8 noeuds) et Plane 82/2 sont les résultats donnés par ANSYS pour un découpage longitudinal de la demi-poutre de 20 éléments, 1 élément par peau et respectivement 1 et 2 éléments pour l'âme.

La courbe de référence est atteinte par ANSYS avec cet élément pour un maillage régulier de 4 éléments par peau et 32 éléments dans l'âme (soit 40 éléments suivant l'épaisseur).

La courbe Shell 91 (coque multicouche avec option sandwich) correspond à un découpage longitudinal en 20 éléments. Cet élément dispose d'une option sandwich qui améliore grandement la qualité des contraintes aux interfaces.

La courbe Reissner local/2 correspond aux résultats donnés par la méthode présentée appliquée sur les résultats nodaux (déplacements) donnés par Plane 82/2.

Il est clair que pour ces hauts rapports E_s/E_c, la méthode présentée permet d'obtenir les résultats « de référence » avec seulement 4 éléments suivant l'épaisseur totale du sandwich contre 40 pour ANSYS. Cette méthode est donc particulièrement judicieuse dans ces cas et utilisable pratiquement pour le dimensionnement des structures réelles, puisque le nombre de degrés de libertés requis reste modéré.

Les résultats complets de cette étude sont reportés dans (Manet, 1998). La généralisation 3D de ce problème (plaque carrée simplement supportée et soumise à une pression uniforme sur sa face supérieure est donnée dans (Manet et al., 1997).

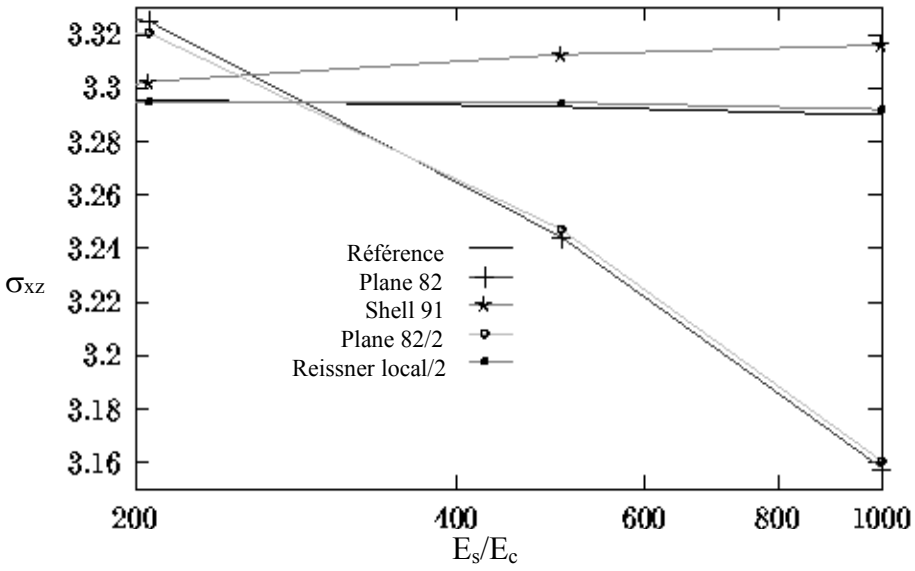

Fig.2- σ_{xz} en fonction du rapport E_s/E_c
σ_{xz} as a function of the ratio E_s/E_c

Poutre courbe

Présentation de l'étude

Nous présentons maintenant un cas « non-classique », *i.e.* pour lequel aucune solution de référence n'existe. Cet exemple est illustré à la Fig.3 : il s'agit d'une poutre sandwich en U soumise à une force ponctuelle à son extrémité supérieure droite (pour le demi-modèle présenté).

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le seul phénomène que nous pouvons essayer de mettre en évidence est le rôle du cisaillement. De plus, compte-tenu de l'évolution des techniques de production des sandwichs, il paraît important de s'intéresser à des structures comportant des rayons de courbure (et non plus aux seuls panneaux). C'est pour ces raisons que cet exemple a été choisi.

De ce que nous avons appris de l'exemple précédent, le maillage conduisant à la solution de référence sera le suivant (une étude de convergence a tout de même été effectuée, mais n'est pas présentée. De plus, les estimateurs d'erreurs en norme d'énergie fournis par ANSYS ne peuvent être utilisés car ils sont perturbés par la présence de matériaux très différents accolés) : 2 éléments dans l'épaisseur de chaque peau, 16 pour l'âme, 40 découpages longitudinaux pour la partie rectiligne de longueur L et 20 pour le coude de rayon R.

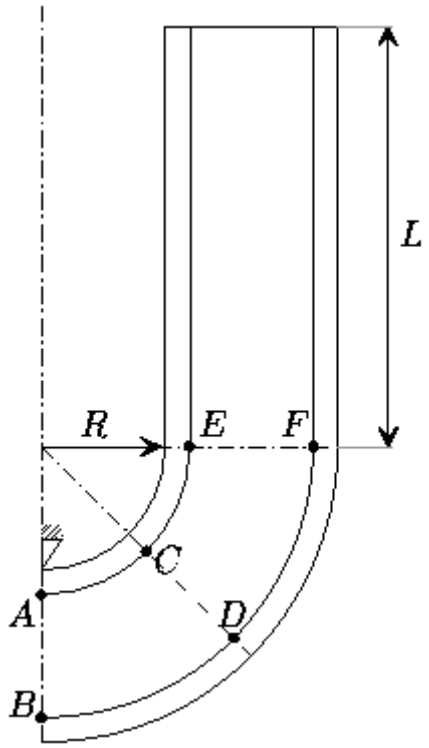

Fig.3- Exemple non standard : poutre sandwich en U
Non standard example

De la difficulté d'exploiter les résultats

Considérons ce qui se passe au point C dans le repère global . ANSYS annonce les résultats nodaux suivants : σ_{xx}=17,988, σ_{yy}=17,192 et σ_{xy}=16,242. Les résultats donnés par la méthode de Reissner local sont quant à eux: σ_{xx}=3.170, σ_{yy}=2.306 et σ_{xy}=1.324.

Les valeurs nodales des contraintes annoncées par ANSYS sont en fait les moyennes des valeurs élémentaires: en effet, ces valeurs sont, pour σ_{xx} de 33,047 dans la peau et 2,92855 dans l'âme.

De plus, il est nécessaire d'effectuer, une rotation de repère afin de se placer dans les axes locaux. Dans ce cas là, il vient: σ_{11}=59,822 dans la peau, σ_{11}=3,386 dans l'âme, σ_{22}=1,415 et σ_{12}=-0.432.

Nous avons utilisé la formule bien connue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Le calcul de σ_{11} est effectué en utilisant les valeurs discontinues de σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{xy}, *i.e.* en utilisant les valeurs obtenues par ANSYS élément par élément (une valeur

dans la peau, une autre dans l'âme); les calculs de σ_{22} et σ_{12} sont effectués à partir des valeurs continues délivrées par la méthode de Reissner local (ou à défaut par les valeur nodales d'ANSYS si celles-ci ont un sens).

Ainsi, on voit qu'il n'est pas aisé de manipuler, ni les résultats fournis par ANSYS, ni ceux fournis par Reissner local. Il est nécessaire d'utiliser conjointement les deux méthodes afin d'obtenir les valeurs dans le repère local, les seules facilement exploitable physiquement.

Discussion

Dans cette étude, nous faisons varier le rayon de courbure R.

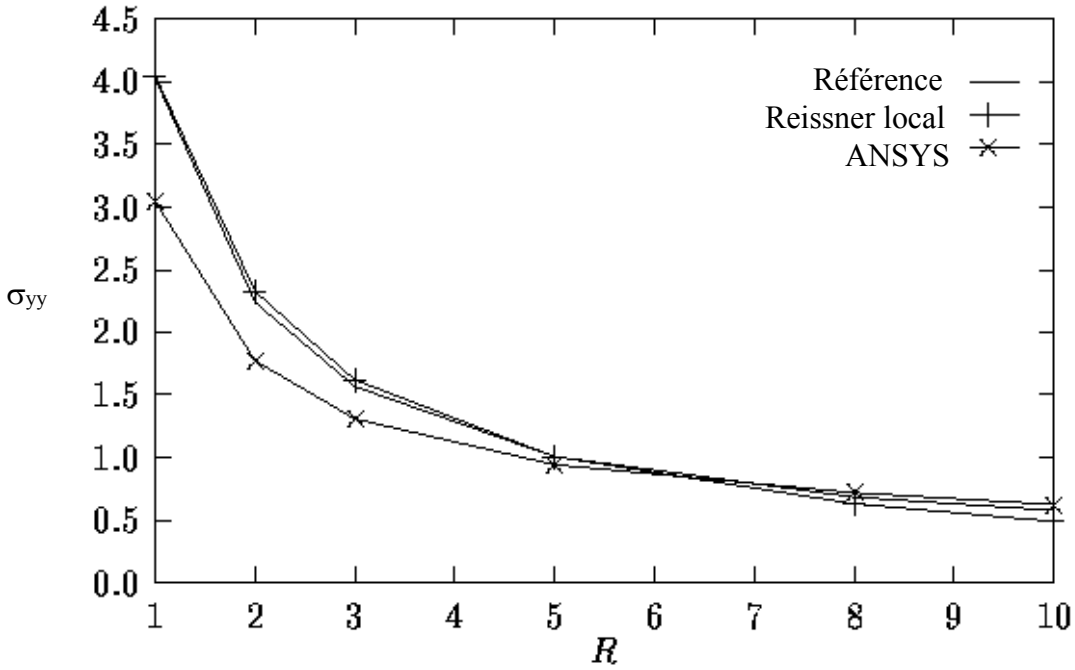

Fig.4- σ_{yy} au point E

σ_{yy} at point E

Une première remarque s'impose: plus la valeur du rayon est faible, plus les résultats sont mauvais, quelque soit la méthode employée. Ceci est tout à fait normal. En effet, plus cette valeur est faible, plus le problème traité se rapproche de celui d'un angle droit. Or il est connu qu'un angle droit génère des problèmes numériques...

Au point A, l'influence des conditions aux limites est encore sensible: en plus de la condition de symétrie (car seule la moitié de la structure, présentée à la Fig.3, est modélisée), le blocage du déplacement vertical induit une légère détérioration des résultats numériques. L'influence de cette condition aux limites n'est plus visible au point B.

En A et B, la composante discontinue est σ_{xx}, les composantes σ_{yy} et σ_{xy} sont continues. Par contre, aux points E et F, c'est σ_{yy} la composante discontinue et σ_{xx} et σ_{xy} les composantes continues.

Tous ces résultats ne sont pas présentés dans ce papier. Aux figures 4 et 5, nous présentons les résultats pour les composantes continues σ_{xx} et σ_{xy}. La composante de cisaillement transverse σ_{xy} est généralement la composante la plus difficile à obtenir. C'est donc la composante de choix pour la comparaison des méthodes.

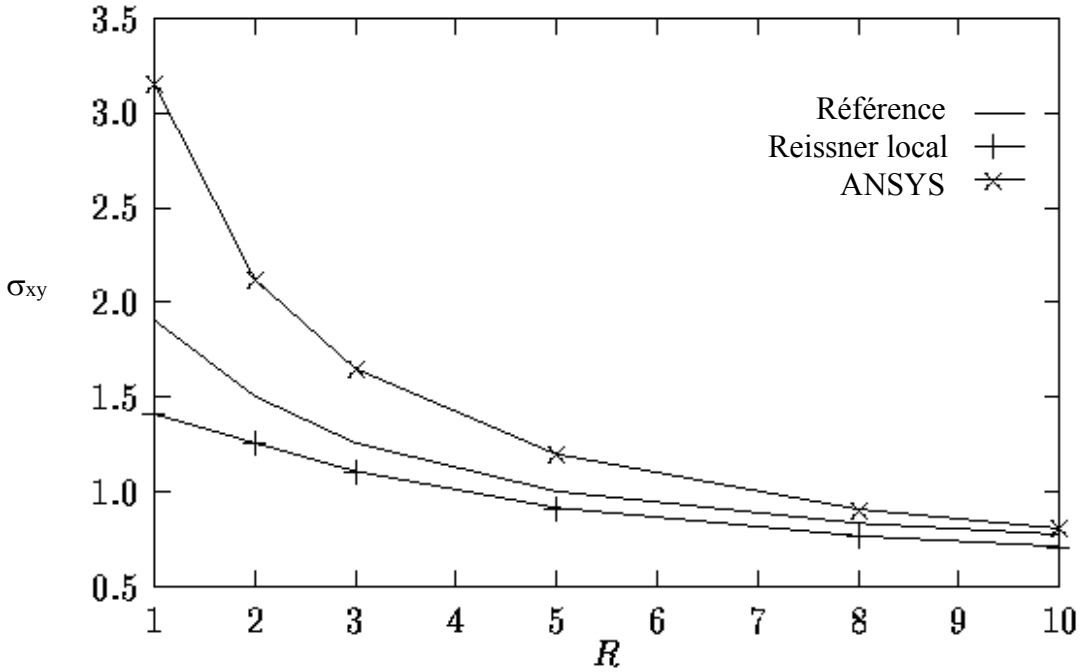

Fig.5- σ_{xy} au point E

σ_{xy} at point E

D'après les résultats présentés aux figures précédentes, il est visible que la méthode de Reissner local permet d'améliorer les résultats par rapport à ANSYS, pour un coup de calcul qui n'est pas supérieur.

CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons exposé une méthode de post-traitement, la méthode de *Reissner local*. Elle est basée sur le principe d'Hellinger-Reissner, mais n'est appliquée ici que localement, *i.e.* sur deux éléments adjacents situés de part et d'autre d'une interface. Elle peut donc être utilisée pour déterminer plus précisément les contraintes nodales à l'interface entre deux matériaux différents, comme dans le cas des matériaux sandwich, mais aussi dans le cas des joints collés par exemple (Manet. & Han, 1997).

Rappelons que les avantages principaux de la méthode de Reissner local sont:

- que le calcul, effectué localement, ne met en jeu que des matrices de très petite taille ;
- que la programmation est réduite au maximum;
- que ce type de méthode peut facilement être implémenté dans des codes de calcul existants. C'est d'ailleurs ce qui a été effectué dans le logiciel ANSYS.

BIBLIOGRAPHIE

Hinton, E. & Campbell, J. S., 1974. «Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method» Int. J. for Num. Meth. in Eng., 8, 1974, 461-480.

Lerooy, J.-F., 1983. Calcul des contraintes de cisaillement transversales dans les structures modérément épaisses, Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, nov. 1983.

Manet, V., Han, W.-S. & Vautrin, A., 1997. « Static Analysis of Sandwich Plates by Finite Elements », Proc. EUROMECH 360: Mechanics of Sandwich Structures, 1997, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Manet, V. & Han, W.-S., 1997. « La modélisation des plaques sandwich plates par éléments finis hybrides et ses applications », C.R troisième colloque national en calcul des structures, 2, Presses académiques de l'Ouest, Nantes, 1997, 657-663,.

Manet, V., 1998. « Using ANSYS to calculate the behaviour of sandwich structures », Composites Science and Technology, à paraître.

Teti, R. & Caprino, G., 1989, «Mechanical behavior of structural sandwiches», Sandwich Construction, 1989, 53-67.

Washizu, K., 1992, Variational methods in elasticity and plasticity, Third Edition, Pergamon Press, 1992.

Zienkiewicz O.C. & Taylor, R.L., 1994, The Finite Element Method, 2, MacGraw-Hill, Londres, 1994.