HAL open science

Une construction d'une intégrale relativement à un processus aléatoire.

Ludovic Valet

To cite this version:

Ludovic Valet. Une construction d'une intégrale relativement à un processus aléatoire.. 2001. hal-00661861

HAL Id: hal-00661861

https://hal.science/hal-00661861v1

Preprint submitted on 16 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construction et étude d'une intégrale stochastique

Ludovic VALET

16 février 2012

Table des matières

I INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES 2

1 Système de variables aléatoires indépendantes 3

1.1 Introduction 3

1.2 Mesures discrètes 3

1.3 Mesures diffuses 6

1.3.1 P=λ, mesure de Lebesgue 6

1.3.2 P=μ est une mesure diffuse sur $\mathbb{R}$ 9

1.4 Mesures avec sauts 10

1.4.1 Cas d'un seul saut 10

1.4.2 Cas d'un nombre fini de sauts 23

2 Système maximum de variables aléatoires indépendantes 24

2.1 Position du problème 24

2.2 Caractérisation 25

2.3 Cas général 25

2.3.1 Notations 25

2.3.2 Indépendance, première approche 26

2.3.3 Conditions nécessaires d'indépendance 29

II DENSITÉ DE VARIABLES ALÉATOIRES 33

3 Polynômes de Wick 34

3.1 Introduction 34

3.2 Exponentielle de Wick 36

3.3 Propriétés des puissances de Wick 40
3.3.1 Introduction 40
3.3.2 Orthogonalité 40
3.3.3 Formules de récurrence 41
3.3.4 Equations différentielles 45
3.4 Quelques lois en probabilités 47
3.4.1 Loi NORMALE, $\mathcal{N}(0,1)$ 47
3.4.2 Loi GAMMA de paramètres $a > 0$ et $b > 0$, $\Gamma(a,b)$ 47
3.4.3 Combinaison linéaire de Lois GAMMA, $\Gamma\left(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\right)$ 48
3.4.4 Loi EXPONENTIELLE de paramètre λ, $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\lambda)$ 48
3.4.5 Loi de POISSON de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$ 48
3.4.6 Loi BINOMIALE de paramètres N,p,q : $\mathcal{B}(N;p,q)$ 48
3.5 Quelques rappels sur les polynômes de LAGUERRE généralisés, $L_n^\alpha(x)$. 49
3.6 Une relation avec les polynômes de Laguerre 50
3.7 Les premiers polynômes de Wick 51

4 Densité de variables aléatoires discrètes 53
4.1 Introduction 53
4.2 Suite de variables aléatoires prenant 2 valeurs 54
4.3 Suite de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs 56

5 Densité de produit de variables aléatoires continues 61
5.1 Densité 61
5.1.1 Notations, premiers résultats 61
5.1.2 Quelques conditions suffisantes 63
5.2 Application 70
5.2.1 Explicitation du modèle 70
5.2.2 Etude de la convergence dans tous les L^p 71
5.2.3 Une application 74

III CONSTRUCTION ET ÉTUDE D'UNE INTÉGRALE 77

6 Construction d'une intégrale 78

6.1 Résultats techniques 78
6.1.1 Modèle 78
6.1.2 Lemmes 79
6.2 Construction d'une intégrale 82
6.2.1 Etude de produits 82
6.2.2 Définition de l'intégrale 84
6.3 Une autre présentation du même objet 84
6.3.1 Motivation 84
6.3.2 Le modèle 85
6.3.3 Première propriété du modèle généralisé 87
6.3.4 Réécriture de l'intégrale 88
6.4 Intégration par partie 89
6.5 Norme 91
6.6 Isométries partielles 92
6.6.1 Notations 92
6.6.2 Isométries 93
6.6.3 Isométrie sur S^2 94
6.6.4 Vers une généralisation 95

7 Résultats techniques 96
7.1 Etude de Z_t^2 96
7.2 identification 104
7.2.1 Calculs préliminaires 104
7.2.2 Identification des termes d'ordre 4 110
7.2.3 Identification des termes d'ordre 3 110
7.2.4 Identification des termes d'ordre 2 111
7.2.5 Identification des termes d'ordre 1 112
7.2.6 Identification des termes d'ordre 0 113
7.2.7 Identification 113
7.3 Etude d'une limite 114

8 Existence de modifications continues **118**

8.1 Méthode 118

8.1.1 Un résultat technique 118

8.1.2 Position du problème 119

8.1.3 Méthode 119

8.2 Termes d'ordre 4 120

8.3 Termes d'ordre 3 120

8.4 Termes d'ordre 2 121

8.5 Termes d'ordre 1 121

8.6 Termes d'ordre 0 122

8.7 Modifications continues 122

9 Variation quadratique **124**

9.1 Position du problème 124

9.2 Lemmes techniques 125

9.3 Variation Quadratique 126

Première partie

INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Chapitre 1

Système de variables aléatoires indépendantes

1.1 Introduction

On va construire, pour différentes familles de mesures, des suites de variables aléatoires indépendantes.
Pour cela on va transporter des suites de Rademacher généralisée sur notre espace mesuré via les fonctions de répartitions des mesures considérées. Dans un premier temps on regardera le cas de mesures discrètes et dans un deuxième temps on s'intéressera à des mesures diffuses pour ensuite généraliser au cas de mesures avec un seul saut.

Définition 1.1.1. *On dit qu'une suite, $(b_k)_k$, de variables aléatoires est indépendante si, pour tous entiers naturels $k_1 < \cdots < k_N$, les variables aléatoires $b_{k_1}, \ldots, b_{k_N}$ sont mutuellement, ou globalement, indépendantes.*

1.2 Mesures discrètes

Soient :

- $a_1, \ldots, a_n$ des éléments distincts d'un certain ensemble E,

– $\Big(b_k\Big)_{k=1,\dots,N}$: $\Big(\Omega = \{a_1,\dots,a_n\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)\Big) \to \Big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\Big)$ des applications mesurables.

Il existe des partitions $\bigsqcup_{j=1}^{n_k} A_j^k = \Omega$ telle que :

$$b_k = \sum_{j=1}^{n_k} x_j^k 1_{A_j^k}.$$

Posons $I_j^k = \{l \mid a_l \in A_j^k\}$.

Proposition 1.2.1. *Supposons :*

1. $\forall (j_1,\dots,j_N) \in \{1,\dots,n_1\} \times \dots \times \{1,\dots,n_N\}$:

$$\bigcap_{k=1}^{N} I_{j_k}^k \neq \emptyset$$

et soit $(p_1,\dots,p_n) \in]0,1[^n$ *vérifiant :*

2. $\forall (j_1,\dots,j_N) \in \{1,\dots,n_1\} \times \dots \times \{1,\dots,n_N\}$:

$$\prod_{k=1}^{N} \sum_{l \in I_{j_k}^k} p_l = \sum_{l \in \bigcap_{k=1}^{N} I_{j_k}^k} p_l.$$

Alors les variables aléatoires $X_1,\dots,X_N$*, sont mutuellement indépendantes sur* $L^2\Big(\Omega, \mathcal{F}, P\Big)$*, avec* $P = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta_{a_k}$.

Remarque

Cela oblige $2^{N-1} \leq n$ et fournit une caractérisation de l'indépendance globale.

<u>Démonstration</u>

Soit $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_N \subset \{x_1^1,\dots,x_{n_1}^1\} \times \dots \times \{x_1^N,\dots,x_{n_N}^N\}$.

$$P\Big([(X_1,\dots,X_N) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_N]\Big) = P\Big(X_1^{-1}(\Gamma_1) \bigcap \dots \bigcap X_N^{-1}(\Gamma_N)\Big)$$

$$= P\Big(B_1 \bigcap \dots \bigcap B_N\Big)$$

où $B_\nu = \bigcup_{k_\nu \in J_\nu} A^\nu_{k_\nu}$ avec $J_\nu \subset \{1, \dots, n_\nu\}$, $J_\nu = \{l | x^\nu_l \in \Gamma_\nu\}$.

$$\begin{aligned}
P\Big(B_1 \bigcap \cdots \bigcap B_N\Big) &= \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_N)\\ \in J_1\times\cdots\times J_N}} P\Big(A^1_{j_1} \bigcap \cdots \bigcap A^N_{j_n}\Big) \\
&= \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_N)\\ \in J_1\times\cdots\times J_N}} \sum_{l \in \bigcap_{k=1}^N I^k_{j_k}} p_l \\
&= \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_N)\\ \in J_1\times\cdots\times J_N}} \prod_{k=1}^N \sum_{l \in I^k_{j_k}} p_l \\
&= \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_N)\\ \in J_1\times\cdots\times J_N}} \prod_{k=1}^N P\Big(A^k_{j_k}\Big) \\
&= \prod_{k=1}^N P\Big(\bigcup_{j_k \in J_k} A^k_{j_k}\Big) \\
&= \prod_{k=1}^N P\Big(B_k\Big).
\end{aligned}$$

$\triangle$

Remarque

En fait il suffit de regarder ce qu'il se passe sur les atomes de la tribu engendrée par $b_1, \dots, b_N$, puisque :

$$P\Big(A^1_{k_1} \bigcap \cdots \bigcap A^N_{k_N}\Big) = \sum_{l \in \bigcap_{j=1}^N I^j_{k_j}} p_l = \prod_{i=1}^N \sum_{l \in I^j_{k_j}} p_l = \prod_{j=1}^N P\Big(A^j_{k_j}\Big).$$

Exemple

- $\Omega = \{0,1\}^{2^N}$
- $b_k = \Big(b_k(i)\Big)_{i=1\dots,2^N}$ $k = 1\dots, N$ avec :

$$b_k(i) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad 2j2^{N-k} \le i \le (2j+1)2^{N-k} \\ \qquad\qquad j = 0, \dots, 2^k - 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad (2j+1)2^{N-k} \le i \le (2j+2)2^{N-k} \\ \qquad\qquad j = 0, \dots, 2^k - 1 \end{cases}$$

- $b_k : \Omega \to \{-1, 1\} \begin{cases} 1 \to 1 \\ 0 \to -1 \end{cases}$
- $p_k = \dfrac{1}{2^N}$

$b_0 = 1$

$b_1 = \Big(\underbrace{1,\dots,1}_{2^{N-1}},\underbrace{0,\dots,0}_{2^{N-1}}\Big)$

$b_2 = \Big(\underbrace{1,\dots,1}_{2^{N-2}}\underbrace{0,\dots,0}_{2^{N-2}}\underbrace{1,\dots,1}_{2^{N-2}}\underbrace{0,\dots,0}_{2^{N-2}}\Big)$

$A^0_{k_0}\bigcap A^1_{k_1}\bigcap\cdots\bigcap A^N_{k_N} = A^1_{k_1}\bigcap\cdots\bigcap A^N_{k_N} = a_k \Rightarrow P\Big(A^1_{k_1}\bigcap\cdots\bigcap A^N_{k_N}\Big) = \dfrac{1}{2^N}$

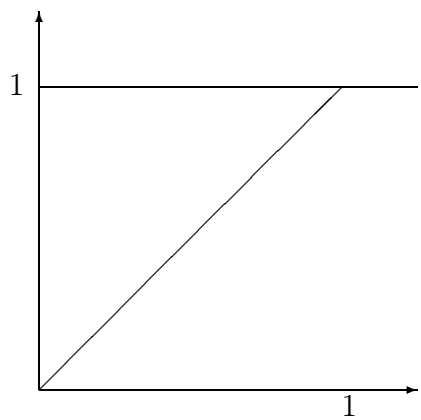
et $P\Big(A^1_{k_1}\Big)\cdots P\Big(A^N_{k_N}\Big) = \dfrac{2^{N-1}}{2^N}\times\cdots\times\dfrac{2^{N-1}}{2^N} = \dfrac{1}{2^N}$

1.3 Mesures diffuses

Dans toute la suite on va considérer un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{F},P)$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ et où la mesure P sera précisée dans chaque cas. On appellera F la fonction de répartition de la mesure P.

1.3.1 P=λ, mesure de Lebesgue

$F(x) = x$



Posons

$$\begin{cases} \widetilde{r}_0 &= 1 \\ \widetilde{r}_k &= \displaystyle\sum_{j=0}^{2^k-1}(-1)^j 1_{]\frac{j}{2^k},\frac{j+1}{2^k}]} \quad k\geq 1 \end{cases}$$

C'est le système de Rademacher, ce sont des variables aléatoires globalement indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$. On peut le généraliser de la façon suivante :

On pose $r_0 = 1$, après avoir choisi $\alpha_1 \in]0,1[$, on prend

$$r_1 = 1_{]0,\alpha_1]} - 1_{]\alpha_1,1]}.$$

Ensuite on découpe chacun des intervalles, après avoir préalablement fixé un $\alpha_2 \in]0,1[$, proportionnellement à α_1 et $1-\alpha_1$:

$$r_2 = 1_{]0,\alpha_1\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1\alpha_2,\alpha_1]} + 1_{]\alpha_1,\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2,1]}.$$

On va construire de façon récurrente notre suite :
étant donné $r_k = \sum_{j=0}^{2^k-1} (-1)^j 1_{]a_j^k, a_{j+1}^k]}$, on choisit $\alpha_{k+1} \in]0,1[$ et on découpe chacun des intervalles proportionnellement à α_{k+1} et $1-\alpha_{k+1}$:

$$r_{k+1} = \sum_{j=0}^{2^k-1} \left(1_{\left]a_j^k, a_j^k+\alpha_{k+1}\left(a_{j+1}^k - a_j^k\right)\right]} - 1_{\left]a_j^k+\alpha_{k+1}\left(a_{j+1}^k-a_j^k\right), a_{j+1}^k\right]} \right).$$

En posant :

$$\begin{cases} a_{2j}^{k+1} &= a_j^k \\ a_{2j}^{k+1} &= \alpha_{k+1}(a_{j+1}^k - a_j^k) \end{cases}$$

on a :

$$r_{k+1} = \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^j 1_{]a_j^{k+1}, a_{j+1}^{k+1}]}.$$

Introduisons maintenant, pour N fixé dans $\mathbb{N}$, quelques notations :

- $\beta_0^i(N) = \alpha_i$
- $\beta_1^i(N) = 1-\alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, N$
- $\beta_\nu(N) = \beta_{j_1}^1(N) \cdots \beta_{j_N}^N(N)$
  où $(j_1, \ldots, j_N)$ est le $\nu^{\text{ième}}$ terme pour l'ordre lexicographique dans $\{0,1\}^N$.

Dans ces conditions :

- $a_\nu^N - a_{\nu-1}^N = \beta_\nu(N)$ (par récurrence).

Lemme 1.3.1. *Etant donnés des entiers naturels* $1 \leq k_1 < \cdots < k_N$ *:*

$$r_{k_N} \cdots r_{k_1} = \sum_{i_{N-1}=0}^{2^{k_1}-1} (-1)^{i_{N-1}} \sum_{i_{N-2}=i_{N-1}d_2}^{(i_{N-1}+1)d_2-1} (-1)^{i_{N-2}} \cdots \sum_{i_0=i_1 d_N}^{(i_1+1)d_N-1} (-1)^{i_0} 1_{\left]a_{i_0}^{k_N}, a_{i_0+1}^{k_N}\right]}$$

où $d_j = 2^{k_j - k_{j-1}}$.

Démonstration

Par récurrence

$k_1 < k_2$

$$r_{k_1}r_{k_2} = \sum_{j_1=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j_2=0}^{2^{k_2}-1}(-1)^{j_1+j_2}1_{\left]a_{j_1}^{k_1},a_{j_1+1}^{k_1}\right]\bigcap\left]a_{j_2}^{k_2},a_{j_2+1}^{k_2}\right]}$$

$$1_{\left]a_{j_1}^{k_1},a_{j_1+1}^{k_1}\right]\bigcap\left]a_{j_2}^{k_2},a_{j_2+1}^{k_2}\right]} = \begin{cases} 1_{\left]a_{j_2}^{k_2},a_{j_2+1}^{k_2}\right]} & \text{pour} \quad j_2 \in \{j_1d_2, j_1d_2+1, \ldots, (j_1+1)d_2-1\} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On suppose que c'est vrai jusqu'au rang N :

$$r_{k_{N+1}}r_{k_N}\cdots r_{k_1} = \sum_{j_{N+1}=0}^{2^{k_{N+1}}-1}(-1)^{j_N}1_{\left]a_{j_{N+1}}^{k_{N+1}},a_{j_{N+1}+1}^{k_{N+1}}\right]}\sum_{i_{N-1}=0}^{2^{k_1}-1}(-1)^{i_{N-1}}\cdots\sum_{i_0=i_1d_N}^{(i_1+1)d_N-1}(-1)^{i_0}1_{\left]a_{i_0}^{k_N},a_{i_0+1}^{k_N}\right]}$$

$$1_{\left]a_{j_{N+1}}^{k_{N+1}},a_{j_{N+1}+1}^{k_{N+1}}\right]}r_{k_N}\cdots r_{k_1} = \sum_{i_{N-1}=0}^{2^{k_1}-1}(-1)^{i_{N-1}}\cdots\sum_{i_0=i_1d_N}^{(i_1+1)d_N-1}(-1)^{i_0}1_{\left]a_{i_0}^{k_N},a_{i_0+1}^{k_N}\right]\bigcap\left]a_{j_{N+1}}^{k_{N+1}},a_{j_{N+1}+1}^{k_{N+1}}\right]}$$

$$1_{\left]a_{i_0}^{k_N},a_{i_0+1}^{k_N}\right]\bigcap\left]a_{j_{N+1}}^{k_{N+1}},a_{j_{N+1}+1}^{k_{N+1}}\right]} = \begin{cases} 1_{\left]a_{j_{N+1}}^{k_{N+1}},a_{j_{N+1}+1}^{k_{N+1}}\right]} & si \quad j_{N+1} \in \{i_0d_{k_{N+1}}, \ldots \\ & \ldots, (i_0+1)d_{k_{N+1}}-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On réinjecte dans la somme précédente et, à une réindexation près, on a le résultat.

△

Proposition 1.3.1. $(r_k)_{k\in I\!N}$ *est une suite indépendante sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

<u>Démonstration</u>

Commençons par fixer quelques notations. N étant un entier strictement positif, prenons $(k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ tel que : $0 < k_1 < \cdots < k_N$ et $\big(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\big) \in \{-1, 1\}^N$.

On aura également besoin de :

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{2}\Big[(1-\alpha_j)(1-x) + (1+x)\alpha_j\Big] \ (j = 1, \ldots, N).$$

On voit facilement que

$$P\Big(\big[b_k = \varepsilon_k\big]\Big) = \varphi_k(\varepsilon_k),$$

puisque

$$P\Big(\big[b_k = \varepsilon_k\big]\Big) = \varphi_k(\varepsilon_k)\sum_{\nu=0}^{2^{k-1}-1}\beta_\nu(k-1).$$

D'autre part on peut montrer que :

$$\begin{aligned} P\Big(\big[b_{k_1}=\varepsilon_{k_1}, b_{k_2}=\varepsilon_{k_2}\big]\Big) &= \varphi_{k_1}(\varepsilon_{k_1})\sum_{\nu_1=0}^{2^{k_1-1}-1}\left[\beta_{\nu_1}(k_1-1)\varphi_{k_2}(\varepsilon_{k_2})\sum_{\nu_2=0}^{2^{k_2-1}-1}\beta_{\nu_2}(k_2-1)\right] \\ &= \varphi_{k_1}(\varepsilon_{k_1})\varphi_{k_2}(\varepsilon_{k_2}) \end{aligned}$$

De proche en proche on a :

$$P\Big(\big[b_{k_1}=\varepsilon_{k_1},\dots,b_{k_N}=\varepsilon_{k_N}\big]\Big)=$$

$$\varphi_{k_1}(\varepsilon_{k_1})\sum_{\nu_1=0}^{2^{k_1-1}-1}\left[\beta_{\nu_1}(k_1-1)\left[\cdots\left[\varphi_{k_N}(\varepsilon_{k_N})\sum_{\nu_N=0}^{2^{k_N-1}-1}\beta_{\nu_N}(k_N-1)\right]\cdots\right]\right]$$

$$=\varphi_{k_1}(\varepsilon_{k_1})\cdots\varphi_{k_N}(\varepsilon_{k_N}).$$

$\triangle$

1.3.2 P=μ est une mesure diffuse sur $\mathbb{R}$

Notons F la fonction de répartition de μ.

Proposition 1.3.2. *$(r_k\circ F)_k$ et $(\widetilde{r_k}\circ F)_k$ sont des suites indépendantes sur $\Big(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu\Big)$.*

<u>Démonstration</u>

Prenons des entiers naturels $0<k_1<\cdots<k_N$, notons b_k pour r_k ou $\widetilde{r_k}$, alors :

$$b_k:\Big([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda\Big)\to\{-1,1\}$$

et

$$F:\Big(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),P\Big)\to[0,1].$$

D'une part pour $\varepsilon\in\{-1,1\}$:

$$P\Big(\big[b_k\circ F=\varepsilon\big]\Big)=P\Big(\{x\in\mathbb{R}|F(x)\in\big(b_k\big)^{-1}(\varepsilon)\}\Big)=P\Big(\bigcup_j F^{-1}\big(\widetilde{B}_j\big)\Big).$$

Où

$$\widetilde{B}_j=\begin{cases}]a^k_{2j},a^k_{2j+1}] & \text{si} \quad \varepsilon=1 \\ ]a^k_{2j+1},a^k_{2j+2}] & \text{si} \quad \varepsilon=-1. \end{cases}$$

Les $\widetilde{B}_j$ sont disjoints donc :

$$P\Big(\big[b_k \circ F = \varepsilon\big]\Big) = \sum_j P\Big(F^{-1}(\widetilde{B}_j)\Big)$$
$$= \sum_j P\Big(\big]F^{-1}(a_j), F^{-1}(a_{j+1})\big]\Big)$$

où

$$F^{-1}(x) = \inf\{y | F(y) = x\}$$

et donc

$$P\Big(\big[b_k \circ F = \varepsilon\big]\Big) = \sum_j \lambda\Big(\big]a_j, a_{j+1}\big]\Big) = \lambda\Big(\bigcup_j \big]a_j, a_{j+1}\big]\Big) = \cdots = \lambda\Big(\big[b_k \circ F = \varepsilon\big]\Big).$$

D'autre part pour $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \{-1, 1\}^N$:

$$P\Big(\big[b_{k_1} \circ F = \varepsilon_1, \ldots, b_{k_N} \circ F = \varepsilon_N\big]\Big) = P\Big(\{x \in \mathbb{R} | F(x) \in \bigcup_{\nu=1}^{p} B_{j_\nu}\}\Big),$$

où $B_{j_\nu} =]a_{j_\nu}^{k_N}, a_{j_\nu+1}^{k_N}]$, pour certains j_ν, sont des intervalles disjoints, donc :

$$P\Big(\big[b_{k_1} \circ F = \varepsilon_1, \ldots, b_{k_N} \circ F = \varepsilon_N\big]\Big) = \sum_{\nu=1}^{p} \lambda\Big(B_{j_\nu}\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{\nu=1}^{p} B_{j_\nu}\Big)$$
$$= \lambda\Big(\big[b_{k_1} = \varepsilon_1, \ldots, b_{k_N} = \varepsilon_N\big]\Big).$$

$\triangle$

1.4 Mesures avec sauts

1.4.1 Cas d'un seul saut

On suppose que F est continue en dehors de X_0 (plus précisément sur $[0, X_0] \bigcup]X_0, 1]$) où elle fait un saut de hauteur Δ avec $F(X_0) + \Delta < 1$.

Proposition 1.4.1. *Soit* $b_k = \sum_{j=0}^{r_k} (-1)^j 1_{A_j^k}$, *où* $A_j^k =]a_j^k, a_{j+1}^k]$, *l'une des suites* $(r_k)_k$ *ou* $(\widetilde{r}_k)_k$.

Si pour tous entiers naturels $k_1 < \cdots < k_N$ *on a :*

$$\Big(\exists j \in I\!N\Big)\Big(\big]F(X_0), F(X_0) + \Delta\big] \equiv I \subset A_j^{k_N}\Big).$$

Alors la suite $\big(b_k \circ F\big)_k$ *est indépendante sur* $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R), P)$.

Remarque

Les conditions de la proposition excluent implicitement le cas $]F(X_0), F(X_0)+\Delta] = A_j^{k_N}$ (car si tel était le cas, au rang k_N+1, il existerait un indice j_ν tel que $I = A_{j_\nu}^{k_N+1} \bigcup A_{j_\nu}^{k_N+1}$).

<u>Démonstration</u>

Les calculs sont sensiblement les mêmes que dans la démonstration de la proposition 1.3.2. On doit simplement distinguer le cas où $I \subset B_{j_0}$ pour un certain $j_0 \in \{0, \ldots, 2^{k_N}-1\}$.

$$\begin{aligned} F^{-1}(B_{j_0}) &= F^{-1}\big(]a_{j_0}, F(X_0)] \bigcup]F(X_0), F(X_0)+\Delta] \bigcup]F(X_0)+\Delta, a_{j_0+1}]\big) \\ &=]F^{-1}(a_{j_0}), X_0] \bigcup]X_0, X_0] \bigcup]X_0, F^{-1}(a_{j_0+1})] \\ &=]F^{-1}(a_{j_0}), F^{-1}(a_{j_0+1})]. \end{aligned}$$

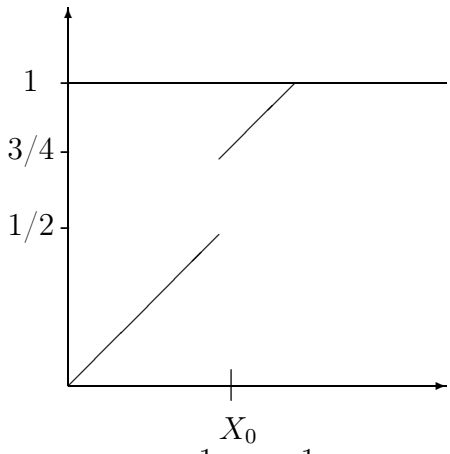
Finalement :

$$\mu\Big(F^{-1}(B_{j_0})\Big) = \lambda\Big(B_{j_0}\Big).$$

$\triangle$

Exemples

1) Considérons $F(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le X_0 = \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{4} & \text{si} \quad \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$



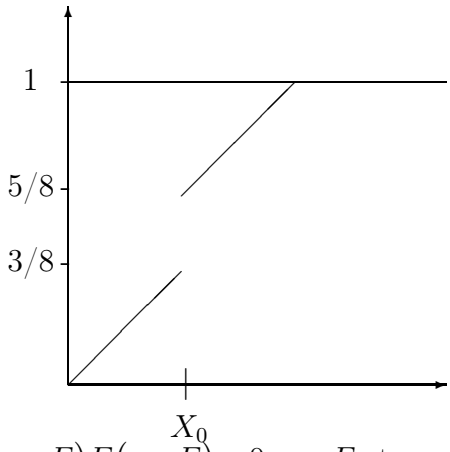
$$r_1 = 1_{]0,\frac{1}{2}]} - 1_{]\frac{1}{2},1]}$$

$$r_2 = 1_{]0,\frac{1}{4}]} - 1_{]\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} + 1_{]\frac{1}{2},\frac{3}{4}]} - 1_{]\frac{3}{4},1]}$$

$$E\big(r_1 \circ F \cdot r_2 \circ F\big) = \frac{1}{4} \neq E\big(r_1 \circ F\big) E\big(r_2 \circ F\big) = -\frac{1}{16}$$

$r_1 \circ F$ et $r_2 \circ F$ ne sont pas indépendantes.

2) Considérons $F(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \ \leq X_0 = \frac{3}{8} \\ x + \frac{1}{4} & \text{si} \quad \frac{5}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$



$E\big(r_1 \circ F \cdot r_2 \circ F\big) = \frac{1}{4} \neq E\big(r_1 \circ F\big) E\big(r_2 \circ F\big) = 0$, $r_1 \circ F$ et $r_2 \circ F$ ne sont pas indépendantes.

i) Une première construction

On va construire une suite de Rademacher généralisée en choisissant les α_k de façon à découper l'intervalle $I \equiv]F(X_0), F(X_0) + \Delta]$ après $F(X_0) + \Delta$ (pour appliquer la proposition 1.4.1.).

$$b_0 = 1$$

on choisit $\alpha_1 > F(X_0) + \Delta$ dans]0,1[,

$$b_1 = 1_{]0,\alpha_1]} - 1_{]\alpha_1,1]} = 1_{]0,F(X_0)+\Delta] \bigcup]F(X_0)+\Delta,\alpha_1]} - 1_{]\alpha_1,1]}$$

on choisit $\alpha_2 \in]0,1[$ tel que $\alpha_1\alpha_2 > F(X_0) + \Delta$,

$$b_2 = 1_{]0,F(X_0)+\Delta] \bigcup]F(X_0)+\Delta,\alpha_1\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1\alpha_2,\alpha_1]} + 1_{]\alpha_1,\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2,1]}.$$

CONDITION TECHNIQUE

> On prend une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ vérifiant :
> $\forall N \in \mathbb{N} - \{0,1\}$:
> $$(C1) \qquad \prod_{k=1}^{N} \alpha_k > F(X_0) + \Delta.$$

Supposons, qu'au rang N, l'intervalle contenant I soit de la forme :

$$]0, \alpha_1 \cdots \alpha_N] =]a, b].$$

On le découpe en deux, comme dans le paragraphe 1.3.1, proportionnellement à α_{N+1} et $1 - \alpha_{N+1}$:

$$]a, a + (a-b)\alpha_{N+1}] \bigcup]a + (a-b)\alpha_{N+1}, b].$$

Pour respecter le modèle de construction imposé il faut :

$$a + (a-b)\alpha_{N+1} > F(X_0) + \Delta.$$

En remplaçant a et b par leur valeur, (C1) donne le résultat, à savoir : $I \subset]0, \alpha_1 \cdots \alpha_{N+1}[$.

Lemme 1.4.1. *On utilise les même notations*

1) Si $\forall k \geq 1$ $\alpha_k = \alpha \in]0,1[$ alors on ne peut pas construire la suite $(b_k)_{k\geq 0}$.

2) La suite dont le terme générique est :

$$\alpha_k = \begin{cases} F(X_0) + \Delta + a & k = 1 \\ 1 - \frac{a^{k-1}(1-a)}{F(X_0)+\Delta+a^{k-1}} & k \geq 2 \end{cases}$$

avec $a \in]0, 1 - F(X_0) - \Delta[$ convient à la construction des b_k suivant le modèle imposé.

<u>Démonstration</u>

On va poser $p(N) = \prod_{i=1}^{N} \alpha_i$.

1)

Si $\alpha_k = \alpha$ $\forall k \geq 1$ alors $p(N) = \alpha^N$ et $p = \lim_{N\to\infty} p(N) = 0$. Comme $F(X_o) + \Delta > 0$, la

condition (C1) n'est pas vérifiée.

2)

$$\alpha_k = 1 - \frac{a^{k-1}(1-a)}{F(X_0)+\Delta+a^{k-1}} = \frac{F(X_o)+\Delta+a^k}{F(X_o)+\Delta+a^{k-1}}$$

$$p(N) = (F(X_o)+\Delta+a)\frac{F(X_o)+\Delta+a^2}{F(X_o)+\Delta+a}\cdots\frac{F(X_o)+\Delta+a^N}{F(X_o)+\Delta+a^{N-1}} = F(X_o)+\Delta+a^N.$$

p(N) est une suite décroissante vers $F(X_o)+\Delta$, (C1) est donc vérifiée.

△

Proposition 1.4.2. *La suite* $\big(b_k \circ F\big)_k$ *est indépendante sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Démonstration

Elle découle immédiatement de la nature du découpage en utilisant la proposition 1.4.1.

△

Remarque

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que l'intervalle $[0, F(X_o)+\Delta]$ n'est pas découpé. Même si $F(X_o)+\Delta$ est "très petit", il existe un rang pour lequel $F^{-1}\big([0, F(X_o)+\Delta]\big)$ est le plus grand intervalle.

ii) Une deuxième construction

On va construire une suite de Rademacher généralisée en choisissant les α_k de façon à découper l'intervalle $I \equiv]F(X_0), F(X_0)+\Delta]$ avant $F(X_0)$ (pour appliquer la proposition 1.3.2.).

$$b_0 = 1$$

on choisit $\alpha_1 < F(X_0)$ dans]0,1[,

$$b_1 = 1_{]0,\alpha_1]} - 1_{]\alpha_1,1]} = 1_{]0,\alpha_1]} - 1_{]\alpha_1,F(X_0)]\bigcup]F(X_0),1]}$$

pour $\alpha_2 \in]0,1[$ tel que :

$$\alpha_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2 < F(X_0)$$

$$b_2 = 1_{]0,\alpha_1\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1\alpha_2,\alpha_1]} + 1_{]\alpha_1,\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2,F(X_0)]\bigcup]F(X_0),1]}.$$

CONDITION TECHNIQUE

> On prend une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ vérifiant :
> $\forall N \in \mathbb{N} - \{0,1\}$:
>
> $$(C2) \qquad \alpha_1 + \sum_{k=2}^{N} \alpha_k \prod_{1\leq j\leq k-1} (1-\alpha_j) < F(X_0).$$

Supposons, qu'au rang N, l'intervalle contenant I soit de la forme :

$$\left]\alpha_1 + \sum_{k=2}^{N} \alpha_k \prod_{1\leq j\leq k-1} (1-\alpha_j), 1\right] =]a,b].$$

On le découpe en deux, avec la méthode du 1.3, proportionnellement à α_{N+1} et $1-\alpha_{N+1}$:

$$]a, a+(a-b)\alpha_{N+1}]\bigcup]a+(a-b)\alpha_{N+1}, b].$$

Pour respecter le modèle de construction imposé il faut :

$$a + (a-b)\alpha_{N+1} < F(X_0).$$

En remplaçant a et b par leur valeur, (C2) donne le résultat, à savoir :

$$I \subset \left]\alpha_1 + \sum_{k=2}^{N} \alpha_k \prod_{1\leq j\leq k-1} (1-\alpha_j)\ ,\ 1\right].$$

Lemme 1.4.2. *On conserve le mêmes hypothèses*

1) Si $\forall k \geq 1$ $\alpha_k = \alpha \in]0,1[$ alors on ne peut pas construire la suite $(b_k)_{k\geq 0}$.

2) Etant donné $a \in]0,1[$, la suite $\left(\alpha_k\right)_{k\geq 1}$ définie par $\alpha_k = a^k$ vérifie la condition (C2) si :

$$0 \leq \frac{a}{1-a(a+1)} < F(X_0).$$

Démonstration

On va étudier

$$S = \alpha_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k \prod_{1 \le j \le k-1} (1 - \alpha_j).$$

1) Si $\forall k \ \alpha_k = \alpha$ alors

$$S = \alpha \Big(\sum_{j=2}^{\infty} (1-\alpha)^{k-1} + 1 \Big) = 1.$$

La condition (C2) s'écrit

$$1 < F(X_0)$$

ce qui est faux.

2) On remplace α_k par a^k :

$$S = a + \sum_{j=1}^{\infty} a^{k+1} \prod_{1 \le j \le k-1} (1 - a^j).$$

On va utiliser l'identité :

$$(1 - x_1) \cdots (1 - x_k) = 1 + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k} x_{i_1} \cdots x_{i_j}$$

pour majorer le produit.

$$S = a + \sum_{j=1}^{\infty} a^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k} a^{i_1 + \cdots + i_j} + 1 \right)$$

$$\le \frac{a}{1-a} + \sum_{j=1}^{\infty} a^{k+1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^{\frac{j(j+1)}{2}},$$

car

$$1 + \cdots + j \le i_1 + \cdots + i_j.$$

Comme

$$j \le \frac{j(j+1)}{2}$$

et

$$a^{\frac{j(j+1)}{2}} \le a^j$$

on a :

$$S \le \frac{a}{1-a} + \sum_{j=1}^{\infty} a^{k+1} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a^j = \frac{a}{1-a} + \sum_{j=1}^{\infty} a^{k+1} \Big[(1+a)^k - 1 \Big] = \frac{a}{1 - a(1+a)}.$$

Si on note S(N) les sommes partielles alors $\Big(S(N)\Big)_N$ est une suite croissante. Par hypothèse $S \leq F(X_0)$ et la condition (C2) est donc vérifiée.

$\triangle$

Remarque

Posons $f(a) = \frac{a}{1-a(1+a)}$ sur $]0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}[$. C'est une fonction continue croissante de 0 à $+\infty$; donc $\{x|f(x) < F(X_0)\} \neq \emptyset$, on choisit a dans cet ensemble.

Proposition 1.4.3. *La suite* $\big(b_k \circ F\big)_k$ *est indépendante sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

<u>Démonstration</u>

Elle découle immédiatement de la nature du découpage en utilisant la proposition 1.4.1.

$\triangle$

Remarque

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que l'intervalle $][F(X_0), 1]$ n'est pas découpé. Même si $F(X_0)$ est proche de 1, il existe un rang pour lequel $F^{-1}\Big(]F(X_0), 1]\Big)$ est le plus grand intervalle.

iii) Une troisième construction

On va construire une suite de Rademacher généralisée en choisissant les α_{2k} (resp. les α_{2k+1}) de façon à découper l'intervalle contenant I après $F(X_o) + \Delta$ (resp. avant $F(X_0)$) :

$$b_0 = 1$$

on choisit $\alpha_1 < F(X_0)$ dans]0,1[,

$$b_1 = 1_{]0,\alpha_1]} - 1_{]\alpha_1,1]} = 1_{]0,\alpha_1]} - 1_{]\alpha_1,F(X_0)]\bigcup]F(X_0),1]}$$

on choisit $\alpha_2 \in]0, 1[$ tel que :

$$\alpha_1 + (1 - \alpha_1)\alpha_2 > F(X_o) + \Delta$$

$$b_2 = 1_{]0,\alpha_1\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1\alpha_2,\alpha_1]} + 1_{]\alpha_1,F(X_0)]\bigcup]F(X_0),\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2]} - 1_{]\alpha_1+(1-\alpha_1)\alpha_2,1]}.$$

CONDITION TECHNIQUE

On prend une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ vérifiant :

$$(C3) \qquad \begin{cases} g(k) \equiv \displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} D(2j+1) & < F(X_0) \quad \text{k impair} \\ d(k) \equiv \displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} D(2j+1) + U(k) & > F(X_o) + \Delta \quad \text{k pair} \end{cases}$$

Où

$$D(2j+1) = \prod_{i=0}^{j-1}\big(1-\alpha_{2i+1}\big)\Big(\prod_{i=1}^{j}\alpha_{2i}\Big)\alpha_{2j+1}$$

$$U(2j) = \prod_{i=0}^{j-1}\big(1-\alpha_{2i+1}\big)\Big(\prod_{i=1}^{j}\alpha_{2i}\Big).$$

Supposons qu'au rang 2N (resp. 2N+1), l'intervalle contenant I soit de la forme :

$$]g\big(2(N-1)+1\big), d(2N)]$$

(resp. $]g\big(2N+1\big), d(2N)]$).

On fait le découpage au rang 2N+1 :

$$]g(2N-1), g(2N-1) + \Big(d(2N) - g(2N-1)\Big)\alpha_{2N+1}]\bigcup$$
$$]g(2N-1) + \Big(d(2N) - g(2N-1)\Big)\alpha_{2N+1}, d(2N)]$$
$$\Big(d(2N) - g(2N-1)\Big)\alpha_{2N+1} = U(2N)\alpha_{2N+1} = D(2N+1).$$

Donc

$$g(2N-1) + \Big(d(2N) - g(2N-1)\Big)\alpha_{2N+1} = g(2N+1),$$

comme

$$g(2N+1) < F(X_0),$$

l'intervalle contenant I est :

$$]g(2N+1), d(2N)]$$

On fait le découpage au rang 2N+2 :

$$]g(2N+1), g(2N+1) + \Big(d(2N) - g(2N+1)\Big)\alpha_{2N+2}] \bigcup$$

$$]g(2N+1) + (d(2N) - g(2N+1))\alpha_{2N+2}, d(2N)].$$

Avec

$$\Big(d(2N) - g(2N+1)\Big)\alpha_{2N+2} = U(2N)\Big(1 - \alpha_{2N+1}\Big)\alpha_{2N} = U\Big(2(N+1)\Big)$$

et

$$g(2N+1) + U\big(2(N+1)\big) = d\big(2(N+1)\big).$$

Comme

$$d\big(2(N+1)\big) \geq F(X_o) + \Delta$$

l'intervalle contenant I est

$$](g(2N+1), d\big(2(N+1)\big)].$$

Ce qui termine la récurrence pour le cas pair. On vérifie aisément le résultat pour le cas impair.

Remarque

Pour $k \geq 1$:

$$g(2k+1) = \alpha_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3 + (1-\alpha_1)\sum_{j=2}^{k}\alpha_{2j}\alpha_{2j+1}\prod_{i=1}^{j-1}(1-\alpha_{2i+1})\alpha_{2i}$$

Pour $k \geq 2$:

$$d(2k) = \alpha_1 + \sum_{j=2}^{k-1}\Big(\alpha_{2j+1}\prod_{i=0}^{j-1}(1-\alpha_{2i+1})\prod_{i=1}^{j}\alpha_{2i}\Big) + \prod_{i=0}^{k-1}(1-\alpha_{2i+1})\prod_{i=1}^{k}\alpha_{2i}$$

$$= g(2k+1) + (1-\alpha_1)\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_{2i+1})\alpha_{2i}.$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} g(1) & = & \alpha_1 \\ \\ k \geq 1 \\ g(2k+1) & = & \alpha_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3 + (1-\alpha_1)\displaystyle\sum_{j=2}^{k} \alpha_{2j}\alpha_{2j+1} \prod_{i=1}^{j-1}(1-\alpha_{2i+1})\alpha_{2i} \\ d(2) & = & \alpha_1 + (1-\alpha_1)\alpha_2 \\ \\ k \geq 2 \\ \\ d(2k) & = & g(2k+1) + (1-\alpha_1)\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_{2i+1})\alpha_{2i} \end{cases}$$

Monotonie

$\Big(g(2k+1)\Big)_k$ est une suite croissante, majorée donc convergente.

Pour $k \geq 2$:

$$d(2k+2) - d(2k) = (1-\alpha_1)\Big(\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_{2i+1})\alpha_{2i}\Big)(\alpha_{2k+2} - 1) \leq 0.$$

$\Big(d(2k)\Big)_k$ est une suite décroissante, minorée donc convergente.

Posons

$$\begin{cases} g = \lim\limits_{k\to\infty} g(2k+1) \\ d = \lim\limits_{k\to\infty} d(2k). \end{cases}$$

Lemme 1.4.3. *On conserve les mêmes notations*

1) Si pour tout entier naturel k, $\alpha_k = \alpha$ alors on ne peut pas construire la suite $\Big(b_k\Big)_{k\geq 0}$.

2) La suite $\left(\alpha_k\right)_{k\geq 1}$ *définie par :*

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & 1 - A(\widetilde{\Delta} - a) \\ k \geq 1 & & \\ \alpha_{2k} & = & \dfrac{\widetilde{\Delta} + \frac{a}{2k}}{\widetilde{\Delta} + \frac{a}{2k-1}} \\ \\ \alpha_{2k+1} & = & 1 - \dfrac{\widetilde{\Delta} + \frac{a}{2k+1}}{\widetilde{\Delta} + \frac{a}{2k}} \end{cases}.$$

Avec : • $A = \dfrac{1}{\ln 2}$

• $\widetilde{\Delta} = \left(\Delta + \dfrac{1}{10^p}\right)\ln 2$

• $a = 1 - \left(F(X_o) + \Delta + \dfrac{1}{10^{p+1}}\right)$.

p étant choisit pour que $F(X_o) + \Delta + \dfrac{1}{10^{p+1}} < 1$, *vérifie la condition (C3)*

Démonstration

1) Supposons $\forall k \geq 1$ $\alpha_k = \alpha$

$$g(2k+1) = \alpha + \sum_{j=1}^{k}(1-\alpha)^j\alpha^{j+1}$$

$$= \alpha + \alpha^2(1-\alpha)\frac{1 - \Big((1-\alpha)\alpha\Big)^k}{1-(1-\alpha)\alpha}.$$

$$\alpha \in]0,1[\Rightarrow \lim_{k\to\infty} g(2k+1) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)\alpha}.$$

Par des calculs similaires on obtient :

$$\lim_{k\to\infty} d(2k) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)\alpha}.$$

A la limite on aurait :

$$F(X_o) + \Delta \geq \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)\alpha} \geq F(X_0)$$

ce qui est impossible car $\Delta > 0$.

2) On va vérifier que $d \geq F(X_o) + \Delta$ et $g \leq F(X_0)$ de cette façon (C3) sera vérifiée.

On remplace α_k par sa valeur dans les expressions donnant g et d pour obtenir :

$$g = 1 - A\Big(\widetilde{\Delta} + a\ln 2\Big) = F(X_0) - \frac{9}{10^{p+1}}$$
$$d = g + A\widetilde{\Delta} = F(X_o) + \Delta + \frac{1}{10^{p+1}}.$$

$\triangle$

Remarque

On a :

$$\Big(F(X_0) - g\Big)\bigvee\Big(d - (F(X_o) + \Delta)\Big) \leq \frac{1}{10^{p+1}}.$$

Proposition 1.4.4. *La suite* $\big(b_k \circ F\big)_k$ *est indépendante sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

<u>Démonstration</u>

Elle découle immédiatement de la nature du découpage en utilisant la proposition 1.4.1.

$\triangle$

Remarques

1) En prenant $\widetilde{\Delta} = \Delta \ln 2$

$$a = 1 - \Big(F(X_o) + \Delta\Big).$$

On obtient $g = 1 - \Delta - a = F(X_0)$

$$d = 1 - a = F(X_o) + \Delta.$$

Comme la suite$\Big(g(2k+1)\Big)_k$ (resp. $\Big(d(2k)\Big)_k$) est décroissante (resp. croissante), la condition (C3) est toujours vérifiée.

2) Ce découpage est plus intéressant que les deux précédents car seul I n'est pas découpé et comme

$$F^{-1}(I) = \emptyset$$

quand on fait opérer F^{-1}, cela n'apparaît pas.

1.4.2 Cas d'un nombre fini de sauts

Chapitre 2

Système maximum de variables aléatoires indépendantes

2.1 Position du problème

On fixe : • des éléments $a_1, \ldots, a_n$, distincts, dans un ensemble Ω

• $\mu = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta_{a_k}$ avec $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, $p_k \in]0,1[$, $k = 1, \ldots, n$

• l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On se pose la question suivante : étant donnée une variable aléatoire c$=\sum_{k=1}^{n} c_k 1_{\{a_k\}}$ (où $c_k \in \mathbb{R}$), quelle est la taille d'un système maximum de variables aléatoires globalement indépendantes ?

Modélisation

On construit l'isomorphisme naturel :

$$L^2_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}^n \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k 1_{\{a_k\}} \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

où $\Big(e_k\Big)_{k=1,\ldots,n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La variable aléatoire c s'écrit alors c $= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

2.2 Caractérisation

Théorème 2.2.1. *Une variable aléatoire* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *est indépendante de c ssi pour toutes fonctions mesurables f et g sur* $\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})\Big)$ *:*

$$\Big(f(b), Ag(c)\Big)_{\mathbb{R}^n} = 0$$

où $A = \Big(a_{ij}\Big)_{1 \leq i,j \leq n}$ *avec* $a_{ij} = \begin{cases} p_i^2 - p_i & si \quad i = j \\ p_i p_j & si \quad i \neq j \end{cases}$

Démonstration

b et c sont indépendantes ssi $E\Big(f(b)g(c)\Big) = E\Big(f(b)\Big)E\Big(g(c)\Big)$ pour toutes fonctions f, g mesurables sur $\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})\Big)$.

$f(b) = \sum_{k=1}^{n} f(b_k)1_{\{a_k\}}$, $g(c) = \sum_{k=1}^{n} g(c_k)1_{\{a_k\}}$.

En explicitant la première égalité : $\sum_{k=1}^{n}\Big(p_k^2 - p_k\Big)f(b_k)g(c_k) = \sum_{j \neq k} p_j p_k f(b_j)g(c_k)$.

$\triangle$

Remarques

1. Ce théorème n'est que la traduction sur $\mathbb{R}^n$ via l'isomorphisme, de ce qu'il se passe dans $L^2(\mu)$.
2. Le noyau de A est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par $1_{\mathbb{R}^n}$ (on vérifie aisément que $Ax = 0 \iff \forall i \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = x_i$).

2.3 Cas général

2.3.1 Notations

- On notera plutôt 1 que $1_{\mathbb{R}^n}$
- NCD =nombre de coordonnées distinctes de c,

- G=[g(c), g] c'est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les éléments g(c), g parcourant l'espace des fonctions mesurables sur $\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})\Big)$,
- F(b) =[f(b),f],
- Im$A_{|G}$ = l'image de l'opérateur A restreint au sous espace vectoriel G,
- A_k = la $k^{\text{ième}}$ colonne de A,
- $A_k(j)$ = la $j^{\text{ième}}$ coordonnée du vecteur A_k (le cœfficient a_{jk} de la matrice A),
- $c_{u_1}, \ldots, c_{u_{NCD}}$ les coordonnées distinctes de c,
- $I_i = \{j | c_j = c_{u_i}\}$, $i = 1, \ldots, NCD$,
- $N_i = \sharp I_i$ pour i=1,...,NCD,
- $b_{v_1}, \ldots, b_{v_q}$ les coordonnées distinctes de b,
- $J_i = \{j | b_j = b_{v_i}\}$, $i = 1, \ldots, q$,
- $M_i = \sharp J_i$ pour i=1,...,q.

2.3.2 Indépendance, première approche

Lemme 2.3.1. *On a les propriétés suivantes :*

1. *dim G = NCD*
2. $1 \in G$
3. $1 \in (ImA_{|G})^{\perp}$.

<u>Démonstration</u>

(a) Si nous posons, pour tout $j = 1, \ldots, NCD$: $\varepsilon_j(c) = \sum_{k \in I_j} e_k$, on peut écrire $c = \sum_{j=1}^{NCD} c_{u_j} \varepsilon_j(c)$.
Pour tout g, g(c) $\in [\varepsilon_1(c), \ldots, \varepsilon_{NCD}(c)] \equiv \widetilde{G}$ donc $G \subset \widetilde{G}$.

Soit z $\in \widetilde{G}$, $z = \sum_{k=1}^{NCD} z_k \varepsilon_k(c)$, il existe g mesurable sur $\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R})\Big)$ (l'interpolation de Lagrange nous fournit un polynôme qui convient) telle que $g(c_{u_k}) = z_k$ pour $k = 1, \ldots, NCD$.

(b) Il suffit de prendre g=1.

(c) $\Big(1, Ag(c)\Big)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} p_k g(c_k) - \sum_{j,k} p_j p_k g(c_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k g(c_k) - \left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) \sum_{k=1}^{n} p_k g(c_k) = 0.$

$\triangle$

Remarques

1. dim $\Big(\mathrm{Im}A_{|G}\Big) = NCD - 1$ puisque $1 \in G$.
2. On peut raisonner pour le point 1) du lemme 2.3.1. sur l'espace probabilisé. G est l'image, par l'isomorphisme naturel, de l'espace vectoriel engendré par les indicatrices des ensembles $c^{-1}\Big(\{c_{u_\nu}\}\Big)$, $\nu = 1, \ldots, NCD$. Ces ensembles étant disjoints et au nombre de NCD, la dimension de cet espace est NCD.
3. Si c a toutes ses coordonnées distinctes alors :
   - Sur $\mathbb{R}^n$

     dim $\Big(\mathrm{Im}A_{|G}\Big) = n - 1$ donc dim $(\mathrm{Im}A_{|G})^{\perp} = 1$ et par suite la variable aléatoire constante égale à 1 est la seule variable aléatoire indépendante de c (pour être précis il faut dire que toutes les variables aléatoires de l'espace vectoriel engendré par la variable aléatoire 1 sont indépendantes de c).

   - Sur$L^2(\mu)$

     La tribu engendrée par c, est la tribu discrète, donc seule la variable aléatoire 1 lui est indépendante.

   Dans la suite on pourra supposer $NCD < n$.
4. Si toutes les coordonnées de c sont égales alors :
   - Sur $\mathbb{R}^n$

     $\mathrm{Im}A_{|G} = \{0\}$. C'est à dire, toutes les variables aléatoires sont dans $\Big(\mathrm{Im}A_{|G}\Big)^{\perp}$ et par suite, lui sont indépendantes.

   - Sur $L^2(\mu)$

     La tribu engendrée par c, est la tribu grossière qui est indépendante de toute tribu.

   Dans la suite on pourra supposer $NCD > 1$.

5. On va utiliser la caractérisation suivante de l'indépendance de b et c :

$$\mathrm{Im}A_{\big|G} \subset \Big(F(b)\Big)^{\perp}.$$

A partir de maintenant on prend : NCD $\in \{2, \ldots, n-1\}$

Lemme 2.3.2. *Soit une variable aléatoire b telle que dim F(b) = $q \neq 1$. Les éléments, $\Big(x_i\Big)_{i=1,\ldots,n}$ de $\Big(F(b)\Big)^{\perp}$ vérifient un système de la forme :*

$$\begin{cases} \sum_{j \in J_i} x_j = 0 \\ i = 1, \ldots, q \end{cases}$$

Démonstration

On a vu (point 1 de la démonstration du lemme 2.3.1.) que le système $\{\varepsilon_1(b), \ldots, \varepsilon_q(b)\}$ forme un base de F(b) donc :

$$x \in F^{\perp} \iff \forall k \in \{1, \ldots, q\} \ \Big(x, \varepsilon_k(b)\Big) = 0 \iff \Big(x, \sum_{j \in J_k} e_j\Big) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{j \in J_k} x_j = 0 \\ k = 1, \ldots, q \end{cases}$$

△

Lemme 2.3.3. *S'il existe $k \in \{1, \ldots, NCD\}$ tel que $N_k = 1$ alors la variable aléatoire constante égale à 1 est la seule variable aléatoire indépendante de c.*

Démonstration

Supposons $N_k = 1$ et que b$\neq$ 1 est indépendante de c. Alors par le théorème 2.2.1. pour toutes fonctions boréliennes f, g $\Big(f(b), Ag(c)\Big) = 0$.
Prenons en particulier g(c) = e_{u_k} alors :

- Pour f=I, on a $\sum_{i=1}^{n} b_i p_i = b_1$
- Pour $f(x) = x^2$ on a $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 p_i = b_1^2$

Ce qui donne : $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 p_i = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i p_i\right)^2$ et donc $b_i = b_j$ pour tout (i,j)$\in \{1,\ldots,n\}^2$, c'est à dire $b \in [1]$.

$\triangle$

2.3.3 Conditions nécessaires d'indépendance

Proposition 2.3.1. *On suppose que pour tout j dans $\{1,\ldots,NCD\}$, $2 \leq N_j < n$.*

Pour tout $k \in \{1,\ldots,NCD\}$ les vecteurs :

$$\begin{cases} V_\nu = \sum_{i \in I_\nu} A_i \\ \nu \in \{1,\ldots,NCD\} - \{k\} \end{cases}$$

forment une base de $ImA_{|G}$.

De plus, si on note $V_\nu(j)$ la $j^{ième}$ coordonnée de V_ν alors :

$$V_\nu(j) \neq 0 \text{ pour tout } (\nu, j) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,n\}.$$

Corollaire 2.3.1. *On conserve les notations de la proposition 2.3.1.*

Prenons $b \neq 1$ et posons

$$F(b)^\perp = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} \sum_{j \in J_i} x_j = 0 \\ i = 1,\ldots,q \end{cases} \right\}$$

Deux conditions nécessaires pour que $ImA_{|G} \subset F(b)^\perp$ sont :

- $M_\nu \geq 2$ *pour* $\nu = 1,\ldots,q$
- $q \leq \min_{j \in \{1,\ldots,NCD\}-\{k\}} \left\{N_\nu, n - N_\nu\right\}$.

Démonstration de la proposition 2.3.1.

- $\left(A\varepsilon_i(c)\right)_{i \neq k}$ est un système générateur de $\mathrm{Im}A_{|G}$ puisque on peut prendre $\left\{1, \varepsilon_i(c), i \in \{1,\ldots,NCD\} - \{k\}\right\}$ comme base de G . On sait d'autre part que dim $\left(\mathrm{Im}A_{|G}\right)=$

$NCD-1$. Ce système forme donc une base de $\mathrm{Im}A_{|G}$.

• $V_\nu(j) = \sum_{i\in I_\nu} A_i(j) = \begin{cases} p_j\Big(\sum_{i\in I_\nu} p_i\Big) & > 0 \\ \text{ou} & \\ p_j\Big(\sum_{i\in I_\nu} p_i - 1\Big) & < 0 \end{cases}$

△

Démonstration du corollaire 2.3.1.

• S'il existe ν tel que $N_\nu = 1$ alors l'équation $x_{v_\nu} = 0$ est une des équations définissant $F(b)^\perp$. D'après la proposition 2.3.1. aucune coordonnée des vecteurs de la base de $\mathrm{Im}A_{|G}$ n'est nulle donc $\mathrm{Im}A_{|G}$ n'est pas contenue dans $F(b)^\perp$.

• Fixons j dans $\{1,\dots,NCD\}-\{k\}$, $V_j = \sum_{i\in I_j} A_i$. On additionne N_j colonnes donc V_j a N_j termes < 0 et $n - N_j$ termes> 0.

En effet : $V_j = \begin{pmatrix} p_1\Big(\sum_{i\in I_j} p_i - \widetilde{\varepsilon}_1(I_j)\Big) \\ \vdots \\ p_n\Big(\sum_{i\in I_j} p_i - \widetilde{\varepsilon}_n(I_j)\Big) \end{pmatrix}$

où $\widetilde{\varepsilon}_\nu(I_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \nu \in I_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et les $\widetilde{\varepsilon}_\nu(I_j)$ valent exactement N_ν fois 1, j étant fixé.

• Si on a plus de N_j (resp. $n - N_j$) équations, $q > N_j$ (resp. $q > n - N_j$), alors il y en a une dans laquelle il n'y a que des termes > 0 (resp. < 0), elle ne s'annule donc pas. On en déduit qu'on doit avoir $q \leq \min(N_j, n - N_j)$ pour que V_j soit dans $F(b)^\perp$. Un raisonnement similaire pour chaque vecteur de la base nous donne :

$$q \leq \min_{j\in\{1,\dots,NCD\}-\{k\}} \Big(N_j, n - N_j\Big)$$

△

Théorème 2.3.1. *Soit une variable aléatoire c telle que dim $G = p$ avec 1$\leq p < n$. Une condition nécessaire pour que les variables aléatoires c,$b_1,\dots,b_N$, $b_i \neq 1$ $i = 1,\dots,N$, forment un système globalement indépendant est :*

$$p\prod_{i=1}^{N} n(b_i) \leq n$$

où $n(b_i) = dim\ F(b_i)\ i = 1 \ldots, N$.

Démonstration

On regarde les tribus engendrées par chacune des variables aléatoires :
$\mathcal{F}_c = \sigma\Big(\Gamma_1^0, \ldots, \Gamma_p^0\Big)$ où $\Gamma_j^0 = \{a_i | i \in I_j\} = c^{-1}\Big(\{c_{u_j}\}\Big)$.
Et pour $i = 1, \ldots, N$ $\mathcal{F}_{b_i} = \sigma\Big(\Gamma_1^i, \ldots, \Gamma_{n(b_i)}^i\Big)$
où $\Gamma_\nu^i = b_i^{-1}\Big(\{x_{r_\nu}^i\}\Big)$, $x_{r_1}^i, \ldots, x_{r_{n(b_i)}}^i$ étant les coordonnées distinctes de b_i.
Pour avoir l'indépendance il faut que les intersections $\Gamma_{k_0}^0 \bigcap \cdots \bigcap \Gamma_{k_N}^N$ soient non vides pour tout $(k_0, \ldots, k_N) \in \{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, n(b_1)\} \times \cdots \times \{1, \ldots, n(b_N)\}$. Ce qui nous fait $p\prod_{i=1}^{N} n(b_i)$ conditions à vérifier.
D'autre part on a $\Big(A_{k_0}^0 \bigcap \cdots \bigcap A_{k_N}^N\Big) \bigcap \big(A_{l_0}^0 \bigcap \cdots \bigcap A_{l_N}^N\Big) = \emptyset$ pour tout :
$\Big((k_0, \ldots, k_N), (l_0, \ldots, l_N)\Big) \in \Big(\{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, n(b_1)\} \times \cdots \times \{1, \ldots, n(b_N)\}\Big)^2$
puisque pour tout $j \in \{0, \ldots, N\}$ et tous $\eta \neq \nu$, $\Gamma_\eta^j \bigcap \Gamma_\nu^j = \emptyset$.
Ainsi pour avoir l'indépendance on doit nécessairement avoir $p\prod_{i=1}^{N} n(X_i) \leq n = \sharp\Omega$.

△

Corollaire 2.3.2. *Le nombre maximun de variables aléatoires globalement indépendantes est :*

$$N_{max} = \max\Big\{k \in I\!N | 2^{k-1} \leq n\Big\}.$$

Démonstration

Pour tout ensemble, $E(N) = \{b_1, \ldots, b_N\}$, de variables aléatoires globalement indépendantes on a :

- $1 \in E(N)$
- $\prod_{i=2}^{k} n(b_i) \leq n$
- $N_{\max} = \max\Big\{N | \prod_{i=2}^{N} n(b_i) \leq n \text{ avec } b_2, \ldots, b_N \text{ ind.}, \neq 1\Big\}$

Pour toute variable aléatoire b_i, $n(b_i) \geq 2$, donc $\prod_{i=2}^{N} n(b_i) \geq 2^{N-1}$ et par suite :
$N_{\max} \leq \max\Big\{N | 2^{N-1} \leq n\Big\}$.
Pour finir il suffit de prendre $b_i = x_1^i 1_{A_1^i} + x_2^i 1_{A_2^i}$ $i = 1, \ldots, N$ pour avoir $N_{\max} \geq$

$$\max\Big\{N|2^{N-1} \leq n\Big\}.$$

$\triangle$

Deuxième partie

DENSITÉ DE VARIABLES ALÉATOIRES

Chapitre 3

Polynômes de Wick

3.1 Introduction

On fixe : • (M,Σ,μ) un espace probabilisé,

• f, g$\in L^p(M,\Sigma,\mu)$ $\forall p \geq 1$,

on note : • $m_p = \int_M f^p d\mu$, $m_p^a = \int_M |f|^p d\mu$, nombres qui sont finis,

• $H_n = [f^k, k = 0, \ldots, n]$.

Remarque

On peut se demander quelle est la dimension de H_n. Ici on va prendre comme hypothèse, dim(H_n)= n+1, c'est le cas quand le support de f est d'intérieur non vide. Cette condition n'est pas automatique, comme le montre l'exemple suivant :

en prenant $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$, $f = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ on obtient $H_0 = [1]$, $H_1 = [1, f]$, $H_k = H_1$ pour tout $k \geq 2$.

Définition 3.1.1. *On définit l'opérateur D_f sur H_n par :*

$$D_f(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k f^{k-1}.$$

Proposition 3.1.1. *On peut définir cet opérateur sur $\bigcup_n H_n$ et le prolonger dans $L^2(M,\Sigma,\mu)$:*

$$D_f(\sum_{k\geq 0} a_k f^k) = \sum_{k\geq 1} k a_k f^{k-1},$$

sur l'ensemble des séries convergentes, $\sum_{k\geq 0} a_k f^k$, *dans* $L^2(M,\Sigma,\mu)$.

Proposition 3.1.2. *On a les propriétés suivantes :*

1) D_f *est linéaire,*

2) si $h = af+b$ *alors* $H_n = [h^k, k = 0,\ldots,n]$ *et*

$$D_f[(af+b)^n] = aD_h(h^n),$$

3) on a :

$$D_f\Big(\sum_{k=0}^{N_1} a_k f^k \sum_{k=0}^{N_2} b_k f^k\Big) = D_f\Big(\sum_{k=0}^{N_1} a_k f^k\Big)\sum_{k=0}^{N_2} b_k f^k + \sum_{k=0}^{N_1} a_k f^k D_f\Big(\sum_{k=0}^{N_2} b_k f^k\Big).$$

Démonstration

1) Simples calculs.

2) On développe $(af+b)^n$ avec la formule du binôme de Newton.

3) On développe le produit, on lui applique D_f :

$$\sum_{n=0}^{N_1+N_2}\sum_{k=0}^{n} na_k b_{n-k} f^{n-1}$$

on écrit $n = (n-k)+k$ et on a le résultat.

△

Remarque

Quand on se place sur l'espace image, D_f devient une vraie dérivation.

Plus précisément, si à $g \in \bigcup H_n$ on associe le polynôme P(x), dans $L^2(\mu_f)$, $\big(g = \sum_{finie} a_k f^k \mapsto \sum a_k x^k = P(x)\big)$ on a $D_f(g) = \frac{dP}{dx} of$.

Définition 3.1.2. *On définit une suite* $(f^{\widetilde{n}})_{n\geq 0}$, *appelée* $n^{\textbf{ième}}$ **puissance de Wick de f**, *par :*

$$\begin{cases} f^{\widetilde{0}} & = & 1 \\ D_f(f^{\widetilde{n+1}}) & = & (n+1)f^{\widetilde{n}},\ n\geq 1,\ \textit{vérifiant} \begin{cases} \int_M f^{\widetilde{n+1}} d\mu & = & 0 \\ f^{\widetilde{n+1}} & \in & H_{n+1}. \end{cases} \end{cases}$$

Proposition 3.1.3. *On a :*

$$\textit{si } h = af+b,\ b\neq 0,\ \textit{alors } h^{\widetilde{n}} = a^n f^{\widetilde{n}}.$$

Démonstration

Par récurrence :

$f^{\widetilde{0}} = h^{\widetilde{0}} = 1$, $f^{\widetilde{1}} = f - m_1$, $h^{\widetilde{1}} = h - E(h) = a(f - m_1) = af^{\widetilde{1}}$

Supposons que $h^{\widetilde{n}} = a^n f^{\widetilde{n}}$.

$$\begin{aligned} D_f(h^{\widetilde{n+1}}) &= aD_h(h^{\widetilde{n+1}}) \text{ (proposition 3.1.2.)} \\ &= a(n+1)h^{\widetilde{n}} \overset{\text{H.R.}}{=} a^{n+1}(n+1)f^{\widetilde{n}} \\ &= a^{n+1}D_f(f^{\widetilde{n+1}}) \end{aligned}$$

$D_f(h^{\widetilde{n+1}} - a^{n+1}f^{\widetilde{n+1}}) = 0 \Rightarrow h^{\widetilde{n+1}} - a(n+1)f^{\widetilde{n+1}} = \text{const.}$;

finalement comme $E(h^{\widetilde{n+1}} - a^{n+1}f^{\widetilde{n+1}}) = 0$, const.$= 0$.

$\triangle$

3.2 Exponentielle de Wick

- On suppose qu'on a $\exp|t| \cdot |f| \in L^2(M, \Sigma, \mu)$ pour tout $t \in V$ (V étant un voisinage de zéro).

- La transformée de Laplace de f est donnée par : $\phi_f(t) = \int_M \exp(tf)d\mu$. Une condition suffisante pour que $S_n(t, f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} f^k$ converge dans $L^1(M, \Sigma, \mu)$ est que :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|t|^n}{n!} m_n < \infty.$$

Définition 3.2.1. *On définit :*

$$\mathcal{E}xp(tf) \equiv \frac{e^{tf}}{\phi_f(t)}$$

qu'on appelle **exponentielle de Wick.**

Exemples : EXPONENTIELLES DE WICK

1) pour $f \sim \mathcal{N}(0, 1)$: $\mathcal{E}\text{xp}(tf) = e^{tf - \frac{t^2}{2}}$,

on reconnaît la fonction génératrice des polynômes de Hermite,

2) pour $f \sim exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$: $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tf) = e^{tf}\dfrac{\lambda - t}{\lambda}$,

3) pour $f \sim \Gamma(a, b)$: $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tf) = e^{tf}\left(\dfrac{b}{b-t}\right)^{-a}$,

4) pour $f \sim \Gamma(1/2, 1/2)$: $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tf) = e^{tf}\sqrt{1-2t}$,

5) pour $f \sim \Gamma\Big(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\Big)$: $e^{tf}\left(\dfrac{b_1}{b_1 - \alpha t}\right)^{-a_1}\left(\dfrac{b_2}{b_2 - \beta t}\right)^{-a_2}$,

6) pour $f \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$: $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tf) = \exp\big(tf - a(e^t - 1)\big)$.

Proposition 3.2.1. *Sous les conditions énoncées plus haut, $\mathcal{E}xp(tf)$ est, dans un voisinage de zéro, développable en série entière (convergente dans $L^1(M, \Sigma, \mu)$) et on a :*

$$E(\mathcal{E}xp) = 1.$$

Notations

- $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tf) = \sum_{n\geq 0} W_n(f)\dfrac{t^n}{n!}$,

- $\phi_f(t) = \sum_{n\geq 0} m_n \dfrac{t^n}{n!}$,

- $(\phi_f(t))^{-1} = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{t^n}{n!}$,

- $S_n(t, f) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^k}{k!} f^k$,

- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose : $\dbinom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-k+1)}{k!}$,

- On notera $[x]$ pour la partie entière du réel x.
- On a : $\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} m_k a_{n-k} = 0$.

<u>Démonstration</u>

Il existe un voisinage, V', de zéro sur lequel $\phi_f(t)$ ainsi que $(\phi_f(t))^{-1}$ sont développables en série entière ($\phi_f(t)$ ne s'annule pas). Voyons la convergence dans $L^2(M, \Sigma, \mu)$:

Posons $A_n = \sum_{k+l=n} \frac{t^k}{k!}\frac{t^l}{l!} a_k f^l$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} |A_n| &\leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{|t|^k}{k!}\frac{|t|^l}{l!}|a_k|\cdot|f|^l \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\frac{|t|^k}{k!}|a_k|}_{C(t)} \sum_{l=1}^{m}\frac{|t|^l}{l!}|f|^l\end{aligned}$$

$|S_n(t,f)| \leq \sum_{n=1}^{m} |A_m| \leq C(t)\exp|t|\cdot|f| \Rightarrow$ convergence dans $L^1(M,\Sigma,\mu)$.
La convergence dans $L^2(M,\Sigma,\mu)$ en découle car :
$|S_n(t,f)| - \frac{\exp(tf)}{\phi_f(t)}|^2 \leq C(t)\exp(2|t||f|)$.

△

Proposition 3.2.2. *On a :*

$$f^{\widetilde{n}} = W_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k f^{n-k}.$$

<u>**Démonstration**</u>

$f^{\widetilde{0}} = 1$, $W_0(f) = 1$; $f^{\widetilde{1}} = f - m_1$, $W_1(f) = f + a_1$, mais $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k m_{n-k} = 0$ pour $n \geq 1$, donc (n=1) $a_1 = -m_1$.
Supposons que $f^{\widetilde{n}} = W_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k f^{n-k}$ comme $D_f f^{\widetilde{n+1}} = (n+1) f^{\widetilde{n}}$ on en déduit :

$$\begin{aligned}f^{\widetilde{n+1}} &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k \left(\frac{f^{\widetilde{n-k+1}} - m_{n-k+1}}{n-k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a_k f^{\widetilde{n-k+1}} - a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} a_k m_{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a_k f^{\widetilde{n-k+1}}\end{aligned}$$

△

Exemples : FORMULATIONS EXPLICITES

1) pour $f \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$W_n(f) \equiv H_n(f) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k f^{n-2k}}{2^k k!(n-2k)!} \quad (n^{\text{ième}} \text{ polynôme de Hermite}),$$

2) pour $f \sim exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$:

$$W_n(f) \equiv E_n^{\lambda}(f) = f^n - \frac{n}{\lambda} f^{n-1},$$

3) pour $f \sim \Gamma(a, b)$:

$$W_n(f) \equiv \Gamma_n^{ab}(f) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{n-k} \frac{f^k}{k!} \Big(\frac{-1}{b}\Big)^{n-k},$$

4) pour $f \sim \Gamma(1/2, 1/2)$:

$$W_n(f) \equiv \Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(f) = f^n - \frac{n!}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{n-k} \binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \frac{f^k}{k!},$$

5) pour $f \sim \Gamma\Big(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\Big)$:

$$W_n(f) \equiv Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k! \sum_{p=0}^{k} \binom{a_1}{p} \binom{a_2}{k-p} \Big(\frac{\alpha}{b_1}\Big)^p \Big(\frac{\beta}{b_2}\Big)^{k-p} f^{n-k},$$

6) pour $f \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$ $(D = \frac{d}{da})$:

$$W_n(f) \equiv P_n^a(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \Big[\, e^a \big(aD\big)^k \cdot \big(e^{-a}\big) \Big].$$

Proposition 3.2.3. *On a les propriétés suivantes :*

1) $D_f(\mathcal{E}xp(tf)) = t\mathcal{E}xp(tf)$,

2) $\mathcal{E}xp(tf) = \dfrac{\exp\big(t(f - m_1)\big)}{\phi_{f-m_1}(t)}$,

3) $\mathcal{E}xp(\lambda(sf + tg)) = \mathcal{E}xp(\lambda sf)\mathcal{E}xp(\lambda tg) \dfrac{\phi_f(\lambda s)\phi_g(\lambda t)}{\phi_{(f,g)}(\lambda s, \lambda t)}$.

<u>Démonstration</u>

1) On utilise le prolongement de D_f.

2) Simple vérification.

3) Il suffit d'écrire : $\phi_{sf+tg}(\lambda) = \dfrac{\phi_{sf+tg}(\lambda)}{\phi_{sf}(\lambda)\phi_{tg}(\lambda)} \phi_{sf}(\lambda)\phi_{tg}(\lambda)$.

$\triangle$

Remarque

$$\mathcal{E}\text{xp}(\lambda(sf+tg)) = \frac{\exp(\lambda(sf+tg))}{\phi_{(f,g)}(\lambda s, \lambda t)} = \frac{\exp(\lambda(sf+tg))}{\phi_{(sf+tg)}(\lambda)}.$$

Pour avoir des précisions sur les propriétés des puissances et de l'exponentielle de Wick confère **[1]**.

3.3 Propriétés des puissances de Wick

3.3.1 Introduction

Il est connu (voir par exemple **[2]**) que les polynômes orthogonaux classiques ont une somme importante de propriétés en commun dont :

- ils ont • une formule de récurrence
  • une équation différentielle
  • une formule de Rodriguez...

(en fait, toutes ces propriétés découlent, y compris les propriétés d'orthogonalité, de la formule de Rodriguez, confère [2]). On a vu que les puissances de Wick de la variable aléatoire X (ici on s'intéresse aux propriétés polynômiales on notera X pour f pour le notifier) sont des polynômes en X de formule explicite :

$$W_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k X^{n-k}.$$

On peut se demander si cette suite de polynômes est orthogonale, cette situation nous permettrait de puiser dans les outils de la théorie des polynômes orthogonaux.
Quand ces polynômes ne sont pas orthogonaux, existe-t-il des propriétés communes à toutes ces familles (formule de récurrence, équation différentielle...).

3.3.2 Orthogonalité

Théorème 3.3.1. *Etant donnée une variable aléatoire X telle que* $\exp|t||X| \in L^2(M, \Sigma, \mu)$, $t \in V$, *on a :*

$$\forall n \neq m \int_M W_n(X) W_m(X) d\mu = 0 \Leftrightarrow X \sim \mathcal{N}(m_1, m_2 - m_1^2).$$

Démonstration

On suppose $m_1 = 0$ (quitte à prendre $X - m_1$).

$X^{\widetilde{1}} = X \Rightarrow \int_M XW_n(X)d\mu = 0$ pour $n \neq 1$.

$\phi_X(t)\mathcal{E}\mathrm{xp}(tX) = \exp(tX) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_{n-k}m_{n-k} = X^n$

$$\begin{aligned}
\text{Pour } n \neq 1 \ m_{n+1} = E(X \cdot X^n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k} E(\ XW_k(X)\ ) \\
&= \tbinom{n}{1} m_{n-1}m_2 \\
&= n m_{n-1} m_2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{2n+1} &= 2n m_{2n-1} m_2 \quad , \quad m_1 = 0 \\ m_{2n} &= (2n-1) m_{2n-2} m_2 \quad , \quad m_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{2n+1} &= 0 \\ m_{2n} &= (2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 1 m_0 m_2^n = \frac{(2n)!}{2^n n!} m_2^n \end{cases}$$

On a donc une variable aléatoire qui a les moments et la transformée de Laplace d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0, m_2)$, on peut donc conclure que $X \sim \mathcal{N}(0, m_2)$.

$\triangle$

Remarque

Ce théorème règle le problème de l'orthogonalité. Dans le cas où X suit une loi normale on a vu que $W_n = H_n$. C'est un objet bien connu (dans le cadre classique de la décomposition en chaos de $L^2\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\big)$). On va essayer de trouver des propriétés communes à toutes les suites de polynômes de Wick.

3.3.3 Formules de récurrence

On sait que $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tX) = \sum_{n \geq 0} W_n(X) \frac{t^n}{n!}$ où $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tX)$ est une fonction connue qu'on veut développer en série entière. En fait $\mathcal{E}\mathrm{xp}(tX)$ n'est rien d'autre que la fonction génératrice des puissances de Wick, que nous appellerons également polynômes de Wick.

On va puiser dans la théorie des fonctions génératrices (confère **[3]**) pour trouver une formule de récurrence.

i) Première formule de récurrence

Théorème 3.3.2. *Les polynômes de Wick vérifient la formule de récurrence :*

$$\begin{cases} W_0(X) &= 1 \\ \\ W_1(X) &= X - m_1 \\ W_n(X) &= (X - m_1)W_{n-1}(X) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} b_{n-k}W_k(X). \end{cases}$$

Où $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k \cdot m_k a_{n-k}$.

<u>Démonstration</u>

On part de l'égalité :

$$e^{tX}(\phi_X(t))^{-1} = \sum_{k=0}^{n} W_n(X)\frac{t^n}{n!} \text{ pour } t \in V.$$

V étant un certain voisinage de zéro inclus dans le disque de convergence de la série. Comme le membre de gauche est strictement positif on peut en prendre le logarithme, puis on dérive par rapport à t, puis on multiplie par t pour obtenir :

$$tX - \sum_{n\geq 1} n \cdot m_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} = \frac{\displaystyle\sum_{n\geq 1} nW_n \frac{t^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{n\geq 0} W_n \frac{t^n}{n!}}$$

Ce qui nous donne :

$$\sum_{n\geq 1}\left[\ \frac{XW_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_k W_{n-k}(X)\ \right] t^n = \sum_{n\geq 1} nW_n(X)\frac{t^n}{n!}$$

Où on a posé :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k \cdot m_k a_{n-k}.$$

On identifie les cœfficients de chaque côté et on a le résultat attendu.

△

Exemples : FORMULES DE RECURRENCE 1

1) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$H_n(X) = XH_{n-1}(X) - (n-1)H_{n-2}(X),$$

2) $X \sim \exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$:

$$E_n^\lambda(X) = (X - \frac{1}{\lambda})E_{n-1}^\lambda(X) - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{E_k^\lambda(X)}{k!\lambda^{n-k}},$$

3) $X \sim \Gamma(a, b)$:

$$\Gamma_n^{ab}(X) = (X - \frac{a}{b})\Gamma_{n-1}^{ab}(X) - a(n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma_k^{ab}(X)}{k!}(\frac{1}{b}\ )^{n-k},$$

4) $X \sim \Gamma(1/2, 1/2)$:

$$\Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X) = (X-1)\Gamma_{n-1}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X) - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{n-k-1}}{k!}\Gamma_k^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X),$$

5) $X \sim \Gamma\Big(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\Big)$:

$$Q_n(X) = \left(X - \alpha\frac{a_1}{b_1} - \beta\frac{a_2}{b_2}\right)Q_{n-1}(X) - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{Q_k(X)}{k!}\left[a_1\left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^{n-k} + a_2\left(\frac{\beta}{b_2}\right)^{n-k}\right],$$

6) $X \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$:

$$P_n^a(X) = (\ X - a\ )P_{n-1}^a(X) - a\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}P_k^a(X).$$

Remarque

Cette formule de récurrence n'est pas très maniable, le calcul du cœfficient b_n est souvent délicat, voir même impossible, ce qui nous oblige, pour obtenir la formule finale, à refaire tous les calculs.

ii) Seconde formule de récurrence

Théorème 3.3.3. *Les polynômes de Wick vérifient la formule de récurrence :*

$$\begin{cases} W_0(X) &= 1 \\ \\ W_1(X) &= X - m_1 \\ nW_n(X) &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}W_{n-k}(X)(kXm_{k-1} - nm_k) \end{cases}$$

Démonstration

On agit de la même façon que précédemment mais en multipliant par $\phi_X(t)\sum_{k\geq 0} W_n(X)\frac{t^n}{n!}$ au lieu de $\sum_{k\geq 0} W_n(X)\frac{t^n}{n!}$.

$\triangle$

Exemples : FORMULES DE RECURRENCE 2

1) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$H_n(X) = -n!\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{H_{n-2k}(X)}{(n-2k)!2^k k!} + (n-1)!X \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{H_{n-2k-1}(X)}{(n-2k-1)!2^k k!},$$

2) $X \sim \exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$:

$$E_n^\lambda(X) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_{n-k}^\lambda(X)}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda X - n}{\lambda^k}\right),$$

3) $X \sim \Gamma(a,b)$:

$$n\Gamma_n^{ab}(X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+k-2)}{b^{k-1}}\left(kX - \frac{n}{b}(a+k-1) \right)\Gamma_{n-k}^{ab}(X),$$

4) $X \sim \Gamma(1/2, 1/2)$:

$$n\Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k-2}{k-1} \frac{(k-1)!}{2^{k-1}}\left(kX - 2n(k-\frac{1}{2}) \right)\Gamma_{n-k}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X),$$

5) $X \sim \Gamma\left(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\right)$:

$$nQ_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q_{n-k}(X)k! \cdot \Bigg\{ \sum_{p=0}^{k-1}\left[\binom{a_2+p-1}{p}\binom{a_2+k-p-2}{k-p-1}\left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^p\left(\frac{\beta}{b_2}\right)^{k-1-p}\cdot\left(X - n\left(\frac{a_2+k-p-1}{k-p}\right)\right)\right] - n\binom{a_1+k-1}{k}\left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^k\Bigg\},$$

6) $X \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$:

$$nP_n^a(X) = e^{-a}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left(kX(aD)^{k-1}\ (e^a) - n(aD)^k\ (e^a) \right)P_{n-k}^a(X).$$

Remarque

Cette formule de récurrence est beaucoup plus maniable, il n'y a plus de calculs intermédiaires à effectuer. Cela vient du fait qu'on n'utilise plus le développement en série de l'inverse de la transformée de Laplace, objet souvent difficile à déterminer. Cependant, dans le cas $\mathcal{N}(0,1)$, la formule obtenue est moins intéressante. Ainsi, en fonction des situations, on pourra choisir l'une où l'autre de ces formules de récurrence.

3.3.4 Equations différentielles

i) Première équation différentielle

Théorème 3.3.4. *Les polynômes de Wick vérifient une équation différentielle donnée, pour $n \geq 0$, par :*

$$nW_n(X) - (X - m_1)W_n'(X) + \sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{k!} W_n^{(k)}(x) = 0.$$

Démonstration

Comme $W_n'(X) = nW_{n-1}(X)$ on a pour $n \geq k$ $W_k(X) = \frac{k!}{n!} W_n^{(n-k)}(X)$ on remplace cette valeur dans la formule de récurrence et on a le résultat.

$\triangle$

Exemples : EQUATIONS DIFFERENTIELLES 1

1) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$nH_n(X) - XH_n'(X) + H_n''(X) = 0.$$

2) $X \sim \exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$:

$$nE_n^{\lambda}(X) = (X - \frac{1}{\lambda})(\ E_n^{\lambda}\ )'(X) - \sum_{k=2}^{n} \frac{(\ E_n^{\lambda}\ )^{(k)}(X)}{\lambda^k}$$

3) $X \sim \Gamma(a,b)$:

$$n\Gamma_n^{ab}(X) = (X - \frac{a}{b})(\ \Gamma_n^{ab}\ )'(X) - a\sum_{k=2}^{n}(\ \Gamma_n^{ab}(X)\ )^{(k)} \left(\frac{1}{b}\right)^k.$$

4) $X \sim \Gamma(1/2, 1/2)$:

$$n\Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X) = (X-1)(\ \Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ )'(X) - \sum_{k=2}^{n} 2^{k-1}(\Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ )^{(k)}(X).$$

5) $X \sim \Gamma\Big(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\Big)$:

$$nQ_n(X) = \left(X - \alpha\frac{a_1}{b_1} - \beta\frac{a_2}{b_2}\right)Q_n'(X) - \sum_{k=2}^{n} Q_n^{(k)}(X)\left[a_1\left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^k + a_2\left(\frac{\beta}{b_2}\right)^k\right],$$

6) $X \sim \mathcal{P}(a)$, $a > 0$:

$$nP_n^a(X) = (\ X - a\ )(P_n^a)'(X) - a\sum_{k=2}^{n} \frac{(\ P_n^a\ )^{(k)}}{k!}(X)$$

ii) Seconde équation différentielle

Théorème 3.3.5. *Les polynômes de Wick vérifient une équation différentielle donnée par :*

$$nW_n(X) - \sum_{k=1}^{n} \frac{kXm_{k-1} - nm_k}{k!} W_n^{(k)}(X) = 0.$$

<u>Démonstration</u>

C'est exactement la même chose que précédemment.

△

Remarque

Cette équation différentielle n'est pas une réécriture de la première (confère le premier exemple). On a ainsi trouver deux équations différentielles vérifiées par les polynômes de Wick.

Exemples : EQUATIONS DIFFERENTIELLES 2

1) $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$nH_n(X) + n\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{H_n^{(2k)}(X)}{2^k k!} - X\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{H_n^{(2k+1)}(X)}{2^k k!} = 0.$$

2) $X \sim \exp(\lambda)$ $(\lambda > 0)$:

$$nE_n^{\lambda}(X) - \sum_{k=1}^{n} (\ E_n^{\lambda}\ )^{(k)} \left(\frac{\lambda X - n}{\lambda^k} \right) = 0$$

3) $X \sim \Gamma(a, b)$:

$$n\Gamma_n^{ab}(X) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a(a+1)\cdot \ldots \cdot (a+k-2)}{k! b^{k-1}} (\ kX - \frac{n}{b}(a+k-1)\ )(\ \Gamma_n^{ab}(X)\ )^{(k)}(X) = 0$$

4) $X \sim \Gamma(1/2, 1/2)$:

$$n\Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X) - \sum_{k=1}^{n} \frac{kX - 2n(k-\frac{1}{2})}{k2^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} (\ \Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\ )^{(k)}(X) = 0.$$

5) $X \sim \Gamma\Big(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\Big)$:

$$nQ_n(X) = \sum_{k=0}^{n} Q_n^{(K)}(X) \ \cdot \Bigg\{$$

$$\textstyle\sum_{p=0}^{k-1} \left[\binom{a_2+p-1}{p} \binom{a_2+k-p-2}{k-p-1} \left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^p \left(\frac{\beta}{b_2}\right)^{k-1-p} \cdot \left(X - n\left(\frac{a_2+k-p-1}{k-p}\right)\right)\right] - n\binom{a_1+k-1}{k}\left(\frac{\alpha}{b_1}\right)^k \Bigg\},$$

6) $X \sim \mathcal{P}(a)$:

$$nP_n^a(X) = e^{-a} \sum_{k=1}^{n} \left(\ kX(aD)^{k-1}\ (e^a) - n(aD)^k\ (e^a)\ \right) \frac{(\ P_n^a\ )^{(k)}(X)}{k!}.$$

3.4 Quelques lois en probabilités

3.4.1 Loi NORMALE, $\mathcal{N}(0, 1)$

- Densité : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$,

- transformée de Laplace : $\phi_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

3.4.2 Loi GAMMA de paramètres $a > 0$ et $b > 0$, $\Gamma(a, b)$

- Densité : $f(x) = 1_{]0,\infty[}(x) \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-bx} x^{a-1}$, $a > 0$, $b > 0$,

- transformée de Laplace : $\phi_X(t) = (\dfrac{b}{b-t})^a$ pour $|t| < b$.

3.4.3 Combinaison linéaire de Lois GAMMA, $\Gamma\left(\alpha\binom{a_1}{b_1}, \beta\binom{a_2}{b_2}\right)$

Les paramètres étant tous des réels strictement positifs, c'est la loi d'une variable aléatoire Z pouvant s'écrire $Z = \alpha X + \beta Y$ où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de loi respective $\Gamma(a_1, b_1)$ et $\Gamma(a_2, b_2)$.
Notons $f_{1\alpha}$ la densité de αX (qui suit une loi $\Gamma(a_1, \frac{b_1}{\alpha})$) et $f_{2\beta}$ la densité de βY (qui suit une loi $\Gamma(a_2, \frac{b_2}{\beta})$).

- Densité : $f(x) = f_{1\alpha} * f_{2\beta}(x)$,

- transformée de Laplace : $\phi_X(t) = \left(\dfrac{b_1}{b_1 - \alpha t}\right)^{a_1} \left(\dfrac{b_2}{b_2 - \beta t}\right)^{a_2}$ pour $|t| < b_1 \wedge b_2$.

3.4.4 Loi EXPONENTIELLE de paramètre λ, $\mathcal{E}\mathbf{xp}(\lambda)$

C'est une loi $\Gamma(1, \lambda)$.

- Densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{]0,\infty[}(x)$,

- transformée de Laplace : $\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ pour $|t| < \lambda$.

3.4.5 Loi de POISSON de paramètre λ, $\mathcal{P}(\lambda)$

- Loi (discrète) : $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$,

- transformée de Laplace : $\phi_X(t) = \exp(\ \lambda(e^t - 1)\ )$.

3.4.6 Loi BINOMIALE de paramètres N,p,q : $\mathcal{B}(N; p, q)$

C'est la loi d'une variable aléatoire sur $\{0, \ldots, N\}$, avec $p + q = 1$ ($p > 0, q > 0, N \in \mathbb{N}$) :

- loi : $P(X = k) = \dbinom{N}{k} p^k q^{N-k}$,
- transformée de Laplace : $\phi_X(t) = (e^t p + q)^N$.

3.5 Quelques rappels sur les polynômes de LAGUERRE généralisés, $L_n^\alpha(x)$

Intervalle d'étude :

$$[0, +\infty).$$

Standardisation :

$$[x^n]L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Fonction poids :

$$w(x) = x^\alpha e^{-x} \ , \ \alpha > -1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

Formulation explicite :

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{1}{m!} x^m.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}^\alpha(x) & = & [(2n+\alpha+1)-x]L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) \\ L_0^\alpha(x) & = & 1 \\ L_1^\alpha(x) & = & 1+\alpha-x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0 \ , \ y = L_n^\alpha(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}\{x^{n+\alpha}e^{-x}\}.$$

Fonction génératrice :

$$F_\alpha(t,x) = (1-z)^{-\alpha-1}\exp(\frac{xz}{z-1}) = \sum_{n\geq 0} L_n^\alpha(x) z^n \ , \ |z| < 1.$$

3.6 Une relation avec les polynômes de Laguerre

On va noter $\Gamma_{a,b}(t,x)$ la fonction génératrice des polynômes de Wick, $\Gamma_n^{a,b}(x)$, associée à une variable aléatoire suivant une loi $\Gamma(a,b)$.

Proposition 3.6.1.

$$\Gamma_{a,b}(t,x) = F_{a-1}(\frac{t}{t-b}, bx).$$

<u>Démonstration</u>

C'est une simple vérification.

△

Proposition 3.6.2.

$$\begin{cases} \Gamma_0^{a,b}(x) &= L_0^{a-1}(bx) \\ \Gamma_n^{a,b}(x) &= \dfrac{n!}{b^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k}L_{n-k}^{a-1}(bx),\ n \geq 1. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>

$F_{a-1}(\frac{t}{t-b}, bx) = \displaystyle\sum_{k\geq 0} L_n^{a-1}(bx)\left(\ \frac{t}{t-b}\ \right)^n.$

Pour $n \geq 1$ $(\ \frac{1}{1-x}\ )^n = \displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{k+n-1}{k}x^k$ donc :

$F_{a-1}(\frac{t}{t-b}, bx) = \displaystyle\sum_{k\geq 1}\Big[\ L_n^{a-1}(bx)(\ \frac{-t}{b}\ )^n \sum_{k\geq 0}\binom{k+n-1}{k}(\ \frac{t}{b}\ )^n\ \Big] + L_0^{a-1}(bx)$

$F_{a-1}(\frac{t}{t-b}, bx) = \displaystyle\sum_{m\geq 1}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-k}L_{m-k}^{a-1}(bx)\binom{m-1}{k}(\ \frac{t}{b}\ )^m + L_0^{a-1}(bx)$

Ou encore :

$$\sum_{n\geq 0}\Gamma_n^{a,b}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{m\geq 1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-k}}{b^n}L_{m-k}^{a-1}(bx)\binom{m-1}{k}m!\frac{t^m}{m!} + L_0^{a-1}(bx)$$

d'où le résultat.

△

3.7 Les premiers polynômes de Wick

1) $X \sim \mathcal{N}(0,1) : X^{\widetilde{n}} = H_n(X) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k X^{n-2k}}{2^k k!(n-2k)!}$

$$\begin{array}{rclrcl} H_0(x) & = & 1 & H_3(x) & = & x^3 - 3x \\ H_1(x) & = & x & H_4(x) & = & x^4 - 6x^2 + 3 \\ H_2(x) & = & x^2 - 1 & H_5(x) & = & x^5 - 10x^3 + 15x. \end{array}$$

2) $X \sim \exp(\lambda) : X^{\widetilde{n}} = E_n^\lambda(X) = X^n - \frac{n}{\lambda} X^{n-1}$

$$\begin{array}{rclrcl} E_0^\lambda(x) & = & 1 & E_3^\lambda(x) & = & x^3 - \frac{3}{\lambda}x^2 \\ E_1^\lambda(x) & = & x - \frac{1}{\lambda} & E_3^\lambda(x) & = & x^4 - \frac{4}{\lambda}x^3 \\ E_2^\lambda(x) & = & x^2 - \frac{2}{\lambda} & E_3^\lambda(x) & = & x^5 - \frac{5}{\lambda}x^4. \end{array}$$

3) $X \sim \Gamma(a,b) : X^{\widetilde{n}} = \Gamma_n^{ab}(X) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{n-k} \frac{X^k}{k!} \left(\frac{-1}{b}\right)^{n-k}$

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{ab}(x) &= 1 \\ \Gamma_1^{ab}(x) &= x - \frac{a}{b} \\ \Gamma_2^{ab}(x) &= x^2 - 2\frac{a}{b}x + \frac{a(a-1)}{b^2} \\ \Gamma_3^{ab}(x) &= x^3 - 3\frac{a}{b}x^2 + 3\frac{a(a-1)}{b^2}x - \frac{a(a-1)(a-2)}{b^3} \\ \Gamma_4^{ab}(x) &= x^4 - 4\frac{a}{b}x^3 + 6\frac{a(a-1)}{b^2}x^2 - 4\frac{a(a-1)(a-2)}{b^3}x + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{b^4} \\ \Gamma_5^{ab}(x) &= x^5 - 5\frac{a}{b}x^4 + 10\frac{a(a-1)}{b^2}x^3 - 10\frac{a(a-1)(a-2)}{b^3}x^2 + 5\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{b^4}x \\ &\quad - \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)}{b^5}. \end{aligned}$$

4) $X \sim \Gamma(1/2, 1/2) : X^{\widetilde{n}} = \Gamma_n^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(X) = X^n - \dfrac{n!}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{n-k} \binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \frac{X^k}{k!}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x) &= 1 & \Gamma_3^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x) &= x^3 - 3x^2 - 3x - 3 \\
\Gamma_1^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x) &= x - 1 & \Gamma_4^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x) &= x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 12x - 15 \\
\Gamma_2^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x) &= x^2 - 2x - 1 & \Gamma_5^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x) &= x^5 - 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 - 75x - 105.
\end{aligned}$$

5) $X \sim \mathcal{P}(a) : X^{\widetilde{n}} = P_n^a(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} \Big[\, e^a \big(aD\big)^k \cdot \big(e^{-a}\big) \Big]$

$$\begin{aligned}
P_0^a(x) &= 1 \\
P_1^a(x) &= x - a \\
P_2^a(x) &= x^2 - 2ax + (a^2 - a) \\
P_3^a(x) &= x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - a)x + (-a^3 + 3a - a) \\
P_4^a(x) &= x^4 - 4ax^3 + 6(a^2 - a)x^2 + 4(-a^3 + 3a - a)x + (a^4 - 6a^3 + 7a^2 - a) \\
P_5^a(x) &= x^5 - 5ax^4 + 10(a^2 - a)x^3 + 10(-a^3 + 3a - a)x^2 + 5(a^4 - 6a^3 + 7a^2 - a)x \\
&\quad + (-a^5 + 10a^4 - 25a^3 + 15a^2 - a).
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Densité de variables aléatoires discrètes

4.1 Introduction

Les fonctions de Rademacher, $r_0 = 1$, $n \geq 1$ $r_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k 1_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}$, forment un système souvent utilisé et dont les propriétés sont bien connues. Ce sont notamment des variables aléatoires de $\Big([0,1], B([0,1]), \lambda\Big)$ à valeurs dans {-1,1}, centrées, indépendantes. On sait, si on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(r_1, \ldots, r_n)$, que $B([0,1]) = \bigvee_n \mathcal{F}_n$ et construire à partir des $(r_n)_n$ un sous-espace vectoriel (sev) dense de $L^2\Big([0,1], B([0,1]), \lambda\Big)$.

Cet espace vectoriel est celui engendré par les produits $\prod_{i=1}^{n} r_{k_i}$ où $1 \leq k_1 < \cdots < k_n$, $n \in \mathbb{N}$. (On appelle ce système, "système de Walsh" pour J.L.Walsh).

Avant de généraliser ce résultat, voyons deux propositions faciles.

Proposition 4.1.1. *Etant donnée une suite de variables aléatoires indépendantes centrées (vaic) du second ordre, on ne peut pas construire (sans en prendre les produits) un sev dense de L^2.*

<u>Démonstration</u>

soit $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (E, \mathcal{E})$, comme $E\big(\ (X_0 X_1) X_j\ \big) = 0\ \forall j \geq 0$ on a trouvé une variable aléatoire $\not\equiv 0$ orthogonale à l'espace vectoriel engendré par les $X_j, j \in \mathbb{N}$, il n'est donc pas dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$\triangle$

Remarque

Une suite de vaic réduites fournit un système orthonormal ce qui pourrait nous pousser à essayer de montrer que c'est une base de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Cette proposition nous en dissuade immédiatement.

Proposition 4.1.2. *Soient $X : (\Omega, \mathcal{F}_X, P) \to \Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), P_X\Big)$, $(Q_n)_n$ une famille de polynômes de $L^2(\mathbb{R})$ formant un sev dense.*
Alors $\Big(Q_n(X)\Big)_n$, forme un sev dense de $L^2(\Omega)$.

<u>Démonstration</u>

$f \in L^2(\Omega)$ telle que $E\Big(fQ_n(X)\Big) = 0\ \forall n$. f est $\mathcal{F}_X$-mesurable donc $f = g \circ X$ ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
La condition s'écrit :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)Q_n(x)dP_X(x) = 0\ \forall n\right) \Rightarrow \Big(g \equiv 0\Big) \Rightarrow \Big(f \equiv 0\Big).$$

$\triangle$

Remarque

Cette proposition nous dit qu'un moyen d'investigation, dans la recherche de sous-espaces vectoriels denses, est d'étudier des familles de polynômes dans les espaces image.

4.2 Suite de variables aléatoires prenant 2 valeurs

On se donne une suite de vaic réduites (vaicr) $(X_n)_{n\geq 1} : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \{a_1, a_2\}$ où $\mathcal{F} = \bigvee_n \mathcal{F}_n$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma\big(X_1, \ldots, X_n\big)$. Posons $\begin{cases} H_0^n &= [1] \\ H_k^n &= \big[X_{i_1} \cdots X_{i_k}\ :\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\big]\ 1 \leq k \leq \end{cases}$
$\mathcal{H}_n = \bigcup_{k\geq 0} H_k^n$
$A_k^j = \big(X_j\big)^{-1}(a_k)$
$A_k = A_{k_1}^1 \cap \cdots \cap A_{k_n}^n$ avec $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \{1, 2\}^n$.
Les H_k^n sont les espaces vectoriels engendrés par tous les monônes de degré k qu'on peut obtenir avec les n premiers termes de la suite. (Il est assez facile de voir que pour tout j, X_j^k s'exprime avec 1 et X_j pour tout $k \geq 2$.)

Théorème 4.2.1. $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{H}_n$ *est dense dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Lemme 4.2.1.

$$H_k^n \perp H_{k'}^n \quad k \neq k'.$$

Démonstration du lemme 4.2.1.

Posons $E_{kk'} = E\Big(X_{i_1} \cdots X_{i_k} X_{j_1} \cdots X_{j_{k'}}\Big)$, supposons $k < k'$, il existe une permutation σ de $\Sigma_{k'}$ telle que :

$$E_{kk'} = E\Big(X_{i_1} \cdots X_{i_k} X_{\sigma(j_1)} \cdots X_{\sigma(j_k)}\Big) E\Big(X_{\sigma(j_{k+1})}\Big) \cdots E\Big(X_{\sigma(j_{k'})}\Big)$$

Les variables aléatoires étant centrées, $E_{kk'} = 0$.

$\triangle$

Lemme 4.2.2.

$$\forall n \geq 1 \quad L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P) = \mathcal{H}_n.$$

Démonstration du lemme 4.2.2.

D'une part $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma\big(A_k,\ k \in \{1,2\}^n\big)$, par indépendance des variables aléatoires aucun des A_k n'est vide, les systèmes $\Big\{A_1^j, A_2^j\Big\}$ $j \in \{1, \ldots, n\}$ sont des partitions de Ω. Il en est de même du système $\Big\{\ A_k,\ k \in \{1,2\}\Big\}$ (on le voit facilement par récurrence).

$\mathcal{F}_n$ est donc engendrée par 2^n éléments qui forment une partition de Ω et , par suite, $\dim\Big({}^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P)\Big) = 2^n$ (engendré par les 1_{A_k}).

D'autre part les éléments de H_k^n sont linéairement indépendants, en effet :

soit $\displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \lambda_{i_1\cdots i_k} X_{i_1} \cdots X_{i_k} = 0$ en multipliant par $X_{j_1} \cdots X_{j_k}$ puis en prenant l'espérance on trouve $\lambda_{j_1\cdots j_k} = 0$.

Chaque H_k^n possède $\binom{n}{k}$ éléments (qui sont libres), de part l'orthogonalité, $\mathcal{H}_n$ possède $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ éléments.

Finalement, comme $\mathcal{H}_n \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ le lemme est démontré.

$\triangle$

Démonstration du théorème 4.2.1.

Prenons f dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ orthogonale Ĺ $\bigcup \mathcal{H}_n$. Par le lemme 4.2.2., f est orthogonale à chaque $L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$, $n \geq 1$, donc pour tout F dans $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$, $E\Big(1_F f\Big) = 0$, mais $\Big\{ F,\ E\big(1_F f\big) = 0 \Big\}$ est une classe monotone contenant algèbre $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ donc, par le théorème de la classe monotone, $E(1_F f) = 0$ pour tout F dans $\mathcal{F}$ et par suite $f \equiv 0$ d'où le résultat.

△

4.3 Suite de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs

Soit $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \big\{a_1, \ldots, a_N\big\}$, $n \geq 1$ une suite de vaic ayant des moments de tous ordres, $\mathcal{F} = \bigvee_n \mathcal{F}_n$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots X_n)$.

Proposition 4.3.1. *Pour tout $j \geq 1$ fixé dans $\mathbb{N}$, le système $\Big\{1, X_j, \ldots, X_j^{N-1}\Big\}$ est une base de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{X_j}, P)$.*

Remarque

Cela veut dire que dans un ensemble générateur on ne peut pas avoir de puissances supérieures à N-1 de chacune des variables aléatoires .

Démonstration

Posons comme précédemment $A_k^j = \big(X_j\big)^{-1}(a_k) \quad k \in \{1, \ldots, N\}^n$.

Alors $X_j = a_1 1_{A_1^j} + \cdots + a_N 1_{A_N^j}$.

D'une part $\Big\{1_{A_1^j}, \ldots, 1_{A_N^j}\Big\}$ est une base de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{X_j}, P)$.

D'autre part si $X_j^0, \ldots, X_j^{N-1}$ est un système libre de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{X_j}, P)$ alors c'est une base.

Formons : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k X_j^k = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \big(a_1 1_{A_1^j} + \cdots + a_N 1_{A_N^j}\big) = 0 \Leftrightarrow \sum_{l=0}^{N-1} 1_{A_l^j} \big(\lambda_0 + \lambda_1 a_l^1 + \cdots + \lambda_{N-1} a_l^{N-1}\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{N-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_N & a_N^2 & \cdots & a_N^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{N-1} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_{N-1} = 0$$ (déterminant de Vandermonde).

$\triangle$

Remarque

On a envie de faire la même construction que précédemment en posant H_k^n pour l'ensemble des monômes de degré k ce qu'on peut écrire grace à la proposition 4.3.1. :
$H_k^n = \left[X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_n}^{\alpha_{i_n}} \quad 1 \leq \alpha_{i_1} < \cdots < \alpha_{i_n} \leq n \ , \ \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_n} = k \ , \ \alpha_{i_\nu} \in \{0, \ldots, N-1\} \right]$
et en posant $\mathcal{H}_n = \bigcup_{k=0}^{n(N-1)} H_k^n$.
Cette décomposition n'a plus de sens pour $N \geq 3$ car les H_k^n ne sont plus orthogonaux.

Exemple, N=3

$$\text{n=1} \begin{cases} H_0^1 &= [1] \\ H_1^1 &= [X_1] \\ H_2^1 &= [X_1^2] \end{cases}$$
$E(X_1 \cdot X_1^2) = E(X_1^3)$
$$\text{n=2} \begin{cases} H_0^2 &= [1] \\ H_1^2 &= [X_1, X_2] \\ H_2^2 &= [X_1^2, X_2^2, X_1X_2] \\ H_3^2 &= [X_1^2X_2, X_1X_2^2] \\ H_4^2 &= [X_1^2X_2^2] \end{cases}$$
$E(X_1 \cdot X_1^2) = E(X_1^3)$; $E(X_1X_2 \cdot X_1^2X_2) = E(X_1^3)E(X_2^2)$
En prenant $X = -1 \cdot 1_{]0,1]} + 3 \cdot 1_{]1,2]} - 2 \cdot 1_{]2,3]}$, $P = \frac{\lambda}{3}$, $\mathrm{E}(X^3) = 6$

Théorème 4.3.1. *Posons :*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 &= [1] \\ \mathcal{H}_n &= \left[X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \ , \ (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in \{0, \ldots N-1\}^n \right] \ n \geq 1 \end{cases}$$
.

Alors $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{H}_n$ *est dense dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Lemme 4.3.1. *Le système* $\left\{ X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \ , \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, \ldots, N-1\}^n \right\}$ *est libre.*

Démonstration du lemme 4.3.1.

Formons $\displaystyle\sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ \in\{0,\ldots,N-1\}^n}} \lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = 0$

Le système $\left\{ 1_{A_k} \ , k \in \{1, \ldots, N\}^n \right\}$ forme un base de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ (c'est le même raisonnement que dans le cas de deux valeurs, confère lemme 4.2.2.).

On peut écrire : $X_k^{\alpha_k} = \displaystyle\sum_{\nu_k=1}^{N} a_{\nu_k}^{\alpha_k} 1_{A_{\nu_k}^k}$.

Si $0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $1 = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = \displaystyle\sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^n}} 1_{A_{\nu_1}^1 \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^n}$ (partition).

Supposons maintenant que $0 \neq (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \{0, \ldots, N-1\}^n$:

$\exists\ (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, N-1\}^k$, $i_1 < \ldots < i_k$:

$$X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_k}^{\alpha_{i_k}} = \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_k)\\ \in\{1,\ldots,N\}^k}} a_{\nu_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots a_{\nu_k}^{\alpha_{i_k}} 1_{A_{\nu_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\nu_k}^{i_k}}$$

mais $1_{A_{\nu_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\nu_k}^{i_k}} = \displaystyle\sum_{\substack{(\nu_{k+1},\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^{n-k}}} 1_{(A_{\nu_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\nu_k}^{i_k}) \cap (A_{\nu_{k+1}}^{i_{k+1}} \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^{i_n})}$ (partition)

où $i_{k+1} < \cdots < i_n$ et $\{i_{k+1}, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, N\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots X_{i_k}^{\alpha_{i_k}} &= \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_k)\\ \in\{1,\ldots,N\}^k}} a_{\nu_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots a_{\nu_k}^{\alpha_{i_k}} \sum_{\substack{(\nu_{k+1},\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^{n-k}}} 1_{A_{\nu_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^{i_n}} \\ &= \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^n}} a_{\nu_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots a_{\nu_k}^{\alpha_{i_k}} 1_{A_{\nu_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^{i_n}} \end{aligned}$$

$\exists\ \sigma \in \Sigma_n$ (permutations d'ordre n) telle que $A_{\nu_1}^{i_1} \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^{i_n} = A_{\nu_{\sigma(1)}}^1 \cap \cdots \cap A_{\nu_{\sigma(n)}}^n$

$$\begin{aligned} X_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots X_{i_k}^{\alpha_{i_k}} &= \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^n}} a_{\nu_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots a_{\nu_k}^{\alpha_{i_k}} 1_{A_{\nu_{\sigma(1)}}^1 \cap \cdots \cap A_{\nu_{\sigma(n)}}^n} \\ &= \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^n}} a_{\nu_{i_1}}^{\alpha_{i_1}} \cdots a_{\nu_{i_k}}^{\alpha_{i_k}} 1_{A_{\nu_1}^1 \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^n}. \end{aligned}$$

Comme $\alpha_{i_{k+1}} = \cdots = \alpha_{i_n} = 0$ on peut écrire :

$X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = \displaystyle\sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^n}} a_{\nu_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots a_{\nu_n}^{\alpha_{i_n}} 1_{A_{\nu_1}^1 \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^n}$.

Donc :

$\displaystyle\sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ \in\{0,\ldots,N-1\}^n}} \lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} = 0 \Leftrightarrow \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\\ \in\{0,\ldots,N-1\}^n}} \lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_n} \sum_{\substack{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\\ \in\{1,\ldots,N\}^n}} a_{\nu_1}^{\alpha_1} \cdots a_{\nu_n}^{\alpha_n} 1_{A_{\nu_1}^1 \cap \cdots \cap A_{\nu_n}^n} =$
0.

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_n)\\ \in\{1,\dots,N\}^n}} \left(\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\ \in\{0,\dots,N-1\}^n}} \lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_n} a_{\nu_1}^{\alpha_1}\cdots a_{\nu_n}^{\alpha_n} \right) 1_{A_{\nu_1}^1\cap\cdots\cap A_{\nu_n}^n} = 0.$$

Comme le système $\left\{ 1_{A_k}\ ,\ k\in\{1,\dots,N\}^n \right\}$ est libre on a :

$$\forall(\nu_1,\dots,\nu_n)\in\{1,\dots,N\}^n\ ,\ \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\\ \in\{0,\dots,N-1\}^n}} \lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_n} a_{\nu_1}^{\alpha_1}\cdots a_{\nu_n}^{\alpha_n} = 0.$$

Regardons le cas n=2 : $\forall(\alpha_1,\alpha_2)\in\{0,\dots,N-1\}^2 \sum_{\substack{(\nu_1,\nu_2)\\ \in\{1,\dots,N\}^2}} \lambda_{\alpha_1\alpha_2} a_{\nu_1}^{\alpha_1} a_{\nu_2}^{\alpha_2} = 0$

En utilisant l'ordre lexicographique pour ranger le vecteur colonne $\left(\lambda_{\alpha_1\alpha_2}\right)_{(\alpha_1\alpha_2)}$, on obtient l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A_N & a_1A_N & \cdots & a_1^{N-1}A_N \\ A_N & a_2A_N & \cdots & a_2^{N-1}A_N \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_N & a_NA_N & \cdots & a_N^{N-1}A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{00} \\ \vdots \\ \lambda_{01} \\ \vdots \\ \lambda_{N-1N-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Où on a posé $A_N = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{N-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_N & \cdots & a_N^{N-1} \end{pmatrix}$

Ce qu'on peut réécrire :

$$\begin{pmatrix} A_N & & \\ & 0\ddots 0 & \\ & & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & a_1I & \cdots & a_1^{N-1}I \\ \vdots & & & \vdots \\ I & a_NI & \cdots & a_N^{N-1}I \end{pmatrix} = 0$$

où $I = Id_{N\text{x}N}$.

det $A_N \neq 0$ (déterminant de Vandermonde), on peut appeler le déterminant de la deuxième matrice "déterminant de Vandermonde généralisé" (on le calcule par la même méthode que le déterminant classique).

Prenons comme hypothèse de récurrence que le système s'écrit :

$\left(M_n \right)\left(\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\right)= 0$ avec det $M_n = 0$ ($M_n \in \mathcal{M}_{N^n\text{x}N^n}$). Voyons le rang n+1. On vérifie aisément qu'on a : $\left(M_{n+1} \right)\left(\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_{n+1}}\right)= 0$ avec

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} M_n & a_1M_n & \cdots & a_1^{N-1}M_n \\ \vdots & & & \vdots \\ M_n & a_NM_n & \cdots & a_N^{N-1}M_n \end{pmatrix}$$

(en utilisant l'ordre lexicographique pour ranger le vecteur $\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_{n+1}}$)

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} M_n & & \\ & 0 \ddots 0 & \\ & & M_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & a_1 I & \cdots & a_1^{N-1} I \\ \vdots & & & \vdots \\ I & a_N I & \cdots & a_N^{N-1} I \end{pmatrix} = 0 \text{ où } I = Id_{N^n \text{x} N^n}.$$

On utilise l'hypothèse de récurrence pour déduire : det $M_{n+1} \neq 0$. Par suite on peut conclure que $\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_{n+1}} = 0 \ \forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \{0, \ldots, N-1\}^{n+1}$, c'est à dire que le système est libre, ce qui démontre le lemme 4.3.1.

△

Lemme 4.3.2.

$$\forall n \geq 0 \ L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P) = \mathcal{H}_n.$$

Démonstration

Comme $\mathcal{F}_n = \sigma\Big(A_k \ , \ k \in \{1, \ldots, N\}^n \Big)$, $L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$ est engendré par $\Big\{ 1_{A_k} \ , \ k \in \{1, \ldots, N\}^n \Big\}$ (puisque $\{A_k, \ k\}$ est une partition de Ω).

Donc $\dim\Big(L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P) \Big) = N^n$ (aucun des A_k n'est vide par indépendance des variables aléatoires ; comme aucun des $A_{k_j}^j$ n'est de probabilité nulle, $p(A_k) \neq 0 \ \forall k \in \{1, \ldots, N\}^n$).

On voit aisément que : $\text{card}\Big\{ X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \ , \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, \ldots, N-1\}^n \Big\} = N^n$

(on a une bijection $\{0, \ldots, N-1\}^n \to \mathcal{H}_n \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$).

Le lemme 4.3.1. nous permet d'en déduire : $\dim(\mathcal{H}_n) = N^n$

Ainsi $\begin{cases} \mathcal{H}_n \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P) \\ \mathcal{H}_n \text{ et } L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P) \text{ ont le même nombre de générateurs} \end{cases}$

donc $\mathcal{H}_n = L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$.

△

Démonstration du théorème 4.3.1.

Prenons f dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ orthogonale à $\bigcup \mathcal{H}_n$. Par le lemme 4.3.2. f est orthogonale à chaque $L^2(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$, $n \geq 1$, donc pour tout F dans $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$, $E\Big(1_F f\Big) = 0$, mais $\Big\{ F, \ E\big(1_F f\big) = 0 \Big\}$ est une classe monotone contenant algèbre, $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ donc, par le théorème de la classe monotone, $E(1_F f) = 0$ pour tout F dans $\mathcal{F}$ et par suite $f \equiv 0$ d'où le résultat.

△

Chapitre 5

Densité de produit de variables aléatoires continues

5.1 Densité

5.1.1 Notations, premiers résultats

Le but de ce paragraphe est d'étudier l'espace engendré par les produits des termes d'une suite de variables aléatoires .

Pour cela, donnons nous une suite de variables aléatoires réelles, centrée réduites

$$\Big(X_n\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

définies sur un espace probabilisé

$$\Big(E, \mathcal{E}, \nu\Big)$$

$\mathcal{E}$ étant la tribu engendrée par la suite considérée

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_\infty := \sigma\Big(X_k | k \in \mathbb{N}^*\Big)$$

et E un espace vectoriel normé.

Nous noterons :

$$\mathcal{E}_n := \sigma\Big(X_k | k = 1, \ldots, n\Big)$$

$$\mathcal{E}_{X_k} := \sigma\Big(X_k\Big) \text{ où } k \in \mathbb{N}^*.$$

Il s'agit donc d'étudier l'espace des polynômes $\mathbb{R}\Big[(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\Big]$. Plus précisément, notre étude va porter sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les produits de la forme :

$$X_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{\alpha_n}\quad\Big(n\in\mathbb{N}^*\Big)\Big((\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}^*)^n\Big).$$

Notons :

$$\mathcal{X}_n := Vect_{\mathbb{R}}\Big\{X_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{\alpha_n}|(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}^*)^n\Big\}:=\mathcal{X}_n$$

$$\mathcal{X} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{X}_n$$

Théorème 5.1.1. *Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{X}_n$ soit dense dans $L^2\Big(E,\mathcal{E}_n,\nu\Big)$, alors*

$$\mathcal{X}\underset{dense}{\subset}L^2\Big(E,\mathcal{E},\nu\Big).$$

Remarque

Les raisonnements donnant des résultats de densité s'inspirent souvent du théorème que nous rappelons ici dans sa version hilbertienne. Sa démonstration utilise le théorème de Hahn-Banach sous sa deuxième forme géométrique (confère **[5]** p.7).

Théorème 5.1.2. *Soient H un espace de Hilbert et G un sous-espace vectoriel de H.*
Si pour tout $h\in H$

$$\Big((\forall g\in G)(<h,g>=0)\Big)\Longrightarrow\Big(h=0\Big)$$

où $<,>$ désigne le produit scalaire de H, alors $\overline{G}=H$, ce qu'on peut aussi écrire :

$$G^{\perp}=\{0\}.$$

<u>Démonstration</u>

Soit $f\in L^2\Big(E,\mathcal{E},\nu\Big)\cap\mathcal{X}^{\perp}$.
La suite $\Big(E(f|\mathcal{E}_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale de carré intégrable (càd qui vérifie $\sup_n EM_n^2<\infty$) relativement à la filtration $\Big(\mathcal{E}_n\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle converge dans $L^2\Big(E,\mathcal{E},\nu\Big)$ vers $E(f|\bigvee_n\mathcal{E}_n)=$

f (puisque $\mathcal{E} = \bigvee_n \mathcal{E}_n$), confère par exemple **[6]** p.49 et p.62.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, comme $f \in \mathcal{X}^\perp$ on a :

$$\Big(\forall(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n\Big)\Big(E\Big(E(f|\mathcal{E}_n)X_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{\alpha_n}\Big) = E\Big(fX_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{\alpha_n}\Big) = 0\Big).$$

En particulier, n étant fixé dans N^*,

$$E(f|\mathcal{E}_n) \in L^2\Big(E,\mathcal{E}_n,\nu\Big) \cap \mathcal{X}^\perp,$$

et par densité de $\mathcal{X}_n$ dans $L^2\Big(E,\mathcal{E}_n,\nu\Big)$

$$E(f|\mathcal{E}_n) = 0.$$

ce qui entraîne $f = 0$ et par suite

$$\mathcal{X}^\perp = \{0\}$$

i.e. $\mathcal{X}$ est dense dans $L^2\Big(E,\mathcal{E},\nu\Big)$.

$\triangle$

5.1.2 Quelques conditions suffisantes

i) Existence de moments exponentiels

Nous allons voir que l'hypothèse d'existence de moments exponentiels est une condition suffisante de densité (confère **[7]** chap. 2).

Définition 5.1.1. *On dira qu'une variable aléatoire U admet des moments exponentiels si :*

$$\Big(\exists t_0 > 0\Big)\Big(\forall|t| < t_0\Big)\Big(E(e^{tU}) < \infty\Big).$$

Nous noterons $\mathcal{E}xp(U)$ cette hypothèse.

La proposition suivante donne le lien entre la condition $\mathcal{E}xp\Big(X\Big)$ et la densité des polynômes, commençons par rappeler une propriété de telles variables aléatoires .

Lemme 5.1.1. *Toute variable aléatoire X vérifiant $\mathcal{E}xp\Big(X\Big)$ admet des moments de tous ordres :*

$$\Big(\forall\alpha \in I\!N\Big)\Big(E(|X|^\alpha) < \infty\Big)$$

Proposition 5.1.1. *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur* $\Big(E, \mathcal{E}_X, \nu\Big)$ *vérifiant* $\mathcal{E}xp\Big(X\Big)$ *alors*

$$\mathcal{X} := Vect_{\mathbb{R}}\Big\{X^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}\Big\} \underset{dense}{\subset} L^2\Big(E, \mathcal{E}_X, \nu\Big).$$

Démonstration de la proposition 5.1.1.

Soit $g \in L^2\Big(E, \mathcal{E}_X, \nu\Big) \cap \mathcal{X}^\perp$.

$\exists f \in L^2\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \nu_X\Big)$ telle que $g = f \circ X$, où ν_X est la loi image de X par ν.

Posons :

$$\varphi(t) := E^\nu\Big(e^{itX} g\Big)$$

comme $g \in L^2\Big(E, \mathcal{E}_X, \nu\Big)$, $\varphi(t)$ est bien définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$. En passant dans l'espace image on a :

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) d\nu_X(x).$$

• Régularité de φ

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t) &:= \int_{\mathbb{R}} |x^\alpha| \cdot |e^{itx} f(x)| d\nu_X(x) \\ &\underset{CS}{\leq} ||f||_2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x^{2\alpha}| d\nu_X(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq +\infty. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie par le lemme 5.1.1. On a noté CS pour exprimer qu'on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Le théorème de dérivation de Lebesgue assure l'existence de toutes les dérivées de φ.

• Existence d'un ouvert où φ et toutes ses dérivées sont nulles

f étant orthogonale aux polynômes, on va développer e^{itx} en série entière de façon à faire apparaître les monômes x^α ($\alpha \in \mathbb{N}$).

Il faut qu'on puisse inverser $\int$ et $\sum$, vérifions le.

Regardons :

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\frac{(itx)^k}{k!}| f(x) | d\nu_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{|tx|} |f(x)| d\nu_X(x) \\ &\underset{\text{CS}}{\leq} ||f||_2 \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2|tx|} d\nu_X(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< +\infty \quad \text{pour } |t| < \frac{t_0}{2} \end{aligned}$$

On peut intégrer terme à terme la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(itx)^k}{k!}$ sur l'intervalle $D :=]-\frac{t_0}{2}, +\frac{t_0}{2}[$ et

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(it)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) d\nu_X(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(it)^k}{k!} E^\nu\Big(X^k g\Big)$$

de la même façon, pour $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi^{(j)}(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} (ix)^{k+j} f(x) d\nu_X(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k i^{k+j}}{k!} E^\nu\Big(X^{k+j} g\Big)$$

Comme $g \in \mathcal{X}^\perp$, $\varphi^{(j)}_{|_D} = 0$ $(j \in \mathbb{N})$.

• <u>Prolongement</u>

Posons :

- $D_0 := D$
- $D_p :=]-\frac{t_0}{2} + p\frac{t_0}{2}, \frac{t_0}{2} + p\frac{t_0}{2}[$ $p \in \mathbb{N}^*$

On a $\varphi_{|_{D_0}} = 0$, c'est le point précédent.

Pour prolonger ce résultat à $\mathbb{R}$ faisons un raisonnement par récurrence sur p.

Soient $j \in \mathbb{N}$ et $t \in D_{p+1}$, $\exists t_p \in D_p$ tel que $|t - t_p| < \frac{t_0}{2}$,

$$\varphi^{(j)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^j e^{i(t-t_p)x} e^{it_p x} f(x) d\nu_X(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad |(ix)^j e^{it_p x} f| = |(x)^j f| \\ \bullet \quad |t - t_p| < t_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{on peut intégrer terme à terme} \\ \text{la série } \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(i(t-t_p)x))^k}{k!} (ix)^j e^{it_p x} f(x). \end{array}\right.$$

Ce qui nous donne

$$\varphi^{(j)}(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(t-t_p)^k}{k!} \varphi^{(k+j)}(t_p) = 0$$

et donc $\varphi^{(j)}_{|_{\cup_{p\in\mathbb{N}} D_p}} = 0$.

D'autre part

$$\Big(\forall t \in \mathbb{R}\Big)\Big((\exists p \in \mathbb{N})(|t| < \frac{t_0}{2} + p\frac{t_0}{2} = \frac{p+1}{2} t_0)\Big)$$

puisque $\lim_{p\to+\infty} (\frac{p+1}{2} t_0)) = +\infty$

donc $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p = \mathbb{R}$ et finalement, pour tout$j \in \mathbb{N}$ $\varphi^{(j)} \equiv 0$.

• <u>Conclusion</u>

Par injectivité de la transformée de Fourier, on déduit que $f = 0$ puis $g = 0$,

il s'ensuit :

$$\overline{\mathcal{X}} = L^2\Big(E, \mathcal{E}_X, \nu\Big).$$

△

Remarque

Dans **[9]** pX on pourra trouver une autre démonstration de ce résultat. Dans le cas de variables aléatoires ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, cette proposition relève de la théorie des polynômes. Dans **[4]** p133, on trouvera une démonstration basée sur le principe du prolongement analytique ; une généralisation à $\mathbb{R}^n$ de cette méthode impose l'utilisation de la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables. Nous avons choisi une démonstration plus constructive, comme nous le verrons plus loin, qui se généralise assez facilement.

Définition 5.1.2. *On dira qu'une suite de variables aléatoires* $\Big(U_k\Big)_{k\in I\!N}$ *admet des moments exponentiels si :*

$$\Big(\forall k \in I\!N\Big)\Big(\exists \tau_k > 0\Big)\Big(\forall |t| < \tau_k\Big)\Big(E(e^{tU_k}) < \infty\Big).$$

Nous noterons $\mathcal{E}xp\Big((U_k)_{k\in I\!N}\Big)$ *cette hypothèse.*

ii) Deux corollaires au théorème 5.1.1.

Corollaire 5.1.1. *On suppose de plus que les variables aléatoires* $(X_n)_{n\in I\!N^*}$ *sont indépendantes.*

Si

$$\Big(\forall k \in I\!N^*\Big)\Big(Vect_{I\!R}\Big\{X_k^\alpha | \alpha \in I\!N\Big\} \underset{dense}{\subset} L^2\Big(E, \mathcal{E}_{X_k}, \nu\Big)\Big)$$

alors,

$$\bigcup_{n\in I\!N^*} Vect_{I\!R}\Big\{X_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{\alpha_n} | (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in I\!N^n\Big\} \underset{dense}{\subset} L^2\Big(E, \mathcal{E}, \nu\Big).$$

<u>**Démonstration**</u>

soit ν_k (resp. ν_X) la loi de X_k $\Big($resp. $X := (X_1,\ldots,X_n)\Big)$ alors $\nu_X = \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n$.

Dans les espaces images

$$\begin{array}{ccc} \Big(E, \mathcal{E}, \nu\Big) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \nu_X) \\ \omega & \longmapsto & \Big(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega)\Big) := (x_1,\ldots,x_n). \end{array}$$

L'indépendance nous assure l'isomorphisme :

$$L^2\Big(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \nu_X\Big) \simeq \bigotimes_{k=1}^{n} L^2\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \nu_k\Big)$$

ce qui fournit la solution :
$\Big\{x_k^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}\Big\}$ est un système générateur de $L^2\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \nu_k\Big)$, $\Big\{\bigotimes_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k} | (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\Big\}$ est donc générateur de $\bigotimes_{k=1}^{n} L^2\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \nu_k\Big)$. Par l'isomorphisme, on remonte à l'espace source et utilise le théorème 5.1.1. pour conclure.

$\triangle$

Remarque

Dans le corollaire suivant, on ne suppose plus les variables aléatoires indépendantes, ce qui impose une hypothèse plus forte à chacune d'entre elles.

Corollaire 5.1.2. *Avec les notations du théorème 5.1.1., on suppose que la suite de variables aléatoires* $\Big(X_k\Big)_{k\in I\!N^*}$ *vérifie l'hypothèse* $\mathcal{E}xp\Big((X_k)_{k\in I\!N^*}\Big)$ *;*
alors :

$$\bigcup_{n\in I\!N^*} Vect_{I\!R}\Big\{X_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot X_n^{\alpha_n} | \Big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I\!N^n\Big)\Big\} \underset{dense}{\subset} L^2\Big(E, \mathcal{E}, \nu\Big).$$

Démonstration

Elle va consister en une généralisation de la démonstration de la proposition 5.1.1.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Big(X_1, \ldots, X_n\Big) : \Big(E, \mathcal{E}_n, \nu\Big) \longrightarrow \Big(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n)\Big)$$

Soit $g \in L^2\Big(E, \mathcal{E}_n, \nu\Big) \cap \mathcal{X}_n^\perp$
$\exists f \in L^2\Big(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n), \nu_X\Big)$ telle que $g = f \circ (X_1, \ldots, X_n\Big)$.
Notons :

$$\varphi(t) := E^\nu\Big(e^{i<t,X>} g\Big).$$

Comme $g \in L^2\Big(E, \mathcal{E}_n, \nu\Big)$, $\varphi(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}^n$. En passant dans l'espace image on a :

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<t,x>} f(x) d\nu_X(x).$$

• <u>Régularité de φ</u>

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned}
\varphi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} |\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}| \cdot |e^{i<t,x>} f(x)| d\nu_X(x) \\
&\underset{\text{CS}}{\leq} ||f||_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\prod_{k=1}^{n} x_k^{2\alpha_k}| d\nu_X(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\underset{\substack{\text{lois marginales} \\ \text{et CSG}}}{\leq} ||f||_2 \left(\prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |x_k^{2n\alpha_k}| d\nu_k(x) \right)^{\frac{1}{2n}} \\
&\leq +\infty.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie par l'existence de moments exponentiels qui assure l'intégrabilité de tout polynôme. On a noté CSG pour exprimer qu'on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz Généralisée. Le théorème de dérivation de Lebesgue assure l'existence de toutes les dérivées de φ.

• <u>Existence d'un ouvert où φ et toutes ses dérivées sont nulles</u>

f étant orthogonale aux polynômes, on va développer $e^{i<t,x>}$ en série entière de façon à faire apparaître des produits $\prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$.

Comme

$$\begin{aligned}
\psi(t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\frac{(i < t, x >)^k}{k!}| f(x)| d\nu_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{|<t,x>|} |f(x)| d\nu_X(x) \\
&\underset{CS}{\leq} ||f||_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\sum_{k=0}^{n} |t_k x_k|} d\nu_X(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\underset{\substack{\text{lois marginales} \\ \text{et CSG}}}{\leq} ||f||_2 \left(\prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2n|t_k x_k|} d\nu_k(x) \right)^{\frac{1}{2n}} \\
&< +\infty \ \text{ pour } |t_k| < \frac{\tau_k}{2n}.
\end{aligned}$$

Sur $D := \prod_{k=1}^{n}]-\frac{\tau_k}{2n}, +\frac{\tau_k}{2n}[$ on peut intégrer terme à terme la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(i<t,x>)^k}{k!}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{i^k}{k!} \int_{\mathbb{R}^n} <t,x>^k f(x) d\nu_X(x) \\
<t,x>^k &= \left(\sum_{j=1}^{k} t_j x_j\right)^k = \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \prod_{j=1}^{n} (t_j x_j)^{k_j} \\
\varphi(t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{i^k}{k!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \prod_{j=1}^{n} (t_j)^{k_j} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} (x_j)^{k_j} f(x) d\nu_X(x) \\
\varphi(t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{i^k}{k!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \prod_{j=1}^{n} (t_j)^{k_j} E^{\nu}\left(\prod_{j=1}^{n} (X_j)^{k_j} g\right).
\end{aligned}$$

De la même façon on montre que, pour $p = p_1 + \cdots + p_n$ $\Big((p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{N}^n\Big)$:

$$\left(\frac{\partial^p \varphi}{\partial t_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot \partial t_n^{p_n}}\right)(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{i^{k+p}}{k!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \prod_{j=1}^{n} (t_j)^{k_j} E^{\nu}\left(\prod_{j=1}^{n} (X_j)^{k_j+p_j} g\right).$$

Comme $g \in \Big(\mathcal{X}_n\Big)^{\perp}$, $\varphi_{|_D} \equiv 0$ et pour tout $p = p_1 + \cdots + p_n$ $\Big((p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{N}^n\Big)$, $\left(\frac{\partial^p \varphi}{\partial t_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot \partial t_n^{p_n}}\right)_{|_D} \equiv 0$.

• <u>Prolongement</u>

Commençons par réduire l'ensemble D pour le rendre symétrique et plus facile à manipuler.

Posons :

- $\tau_0 := \inf\Big\{\frac{\tau_1}{2n}, \ldots, \frac{\tau_n}{2n}\Big\}$
- $|t|_\infty := \sup_{k=1,\ldots,n} |t_k|$
- $D_p := \Big\{t \in \mathbb{R}^n \mid |t|_\infty < \frac{\tau_0}{2n} + p\frac{\tau_0}{2n}\ p \in \mathbb{N}\Big\}$ pour $p = 0$ on a $D_0 = D$.

On a $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{k_n}}_{|_{D_0}} = 0$, c'est le point précédent.

Un raisonnement par récurrence sur p permet de prolonger ce résultat à $\mathbb{R}^n$.

Soient des entiers naturels j, $j_1, \ldots, j_n$ tels que $j_1 \cdots j_n = j$ et $t \in D_{p+1}$, $\exists t_p \in D_p$ tel que $|t - t_p| < \frac{\tau_0}{2n}$, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial^j \varphi}{\partial x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{j_n}}\right)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{r=1}^{n} (i x_r)^{j_r} e^{i<t-t_p,x>} e^{i<t_p,x>} f(x) d\nu_X(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad |\prod_{r=1}^{n}(ix_r)^{j_r}e^{i<t_p,x>}f| = |\prod_{r=1}^{n}(x_r)^{j_r}f| \\ \bullet \qquad\qquad |t-t_p| < \frac{\tau_0}{2n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{on peut intégrer terme à terme} \\ \text{la série} \\ \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(i<t-t_p,x>)^k \prod_{r=1}^{n}(ix_r)^{j_r}}{k!}. \end{array}\right.$$

Ce qui nous donne

$$\left(\frac{\partial^j\varphi}{\partial x_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{j_n}}\right)(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\prod_{j=1}^{n}\frac{(t_j-(t_p)_j)^k}{k_j!}\left(\frac{\partial^{k+j}\varphi}{\partial x_1^{k_1+j_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{k_n+j_n}}\right)(t_p) = 0$$

et par suite $\left(\frac{\partial^j\varphi}{\partial x_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{j_n}}\right)\Bigg|_{\bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p} = 0.$

D'autre part

$$\Big(\forall t\in\mathbb{R}^n\Big)\Big((\exists p\in\mathbb{N})(|t|_\infty < \frac{\tau_0}{2n} + p\frac{\tau_0}{2n} = \frac{1+p}{2n}\tau_0)\Big)$$

puisque $\lim_{p\to+\infty}(\frac{1+p}{2n}\tau_0) = +\infty$

donc $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p = \mathbb{R}^n$ d'où finalement $\frac{\partial^j\varphi}{\partial x_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{j_n}} \equiv 0.$

• <u>Conclusion</u>

Par injectivité de la transformée de Fourier, on déduit que $f=0$ puis $g=0$,

il s'ensuit :

$$\overline{\mathcal{X}_n} = L^2\Big(E,\mathcal{E}_n,\nu\Big).$$

Le théorème 5.1.1. nous permet alors de conclure.

△

Remarque

Sous les hypothèses du corollaire 5.1.2., les variables aléatoires étant indépendantes, le résultat découle immédiatement du corollaire 5.1.1. et de la proposition 5.1.1.

5.2 Application

5.2.1 Explicitation du modèle

Considérons :

- $L^2\Big(E, \mathcal{E}, \nu\Big)$ donné en 1
- un espace de Hilbert H, séparable, muni d'un produit scalaire $<,>$
- $\Big(e_k\Big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H.

Notre modèle va être la donnée de ces deux espaces de Hilbert, le premier muni de sa base hilbertienne, le second de la suite de variables aléatoires $\Big(X_k\Big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et d'une application ϕ les liant l'un à l'autre de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & H & \longrightarrow & L^2\Big(E, \mathcal{E}, \nu\Big) \\ & h = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} < h, e_k > e_k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} < h, e_k > X_k. \end{array}$$

Je renvois à **[7]** chap. 1 pour avoir plus détails.

5.2.2 Etude de la convergence dans tous les L^p

i) Convergence exponentielle

On se place dans les conditions d'application du corollaire 5.1.2. On va avoir besoin d'une hypothèse plus forte, il nous faudra un intervalle non trivial sur lequel toutes les variables aléatoires admettent des moments exponentiels.

Proposition 5.2.1. *(Convergence exponentielle)*
Supposons que $\delta := \inf_{k\in I\!N} \tau_k > 0$ *et soit* $\Big(h_k\Big)_{k\in I\!N^*}$ *une suite d'éléments de H, alors :*

$$\Big(h_n \xrightarrow{H} 0\Big) \Longrightarrow \Big(\Big(\forall |t| < \frac{\delta}{4}\Big)\ \Big(e^{|t\phi(h_n)|} \xrightarrow{L^1(\nu)} 1\Big)\Big).$$

Pour démontrer cette proposition on va borner uniformément (en n), $\Big(e^{|t\phi(h_n)|}\Big)^2$, ceci découlera du résultat suivant :

Lemme 5.2.1. *(Proposition 2.2* **[7]***)*
Soient $\Big(a_k\Big)_{k\in I\!N} \in l^2(I\!N)$ *et* $\Big(V_k\Big)_{k\in I\!N}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes centrées, réduites (vaicr). On suppose* $\mathcal{E}xp\Big((V_k)_{k\in I\!N}\Big)$.
Si $\tau := \inf \dfrac{\tau_k}{|a_k|} > 0$
alors $U := \displaystyle\sum_n a_n V_n$ *vérifie* $\mathcal{E}(U)$ *sur l'intervalle* $]-\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}[$ *et* $Ee^{tU} \leq e^{\frac{9}{8}t^2 \sum a_k^2}$.

Démonstration de la proposition 5.2.1.

Idée : utiliser le théorème de convergence de Vitali

• Convergence en probabilité

Soit $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \nu\Big([e^{|t\phi(h_n)|} > 1+\eta]\Big) &= \nu\Big(\Big[|t\phi(h_n)| > \ln(1+\eta)\Big]\Big) \\ &\leq \frac{t^2||h_n||^2}{\ln(1+\eta)} \qquad B.Tchebychef \end{aligned}$$

La convergence de $\Big(h_k\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ donne alors le résultat.

• Equi-intégrabilité :

$$0 \leq e^{2|t\phi(h_n)|} \leq e^{2t\phi(h_n)} + e^{-2t\phi(h_n)}.$$

Posons $a_k^n :=< h_n, e_k >$, alors $|a_n^k| < ||h_n||$.

Comme $h_n \xrightarrow{H} 0$:

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall k \in \mathbb{N}, |a_n^k| < 1)$$

pour $n > N$, $\inf \dfrac{\tau_k}{|a_k^n|} > \tau$.

Le lemme 5.2.1. nous montre alors que $Ee^{2t\phi(h_n)} \leq e^{\frac{9}{8}(2t)^2||h||^2}$ $(t \in]-\frac{\tau}{4}, +\frac{\tau}{4}[)$, d'où l'encadrement

suivant :

$$0 \leq Ee^{2|t\phi(h_n)|} \leq 2e^{\frac{9}{2}t^2||h_n||^2} \leq 2e^{\frac{9}{2}t^2} \quad (t \in]-\frac{\delta}{4}, +\frac{\delta}{4}[).$$

On a ainsi majoré uniformément $\sup_n E\Big(e^{|t\phi(h_n)|}\Big)^2$ ce qui implique l'équi-intégrabilité.

Le théorème de convergence de Vitali donne le résultat, à savoir, la convergence dans $L^1(\nu)$:

$$Ee^{|t\phi(h_n)|} \longrightarrow 1.$$

△

ii) Convergence dans tous les L^p

Proposition 5.2.2. *(Convergence dans tous les L^p)*

Sous les hypothèses d'application de la proposition 5.2.1. on a :

$$\Big(\forall p \geq 1\Big)\Big(\phi(h_n) \xrightarrow{L^p(\nu)} 0\Big).$$

Remarque

Dans l'ensemble des suites ayant des moments exponentiels cette proposition nous offre une réciproque à la précédente. En effet, on peut affirmer en particulier que $\phi(h_n) \xrightarrow{L^2(\nu)} 0$. La réciproque découle alors de l'isométrie :

$$||h_n||_H = ||\phi(h_n)||_{L^2(\nu)}.$$

<u>Démonstration</u>

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]-\frac{\tau}{4}, +\frac{\tau}{4}[$. On a le développement en série entière suivant :

$$Ee^{|t\phi(h_n)|} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|t|^k}{k!} E|\phi(h_n)|^k$$

(série à termes positifs, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$). On veut prendre la limite des deux membres quand n tend vers $+\infty$. Vérifions qu'on peut inverser $\lim\limits_{n\to\infty}$ et $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}$.

Pour cela fixons $t_0 \in]0, +\frac{\tau}{4}[$,

$$\Big(\exists N \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall n \in \mathbb{N}, n > N\Big) \Longrightarrow \Big(||h_n|| \leq 1\Big).$$

Prenons $n > N$, $|t| < t_0$ et $k \geq 1$ un entier naturel. Nous devons montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcll} |\phi(h_n)|^k & \leq & \dfrac{k!}{t_0^k} e^{t_0|\phi(h_n)|} & \leq \quad \dfrac{k!}{t_0^k}\Big(e^{t_0\phi(h_n)} + e^{-t_0\phi(h_n)}\Big) \\ E|\phi(h_n)|^k & \leq & \dfrac{k!}{t_0^k} 2e^{\frac{9}{8}t_0^2||h_n||^2} & \text{par le lemme 2.1} \\ & \leq & \dfrac{k!}{t_0^k} 2e^{\frac{9}{8}t_0^2} & \text{car } n \geq N. \end{array}$$

Mais

$$\left(\frac{k!}{t_0^k} 2e^{\frac{9}{8}t_0^2}\right)\left(\frac{|t|^k}{k!}\right) = 2e^{\frac{9}{8}t_0^2}\left(\frac{|t|}{t_0}\right)^k$$

est le terme général d'une série géométrique convergente, ainsi

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} E|\phi(h_n)|^k \frac{|t|^k}{k!}$$

converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}$; par suite

$$1 = \lim_{n\to+\infty} Ee^{|t\phi(h_n)|} = 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \lim_{n\to+\infty} E|\phi(h_n)|^k \frac{|t|^k}{k!}$$

et

$$0 = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \lim_{n \to +\infty} E|\phi(h_n)|^k \frac{|t|^k}{k!}$$

d'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{n \to +\infty} E|\phi(h_n)|^k = 0$$

• <u>Généralisation</u>

Comme nous travaillons avec des probabilités $\begin{cases} L^p & \subset & L^q & p > q \\ || \, ||_q & \leq & || \, ||_p. \end{cases}$

D'autre part

$$\Big(\forall p > 1\Big)\Big([p] \leq p < [p] + 1\Big) \text{ (partie entière).}$$

Pour toute suite $\Big(U_k\Big)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^{[p]+1}$ on a :

$$||U_n||_p \leq ||U_n||_{[p]+1}$$

Ce qui nous démontre la proposition 5.2.1 pour tout $p \geq 1$.

△

5.2.3 Une application

Tous ces préliminaires nous permettent d'énoncer le résultat qui nous intéresse dans cette partie. Nous conservons les hypothèses précédentes et utiliserons un espace de Hilbert particulier. On va prendre $H := L^2\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu\Big)$ où μ est une mesure bornée. Introduisons quelques notations :

- $W_0 := \mathbb{R}$
- $W_n := Vect_{\mathbb{R}}\Big\{W_{t_1} \cdot \ldots \cdot W_{t_n} | (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n\Big\}$ $(n \geq 1)$
- $W := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$

Théorème 5.2.1. *Dans les conditions d'application des propositions 5.2.1. et 5.2.2.*

$$\bigcup_{n \in I\!N} W_n \underset{dense}{\subset} L^2\Big(I\!R, B(I\!R), \mu\Big)$$

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $e_k \in L^2\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu)$, il existe une suite de fonctions simples $\Big(e_k^j\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant dans $L^2\Big(\mu\Big)$ (par densité) vers e_k.

C'est à dire, pour tout k fixé dans $\mathbb{N}^*$, il existe :

- $\Big(N(j,k)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}$,
- $\Big(j \in \mathbb{N}\Big)\Big(\alpha_i(j,k) \in \mathbb{R}\ \Big(i = 1, \ldots, N(j,k)\Big)\Big)$
- $t_0(j,k) < \cdots < t_N(j,k)$ des réels

tels que :

$$|| \sum_{i=0}^{N(j,k)} \alpha_i(j,k) 1_{]t_i(j,k), t_{i+1}(j,k)[} - e_k \,||_2 \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour simplifier on omettra de préciser le couple (j,k), on notera $\Big(e_k^j\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ cette suite et $\Big(X_k^j\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ son image par ϕ.

(a) $\underline{\Big(j \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall k \in \mathbb{N}\Big)\Big(X_k^j \in W_1\Big)}$

Il suffit de voir que :

$$\phi(e_k^j) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \Big(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\Big).$$

(b) $\underline{\Big(\forall p \geq 1\Big)\Big(X_k^j \overset{L^p}{\to} X_k\Big)}$

Cela résulte de la proposition 2.1.

(c) $\underline{\Big(\forall n \in \mathbb{N}^*\Big)\Big(\forall (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n\Big)\Big(X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_n} \in \overline{W}\Big)}$

Par récurrence sur n.

n=1 :

$$\Big(\forall p \geq 1\Big)\Big(X_k^j \overset{L^p}{\to} X_k\Big) \text{ (point 1).}$$

HR : fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que :

$$\Big(\forall s \in \{1, \ldots, n\}\Big)\Big(\forall p \geq 1\Big)\Big(\forall (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}^s\Big)\Big(X_{k_1}^j \cdot \ldots \cdot X_{k_s}^j \overset{L^p}{\longrightarrow} X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_s}\Big)$$

Prenons maintenant $(k_1, \ldots, k_{n+1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$. Alors :

$||X_{k_1}^j \cdot \ldots \cdot X_{k_{n+1}}^j - X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_{n+1}}||_2$

$\leq ||\Big(X_{k_1}^j \cdot \ldots \cdot X_{k_n}^j - X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_n}\Big) X_{k_{n+1}}||_2 + ||X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_n} \Big(X_{k_{n+1}}^j - X_{k_{n+1}}\Big)||_2$

$\leq ||X_{k_1}^j \cdot \ldots \cdot X_{k_n}^j - X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_n}||_4 ||X_{k_{n+1}}||_4 + ||X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_n}||_4 ||X_{k_{n+1}}^j - X_{k_{n+1}}||_4.$

Or $\Big(X_{k_{n+1}}^j \overset{L^4}{\to} X_{k_{n+1}}\Big)$ donc

$$\Big(\exists j_0 \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall j \geq j_0\Big)\Big(||X_{k_{n+1}}^j||_4 \leq ||X_{k_{n+1}}||_4 + 1\Big)$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence (HR) et le point 1), on a :

$$X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_{n+1}} \in \overline{W}_{n+1} \subset \overline{W}$$

et par suite

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}^*\Big)\Big(\forall (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n\Big)\Big(X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_n} \in \overline{W}\Big)$$

finalement $\mathcal{X} \subset \overline{W} \subset L^2$ donc

$$\mathcal{X} = \overline{W} = L^2\Big(E, \mathcal{E}, \nu\Big).$$

$\triangle$

Troisième partie

CONSTRUCTION ET ÉTUDE D'UNE INTÉGRALE

Chapitre 6

Construction d'une intégrale

6.1 Résultats techniques

6.1.1 Modèle

Nous utiliserons les données suivantes :

i) – E un espace vectoriel normé

– $\mathcal{E}$ une tribu sur E

– $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ une filtration de $\mathcal{E}$

– ν une probabilité sur (E,$\mathcal{E}$)

– $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vaicr $\mathbb{R}$ sur $(E,\mathcal{E},\nu)$ pour laquelle il existe, pour tout $p>1$, une contante K_p telle que :

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^*} E|X_k|^p < K_p$$

ii) – μ une probabilité diffuse sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$

– $(e_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de H :=$L^2(E,\mathcal{E},\nu)$

iii) – $\Phi : H \to L^2\Big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu\Big)$ $h \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}_*} \langle h, e_k\rangle X_k$. Nous noterons $\Phi(h)_n$ la somme partielle $\sum_{k=1}^{n}\langle h, e_k\rangle X_k$

Remarques

– Pour $n \geq 1$ la famille $\Big(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}\Big)_{(j_1,\ldots,j_n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^n}$ est naturellement une base hilbertienne de $H^{\otimes^n}$

– Pour toute fonction $f \in H^{\otimes^n}$ on a $f = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in(N^*)^n} \langle f, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}\rangle e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}$

– Dans le cas où les variables aléatoires $\big(X_k\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont gaussiennes on sait, confère par exemple **[7]**, qu'il existe un mouvement brownien β pour lequel :

$$\Phi(h) = \int_0^t h(s)d\beta_s$$

Nous généraliserons cette idée dans la suite en construisant une intégrale dans le cas où les variables aléatoires $\big(X_k\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas gaussiennes.

Proposition 6.1.1. *Φ est une isométrie pour les normes usuelles*

6.1.2 Lemmes

Lemme 6.1.1. *Considérons les données suivantes :*

1. $\Big(M_n\Big)_{n\in I\!N^*}$ *une martingale sur* $\Big(E, \mathcal{E}, (\mathcal{E}_n)_{n\in I\!N^*}, \nu\Big)$
2. $\Big(Y_n\Big)_{n\in I\!N^*}$ *un processus prévisible sur* $\Big(E, \mathcal{E}, (\mathcal{E}_n)_{n\in I\!N^*}, \nu\Big)$

Si l'on suppose les deux hypothèses suivantes satisfaites :

1. $\sup_{k\geq 2} E\Big(M_k - M_{k-1}\Big)^2 < \infty$
2. $\sum_{k\geq 1} EY_k^2 < \infty$

alors la martingale transformée :

$$\Big(Y * M\Big)_n := \sum_{k=2}^{n} Y_k\Big(M_k - M_{k-1}\Big)$$

est de carré intégrable.

<u>Démonstration</u>

Choisissons un entier naturel n supérieur ou égal à deux, on a :

$$E \mid \Big(Y * M\Big)_n \mid^2 \leq \sup_{k\geq 2} E\Big(M_k - M_{k-1}\Big)^2 \sum_{k=0}^{n} EY_k^2$$

$\triangle$

Lemme 6.1.2. *Pour un élément f de $H\otimes H$ les deux suites*

- $\left(\sum_{j=1}^{N} \langle f, e_j\otimes e_j\rangle (X_j^2 - 1)\right)_{N\geq 1} =: \Big(\varphi_N^{(2)}(f)\Big)_{N\geq 1}$

- $\left(\sum_{j=2}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{j-1}\langle f, e_j\otimes e_k\rangle X_k\Big)X_j\right)_{N\geq 2} =: \left(\varphi_N^{(1,1)}(f)\right)_{N\geq 2}$

convergent dans $L^2\big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu\big)$

Notation

Nous noterons $\varphi^{(2)}(f)$ et $\varphi^{(1,1)}(f)$ leur limite respective.

<u>Démonstration</u>

On utilise le lemme 6.1.1.

Pour la première suite on pose :

- $\begin{cases} Y_k &= \langle f, e_k\otimes e_k\rangle \\ M_k &= \sum_{j=1}^{k}(X_j^2-1) \end{cases}$ $\left|\begin{array}{lll} E(M_k-M_{k-1})^2 & \leq & K_4+1 \\ \sum_{k\geq 1} EY_k^2 & \leq & \| f \|_{H\otimes H}^2 \end{array}\right.$

pour la seconde suite on pose :

- $\begin{cases} Y_k &= \sum_{j=1}^{k-1}\langle f, e_k\otimes e_j\rangle X_j \\ M_k &= \sum_{j=1}^{k} X_j \end{cases}$ $\left|\begin{array}{lll} E(M_k-M_{k-1})^2 & = 1 & \\ \sum_{k\geq 2} EY_k^2 & \leq \sum_{1\leq j<k}\langle f, e_j\otimes e_j\rangle & \leq \| f \|_{H\otimes H}^2 \end{array}\right.$

△

Lemme 6.1.3. *$\varphi^{(2)}$ et $\varphi^{(1,1)}$ sont des applications linéaires continues de $H\otimes H \to L^2\big(E, \mathcal{E}, \nu\big)$*

<u>Démonstration</u>

Soit $f\in H\otimes H$ on a, en utilisant, le lemme 6.1.2. :

(a) $E^\nu|\varphi^{(2)}(f)|^2 \leq (K_4+2K_2+1)\| f \|_{H\otimes H}^2$

(b) $E^\nu|\varphi^{(1,1)}(f)|^2 \leq \| f \|_{H\otimes H}^2$

△

Remarques

- On a donc en particulier $\begin{cases} \| \varphi^{(2)} \| &\leq \sqrt{K_4+2K_2+1} \\ \| \varphi^{(1,1)} \| &\leq 1 \end{cases}$

- Dans le cas où les variables aléatoires X_k ($k \in \mathbb{N}^*$) sont équidistribuées on a $\| \varphi^{(2)} \| = M_4 + 2M_2 + 1$. Pour le voir il suffit de considérer $U_1 \in H$ et $U_1 \neq 0$ avec $U_2 = \frac{U_1}{\|U_2\|^2}$ (on peut également considérer $f = e_1 \otimes e_2$).
- En prenant $f = e_2 \otimes e_1$ on a $E|\sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1}\langle f, e_n \otimes e_k\rangle X_k X_n|^2 = E|X_1X_2|^2 = 1$ donc $\| \varphi^{(1,1)} \| = 1$

Lemme 6.1.4. *Pour f_1, f_2 dans $H \otimes H$ on a :*

i) $E^\nu\Big(\varphi^{(1,1)}(f_1)\varphi^{(1,1)}(f_2)\Big) = \sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f_1, e_j \otimes e_k\rangle\langle f_2, e_j \otimes e_k\rangle$

ii) $E^\nu\Big(\varphi^{(1,1)}(f_1)\varphi^{(2)}(f_2)\Big) = 0$

iii) $E^\nu\Big(\varphi^{(2)}(f_1)\varphi^{(2)}(f_2)\Big) = \sum_{j\geq 1}\langle f_1, e_j \otimes e_j\rangle\langle f_2, e_j \otimes e_j\rangle$

Démonstration

Il suffit de polariser les résultats du lemme précédent

△

Lemme 6.1.5. *Si les variables aléatoires X_k ($k \in \mathbb{N}^*$) sont équidistribuées, on a pour $f_1, f_2 \in H \otimes H$:*

$E^\nu\Big(\varphi^{(2)}(f_1)\varphi^{(2)}(f_2)\Big) = (M_4 - 2M_2 + 1)\sum_{j\geq 1}\langle f_1 \otimes f_2, e_j^{\otimes 4}\rangle$

$E^\nu\Big(\varphi^{(1,1)}(f_1)\varphi^{(1,1)}(f_2)\Big) = \langle f_1, f_2\rangle - \frac{1}{M_4 - 2M_2 + 1}E^\nu\Big(\varphi^{(2)}(f_1)\varphi^{(2)}(f_2)\Big)$

Remarque

On vérifie assez facilement que

$$\| f \|^2_{H\otimes H} = \| \varphi^{(1,1)}(f) \|^2 + \frac{1}{M_4 - 2M_2 + 1} \| \varphi^{(2)}(f) \|^2$$

Ce résultat nous incitera dans la suite à considérer un opérateur $\Phi^{(2)}$ globalisant les deux opérateurs $\varphi^{(1,1)}$ et $\varphi^{(2)}$.

Nous garderons, cependant, ces deux derniers dans le but de simplifier les calculs.

Démonstration

On utilise la remarque précédente et la polarisation du produit scalaire.

△

6.2 Construction d'une intégrale

6.2.1 Etude de produits

Nous avons vu au chapitre précédent qu'on obtient un sous-espace dense de L^2 en considérant les produits $X_{k_1} \cdot \ldots \cdot X_{k_n}$ $\big((k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\big)$, sous l'hypothèse d'existence de moments exponentiels pour les variables X_k.
Notre but, dans cette thèse, est l'obtention d'une décomposition en chaos. Nous allons, dans un premier temps, considérer les chaos d'ordre 2 et pour cela construire une intégrale.

Proposition 6.2.1. *Pour des fonctions f et g de H on a :*

1. $\Phi(h)\Phi(g) \in L^2$
2. $\Phi(h)\Phi(g) = \varphi^{(2)}(h \otimes g) + \varphi^{(1,1)}(h \otimes g + g \otimes h) + \langle h, g \rangle$ *dans* L^2

Remarque

Cette écriture nous poussera dans la suite à considérer des fonctions symétriques de $H \otimes H$ pour faire apparaître des propriétés particulières mais intéressantes.

Démonstration

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} \langle h \otimes g, e_j \otimes e_k \rangle X_j X_k = \varphi_n^{(1,1)}(h \otimes g + g \otimes h) + \varphi_n^{(2)}(h \otimes g) + \sum_{k=1}^{n} \langle h \otimes g, e_k \otimes e_k \rangle$$

Il ne reste plus qu'à prendre la limite de chacun des termes dans L^2.

△

Proposition 6.2.2. *Si nous prenons une suite de partitions de* $[0,1]$ *:* $0 = t_0^n < \cdots < t_0^n = 1$ *dont le pas tend vers zéro, alors nous obtenons le résultat suivant :*

$$\sum_{k=0}^{n}\Phi\Big(h1_{]0,t_k^n]}\Big)\Phi\Big(g1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\Big)\overset{L^2}{\to}\varphi^{(1,1)}(h\otimes g1_C+g\otimes h1_{\widetilde{C}})+\varphi^{(2)}(h\otimes g1_C)$$

où

$1_C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x<y\leq 0\}$

et

$1_{\widetilde{C}}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq y<x\leq 0\}$.

<u>Démonstration</u>

On utilise la proposition 6.2.1. :

$$\sum_{k=0}^{n}\Phi\Big(h1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\Big)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[\varphi^{(1,1)}\Big(h\otimes g1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}+g\otimes h1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\otimes 1_{]0,t_k^n]}\Big)+\varphi^{(2)}\Big(h\otimes g1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\Big)$$
$$+\langle h1_{]0,t_k^n]},g1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\rangle\Big]$$

On remarque que $\langle h1_{]0,t_k^n]},g1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\rangle=0$

On va maintenant étudier les termes :

$$\begin{cases} N_1^n & := \left\|\sum_{k=0}^{n}\varphi^{(1,1)}\Big(h\otimes g1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\Big)-\varphi^{(1,1)}\Big(h\otimes g1_C\Big)\right\|_{L^2(\nu)} \\ N_2^n & := \left\|\sum_{k=0}^{n}\varphi^{(1,1)}\Big(g\otimes h1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\otimes 1_{]0,t_k^n]}\Big)-\varphi^{(1,1)}\Big(g\otimes h1_{\widetilde{C}}\Big)\right\|_{L^2(\nu)} \\ N_3^n & := \left\|\sum_{k=0}^{n}\varphi^{(2)}\Big(h\otimes g1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\Big)-\varphi^{(2)}\Big(h\otimes g1_C\Big)\right\|_{L^2(\nu)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_1^n &= \left\|\sum_{k=0}^{n}\varphi^{(1,1)}\Big(h\otimes g1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}-h\otimes g1_C\Big)\right\|_{L^2(\nu)} \\ &\leq \left\|h\otimes g\Big(\sum_{k=0}^{n}1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}-1_C\Big)\right\|_{L^2(\mu^{\otimes^2})} \end{aligned}$$

Nous avons :

- $\Big(h\otimes g\Big)^2\Big(\sum_{k=0}^{n}1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}-1_C\Big)^2\leq 4\Big(h\otimes g\Big)^2\in L^2(\mu^{\otimes^2})$
- $\Big(\sum_{k=0}^{n}1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}-1_C\Big)^2\xrightarrow[\text{ps}]{\mu^{\otimes^2}}0$

$\Longrightarrow\Big(h\otimes g\Big)^2\Big(\sum_{k=0}^{n}1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}-1_C\Big)^2\xrightarrow[\text{ps}]{\mu^{\otimes^2}}0$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\left\|h\otimes g\Big(\sum_{k=0}^{n}1_{]0,t_k^n]}\otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}-1_C\Big)\right\|_{L^2(\mu^{\otimes^2})}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi^{(1,1)}\Big(h \otimes g1_{]0,t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\Big) \underset{n\to\infty}{\overset{L^2(\nu)}{\longrightarrow}} \varphi^{(1,1)}\Big(h \otimes g1_C\Big)$$

Les termes N_2^n et N_3^n se traitent de la même façon.

$\triangle$

6.2.2 Définition de l'intégrale

Nous avons maintenant tous les matériaux pour définir l'intégrale qui nous intéresse, on la notera, pour h et g dans H :

$$\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s$$

où $\Phi(h)_s := \Phi(h1_{]0,s]})$.

Définition 6.2.1.

$$\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s := \varphi^{(1,1)}\big(h \otimes g1_C + g \otimes h1_{\widetilde{C}}\big) + \varphi^{(2)}\big(h \otimes g1_C\big)$$

Remarque

C'est une intégrale dans le sens suivant :

$$\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s = \lim_{L^2} \sum_{k=0}^{n} \Phi(h)_{t_k^n}\Big(\Phi(g)_{t_{k+1}^n} - \Phi(g)_{t_k^n}\Big)$$

$$= \lim_{L^2} \sum_{k=0}^{n} \Phi\Big(h1_{]0,t_k^n]}\Big)\Phi\Big(g1_{]t_k^n,t_{k+1}^n]}\Big)$$

6.3 Une autre présentation du même objet

6.3.1 Motivation

La décomposition précédente est faite selon la base des polynômes xy et $x^2 - 1$. On pense soit aux polynômes de Wick, on a recentré, soit aux polynômes orthogonaux. On sait associer à la mesure μ (confère **[2]**) une famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout entier naturel n le degré du polynôme P_n est exactement n.

En considérant les produits $P_{i_1}(X_{j_1})\cdot\ldots\cdot P_{i_n}(X_{j_n})$, où les n-uples $(i_1,\ldots,i_n)$ et $(j_1,\ldots,j_n)$ sont formés d'entiers naturels distincts, nous obtenons une décomposition de $L^2(\nu)$ selon

les chaos sur la famille de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. L'indépendance des variables aléatoires et l'orthogonalité des polynômes nous donne une famille orthogonale, mais plus normée ; nous aurons l'occasion de résoudre ce problème dans la suite.
Nous allons réécrire cette décomposition selon ces polynômes orthogonaux de façon à rendre les calculs qui suivent plus simples. Cette décomposition nous offre, de plus, une généralisation plus aisée.

6.3.2 Le modèle

Nous allons utiliser deux opérateurs. Comme nous l'avons déjà remarqué, l'introduction de fonctions symétriques simplifie l'écriture de notre intégrale. Pour garder toute la généralité nous allons symétriser $f \in H \otimes H$ et considérer des opérateurs sur $H \circ H$. Pour $n \geq 1$, H°^n} est naturellement muni de la base orthogonale formée des $\left(e_{j_1} \circ \cdots \circ e_{j_n}\right)$ $\left((j_1, \ldots, j_n) \in (\mathbb{N}^*)^n\right)$. Dans cette base toute fonction f de H°^n} admet la décomposition suivante :

$$f = \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\\ \in\left(\mathbb{N}^*\right)^n}} \frac{\langle f, e_{j_1} \circ \cdots \circ e_{j_n}\rangle}{\|e_{j_1} \circ \cdots \circ e_{j_n}\|} e_{j_1} \circ \cdots \circ e_{j_n}$$

De façon à retrouver les résultats que l'on connaît (**[10]**) dans le cas gaussien nous allons introduire les polynômes de Hermites associés à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ pondérée par $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ et adapter l'opérateur d'anihilation introduit par P.A Meyer (**[10]**).

Nous allons utiliser les notations suivantes :

- H_n : le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Hermite, avec $H_0 = 1$
- On rappelle la formule de Rodriguez des polynômes de Hermite :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)}{dx^n}.$$

- Dans la base des polynômes de Hermite on écrira pour $n \in \mathbb{N}$:

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_{n,k} H_k(X).$$

- Dans la base des polynômes associés à la mesure μ on écrira pour $n \in \mathbb{N}$:

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{n,k} P_k(X).$$

- Nous pouvons donner la table des premiers cœfficients $\Gamma_{n,k}$ et $\gamma_{n,k}$:

$\Gamma_{n,k}$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=0$	1	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0
$n=2$	1	0	1	0	0
$n=3$	0	3	0	1	0
$n=4$	3	0	6	0	1

$\gamma_{n,k}$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=0$	1	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0
$n=2$	1	m_3	1	0

Les premiers polynômes :

$$\text{Hermite}\begin{cases} H_0 &= 1 \\ H_1 &= X \\ H_2 &= X^2-1 \\ H_3 &= X^3-3X \end{cases} \qquad \text{Polynômes associés à } \mu \begin{cases} P_0 &= 1 \\ P_1 &= X \\ P_2 &= X^2-m_3X-1 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant définir nos deux opérateurs :

Définition 6.3.1. *Fixons* $\begin{cases} \bullet\ n \in I\!N^* \\ \bullet\ (r,k) \in \{1,\dots,n\}^2 \\ \bullet\ (\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in I\!N^n \ \textit{tels que}\ \alpha_1+\dots+\alpha_r = n \\ \bullet\ (j_1,\dots,j_r) \in I\!N^n \ \textit{tels que}\ 1 \le j_1 < \dots < j_r \end{cases}$

On définit les deux opérateurs qui suivent :

1. $\Phi^{\circ^n} : \begin{array}{ccc} H^{\circ^n} & \to & L^2(\nu) \\ \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\circ^{\alpha_i}} & \mapsto & P_{\alpha_1}(X_{j_1})\cdot\ldots\cdot P_{\alpha_r}(X_{j_r}) \end{array}$

2. $a_k^n : \begin{array}{ccc} H^{\circ^n} & \to & H^{\circ^{n-k}} \\ \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\circ^{\alpha_i}} & \mapsto & \displaystyle\sum_{\substack{(k_1+\dots+k_r=k)\\ k_i\ge 0}} \prod_{(k_i\neq 0)} \Big[\Big(\gamma_{\alpha_i,\alpha_i-k_i} - \Gamma_{\alpha_i,\alpha_i-k_i}\Big) 1_{[\alpha_i\ge k_i]}\Big] \bigcirc_{p=1}^{r} e_{j_p}^{\alpha_p-k_p} \end{array}$

Remarques

– En passant sur l'espace H°^n} nous n'avons plus une base normale. Cela va nous obliger à transformer le produit scalaire pour conserver l'isométrie que nous proposait

Φ.

– On peut également remarquer que pour n=1, Φ°^n} n'est autre que Φ.

6.3.3 Première propriété du modèle généralisé

Nous allons regarder ici des propriétés de nature topologique. Nous commencerons naturellement par préciser les normes sur chacune des espaces entrant en action.

– Nous prendrons le produit scalaire usuel sur $L^2(\nu)$ ainsi que sur $H^{\otimes^n}$.

– On va considérer le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_A^{H^{\circ^n}}$ sur $H^{\otimes^n}$ défini par :

$$\langle\, ,\, \rangle_A^{H^{\circ^n}} := n!\langle A\cdot\, , A\cdot\, \rangle_{H^{\otimes^n}}.$$

Où $A : \begin{array}{ccc} H^{\circ^n} & \to & H^{\circ^n} \\ \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i} & \mapsto & \sum A_{\substack{j_1,\dots,j_r \\ \alpha_1,\dots,\alpha_r}} \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i} \end{array}$

avec $A_{\substack{j_1,\dots,j_r \\ \alpha_1,\dots,\alpha_r}} := \dfrac{\prod_{i=1}^{r} E\left|P_{\alpha_i}(X_{j_i})\right|^2}{\prod_{i=1}^{r} \alpha_i!}$.

Cet opérateur apparaît de façon naturelle dans la recherche d'une isométrie.

Notations

– Posons

  – $C_{\substack{k_1,\dots,k_r \\ \alpha_1,\dots,\alpha_r}} := \prod_{k_i \neq 0} \left[\left(\gamma_{\alpha_i,\alpha_i-k_i} - \gamma_{\alpha_i,\alpha_i-k_i}\right) 1_{[\alpha_i \geq k_i]}\right]$

  – $C_{(k,n)} := \sup_{\substack{k_1+\dots+k_r=k \\ \alpha_1+\dots+\alpha_r=n}} C_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_r \\ k_1,\dots,k_r}}$

  – $A_{(k,n)} := \sup_{\substack{k_1+\dots+k_r=k \\ \alpha_1+\dots+\alpha_r=n}} A_{\substack{k_1,\dots,k_r \\ \alpha_1,\dots,\alpha_r}}$

– On prend le produit scalaire usuel sur H°^n}, à savoir :

$$\|\ \cdot\ \|_{H^{\circ^n}} := n!\|\ \cdot\ \|_{H^{\otimes^n}}$$

– Les normes des opérateurs sont :

  – $\|T(f)\|_A := \sup_{\|f\|\neq 0} \dfrac{\|T(f)\|_{L^2(\nu)}}{\|f\|_A}$

  – $\|T(f)\|_{H^{\circ^n}} := \sup_{\|f\|\neq 0} \dfrac{\|T_k(f)\|_{H^{\circ^{n-k}}}}{\|f\|_{H^{\circ^{n-k}}}}$

Proposition 6.3.1. *On peut étendre par linéarité et continuité les opérateurs* Φ°^n} *et* a_k^n *à toute fonction* f *de* H°^n}.

De plus :

- $\|\Phi^{\circ^n}\|_A = 1$
- $\|a_k^n\|_A \leq C_{(n,k)} A_{(n,k)} \binom{k+r+1}{k} \sum_{k_1+\cdots+k_r=k} \frac{\prod(\alpha_i - k_i)! 1_{[\alpha_i \geq k_i]}}{\prod \alpha_i!}$

Remarque

Le premier point de cette proposition nous dit, entre autre, que Φ°^n} est une isométrie de $(H^{\circ^n}, \| \ \|_A)$ dans $L^2(\nu)$.

<u>Démonstration</u>

- $\|\Phi^{\circ^n}(f)\|^2_{L^2(\nu)} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r} \langle f, \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i} \rangle^2 \prod_{i=1}^{r} E\left(P_{\alpha_i}\left(X_{j_i}\right)^2\right)$
  - $\|f\|_A^2 = \sum_{r=1}^{n} \langle f, \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i} \rangle^2 A_{\substack{j_1,\ldots,j_r \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_r}} n! \| \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i} \|^2_{H^{\otimes n}}$
  - $\| \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i} \|^2_{H^{\otimes n}} = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$ (confère **[10]**)

  d'où l'isométrie.
- $\left\| a_k^n \left(\bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i} \right) \right\|^2_{H^{\circ^n}} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_i \geq 0}} \left| C_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_r \\ k_1+\cdots+k_r}} \right|^2 \left\| \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i - k_i} \right\|_A$

  $\leq C_{(k,n)} A_{(k,n)} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_i \geq 0}} \prod_{i=1}^{r} \left[(\alpha_i - k_i) 1_{[\alpha_i \geq k_i]}\right]! \begin{pmatrix} k+r-1 \\ k \end{pmatrix}$

  $\leq C_{(k,n)} A_{(k,n)} (n-k)! \sharp\{(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N} \mid k_1 + \cdots + k_r = k\}$

  comme $\left\| \bigcirc_{i=1}^{r} e_{j_i}^{\alpha_i - k_i} \right\|_{H^{\circ^n}} = \prod \alpha_i$ on a le résultat.

$\triangle$

6.3.4 Réécriture de l'intégrale

On va ici regarder ce qu'il se passe, après un rapide rappel de la définition de l'intégrale, pour nos opérateurs dans le cas où n=2.

1. On a défini $I(h,f) := \varphi^{(1,1)}\big(h \otimes g 1_C + g \otimes h 1_{\widetilde{C}}\big) + \big(h \otimes g 1_C\big)$, son écriture sous forme de série étant :

   $I(f,g) = \sum_{j \geq 2} \sum_{k=1}^{j-1} \langle h \otimes g 1_C + g \otimes h 1_{\widetilde{C}}, e_j \otimes e_k \rangle X_k X_j + \sum_{j \geq 1} \langle h \otimes g 1_C, e_j^{\otimes^2} \rangle (X_j^2 - 1)$

$$= 2\sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle\big(h\otimes g1_C\big)^\circ, e_j\otimes e_k\rangle X_kX_j + \sum_{j\geq 1}\langle h\otimes g1_C, e_j^{\otimes^2}\rangle(X_j^2-1)$$

d'une part

$$\langle\big(h\otimes g1_C\big)^\circ, e_j\otimes e_k\rangle = \langle\big(h\otimes g1_C\big)^\circ, e_k\otimes e_j\rangle$$

donc

$$2\langle\big(h\otimes g1_C\big)^\circ, e_j\otimes e_k\rangle = \langle\big(h\otimes g1_C\big)^\circ, e_k\circ e_j\rangle$$

d'autre part

$$\langle\big(h\otimes g1_C\big)^\circ, e_j\otimes e_j\rangle = \langle\big(h\otimes g1_C\big)^\circ, e_j\circ e_j\rangle$$

2. soit $f\in H^{\circ^2}$ et regardons $\Phi^{\circ^2}(f)$:
$\Phi^{\circ^2}(f) = \sum_{1\leq j\neq k}\langle f^\circ, e_j\circ e_k\rangle P_1(X_j)P_1(X_k) + \sum_{j\geq 1}\langle f^\circ, e_j^{\circ^2}\rangle P_2(X_j)$
$= 2\sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f^\circ, e_j\circ e_k\rangle X_jX_k + \sum_{j\geq 1}\langle f^\circ, e_j^{\circ^2}\rangle\big(X_j^2 - m_3X_j - 1\big)$

3. Soit $f\in H^{\circ^2}$ et regardons a_1^2 :
$a_1^2\big(e_j\circ e_k\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } j\neq k \\ \gamma_{2,1} & \text{si } j = k\end{cases}$ avec $\gamma_{2,1} = m_3$

Nous pouvons rassembler tous ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition 6.3.2.

$$I(f,g) = \Big(\Phi^{\circ^2} + \Phi\circ a_1^2\Big)\Big([h\otimes g1_C]^{\circ^2}\Big)$$

Remarque

Dans le cas gaussien on retrouve la décomposition de P.A. Meyer :

$$I(f,g) = \Phi^{\circ^2}\Big([h\otimes g1_C]^{\circ^2}\Big)$$

6.4 Intégration par partie

Nous allons établir une formulation du type formule de Itô pour les produits $\Phi(h)\Phi(g)$ $(h,g\in H)$.

Théorème 6.4.1. *Soient $h, g \in H$, on a :*

$$\Phi(h)\Phi(g) = \int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s + \int \Phi(g)_s d\Phi(h)_s + [\Phi(h), \Phi(g)]$$

avec $[\Phi(h), \Phi(g)] := \left(\Phi^{\circ^2} + a_1^2\right)(h \otimes g1_\Delta) + \langle h, g\rangle$ *où* $\Delta := \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Démonstration

Posons $\Delta_{k,k+1}\Phi(h) := \Phi(h)_{t_{k+1}} - \Phi(h)_{t_k}$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \Delta_{j,j+1}\Phi(h) \sum_{k=0}^{n} \Delta_{k,k+1}\Phi(g) &= \sum_{j=0}^{n} \Phi\left(h1_{]t_j,t_{j+1}]}\right) \sum_{k=0}^{n} \Phi\left(g1_{]t_k,t_{k+1}]}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \Phi\left(h1_{]t_j,t_{j+1}]}\right) \Phi\left(g1_{]t_j,t_{j+1}]}\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} \Phi\left(g1_{]t_k,t_{k+1}]}\right) \Phi\left(h1_{]t_j,t_{j+1}]}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} \Phi\left(h1_{]t_j,t_{j+1}]}\right) \Phi\left(g1_{]t_k,t_{k+1}]}\right).
\end{aligned}$$

Appelons S_i^n $(i \in \{1,2,3\})$ la $i^{\text{ième}}$ somme du membre de droite.

(a) On utilisant les calculs faits dans la démonstration de la proposition 6.2.2.

$$S_1^n = \left(\Phi^{\circ^2} + \Phi \circ a_1^2\right)\left(h \otimes g \sum_{j=0}^{n} 1_{]t_j,t_{j+1}]} \otimes 1_{]t_j,t_{j+1}]}\right)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n} \langle h1_{]t_j,t_{j+1}]}, g1_{]t_j,t_{j+1}]}\rangle.$$

- D'une part : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 1_{]t_j,t_{j+1}]} \otimes 1_{]t_j,t_{j+1}]} \xrightarrow{L^2(\mu^{\otimes^2})} 1_\Delta$
  et $\langle h \otimes g1_\Delta, e_{k_1} \otimes e_{k_2}\rangle = 0$.
- D'autre part $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \langle h1_{]t_j,t_{j+1}]}, g1_{]t_j,t_{j+1}]}\rangle = \langle h, g\rangle$.

Donc $S_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\nu)} \langle h, g\rangle$

(b)

$$S_2^n = \left(\Phi^{\circ^2} + \Phi \circ a_1^2\right)\left(g \otimes h \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} 1_{]t_k,t_{k+1}]} \otimes 1_{]t_j,t_{j+1}]}\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} \langle h1_{]t_k,t_{k+1}]}, g1_{]t_j,t_{j+1}]}\rangle.$$

• D'une part : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} 1_{]t_k,t_{k+1}]} \otimes 1_{]t_j,t_{j+1}]} = \sum_{j=0}^{n} 1_{]0,t_j]} \otimes 1_{]t_j,t_{j+1}]} \overset{L^2(\mu^{\otimes^2})}{\longrightarrow} 1_C$.

• D'autre part $\langle h1_{]t_k,t_{k+1}]}, g1_{]t_j,t_{j+1}]}\rangle = o$ car $j \neq k$.

Donc $S_2^n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2(\nu)}{\longrightarrow}} \left(\Phi^{\circ^2} + \Phi \circ a_1^2\right)(g \otimes h1_C) =: \int \Phi(g)_s d\Phi(h)_s$

(c)

$$S_3^n = \left(\Phi^{\circ^2} + \Phi \circ a_1^2\right)\left(h \otimes g \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} 1_{]t_j,t_{j+1}]} \otimes 1_{]t_k,t_{k+1}]}\right)$$

on procède sensiblement de la même façon que dans le point précédent et on a :

$$S_3^n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2(\nu)}{\longrightarrow}} \int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s$$

△

6.5 Norme

Proposition 6.5.1.

$$\left\| \int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s \right\|_{L^2(\nu)}^2 = \|h \otimes g1_C\|_{L^2(\nu)}^2 + \sum_{j\geq 0} \langle h \otimes g, e_j \otimes e_j\rangle^2 \left(EX_j^4 - 3\right)$$

Remarque

Dans le cas gaussien (équidistribuées, normales, centrées) on a $EX_j^4 = 3$ et donc :

$$\left\| \int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s \right\|_{L^2(\nu)}^2 = \|h \otimes g1_C\|_{L^2(\nu)}^2 .$$

Ce qui est conforme au résultat concernant l'intégrale de Ito.

<u>Démonstration</u>

Notons $f := h \otimes g1_C$ alors :

$I(h,g) = \varphi^{(1,1)}(f + \widetilde{f}) + \varphi^{(2)}(f)$

$$\begin{aligned} E\left(|I(h,g)|^2\right) = \; & E\left(\left|\varphi^{(1,1)}(f)\right|^2\right) + E\left(\left|\varphi^{(1,1)}(\widetilde{f})\right|^2\right) + E\left(\left|\varphi^{(2)}(f)\right|^2\right) \\ & +2\left[E\left(\varphi^{(1,1)}(f)\varphi^{(1,1)}(\widetilde{f})\right) + E\left(\varphi^{(1,1)}(f)\varphi^{(2)}(f)\right)\right. \\ & \left.+E\left(\varphi^{(1,1)}(\widetilde{f})\varphi^{(2)}(f)\right)\right]. \end{aligned}$$

Les lemmes 6.1.3. et 6.1.4. nous donnent :

$$\begin{aligned} E\left(|I(h,g)|^2\right) = & \sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f, e_j\otimes e_k\rangle^2 + \sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_k\rangle^2 \\ & + \sum_{j\geq 1}\langle f, e_j\otimes e_j\rangle^2\left(EX_j^4-1\right) \\ & +2\sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f, e_j\otimes e_k\rangle\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_k\rangle. \end{aligned}$$

- D'une part $\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_k\rangle = \langle f, e_k\otimes e_j\rangle$.
- D'autre part : $\|f\|_{H^{\otimes 2}} = \sum_{(j,k)\in \left(\mathbb{N}^*\right)^2} \langle f, e_j\otimes e_k\rangle^2$

$$\begin{aligned} & = \sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f, e_j\otimes e_k\rangle^2 + \sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f, e_k\otimes e_j\rangle^2 \\ & + \sum_{j\geq 1}\langle f, e_j\otimes e_j\rangle^2. \end{aligned}$$

On a donc, en ajoutant et retranchant le terme $\sum_{j\geq 1}\langle f, e_j\otimes e_j\rangle^2$:

$$\begin{aligned} E\,|I(h,g)|^2 = & \|h\otimes g1_C\|^2_{L^2(\mu^{\otimes 2})} + \sum_{j\geq 1}\sum_{j\geq 1}\langle f, e_j\otimes e_j\rangle^2\left(EX_j^4-2\right) \\ & +2\sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f, e_j\otimes e_k\rangle\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_k\rangle. \end{aligned}$$

- D'une part $2\sum_{j\geq 2}\sum_{k=1}^{j-1}\langle f, e_j\otimes e_k\rangle\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_k\rangle = \sum_{j\neq k}\langle f, e_j\otimes e_k\rangle\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_k\rangle$.
- D'autre part $\langle f, \widetilde{f}\rangle = \sum_{(j,k)\in \left(\mathbb{N}^*\right)^2} \langle f, e_j\otimes e_k\rangle\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_k\rangle$.

En ajoutant et retranchant $\langle f, e_j\otimes e_j\rangle\langle \widetilde{f}, e_j\otimes e_j\rangle = \sum_{j\geq 1}\langle f, e_j\otimes e_j\rangle^2$ on a donc :

$$E\,|I(h,g)|^2 = \|h\otimes g1_C\|^2_{L^2(\mu^{\otimes 2})} + \sum_{j\geq 1}\langle f, e_j\otimes e_j\rangle\left(EX_j^4-3\right) + \langle f, \widetilde{f}\rangle.$$

Pour finir il suffit d'expliciter $\langle f, \widetilde{f}\rangle$ et remarquer que $1_C\cdot 1_{\widetilde{C}} = 0$

$\triangle$

6.6 Isométries partielles

6.6.1 Notations

1. Pour $f\in H\otimes H$ on notera : $J^2(f) := \left(\Phi^{\circ^2} + \Phi\circ a_1^2\right)(f)$.

2. $S_2 := \{f \in H \otimes H \mid f(x,y) = f(y,x)\}$ le sous-espace de $H \otimes H$ des fonctions symétriques.

3. On utilisera l'opérateur :

$$\begin{array}{rccl} B: & H \otimes H & \to & H \otimes H \\ & e_j \otimes e_k & \mapsto & \begin{cases} e_j \otimes e_k & j \neq k \\ E(X_j^2 - 1)^2 e_j \otimes e_j & j = k \end{cases} \end{array}$$

4. $H^{(1,1)} := \mathrm{Vect}\,\{e_j \otimes e_j \mid j \in \mathbb{N}^*\}$
   $H^{(2)} := \mathrm{Vect}\,\{e_j \otimes e_k \mid j,k \in \mathbb{N}^*,\ j \neq k\}$

6.6.2 Isométries

Proposition 6.6.1. *Les applications*

$$\varphi^{(1,1)} \ : \ \left(H^{(1,1)},\ \|\ \|_B\right) \to L^2(\nu)$$

$$\varphi^{(2)} \ : \ \left(H^{(2)},\ \|\ \|_B\right) \to L^2(\nu)$$

sont des isométries.

Démonstration

- Soit $f \in H^{(1,1)}$ on a :

$$\left\|\varphi^{(1,1)}(f)\right\|^2_{L^2(\nu)} = \sum_{j \neq k} \langle f, e_j \otimes e_k \rangle^2 = \|f\|_B$$

- Soit $f \in H^{(2)}$ on a :

$$\begin{aligned} \left\|\varphi^{(2)}(f)\right\|^2_{L^2(\nu)} &= \sum_{j \geq 1} \langle f, e_j \otimes e_j \rangle^2 E(X_j^2 - 1)^2 \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{\langle f, B(e_j \otimes e_j) \rangle^2}{\|B(e_j \otimes e_j)\|_{H \otimes H}} \\ &= \sum_{j \geq 1} \frac{\langle f, e_j \otimes e_j \rangle_B^2}{\|e_j \otimes e_j\|_B} \\ &= \|f\|_B \end{aligned}$$

$\triangle$

6.6.3 Isométrie sur S^2

Dans le cas gaussien $J_2 = \Phi^{(\circ^2)}$ est une isométrie sur S^2. Dans le cas général nous perdons l'isométrie mais conservons une relation entre les normes de $L^2(\nu)$ et S^2 :

Proposition 6.6.2.

$$\| \ \|_{H\circ H} \ et \| \ \|_{L^2(\nu)} \circ J_2$$

sont des normes équivalentes sur S^2.

<u>Démonstration</u>

Soit $f \in S^2$, des calculs déjà faits dans la proposition 6.5.1. nous donnent :

$$\|J_2(f)|^2_{L^2(\nu)} = 2\sum_{j\neq k}\langle f, e_j \circ e_k\rangle^2 + \sum_{j\geq 1}\langle f, e_j \circ e_j\rangle^2.$$

On pose : $\begin{cases} a & := & \min\{E(X_j^2-1)^2 \ (j \in \mathbb{N}^*),\ 2\} \\ b & := & \max\{E(X_j^2-1)^2 \ (j \in \mathbb{N}^*),\ 2\} \end{cases}$

on trouve :

$$a\,\|f\|^2_{S^2} \leq \|J_2(f)\|^2_{L^2(\nu)} \leq b\,\|f\|^2_{S^2}$$

$\triangle$

Remarque

L'ensemble de ces calculs fournit l'opérateur qu'il faut utiliser pour obtenir une isométrie. Les opérateurs A et B introduits précedemment ne conviennent pas. On va donc en introduire un troisième, C, sur $H \otimes H$:

$$C(e_j \otimes e_k) := \begin{cases} 2e_j \otimes e_k & j \neq k \\ E(X_j^2-1)^2 e_j \otimes e_j & j = k \end{cases}$$

Proposition 6.6.3.

$$J_2 : \left(S^2,\ \| \ \|_C\right) \to L^2(\nu)$$

est une isométrie.

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\|e_j \circ e_k\|_C = \begin{cases} 2 & j \neq k \\ E(X_j^2 - 1)^2 & j = k \end{cases}$

et $\|e_j \circ e_k\|_{L^2(\nu)} = \sum_{\substack{(j,k)\in \\ (\mathbb{N}^*)^2}} \frac{\langle f, e_j \circ e_k \rangle_C^2}{\|e_j \circ e_k\|_C}$

$\triangle$

6.6.4 Vers une généralisation

Pour des fonctions $h, g \in F$, nous pouvons définir un processus $(Z_t)_{t>0}$ de la façon suivante :

$$Z_t := \int \Phi(h)_s d\Phi\left(g 1_{]0,t]}\right)_s .$$

Nous noterons plutôt : $Z_t := \int_0^t \Phi(h)_s d\Phi\left(g\right)_s$.

Nous allons étudier l'existence de modifications continues puis la variation quadratique de ce processus.

Au préalable, nous établirons des résultats techniques utiles pour mener à bien ces études.

Chapitre 7

Résultats techniques

7.1 Etude de Z_t^2

Pour simplifier l'écriture des calculs nous allons expliciter les calculs de $(J_2(f))^2$ pour $f \in H \circ H$ et noterons : $\begin{cases} a_{jk} & := & \langle f, e_j \circ e_k \rangle \\ a_j & := & a_{jj} \end{cases}$

Lemme 7.1.1. *On a pour $f \in H \circ H$*

$$\begin{aligned}
(J_2(f))^2 &= \\
\textit{(ordre 0)} \quad & 4 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1 j_2}^2 + (\gamma_{4,0} - 1) \sum_{j \geq 1} a_j^2 \\
\textit{(ordre 1)} \quad + \quad & 4\gamma_{3,0} \sum_{j_2<j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_1} P_1(X_{j_2}) \\
+ \quad & 4\gamma_{3,0} \sum_{j_2<j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2} P_1(X_{j_1}) \\
+ \quad & (\gamma_{4,1} - 2m_3) \sum_{j \geq 1} a_j^2 P_1(X_j) \\
\textit{(ordre 2)} \quad + \quad & 8 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_1 j_3} P_1(X_{j_2}) P_1(X_{j_3}) \\
+ \quad & 8 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} P_1(X_{j_1}) P_1(X_{j_3}) \\
+ \quad & 8 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_2 j_3} a_{j_1 j_3} P_1(X_{j_1}) P_1(X_{j_2}) \\
+ \quad & 4 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1 j_2}^2 (P_2(X_{j_1}) + P_2(X_{j_2})) \\
+ \quad & \sum_{j_2<j_1} \left[4m_2^2 a_{j_1 j_2}^2 + 2m_3^2 a_{j_1} a_{j_2} + 4(\gamma_{3,1} - 1)(a_{j_1 j_2} a_{j_1} + a_{j_1 j_2} a_{j_2}) \right] P_1(X_{j_1}) P_1(X_{j_2}) \\
+ \quad & (\gamma_{4,2} - 2) \sum_{j \geq 1} a_j^2 P_2(X_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\textit{(ordre 3)} \quad &+ \quad m_3 \sum_{j_3<j_2<j_1} [8\left(a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} + a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} + a_{j_1j_3}a_{j_2j_3}\right) + \\
&\quad 4\left(a_{j_1}a_{j_2j_3} + a_{j_1j_3}a_{j_2} + a_{j_1j_2}a_{j_3}\right)] P_1\left(X_{j_1}\right) P_1\left(X_{j_2}\right) P_1\left(X_{j_3}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_2<j_1} \left(4m_3a_{j_1j_2}^2 + 2m_3a_{j_1}a_{j_2} + 4\gamma_{3,2}a_{j_1j_2}a_{j_1}\right) P_2\left(X_{j_1}\right) P_1\left(X_{j_2}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_2<j_1} \left(4m_3a_{j_1j_2}^2 + 2m_3a_{j_1}a_{j_2} + 4\gamma_{3,2}a_{j_1j_2}a_{j_2}\right) P_1\left(X_{j_1}\right) P_2\left(X_{j_2}\right) \\
&+ \quad \gamma_{4,3} \sum_{j\geq 1} a_j^2 P_3\left(X_j\right) \\
\textit{(ordre 4)} \quad &+ \quad 8 \sum_{j_4<j_3<j_2<j_1} \left(a_{j_1j_2}a_{j_3j_4} + a_{j_1j_3}a_{j_2j_4} + a_{j_2j_3}a_{j_1j_4}\right) \prod_{i=1}^{4} P_1\left(X_{j_i}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_3<j_2<j_1} \left(8a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} + 4a_{j_1}a_{j_2j_3}\right) P_2\left(X_{j_1}\right) P_1\left(X_{j_2}\right) P_1\left(X_{j_3}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_3<j_2<j_1} \left(8a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} + 4a_{j_1j_3}a_{j_2}\right) P_1\left(X_{j_1}\right) P_2\left(X_{j_2}\right) P_1\left(X_{j_3}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_3<j_2<j_1} \left(8a_{j_1j_3}a_{j_2j_3} + 4a_{j_1j_2}a_{j_3}\right) P_1\left(X_{j_1}\right) P_1\left(X_{j_2}\right) P_2\left(X_{j_3}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_2<j_1} 4a_{j_1j_2}a_{j_1} P_3\left(X_{j_1}\right) P_1\left(X_{j_2}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_2<j_1} 4a_{j_1j_2}a_{j_2} P_1\left(X_{j_1}\right) P_3\left(X_{j_2}\right) \\
&+ \quad \sum_{j_2<j_1} \left(4a_{j_1j_2}^2 + 2a_{j_1}a_{j_2}\right) P_2\left(X_{j_1}\right) P_2\left(X_{j_2}\right) \\
&+ \quad \sum_{j\geq 1} a_j^2 P_4\left(X_{j_1}\right)
\end{aligned}
$$

<u>Démonstration</u>

On peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi^{\circ^2}(f) + \phi(a_1^2 f)\right)^2 &= 4\left(\sum_{j_2<j_1} \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_3}\rangle X_{j_1}X_{j_2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\sum_{j\geq 1} \langle f, e_j \circ e_j\rangle (X_j^2 - 1)\right)^2 \\
&\quad + \sum_{j_2<j_1} \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_3}\rangle X_{j_1}X_{j_2} \sum_{j_3\geq 1} \langle f, e_{j_3} \circ e_{j_3}\rangle (X_{j_3}^2 - 1)
\end{aligned}
$$

On va procéder en quatre étapes, une pour le calcul de chacun des termes du membre de droite et une dernière dans laquelle nous sommerons ces trois résultats.

<u>Etape 1 :</u> calcul de $\left(\sum_{j_2<j_1} \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_3}\rangle X_{j_1} X_{j_2}\right)^2 =: M^2$

$$\begin{aligned} M^2 &= \sum_{j_1\geq 2}^{n} \left(\sum_{k_1=1}^{j_1-1} a_{j_1k_1} X_{k_1}\right) X_{j_1} \sum_{j_2\geq 2}^{n} \left(\sum_{k_2=1}^{j_2-1} a_{j_2k_2} X_{k_2}\right) X_{j_2} \\ &= \sum_{\substack{0\leq k_1<j_1 \\ 0\leq k_2<j_2}} a_{j_1k_1} a_{j_2k_2} X_{k_1} X_{j_1} X_{k_2} X_{j_2} \end{aligned}$$

On va réordonner la somme en ordonnant les paramètres.

On fixe $k_1 < j_1$, on a cinq cas à voir :

(a) $j_2 < j_1$

Il y a cinq sous cas

i. $j_2 < k_2 < j_1 < k_1$

ii. $j_2 < k_2 = j_1 < k_1$

iii. $j_2 < j_1 < k_2 < k_1$

iv. $j_2 < j_1 < k_2 = k_1$

v. $j_2 < j_1 < k_1 < k_2$

(b) $j_2 = j_1$

Il y a trois sous cas :

i. $j_1 = j_2 < k_2 < k_1$

ii. $j_1 = j_2 < k_1 = k_2$

iii. $j_1 = j_2 < k_1 < k_2$

(c) $j_1 < j_2 < k_1$

Il y a trois sous cas :

i. $j_1 < j_2 < k_2 < k_1$

ii. $j_1 < j_2 < k_2 = k_1$

iii. $j_1 < j_2 < k_1 < k_2$

(d) $j_1 < j_2 = k_1$

Il y a un sous cas :

$j_1 < j_2 = k_1 < j_2$

(e) $j_1 < k_1 < k_2$

Il y a un sous cas :

$j_1 < k_1 < j_2 < k_2$

Nous allons maintenant réécrire la somme en prenant chacune de ces indexations et en ordonnant les sommes par ordre décroissant du nombre d'indices :

$$
\begin{array}{lcll}
M^2 & = & \displaystyle\sum_{0\leq j_2<k_2<j_1<k_1} a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}X_{k_1}X_{k_2}X_{j_1}X_{j_2} & \text{(a-i)} \\
(4\ ind.) & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_2<j_1<k_2<k_1} a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}X_{k_1}X_{k_2}X_{j_1}X_{j_2} & \text{(a-iii)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_2<j_1<k_1<k_2} a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}X_{k_1}X_{k_2}X_{j_1}X_{j_2} & \text{(a-v)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_1<j_2<k_2<k_1} a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}X_{k_1}X_{k_2}X_{j_1}X_{j_2} & \text{(c-i)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_1<j_2<k_1<k_2} a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}X_{k_1}X_{k_2}X_{j_1}X_{j_2} & \text{(c-iii)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_1<k_1<j_2<k_2} a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}X_{k_1}X_{k_2}X_{j_1}X_{j_2} & \text{(e)} \\
(3\ ind.) & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_2<k_2<k_1} a_{k_1k_2}a_{j_2k_2}X_{k_2}^2X_{j_2}X_{j_1} & \text{(a-ii)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_2<j_1<k_1} a_{j_1k_1}a_{j_2k_1}X_{k_1}^2X_{j_1}X_{j_2} & \text{(a-iv)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_1<k_2<k_1} a_{j_1k_2}a_{k_1j_1}X_{j_1}^2X_{k_2}X_{k_1} & \text{(b-i)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_1<k_1<k_2} a_{j_1k_2}a_{k_1j_1}X_{j_1}^2X_{k_1}X_{k_2} & \text{(b-iii)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_1<j_2<k_1} a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}X_{k_1}^2X_{j_1}X_{j_2} & \text{(c-ii)} \\
 & + & \displaystyle\sum_{0\leq j_1<j_2<k_2} a_{j_1j_2}a_{j_2k_2}X_{j_2}^2X_{j_1}X_{k_2} & \text{(d)} \\
(2\ ind.) & + & \displaystyle\sum_{0\leq k<j} a_{jk}^2X_j^2X_j^2 & \text{(b-ii)}
\end{array}
$$

On range les indices $j_4 < j_3 < j_2 < j_1$, $j_3 < j_2 < j_1$ et $j_2 < j_1$, puis on factorise :

$$
\begin{aligned}
M^2 &= \sum_{j_4<j_3<j_2<j_1} (a_{j_1j_2}a_{j_3j_4} + a_{j_1j_3}a_{j_2j_4} + a_{j_2j_3}a_{j_1j_4} + a_{j_1j_4}a_{j_2j_3} + a_{j_2j_4}a_{j_1j_3} \\
&\qquad + a_{j_3j_4}a_{j_1j_2})\, X_{j_4}X_{j_3}X_{j_2}X_{j_1} \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} (a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} + a_{j_1j_3}a_{j_1j_2})\, X_{j_3}X_{j_2}X_{j_1}^2 \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} (a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} + a_{j_2j_3}a_{j_1j_2})\, X_{j_3}X_{j_2}^2X_{j_1} \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} (a_{j_2j_3}a_{j_1j_3} + a_{j_1j_3}a_{j_2j_3})\, X_{j_3}^2X_{j_2}X_{j_1} \\
&+ \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 X_{j_3}X_{j_2}^2X_{j_1}^2
\end{aligned}
$$

Il ne nous reste plus qu'à exprimer ces résultats dans la base des polynômes $(P_n)_n$ associée à μ.

On rappel les relations suivantes :

$$
\begin{cases}
1 &= P_0 \\
X_j &= P_1(X_j) \\
X_j^2 &= P_2(X_j) + m_3P_1(X_j) + 1 \\
X_j^n &= \sum_{k=0}^{n} \gamma n, kP_k(X_j)
\end{cases}
$$

On remplace, on calcule et on trouve :

$$
\begin{array}{lll}
M^2 & = & \\
(ordre\ 0) & & \displaystyle\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 \\
(ordre\ 1) & + & \displaystyle m_3 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 \left(P_1(X_{j_1}) + P_1(X_{j_2})\right) \\
(ordre\ 2) & + & \displaystyle 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_1j_3}P_1(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
 & + & \displaystyle 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_3}) \\
 & + & \displaystyle 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_2j_3}a_{j_1j_3}P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2}) \\
 & + & \displaystyle \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 \left(P_2(X_{j_1}) + P_2(X_{j_2})\right) \\
 & + & \displaystyle m_3^2 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2}) \\
(ordre\ 3) & + & \displaystyle 2m_3 \sum_{j_3<j_2<j_1} \left(a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} + a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}\right. \\
 & & \displaystyle \qquad \left. + a_{j_2j_3}a_{j_1j_3}\right) P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
 & + & \displaystyle m_3 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 \left(P_2(X_{j_1})P_1(X_{j_2}) + P_2(X_{j_2})P_1(X_{j_1})\right) \\
(ordre\ 4) & + & \displaystyle 2 \sum_{j_4<j_3<j_2<j_1} \left(a_{j_1j_2}a_{j_3j_4} + a_{j_1j_3}a_{j_2j_4}\right. \\
 & & \displaystyle \qquad \left. + a_{j_2j_3}a_{j_1j_4}\right) P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2})P_1(X_{j_3})P_1(X_{j_4}) \\
 & + & \displaystyle 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_1j_3}P_2(X_{j_1})P_1(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
 & + & \displaystyle 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}P_1(X_{j_1})P_2(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
 & + & \displaystyle 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_3}a_{j_2j_3}P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2})P_2(X_{j_3}) \\
 & + & \displaystyle \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 P_2(X_{j_1})P_2(X_{j_2})
\end{array}
$$

<u>Etape 2 :</u> calcul de $\displaystyle\left(\sum_{j\geq 1}\langle f, e_j \circ e_j\rangle (X_j^2 - 1)\right)^2 =: N^2$

$$N^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2 \left(X_j^2 - 1\right)^2 + 2\sum_{k<j} a_k a_j \left(X_k^2 X_j^2 - X_j^2 - X_k^2 + 1\right)$$

On regarde maintenant dans la base des polynômes :

$$\begin{aligned}
N^2 &= \sum_{j\geq 1} a_j^2 \Big[P_4(X_j) + \gamma_{4,3} P_3(X_j) + \gamma_{4,2} P_2(X_j) + \gamma_{4,1} P_1(X_j) + \gamma_{4,0} \\
&\qquad -2P_2(X_j) - 2m_3 P_1(X_j) - 2 + 1 \Big] \\
&+ 2\sum_{k<j} \Big[\Big(P_2(X_k) + m_3 P_1(X_k) + 1 \Big) \Big(P_2(X_j) + m_3 P_1(X_j) + 1 \Big) \\
&\qquad - \Big(P_2(X_k) + m_3 P_1(X_k) + 1 \Big) - \Big(P_2(X_j) + m_3 P_2(X_j) + 1 \Big) + 1 \Big]
\end{aligned}$$

On calcule et ordonne :

$$\boxed{\begin{array}{lll}
N^2 & = & \\
\text{(ordre 4)} & & \displaystyle\sum_{j\geq 1} a_j^2 P_4(X_j) + 2\sum_{k<j} a_k a_j P_4(X_k) P_4(X_j) \\
\text{(ordre 3)} & + & \gamma_{4,3} \displaystyle\sum_{j\geq 1} a_j^2 P_3(X_j) + 2m_3 \sum_{k<j} a_k a_j \left(P_2(X_k) P_1(X_j) + P_1(X_k) P_2(X_j) \right) \\
\text{(ordre 2)} & + & (\gamma_{4,2} - 2) \displaystyle\sum_{j\geq 1} a_j^2 P_2(X_j) + 2m_3^2 \sum_{k<j} a_k a_j P_1(X_k) P_1(X_j) \\
\text{(ordre 1)} & + & (\gamma_{4,1} - 2m_3) \displaystyle\sum_{j\geq 1} a_j^2 P_1(X_j) \\
\text{(ordre 0)} & + & (\gamma_{4,0} - 1) \displaystyle\sum_{j\geq 1} a_j^2
\end{array}}$$

<u>Etape 3 :</u> calcul de $\sum_{j_2<j_1}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_3}\rangle X_{j_1}X_{j_2}\sum_{j_3\geq 1}\langle f, e_{j_3}\circ e_{j_3}\rangle (X_{j_3}^2-1)$

$$
\begin{aligned}
MN &= \sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1} a_{j_1j_2}X_{j_2}X_{j_1}\sum_{j_3\geq 1} a_{j_3}(X_{j_3}^2-1) \\
&= \sum_{j_1\geq 1}\Big(\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}X_{j_2}\Big)a_{j_1}(X_{j_1}^2-1) && j_1=j_3 \\
&+ \sum_{j_3\geq 1}\sum_{j_1<j_3}\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_3}X_{j_1}X_{j_2}(X_{j_3}^2-1) && j_1<j_3 \\
&+ \sum_{j_1\geq 1}\left(\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}X_{j_2}\sum_{j_3<j_1} a_{j_3}(X_{j_3}^2-1)\right)X_{j_1} && j_3<j_1 \\
&= \sum_{j_2<j_1} a_{j_1}a_{j_1j_2}(X_{j_1}^3-X_{j_1})X_{j_2} \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_2j_3}(X_{j_1}^2-1)X_{j_2}X_{j_3} \\
&+ \sum_{j_1\geq 1}\Big[X_{j_1}\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2}X_{j_2}(X_{j_2}^2-1) && j_2=j_3 \\
&+ \sum_{j_2<j_1}\sum_{j_3<j_2} a_{j_1j_2}a_{j_3}X_{j_2}(X_{j_3}^2-1) && j_3<j_2 \\
&+ \sum_{j_3<j_1}\sum_{j_2<j_3} a_{j_1j_2}a_{j_3}X_{j_2}(X_{j_3}^2-1)\Big] && j_2<j_3 \\
&= \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1}a_{j_2j_3}(X_{j_1}^2-1)X_{j_2}X_{j_3} \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_3}a_{j_2}X_{j_1}(X_{j_2}^2-1)X_{j_3} \\
&\quad \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_3}X_{j_1}X_{j_2}(X_{j_3}^2-1) \\
&+ \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_1}(X_{j_1}^3-X_{j_1})X_{j_2} \\
&+ \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2}X_{j_1}(X_{j_2}^3-X_{j_2})
\end{aligned}
$$

On ordonne et on utilise la base des $(P_n)_n$:

$$
\begin{aligned}
MN &= \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_1}\Big(P_3(X_{j_1})+\gamma_{3,2}P_2(X_{j_1})+\gamma_{3,1}P_1(X_{j_1})+\gamma 3,0-P_1(X_{j_1})\Big)P_1(X_{j_2}) \\
&+ \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2}P_1(X_{j_1})\Big(P_3(X_{j_2})+\gamma_{3,2}P_2(X_{j_2})+\gamma_{3,1}P_1(X_{j_2})+\gamma 3,0-P_1(X_{j_2})\Big) \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1}a_{j_2j_3}\Big(P_2(X_{j_1})+m_3P_1(X_{j_1})\Big)P_1(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_3}a_{j_2}P_1(X_{j_1})\Big(P_2(X_{j_2})+m_3P_1(X_{j_2})\Big)P_1(X_{j_3}) \\
&+ \sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_3}P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2})\Big(P_2(X_{j_3})+m_3P_1(X_{j_3})\Big)
\end{aligned}
$$

On calcule et on réordonne :

$$
\begin{array}{lll}
MN & = & \\
\text{(ordre 4)} & & \displaystyle\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_1}P_3(X_{j_1})P_1(X_{j_2}) \\
& + & \displaystyle\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2}P_1(X_{j_1})P_3(X_{j_2}) \\
& + & \displaystyle\sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1}a_{j_2j_3}P_2(X_{j_1})P_1(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
& + & \displaystyle\sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_3}a_{j_2}P_1(X_{j_1})P_2(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
& + & \displaystyle\sum_{j_3<j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_3}P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2})P_2(X_{j_3}) \\
\text{(ordre 3)} & + & \gamma_{3,2}\displaystyle\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_1}P_2(X_{j_1})P_1(X_{j_2}) \\
& + & \gamma_{3,2}\displaystyle\sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2}P_1(X_{j_1})P_2(X_{j_2}) \\
& + & m_3\displaystyle\sum_{j_3<j_2<j_1} \big(a_{j_1}a_{j_2j_3}+a_{j_1j_3}a_{j_2}+a_{j_1j_2}a_{j_3}\big)P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2})P_1(X_{j_3}) \\
\text{(ordre 2)} & + & (\gamma_{3,1}-1)\displaystyle\sum_{j_2<j_1} \big(a_{j_1j_2}a_{j_1}+a_{j_1j_2}a_{j_2}\big)P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2}) \\
\text{(ordre 1)} & + & \gamma_{3,0}\displaystyle\sum_{j_2<j_1} \Big(a_{j_1j_2}a_{j_1}P_1(X_{j_2})+a_{j_1j_2}a_{j_2}P_1(X_{j_1})\Big)
\end{array}
$$

Etape 4 : sommation

On calcule simplement $4M^2+N^2+4MN$ et on a le résultat annoncé.

$\triangle$

7.2 identification

L'expression trouvée n'est, pour le moins, pas très maniable. Nous allons identifier chacun des termes, ordre par ordre, de façon à pouvoir, par la suite, calculer EM^4 pour montrer l'existence de modification continues et expliciter la variation quadratique. Nous noterons $O_k\Big(\big[\big(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2\big)(f)\big]^2\Big)$ les termes d'ordre k de $\big[\big(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2\big)(f)\big]^2$

7.2.1 Calculs préliminaires

Dans cette section nous allons utiliser le développement en série de $f\circ f$ et un opérateur introduit par P. A. Meyer **[10]**.

Lemme 7.2.1. *Soit $f \in H \circ H$ on a :*

$$\boxed{\begin{aligned} f \circ f &= \sum_{j_4<j_3<j_2<j_1} 8(a_{j_1j_2}a_{j_3j_4} + a_{j_1j_3}a_{j_2j_4} + a_{j_1j_4}a_{j_2j_3})e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \circ e_{j_4} \\ &+ \sum_{j_3<j_2<j_1} (8a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} + 4a_{j_1}a_{j_2j_3})e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \\ &+ \sum_{j_3<j_2<j_1} (8a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} + 4a_{j_2}a_{j_1j_3})e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \circ e_{j_3} \\ &+ \sum_{j_3<j_2<j_1} (8a_{j_1j_3}a_{j_2j_3} + 4a_{j_1j_2}a_{j_3})e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3}^{\circ^2} \\ &+ \sum_{j_2<j_1} 4a_{j_1}a_{j_1j_2}e_{j_1}^{\circ^3} \circ e_{j_2} \\ &+ \sum_{j_2<j_1} 4a_{j_1j_2}a_{j_2}e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^3} \\ &+ \sum_{j_2<j_1} (4a_{j_1j_2}^2 + 2a_{j_1}a_{j_2})e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \\ &+ \sum_{1\leq j} a_j^2 e_j^{\circ^4} \end{aligned}}$$

Démonstration

$$f = \sum_{(j_1,j_2)} \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_2}\rangle e_{j_1} \circ e_{j_2}$$

$$f \circ f = \sum_{(j_1,j_2,j_3,j_4)} \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_2}\rangle\langle f, e_{j_3} \circ e_{j_4}\rangle e_{j_1} \circ e_{j_2} e_{j_3} \circ e_{j_4}$$

On va maintenant réécrire cette somme en fonction du nombre d'indices égaux, cela revient à regarder les différentes écritures du nombre quatre en somme d'entiers.

$\boxed{\text{4 indices égaux}}$ $(4 = 4)$

$$\boxed{\sum_{j\geq 1} \langle f, e_j \circ e_j\rangle e_j^{\circ^4}}$$

$\boxed{\text{3 indices égaux}}$ $(4 = 3{+}1)$

Dans chacune des sommes on appellera j_1 l'indice distinct :

$\underline{j_1 \neq j_2 = j_3 = j_4}$

$$\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2\geq 1} \langle f, e_{j_2} \circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_1} \circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^3} \circ e_{j_2}$$

$\underline{j_2 \neq j_1 = j_3 = j_4}$

$$\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2\geq 1} \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_2}\rangle\langle f, e_{j_1} \circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^3} \circ e_{j_2}$$

$\underline{j_3 \neq j_1 = j_2 = j_4}$

$$\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2\geq 1}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_2}\circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2}$$

$\underline{j_4 \neq j_1 = j_2 = j_3}$

$$\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2\geq 1}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_2}\rangle e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2}$$

On fait la somme de ces trois termes et on trouve :

$$\begin{aligned}
& 4\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2\geq 1}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_2}\rangle e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2} \\
= \quad & 4\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2=1}^{j_1-1}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_2}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2} \qquad j_1 < j_2 \\
+ \quad & 4\sum_{j_2\geq 1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_2}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2} \qquad j_2 < j_1 \\
+ \quad & 4\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2=1}^{j_1-1}\big(a_{j_1j_2}a_{j_2}e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2} + a_{j_1}a_{j_1j_2}e_{j_1}\circ e_{j_2}^{\circ^3}\big)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 indices égaux les autre distincts}}$ (4=2+1+1)

$$\begin{aligned}
& j_1 = j_2 \\
+ \quad & \sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_2}\circ e_{j_3}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} \\
& j_1 = j_3 \\
+ \quad & \sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_2}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_3}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} \\
& j_1 = j_4 \\
+ \quad & \sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_3}\rangle\langle f, e_{j_2}\circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} \\
& j_2 = j_3 \\
+ \quad & \sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_2}\circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_3}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} \\
& j_2 = j_4 \\
+ \quad & \sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_2}\circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_3}\circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} \\
& j_3 = j_4 \\
+ \quad & \sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_2}\circ e_{j_3}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} \\
= \quad & 2\sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_1}\rangle\langle f, e_{j_2}\circ e_{j_3}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} \\
& +4\sum_{j_1\neq j_2\neq j_3}\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_2}\rangle\langle f, e_{j_1}\circ e_{j_3}\rangle e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3}
\end{aligned}$$

Pour expliciter ces deux sommes on va considérer les différentes permutations suivantes, qui constitue une partition de l'ensemble $\{(j_1, j_2, j_3) \mid j_1 \neq j_2 \neq j_3\}$:

$$\begin{array}{lll} j_1 < j_2 < j_3 & j_2 < j_1 < j_3 & j_2 < j_3 < j_1 \\ j_1 < j_3 < j_2 & j_3 < j_1 < j_2 & j_3 < j_2 < j_1 \end{array}$$

<u>Première somme</u>

après réindexaton on trouve :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} \Big[& \langle f, e_{j_3} \circ e_{j_3} \rangle \langle f, e_{j_2} \circ e_{j_1} \rangle e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3}^{\circ^2} \\ & + \langle f, e_{j_2} \circ e_{j_2} \rangle \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_3} \rangle e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \circ e_{j_3} \\ & + \langle f, e_{j_1} \circ e_{j_1} \rangle \langle f, e_{j_3} \circ e_{j_3} \rangle e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \Big] \end{aligned}$$

<u>deuxième somme</u>

après réindexaton on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{j_3<j_2<j_1} \Big[& a_{j_1 j_2} a_{j_1 j_3} e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} + a_{j_2 j_1} a_{j_2 j_3} e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \circ e_{j_3} \\ & + a_{j_3 j_1} a_{j_3 j_2} e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3}^{\circ^2} + a_{j_1 j_3} a_{j_1 j_2} e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \\ & + a_{j_2 j_3} a_{j_2 j_1} e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \circ e_{j_3} + a_{j_3 j_2} a_{j_3 j_1} e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3}^{\circ^2} \Big] \\ = & \sum_{j_3<j_2<j_1} (a_{j_1 j_2} a_{j_1 j_3} + a_{j_1 j_3} a_{j_1 j_2}) e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \\ & + \sum_{j_3<j_2<j_1} 2 a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \circ e_{j_3} \\ & + \sum_{j_3<j_2<j_1} 2 a_{j_1 j_3} a_{j_2 j_3} e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3}^{\circ^2} \end{aligned}$$

On réunit ces deux résultats et on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} & \sum_{j_3<j_2<j_1} \big(4 a_{j_1} a_{j_2 j_3} + 8 a_{j_1 j_2} a_{j_1 j_3}\big) e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \\ + & \sum_{j_3<j_2<j_1} \big(4 a_{j_2} a_{j_1 j_3} + 8 a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3}\big) e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \circ e_{j_3} \\ + & \sum_{j_3<j_2<j_1} \big(4 a_{j_1 j_2} a_{j_3} + 8 a_{j_1 j_3} a_{j_2 j_3}\big) e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3}^{\circ^2} \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{2 termes égaux} \neq \text{deux termes égaus}}$ (4=2+2)

On a quatre cas à considérer :

$$j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$$

$$j_1 = j_3 \neq j_2 = j_4$$

$$j_1 = j_4 \neq j_2 = j_4$$

On a alors la somme :

$$\sum_{j_1\neq j_2}\Big(a_{j_1}a_{j_2}+2a_{j_1j_2}^2\Big)e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}^{\circ^2}$$

$$\boxed{=\sum_{j_1\geq 1}\sum_{j_2<j_1}\Big(a_{j_1}a_{j_2}+2a_{j_1j_2}^2\Big)e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}^{\circ^2}}$$

$\boxed{\text{Tous les indices distincts}}$ (4=1+1+1+1)

On doit considérer l'ensemble $\{(j_1,j_2,j_3,j_4)\mid j_1\neq j_2\neq j_3\neq j_4\}$, puisque nous étudions la somme :

$$\sum_{j_1\neq j_2\neq j_3\neq j_4} a_{j_1j_2}a_{j_3j_4}e_{j_1}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3}\circ e_{j_4}$$

Les 24 permutations ne sont pas à regarder puisque échanger j_1 et j_2 ou j_3 et j_4 n'a aucun effet. Il reste en fait 3 termes qui se répètent 8 fois :

$$\boxed{\sum_{j_4<j_3<j_2<j_1} 8\Big(a_{j_1j_2}a_{j_3j_4}+a_{j_1j_3}a_{j_2j_4}+a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}\Big)e_{j_1}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3}\circ e_{j_4}}$$

Pour terminer il ne reste qu'à sommer tous ces résultats

△

Définition 7.2.1.

$$\big(f\underset{1}{\sim}f\big)(s_1,s_3):=\int f(s_1,s_2)f(s_3,s_2)d\mu(s_2)$$

Lemme 7.2.2. *Pour $f\in H\circ H$:*

$$\boxed{\begin{aligned}\big(f\underset{1}{\sim}f\big)=&\sum_{j_3<j_2<j_1}2\big(a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}e_{j_1}\circ e_{j_3}+a_{j_1j_3}a_{j_2j_3}e_{j_1}\circ e_{j_2}+a_{j_1j_2}a_{j_1j_3}e_{j_2}\circ e_{j_3}\big)\\ &+\sum_{j_2<j_1}2\big(a_{j_1j_2}a_{j_2}+a_{j_1j_2}a_{j_1}\big)e_{j_1}\circ e_{j_2}\\ &+\sum_{j_2<j_1}a_{j_1j_2}^2\big(e_{j_1}^{\circ^2}+e_{j_2}^{\circ^2}\big)\\ &+\sum_{j\geq 1}a_j^2e_j^{\circ^2}\end{aligned}}$$

<u>Démonstration</u>

$$f\underset{1}{\sim}f=\sum_{(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{j_1j_2}a_{j_3j_4}\Big(\langle e_{j_1},e_{j_3}\rangle e_{j_2}\otimes e_{j_4}+\langle e_{j_1},e_{j_4}\rangle e_{j_2}\otimes e_{j_3}+\langle e_{j_2},e_{j_3}\rangle e_{j_1}\otimes e_{j_4}+\langle e_{j_2},e_{j_4}\rangle e_{j_1}\otimes e_{j_3}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
& \int f(s_1,s_2)f(s_2,s_3)d\mu(s_2) \\
= \quad & \sum_{(j_1,j_2)} \langle f, e_{j_1}\circ e_{j_2}\rangle \sum_{(j_3,j_4)} \langle f, e_{j_3}\circ e_{j_4}\rangle \int e_{j_1}\circ e_{j_2}(s_1,s_2) e_{j_3}\circ e_{j_4}(s_2,s_3) d\mu(s_2) \\
= \quad & \frac{1}{4} \sum_{(j_1,j_2,j_3,j_4)} a_{j_1j_2}a_{j_3j_4} \int \Big(e_{j_1}\otimes e_{j_2}(s_1,s_2) + e_{j_2}\otimes e_{j_1}(s_1,s_2)\Big) \\
& \qquad \cdot \Big(e_{j_3}\otimes e_{j_4}(s_2,s_3) + e_{j_4}\otimes e_{j_3}(s_2,s_3)\Big) d\mu(s_2) \\
= \quad & \frac{1}{4} \sum_{(j_1,j_2,j_3,j_4)} a_{j_1j_2}a_{j_3j_4} \Big(e_{j_1}\otimes e_{j_4}\delta_{j_2j_3} + e_{j_1}\otimes e_{j_3}\delta_{j_2j_4} + e_{j_2}\otimes e_{j_4}\delta_{j_1j_3} \\
& \qquad + e_{j_2}\otimes e_{j_3}\delta_{j_1j_4}\Big)(s_1,s_3) \\
= \quad & \frac{1}{4} \sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} e_{j_1}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) + \frac{1}{4} \sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{j_1j_2}a_{j_3j_2} e_{j_1}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} e_{j_2}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) + \frac{1}{4} \sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{j_3j_1}a_{j_3j_2} e_{j_2}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) \\
= \quad & \frac{1}{2} \sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} e_{j_1}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) + \frac{1}{2} \sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} e_{j_2}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) \\
& \text{(en échangeant } j_1 \text{ et } j_2 \text{ dans la deuxième somme)} \\
= \quad & \sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} e_{j_1}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) \\
\boxed{1+1+1} \quad & \sum_{j_1\neq j_2\neq j_3} a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} e_{j_1}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) \\
& j_1<j_2<j_3 \quad ; \quad j_2<j_1<j_3 \quad ; \quad j_2<j_3<j_1 \\
& j_1<j_3<j_2 \quad ; \quad j_3<j_1<j_2 \quad ; \quad j_3<j_2<j_1 \\
& \text{(après réindexation)} \\
= \quad & \sum_{j_3<j_2<j_1} \Big[a_{j_3j_2}a_{j_2j_1} e_{j_3}\otimes e_{j_1}(s_1,s_3) + a_{j_2j_3}a_{j_3j_1} e_{j_2}\otimes e_{j_1}(s_1,s_3) \\
& + a_{j_1j_3}a_{j_3j_2} e_{j_1}\otimes e_{j_2}(s_1,s_3) + a_{j_3j_1}a_{j_1j_2} e_{j_3}\otimes e_{j_2}(s_1,s_3) \\
& + a_{j_2j_1}a_{j_1j_3} e_{j_2}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3) + a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} e_{j_1}\otimes e_{j_3}(s_1,s_3)\Big] \\
= \quad & 2 \sum_{j_3<j_2<j_1} \Big(a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} e_{j_1}\circ e_{j_3}(s_1,s_3) + a_{j_1j_3}a_{j_2j_3} e_{j_1}\circ e_{j_2}(s_1,s_3) + \\
& \qquad + a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} e_{j_2}\circ e_{j_3}(s_1,s_3)\Big) \\
\boxed{2+1} \quad & \sum_{\substack{j_2\neq j_1\\ j_2=j_3}} a_{j_1j_2}a_{j_2} e_{j_1}\otimes e_{j_2}(s_1,s_3) + \sum_{\substack{j_2\neq j_1\\ j_1=j_2}} a_{j_1}a_{j_2j_3} e_{j_1}\otimes e_{j_2}(s_1,s_3) + \\
& \qquad + \sum_{\substack{j_2\neq j_1\\ j_1=j_3}} a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} e_{j_1}\otimes e_{j_1}(s_1,s_3) \\
= \quad & 2 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2} e_{j_1}\circ e_{j_2}(s_1,s_3) + 2 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1}a_{j_1j_2} e_{j_1}\circ e_{j_2}(s_1,s_3) + \\
& \qquad + 2 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2 \Big(e_{j_1}\circ e_{j_1} + e_{j_2}\circ e_{j_2}\Big)(s_1,s_3) \\
\boxed{3} \quad & \sum_j a_j^2 e_j\circ e_j
\end{aligned}
$$

Pour conclure il suffit de réunir tous ces résultats.

$\triangle$

7.2.2 Identification des termes d'ordre 4

Proposition 7.2.1.

$$O_4\Big(\big[(\Phi^{\circ^2} + \Phi \circ a_1^2)(f)\big]^2\Big) = \Phi^{\circ^4}(f \circ f)$$

Démonstration

C'est une simple comparaison des termes en question.

$\triangle$

7.2.3 Identification des termes d'ordre 3

Lemme 7.2.3.

$$\boxed{\begin{aligned} a_1^4(f \circ f) = & \sum_{j_3<j_2<j_1} \gamma_{2,1}\Big[8\big(a_{j_1j_2}a_{j_1j_3} + a_{j_1j_2}a_{j_2j_3} + a_{j_1j_3}a_{j_2j_3}\big) \\ & \qquad +4\big(a_{j_1}a_{j_2j_3} + a_{j_2}a_{j_1j_3} + a_{j_3}a_{j_1j_2}\big)\Big] e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \\ + & \sum_{j_2<j_1} \Big[4\gamma_{3,2}a_{j_1}a_{j_1j_2} + \gamma_{2,1}(4a_{j_1j_2}^2 + 2a_{j_1}a_{j_2})\Big] e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \\ + & \sum_{j_2<j_1} \Big[4\gamma_{3,2}a_{j_1j_2}a_{j_2} + \gamma_{2,1}(4a_{j_1j_2}^2 + 2a_{j_1}a_{j_2})\Big] e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \\ + & \sum_{1\leq j} \gamma_{4,3}a_j^2 e_j^{\circ^3} \end{aligned}}$$

Démonstration

Fixons le 4-uple (j_1, j_2, j_3, j_4) tel que $j_4 < j_3 < j_2 < j_1$:

$$\begin{array}{rcll} a_1^4 & : & H^{\circ^4} & \to & H^{\circ^3} \\ & & e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \circ e_{j_4} & \mapsto & 0 \\ & & e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} & \mapsto & \gamma_{2,1} e_{j_1} \circ e_{j_2} \circ e_{j_3} \\ & & e_{j_1}^{\circ^3} \circ e_{j_2} & \mapsto & \gamma_{3,2} e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} \\ & & e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2}^{\circ^2} & \mapsto & \gamma_{2,1} e_{j_1}^{\circ^2} \circ e_{j_2} + \gamma_{2,1} e_{j_1} \circ e_{j_2}^{\circ^2} \\ & & e_{j_1}^{\circ^4} & \mapsto & \gamma_{4,3} e_{j_1}^{\circ^3} \end{array}$$

△

Proposition 7.2.2.

$$O_3\Big(\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2\Big)=\Phi^{\circ^3}\big(a_1^4(f\circ f)\big)$$

<u>Démonstration</u>

C'est une simple comparaison des termes en question.

△

7.2.4 Identification des termes d'ordre 2

Proposition 7.2.3.

$$O_2\Big(\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2\Big)=\Phi^{\circ^2}\Big(4f\underset{1}{\sim}f+a_2^4(f\circ f)\Big)$$

<u>Démonstration</u>

$$\begin{aligned}
& O_2\Big(\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2\Big)-\Phi^{\circ^2}\big(4f\underset{1}{\sim}f\big)\\
= & \sum_{j_2<j_1}\Big[4m_3^2a_{j_1j_2}^2+2m_3^2a_{j_1}a_{j_2}+4(\gamma_{3,1}-3)(a_{j_1j_2}a_{j_1}+a_{j_1j_2}a_{j_2})\Big]P_1(X_{j_1})P_1(X_{j_2})\\
& +\sum_{1\leq j}(\gamma_{4,2}-6)a_jP_2(X_j)
\end{aligned}$$

Il nous reste à calculer $\Phi^{\circ^2}\big(a_2^4(f\circ f)\big)$.

Fixons le 4-uple (j_1,j_2,j_3,j_4) tel que $j_4<j_3<j_2<j_1$:

$$\begin{array}{rcll}
a_2^4 & : & H^{\circ^4} & \to\ H^{\circ^3}\\
 & & e_{j_1}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3}\circ e_{j_4} & \mapsto\ 0\\
 & & e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}\circ e_{j_3} & \mapsto\ 0\\
 & & e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2} & \mapsto\ (\gamma_{3,1}-\Gamma_{3,1})e_{j_1}\circ e_{j_2}\\
 & & e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}^{\circ^2} & \mapsto\ (\gamma_{2,0}-\Gamma_{2,0})^2e_{j_1}\circ e_{j_2}\\
 & & e_{j_1}^{\circ^4} & \mapsto\ (\gamma_{4,2}-\Gamma_{4,2})e_{j_1}^{\circ^2}
\end{array}$$

△

7.2.5 Identification des termes d'ordre 1

Lemme 7.2.4.

$$a_3^4(f\circ f) = 4\gamma_{3,0}\Big(\sum_{j_2<j_1} a_{j_1}a_{j_1j_2}e_{j_2} + \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}a_{j_2}e_{j_1}\Big) + \gamma_{4,1}\sum_{j\geq 1} a_j^2 e_j$$

<u>Démonstration</u>

Fixons le 4-uple (j_1, j_2, j_3, j_4) tel que $j_4 < j_3 < j_2 < j_1$:

$$\begin{array}{rcll} a_3^4 & : & H^{\circ^4} & \to & H^{\circ^3} \\ & & e_{j_1}^{\circ^3}\circ e_{j_2} & \mapsto & (\gamma_{3,1}-\Gamma_{3,1})e_{j_1}\circ e_{j_2} \\ & & e_{j_1}^{\circ^2}\circ e_{j_2}^{\circ^2} & \mapsto & 0 \\ & & e_{j_1}^{\circ^4} & \mapsto & (\gamma_{4,1}-\Gamma_{4,1})e_{j_1} \end{array}$$

$\triangle$

Lemme 7.2.5.

$$a_1^2(f \underset{1}{\sim} f) = m_3 \sum_{j_2<j_1} a_{j_1j_2}^2(e_{j_1}+e_{j_2}) + m_3\sum_{1\leq j} a_j^2 e_j$$

<u>Démonstration</u>

Fixons le couple (j_1, j_2) tel que $j_2 < j_2$:

$$a_1^2(e_{j_1}\circ e_{j_2}) = 0$$

$$a_1^2(e_{j_1}^{\circ^2}) = (\gamma_{2,1}-\Gamma_{2,1}) = m_3$$

$\triangle$

Proposition 7.2.4.

$$O_1\Big(\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2\Big) = \Phi\big(a_3^4(f\circ f) + 4a_1^2(f\underset{1}{\sim} f) - 6\big(a_1^2\circ\pi_1\big)(f\underset{1}{\sim} f)\big)$$

où π_1 est la projection orthogonale sur $\{e_j\circ e_k \mid j=k\}$

Remarque

Nous noterons π_2 la projection sur $\{e_j\circ e_k \mid j\neq k\}$

Démonstration

Pour cette identification il suffit de remarquer que :

$O_1\Big(\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2\Big)-\Phi\big(a_3^4(f\circ f)+4a_1^2(f\underset{1}{\sim}f)\big)=-6m_3\sum_{1\leq j}a_j^2P_1(X_j)$

et : $\big(a_1^2\circ\pi_1\big)(f\underset{1}{\sim}f)=m_3\sum_{1\leq j}a_j^2e_j$

△

7.2.6 Identification des termes d'ordre 0

Proposition 7.2.5.

$$O_0\Big(\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2\Big)=2\parallel f\parallel^2+a_4^4(f\circ f)$$

Démonstration

On vérifie que $a_4^4(f\circ f)=(\gamma_{4,0}-\Gamma_{4,0})\sum_{1\leq j}a_j^2$ et $\parallel f\parallel^2=2\sum_{j_2<j_1}a_{j_1j_2}^2+\sum_{1\leq j}a_j^2$

$$\begin{aligned}O_0\Big(\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2\Big) &= 4\sum_{j_2<j_1}a_{j_1j_2}^2+(\gamma_{4,0}-1)\sum_{1\leq j}a_j^2\\ &= 2\parallel f\parallel^2+(\gamma_{4,0}-3)\sum_{1\leq j}a_j^2\\ &= 2\parallel f\parallel^2+a_4^4(f\circ f)\end{aligned}$$

△

7.2.7 Identification

En réunissant les résultats des précédentes sections on a la proposition suivante :

Proposition 7.2.6.

	$\big[(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2)(f)\big]^2$	
$=$	$\Phi^{\circ^4}(f\circ f)$	*(ordre 4)*
$+$	$\Phi^{\circ^3}\big(a_1^4(f\circ f)\big)$	*(ordre 3)*
$+$	$\Phi^{\circ^2}\Big(4f\underset{1}{\sim}f+a_2^4(f\circ f)\Big)$	*(ordre 2)*
$+$	$\Phi\big(a_3^4(f\circ f)+4a_1^2(f\underset{1}{\sim}f)-6\big(a_1^2\circ\pi_1\big)(f\underset{1}{\sim}f)\big)$	*(ordre 1)*
$+$	$2\parallel f\parallel^2+a_4^4(f\circ f)$	*(ordre 0)*

7.3 Etude d'une limite

Soient $h_1,\ h_2 \in H$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ une suite de partitions de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0.

Nos noterons $f_k := h_1 \otimes \left(h_2 1_{]0,t_k]}\right) 1_C$

Lemme 7.3.1. *Pour $\Psi = \Phi^{\circ^2}$ ou $\Psi = \Phi \circ a_1^4$ on a :*

$$\lim_{k\to\infty} E\left[4\Psi\big(\sum_k f_k \underset{1}{\sim} f_k\big) - \int_0^t h_2^2 \Psi\Big(\big[h_1 1_{]0,.]}\big]^{\circ^2}\Big) d\mu\right]^2 = 0$$

<u>**Démonstration**</u>

Nous commençons par le cas $\Psi = \Phi^{\circ^2}$. Nous Introduisons quelques notations :

- $S_k := \left[4\Phi^{\circ^2}\big(\sum_k f_k \underset{1}{\sim} f_k\big) - \int_0^t h_2^2 \Phi^{\circ^2}\Big(\big[h_1 1_{]0,.]}\big]^{\circ^2}\Big) d\mu\right]^2$
- $h^k := h 1_{]0,t_k]}$

$$\begin{aligned}
& 4 f_k \underset{1}{\sim} f_k(s_1,s_3) = \\
& \int h_1^{\otimes^2}(s_1,s_2) h_2^{k\otimes^2}(s_2,s_3) 1_C(s_1,s_2) 1_C(s_2,s_3) d\mu(s_2) \quad \big(:= I_1^k(s_1,s_2)\big) \\
+ & \int h_1^{\otimes^2}(s_1,s_3) h_2^{k\otimes^2}(s_2,s_2) 1_C(s_1,s_2) 1_C(s_3,s_2) d\mu(s_2) \quad \big(:= I_2^k(s_1,s_2)\big) \\
+ & \int h_1^{\otimes^2}(s_2,s_2) h_2^{k\otimes^2}(s_1,s_3) 1_C(s_2,s_1) 1_C(s_2,s_3) d\mu(s_2) \quad \big(:= I_3^k(s_1,s_2)\big) \\
+ & \int h_1^{\otimes^2}(s_2,s_3) h_2^{k\otimes^2}(s_1,s_2) 1_C(s_2,s_1) 1_C(s_3,s_2) d\mu(s_2) \quad \big(:= I_4^k(s_1,s_2)\big)
\end{aligned}$$

L'inégalité de convexité nous permet d'écrire :

$$S_k \le 4E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_1^k\Big]^2 + 4E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_2^k - \int_0^t h_2^2 \Phi^{\circ^2}\big[(h_1 1_{]0,.]})^{\circ^2}\big] d\mu\Big]^2$$

$$+4E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_3^k\Big]^2 + 4E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_4^k\Big]^2$$

$\boxed{\text{Etape 1 :}}$ Calcul de $\lim_{k\to\infty} E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_1^k\Big]^2$

$$\begin{aligned}
& E\Phi^{\circ^2}(I_1^k)^2 = \| I_1^k \|^2_{L^2(\mu^{\otimes^2})} \qquad \text{(isométrie)} \\
= & \int \Big(\sum_k \int h_1^{\otimes^2}(s_1,s_2) h_2^{k\otimes^2}(s_2,s_3) 1_C(s_1,s_2) 1_C(s_2,s_3) d\mu(s_2)\Big)^2 d\mu^{\otimes^2}(s_1,s_3) \\
= & \int \Big[\sum_k \int h_1^{\otimes^4}(s_1,s_2,s_1,t_2) h_2^{k\otimes^4}(s_2,s_3,t_2,s_3) 1_{C^4}(s_1,s_2,s_2,s_3,s_1,t_2,t_2,s_3) d\mu^{\otimes^2}(s_2,t_2) \\
& +2\sum_{k<j} \int h_1^{\otimes^4}(s_1,s_2,s_1,t_2) h_2^{k\otimes^2}(s_2,s_3) h_2^{j\otimes^2}(t_2,s_3) \\
& \qquad 1_{C^4}(s_1,s_2,s_2,s_3,s_1,t_2,t_2,s_3) d\mu^{\otimes^2}(s_2,t_2)\Big] d\mu^{\otimes^2}(s_1,s_3)
\end{aligned}$$

– D'une part $\sum_k 1_{]t_k,t_{k+1}]^4}(s_2,s_3,t_2,s_3) \overset{L^2(\mu^{\otimes^4})}{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 1_{[s_2=s_3=t_2]}$

– D'autre part : $\sum_{k<j} 1_{]t_k,t_{k+1}]^2\times[t_j,t_{j+1}]^2}(s_2,s_3,t_2,s_3) = 0$

car $(k<j) \Rightarrow (]t_k,t_{k+1}]\bigcap[t_j,t_{j+1}] = \emptyset)$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne :

$$\lim_{k\to\infty} E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_i^k\Big]^2 = \int h_1^{\otimes^2}(s_1,s_2)h_2^{k\otimes^2}(s_2,s_3)1_{[s_2=s_3=t_2]}d\mu^{\otimes^4}(s_1,s_2,t_2,s_3) = 0$$

$\boxed{\text{Etape 2}}$ Calcul de $\lim_{k\to\infty} E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_i^k\Big]^2$ pour $i\in\{3,4\}$

On procède de la même façon et on a également :

$$\lim_{k\to\infty} E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_3^k\Big]^2 = \lim_{k\to\infty} E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_4^k\Big]^2 = 0$$

$\boxed{\text{Etape 3 :}}$ Calcul de $\lim_{k\to\infty} E\Big[\Phi^{\circ^2}\sum_k I_2^k - \int_0^t h_2^2\Phi^{\circ^2}\big([h_1 1_{]0,.]}]^{\circ^2}\big)d\mu\Big]^2$

$$\begin{aligned}
\sum_k I_2^k(s_2,s_3) &= \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} h_2^2(s_2)h_1^{\otimes^2}(s_1,s_3)1_C(s_2,s_3)1_{\widetilde{C}}(s_2,s_3)d\mu(s_2)\\
&= \int_0^t h_2^2(s_2)h_1^{\otimes^2}(s_1,s_3)1_C(s_2,s_3)1_{\widetilde{C}}(s_2,s_3)d\mu(s_2)\\
&= \int_0^t h_2^2(s_2)\Big(h_1 1_{]0,s_2]}\otimes h_1 1_{]0,s_2]}\Big)(s_1,s_3)d\mu(s_2)
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$\Phi^{\circ^2}\Big(\int_0^t h_2^2(s_2)h_1 1_{]0,s_2]}^{\otimes^2}d\mu(s_2)\Big) \overset{L^2}{=} \int_0^t h_2^2(s_2)\Phi^{\circ^2}\Big(\big(h_1 1_{]0,s_2]}\big)^{\circ^2}\Big)d\mu(s_2)$$

Pour cela on va décomposer 1_C en produit tensoriel :

$$1_C(s_1,s_2) \overset{L^2}{=} \lim_{k\to\infty} 1_{]0,t_{k-1}]\times]t_k,t_{k+1}]}(s_1,s_2)$$

$$1_{\widetilde{C}}(s_3,s_2) \overset{L^2}{=} \lim_{k\to\infty} 1_{]t_k,t_{k+1}]\times]0,t_{k-1}]}(s_3,s_2)$$

Nous allons noter $C_1^k := 1_{]0,t_{k-1}]}$ et $C_2^k := 1_{]t_k,t_{k+1}]}$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t h_2^2(s_2)h_1^{\otimes^2}(s_1,s_3)1_C(s_2,s_3)1_{\widetilde{C}}(s_2,s_3)d\mu(s_2)\\
=\ & h_1^{\otimes^2}\int_0^t h_2^2(s_2)\lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\sum_k\sum_l 1_{C_1^k\times C_2^k}(.,s_2)1_{C_2^l\times C_1^l}(s_2,.)d\mu(s_2)\\
\underset{\substack{\text{cvg}\\ \text{dominée}}}{=}\ & \lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\sum_{k,l} h_1^{\otimes^2}1_{C_1^k}1_{C_1^l}\int_0^t h_2^2(s_2)1_{C_2^k}(s_2)1_{C_2^l}(s_2)d\mu(s_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \Phi^{\circ^2}\Big(\int_0^t h_2^2(s_2)h_1^{\otimes^2}1_C(.,s_2)1_{\widetilde{C}}(s_2,.)d\mu(s_2)\Big) \\
= \; & \Phi^{\circ^2}\left(\lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\sum_{k,l} h_1^{\otimes^2}1_{C_1^k}1_{C_1^l}\int_0^t h_2^2(s_2)1_{C_2^k}(s_2)1_{C_2^l}(s_2)d\mu(s_2)\right) \\
= \; & \lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\Phi^{\circ^2}\left(\sum_{k,l} h_1^{\otimes^2}1_{C_1^k}1_{C_1^l}\int_0^t h_2^2(s_2)1_{C_2^k}(s_2)1_{C_2^l}(s_2)d\mu(s_2)\right) \quad \begin{cases} t \text{ fixé} \\ \text{cont. de } \Phi^{\circ^2}(\text{Prop. 6.3.1.}) \end{cases} \\
= \; & \lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\Phi^{\circ^2}\left(\sum_{k,l} h_1^{\otimes^2}1_{C_1^k}1_{C_1^l}\right)\int_0^t h_2^2(s_2)1_{C_2^k}(s_2)1_{C_2^l}(s_2)d\mu(s_2) \\
& \lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\int_0^t \Phi^{\circ^2}\left(\sum_{k,l} h_1^{\otimes^2}1_{C_1^k}1_{C_1^l}\right)h_2^2(s_2)1_{C_2^k}(s_2)1_{C_2^l}(s_2)d\mu(s_2)
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire :

$$
E\Big[\sum_k \Phi^{\circ^2}(I_2^k) - \int_0^t h_2^2(s_2)\Phi^{\circ^2}\big[\big(h_1 1_{]0,s_2]}\big)^{\circ^2}\big]d\mu(s_2)\Big]^2
$$

$$
= E\Bigg[\lim_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}}\Big[\int_0^t h_2^2(s_2)\Big(\Phi^{\circ^2}\big(h_1\otimes h_1\sum_{(k,l)}1_{C_1^k\times C_2^k}(.,s_2)1_{C_2^l\times C_1^l}(s_2,.)\big)-
$$

$$
\Phi^{\circ^2}\big(h_1\otimes h_1 1_C(.,s_2)1_{\widetilde{C}}(s_2,.)\big)\Big)d\mu(s_2)\Big]\Bigg]^2
$$

Dans la suite on va noter :

- $Z_k(.,.,s_2) := \Phi^{\circ^2}\big(h_1\otimes h_1\sum_{(k,l)}1_{C_1^k\times C_2^k}(.,s_2)1_{C_2^l\times C_1^l}(s_2,.)\big)$
- $Z(.,.,s_2) := \Phi^{\circ^2}\big(h_1\otimes h_1 1_C(.,s_2)1_{\widetilde{C}}(s_2,.)\big)$
- $Y_k := |Z_k - Z|$

$$
\begin{aligned}
& E\Bigg[\Big[\int_0^t h_2^2(s_2)\Big(\Phi^{\circ^2}\big(h_1\otimes h_1\sum_{(k,l)}1_{C_1^k\times C_2^k}(.,s_2)1_{C_2^l\times C_1^l}(s_2,.)\big)- \\
& \qquad \Phi^{\circ^2}\big(h_1\otimes h_1 1_C(.,s_2)1_{\widetilde{C}}(s_2,.)\big)\Big)d\mu(s_2)\Big]\Bigg]^2 \\
\leq \; & E\left(\int_0^t h_2^2(s_2)\left|Z_k(.,.,s_2)-Z(.,.,s_2)\right|d\mu(s_2)\right)^2 \\
= \; & E\left(\int_0^t\int_0^t \big(h_2^2\big)^{\otimes^2}(s_2,t_2)Y_k(s_2)Y_k(t_2)d\mu(s_2,t_2)\right) \\
= \; & \int_0^t\int_0^t \big(h_2^2\big)^{\otimes^2}(s_2,t_2)E\left(Y_k(s_2)Y_k(t_2)\right)d\mu(s_2,t_2) \\
\leq \; & \int_0^t\int_0^t \big(h_2^2\big)^{\otimes^2}(s_2,t_2)\left(E\left|Y_k(s_2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\left|Y_k(t_2)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\mu(s_2,t_2)
\end{aligned}
$$

Pour finir il suffit de voir que :

$$\begin{aligned} E\left|Y_k(s_2)\right|^2 &= E\Big[\Phi^{\circ^2}\big(h_1 \otimes h_1 \sum_{(k,l)} 1_{C_1^k \times C_2^k}(.,s_2) 1_{C_2^l \times C_1^l}(s_2,.) - \\ &\qquad h_1 \otimes h_1 \sum_{(k,l)} 1_C(.,s_2) 1_{\widetilde{C}}(s_2,.)\big)\Big]^2 \\ &= \left\| h_1 \otimes h_1 \Big[1_C(.,s_2) 1_{\widetilde{C}}(s_2,.) - \sum_{(k,l)} 1_{C_1^k \times C_2^k}(.,s_2) 1_{C_2^l \times C_1^l}(s_2,.)\Big] \right\|^2 \end{aligned}$$

$\triangle$

Chapitre 8

Existence de modifications continues

8.1 Méthode

8.1.1 Un résultat technique

On va utiliser la variante, un peu plus générale, du théorème de Kolmogorov-Centsov qui suit (confère **[12]**) :

Lemme 8.1.1. *On suppose qu'un processus* $X := \big(X_t\big)_{0\leq t\leq T}$ *sur un espace probabilisé* $\big(\Omega, \mathcal{F}, P\big)$ *satisfasse la condition :*

$$E\,|X_t - X_s|^{\alpha} \leq C\,|F(t) - F(s)|^{1+\beta}$$

Où :

- α, β *et* C *sont des constantes strictement positives.*
- F *est une fonction réelle, continue sur* $[0, T]$ *et à variation bornée.*

Alors il existe des modifications continues de X

<u>**Démonstration**</u>

Pour l'essentiel on reprend la démonstration de **[12]**. On a deux points à vérifier :

(a) $P\big(\big[|X_t - X_s| > \varepsilon\big]\big) \leq \dfrac{E|X_t - X_s|^{\alpha}}{\varepsilon^{\alpha}} \leq C\varepsilon^{-\alpha}|F(t) - F(s)|^{1+\beta}$
et la continuité de F entraîne : $X_s \underset{s\to t}{\longrightarrow} X_t$ en probabilité.

(b) On prend $t = \frac{k}{2^n}$, $s = \frac{k-1}{2^n}$ et $\varepsilon = 2^{-\gamma n}$ $(0 < \gamma < \frac{\beta}{\alpha})$
$P\big(\big[|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \geq 2^{-\gamma n}|\big]\big) \leq C2^{-\gamma n}|F(\frac{k}{2^n}) - F(\frac{k-1}{2^n})|$

$$P\left(\left[\max_{0\le k\le 2^n}|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}|\right])\ge 2^{-\gamma n}\right)\le P\left(\bigcup_{k=0}^{2^n}\left[|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}|\ge 2^{-\gamma n}\right]\right)$$
$$\le C2^{-\gamma n}\sum_{k=0}^{2^n}\left|F\left(\frac{k}{2^n}\right)-F\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|\le C\frac{varF}{2^{\gamma n}}$$
où l'on a noté varF pour la variation de F.

Tous les autres arguments sont repris sans changement.

△

8.1.2 Position du problème

- On choisit $h_1, h_2 \in H$, $t \in \mathbb{R}$
- On pose $Z_t^n := \left(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2\right)_n\left(h_1\otimes\left(h_2 1_{]0,t]}\right)1_C\right)$
- On sait que la suite $\left(Z_t^n\right)$ converge dans L^2 vers $\int_0^t \Phi(h_1)_s d\Phi(h_2)_s =: Z_t$ et on veut montrer l'existence de modifications continues pour le processus $\left(Z_t\right)$.

  Pour ce faire, on va étudier $E|Z_t^n - Z_s^n|^4$ dans le but d'utiliser la variante précédente du théorème de Kolmogorov-Centsov.

  On peut remarquer que $Z_t^n - Z_s^n = \left(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2\right)_n\left(h_1\otimes\left(h_2 1_{]s,t]}\right)1_C\right)$.

  Dans le but de simplifier les écritures nous noterons $f_{st} := h_1\otimes\left(h_2 1_{]s,t]}\right)1_C$.

8.1.3 Méthode

Pour calculer $E|Z_t^n - Z_s^n|^4$ nous allons utiliser les calculs de $\left(\Phi^{\circ^2}+\Phi\circ a_1^2\right)^2$ et l'orthogonalité des termes d'ordre différent. Les identifications établies précédemment nous permettrons de faire cette étude sur chacun des ordres, ordre après ordre. A cet effet on rappel :

$$\begin{array}{|lcl|}
O_4\left(|Z_t^n - Z_s^n|^2\right) & = & \Phi_n^{\circ^4}\left(f_{st}^\circ\circ f_{st}^\circ\right) \\
O_3\left(|Z_t^n - Z_s^n|^2\right) & = & \left(\Phi_n^{\circ^3}\circ a_1^2\right)_n\left(f_{st}^\circ\circ f_{st}^\circ\right) \\
O_2\left(|Z_t^n - Z_s^n|^2\right) & = & \Phi_n^{\circ^2}\left(4f_{st}^\circ\underset{1}{\sim}f_{st}^\circ + a_1^4\left(f_{st}^\circ\circ f_{st}^\circ\right)\right) \\
O_1\left(|Z_t^n - Z_s^n|^2\right) & = & \Phi_n\left(a_3^4\left(f_{st}^\circ\circ f_{st}^\circ\right)+4a_1^4\left(f_{st}^\circ\underset{1}{\sim}f_{st}^\circ\right)-6a_1^4\circ\pi_1\left(f_{st}^\circ\underset{1}{\sim}f_{st}^\circ\right)\right) \\
O_0\left(|Z_t^n - Z_s^n|^2\right) & = & 2\parallel f_{st}\parallel_A^2 + a_4^4\left(f_{st}^\circ\circ f_{st}^\circ\right)
\end{array}$$

8.2 Termes d'ordre 4

Lemme 8.2.1.

$$E\Big(O_4\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 \leq \| h_1 \|_A^4 \| h_2 1_{]s,t]} \|_A^4$$

<u>**Démonstration**</u>

$E^\nu\Big(O_4\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 \leq E^{\mu_A}\big(f_{st}^\circ \circ f_{st}^\circ\big)^2$

mais

$$\begin{aligned}
f_{st}^\circ \circ f_{st}^\circ &= f_{st}^\circ \otimes f_{st}^\circ \\
&= \tfrac{1}{4}\big(h_1 \otimes \big(h_2 1_{]s,t]}\big)1_C + \big(h_2 1_{]s,t]} \otimes h_1\big)1_{\widetilde{C}}\big)^{\otimes^2} \\
&= \tfrac{1}{4}\Big(h_1 \otimes h_2^{st} \otimes h_1 \otimes h_2^{st} 1_C \otimes 1_C + h_1 \otimes h_2^{st} \otimes h_2^{st} \otimes h_1 1_C \otimes 1_{\widetilde{C}} \\
&\qquad + h_2^{st} \otimes h_1 \otimes h_1 \otimes h_2^{st} 1_{\widetilde{C}} \otimes 1_C + h_2^{st} \otimes h_1 \otimes h_2^{st} \otimes h_1 1_{\widetilde{C}} \otimes 1_{\widetilde{C}}\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^\nu\left(O_4\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\right)^2 &\leq \tfrac{1}{4}\Big[\| h_1 \otimes h_2^{st} \otimes h_1 \otimes h_2^{st} 1_C \otimes 1_C \|_A^2 \\
&\qquad + \| h_1 \otimes h_2^{st} \otimes h_2^{st} \otimes h_1 1_C \otimes 1_{\widetilde{C}} \|_A^2 \\
&\qquad + \| h_2^{st} \otimes h_1 \otimes h_1 \otimes h_2^{st} 1_{\widetilde{C}} \otimes 1_C \|_A^2 \\
&\qquad + \| h_2^{st} \otimes h_1 \otimes h_2^{st} \otimes h_1 1_{\widetilde{C}} \otimes 1_{\widetilde{C}}\Big)\|_A^2 \Big] \\
\| h_1 \otimes h_2^{st} \otimes h_1 \otimes h_2^{st} 1_C \otimes 1_C \|_A^2 &\leq \int \big(h_1 \otimes h_1\big)^2(x_1,x_3)\big(h_2^{st} \otimes h_2^{st}\big)^2(x_2,x_4) d\mu_A^{\otimes^4}(x_1,x_2,x_3,x_4) \\
&= \| h_1 \|_A^4 \| h_2^{st} \|_A^4
\end{aligned}$$

Les trois autres termes se traitent de la même façon et donnent le même résultat, ce qui établit le lemme.

△

8.3 Termes d'ordre 3

Lemme 8.3.1.

$$E\Big(O_3\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 \leq C_{4,1} \| h_1 \|_A^4 \| h_2 1_{]s,t]} \|_A^4$$

Démonstration

$$\begin{aligned} E^{\nu}\Big(O_3\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 &\leq C_{4,1} \parallel a_1^4(f_{st}^{\circ} \circ f_{st}^{\circ})\|_A^2 \\ &\leq C_{4,1} \parallel f_{st}^{\circ} \circ f_{st}^{\circ} \parallel_A^2 \\ &\leq C_{4,1} \parallel h_1 \parallel_A^4 \| h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4 \end{aligned}$$

△

8.4 Termes d'ordre 2

Lemme 8.4.1.

$$E\Big(O_2\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 \leq \left(\frac{1}{2} + C_{4,2}\right) \parallel h_1 \parallel_A^4 \| h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4$$

Démonstration

$$E\Big(O_2\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 \leq 4\left\|f_{st}^{\circ} \underset{1}{\sim} f_{st}^{\circ}\right\| + \|a_2^4(f_{st}^{\circ} \circ f_{st}^{\circ})\|$$

$$\begin{aligned} \left\|f_{st}^{\circ} \underset{1}{\sim} f_{st}^{\circ}\right\| &= \int \left[\int f_{st}^{\circ}(s_1, s_2) f_{st}^{\circ}(s_2, s_3) d\mu_A(s_2)\right]^2 d\mu_A^{\otimes^2}(s_2, s_3) \\ &\underset{\text{Hölder}}{\leq} \int \left(\int \Big(f_{st}^{\circ}(s_1, s_2)\Big)^2 d\mu_A(s_2)\right) \left(\int \Big(f_{st}^{\circ}(s_2, s_3)\Big)^2 d\mu_A(s_2) d\mu_A^{\otimes^2}(s_2, s_3)\right) \\ &\underset{\text{Fubini}}{\leq} \parallel f_{st}^{\circ} \parallel_A^4 \\ \parallel f_{st}^{\circ} \parallel_A^4 &= \int \left[\Big(h_1 \otimes h_2 1_{]s,t]}\Big)^{\circ^2}\right]^2 d\mu_A^{\otimes^2} \\ &\leq \tfrac{1}{2} \parallel h_1 \parallel_A^4 \| h_2 1]s,t] \parallel_A^4 \end{aligned}$$

$\parallel a_2^4(f_{st}^{\circ} \circ f_{st}^{\circ})\|_A^2 \leq C_{4,2} \parallel h_1 \parallel_A^4 \| h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4$ d'où le résultat.

△

8.5 Termes d'ordre 1

Lemme 8.5.1.

$$E\Big(O_1\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 \leq \left(C_{4,3} + \frac{5}{2} C_{4,1}\right) \parallel h_1 \parallel_A^4 \| h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\left\|a_3^4(f_{st}^\circ \circ f_{st}^\circ)\right\|_A^2 &\leq C_{4,3} \parallel h_1 \parallel_A^4 \parallel h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4 \\
\left\|a_1^4(f_{st}^\circ \circ f_{st}^\circ)\right\|_A^2 &\leq C_{4,1} \parallel f_{st}^\circ \underset{1}{\sim} f_{st}^\circ \parallel_A^2 \leq \tfrac{1}{2} C_{4,1} \parallel h_1 \parallel_A^4 \parallel h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4 \\
\left\|a_1^4 \circ \pi_1(f_{st}^\circ \underset{1}{\sim} f_{st}^\circ)\right\|_A^2 &\leq C_{4,1} \left\|\pi_1(f_{st}^\circ \underset{1}{\sim} f_{st}^\circ)\right\|_A^4 \leq C_{4,1} \left\|f_{st}^\circ \underset{1}{\sim} f_{st}^\circ\right\|_A^4 \\
&\leq \parallel h_1 \parallel_A^4 \parallel h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4
\end{aligned}$$

$\triangle$

8.6 Termes d'ordre 0

Lemme 8.6.1.

$$E\Big(O_0\big(|Z_t^n - Z_s^n|^2\big)\Big)^2 \leq \left(C_{4,4} + \frac{1}{2}\right) \parallel h_1 \parallel_A^4 \parallel h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\left\|a_4^4(f_{st}^\circ \circ f_{st}^\circ)\right\|_A^2 &\leq C_{4,4} \|f_{st}^\circ \circ f_{st}^\circ\|_A^2 \leq C_{4,4} \parallel h_1 \parallel_A^4 \parallel h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4 \\
\|f_{st}^\circ\|_A^2 &= \int \Big[\Big(h_1 \otimes \big(h_2 1_{]s,t]}\big) 1_C\Big)^{\circ^2}\Big]^2 d\mu_A^{\otimes^2} \leq \frac{1}{2} \parallel h_1 \parallel_A^4 \parallel h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4
\end{aligned}$$

$\triangle$

8.7 Modifications continues

La réunion des résultats précédents donne le lemme :

Lemme 8.7.1.

$$E\left(|Z_t^n - Z_s^n|^2\right)^2 \leq (\frac{7}{2} C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} + 2) \parallel h_1 \parallel_A^4 \parallel h_2 1_{]s,t]} \parallel_A^4$$

Théorème 8.7.1. *Le processus* $\left(\int_0^t \Phi(h_1)_s d\Phi(h_2)_s\right)_t$ *admet des modifications continues.*

<u>Démonstration</u>

$\| h_2 1_{]s,t]} \|_A^2 = \int h_2^2 1_{]s,t]} d\mu_A$

On applique le lemme 8.1.1. avec $F(t) = \int h_2^2 1_{]s,t]} d\mu_A$

$\triangle$

Chapitre 9

Variation quadratique

9.1 Position du problème

On veut mettre en évidence la variation quadratique du processus :

$$\left(\int_0^t \Phi(h_1)_s d\Phi(h_2)_s\right)_{t\geq 0}.$$

Nous conservons la notation $Z_t := \int_0^t \Phi(h_1)_s d\Phi(h_2)_s$.

Plus précisément, étant donnée une suite de partitions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ de [0,t], nous cherchons la limite dans L^2 de la suite :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left|Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k}\right|^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Nous avons déjà établi que (en notant f_k pour $f_{t_k t_{k+1}}$)

$$\begin{aligned}
\left|Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k}\right|^2 &= \Phi_n^{\circ^4}\left(f_k^\circ \circ f_k^\circ\right) \\
&+ \left(\Phi^{\circ^3} \circ a_1^2\right)_n \left(f_k^\circ \circ f_k^\circ\right) \\
&+ \Phi_n^{\circ^2}\left(4 f_k^\circ \underset{1}{\sim} f_k^\circ + a_1^4\left(f_k^\circ \circ f_k^\circ\right)\right) \\
&+ \Phi_n\left(a_3^4\left(f_k^\circ \circ f_{kt}^\circ\right) + 4a_1^4\left(f_k^\circ \underset{1}{\sim} f_k^\circ\right) - 6a_1^4 \circ \pi_1\left(f_k^\circ \underset{1}{\sim} f_k^\circ\right)\right) \\
&+ 2 \parallel f_{st} \parallel_A^2 + a_4^4\left(f_k^\circ \circ f_k^\circ\right)
\end{aligned}$$

La linéarité et la continuité des opérateurs nous incite, avant d'identifier la variation quadratique, à étudier les deux limites de L^2 suivantes :

$$\begin{cases}
\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_k f_k^\circ \circ f_k^\circ \\
\lim\limits_{k\to\infty} 4a_1^4 \left(\sum\limits_k \left(f_k^\circ \underset{1}{\sim} f_k^\circ - 6\pi_1\left(f_k^\circ \underset{1}{\sim} f_k^\circ\right)\right)\right)
\end{cases}$$

Pour ce qui concerne la deuxième on se reportera au lemme 7.3.1.

9.2 Lemmes techniques

Lemme 9.2.1.

$$\lim_{k\to\infty}^{L^2} \sum_k f_k^\circ \circ f_k = 0$$

Démonstration

On a déjà vu que :

$$f_k^\circ \circ f_k^\circ = \frac{1}{4}\Big(h_1 \otimes h_2^k \otimes h_1 \otimes h_2^k 1_C \otimes 1_C + h_1 \otimes h_2^k \otimes h_2^k \otimes h_1 1_C \otimes 1_{\widetilde{C}} + h_2^k \otimes h_1 \otimes h_1 \otimes h_2^k 1_{\widetilde{C}} \otimes 1_C + h_2^k \otimes h_1 \otimes h_2^k \otimes h_1 1_{\widetilde{C}} \otimes 1_{\widetilde{C}}\Big)$$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_k f_k^\circ \circ f_k^\circ\right\|^2 &\leq \int \left(\sum_k \sum_{\sigma\in\Sigma_4} \Big(h_1 \otimes h_2^k \otimes h_1 \otimes h_2^k 1_C \otimes 1_C\Big)_\sigma\right)^2 d\mu^{\otimes 4} \\
&\leq (4!)^2 \sum_{\sigma\in\Sigma_4} \Bigg[\sum_k \int \Big(h_1 \otimes h_2^k \otimes h_1 \otimes h_2^k 1_C \otimes 1_C\Big)_\sigma^2 d\mu^{\otimes 4} \\
&\quad +2\sum_{k<j} \int \Big(h_1 \otimes h_2^k \otimes h_1 \otimes h_2^k 1_C \otimes 1_C\Big)_\sigma \Big(h_1 \otimes h_2^j \otimes h_1 \otimes h_2^j 1_C \otimes 1_C\Big)_\sigma d\mu^{\otimes 4}\Bigg] \\
&\qquad \text{(inégalité de convexité)} \\
&\leq (4!)^2 \sum_{\sigma\in\Sigma_4} \Bigg[\sum_k \int \Big[h_1^{\otimes 4}\Big]_\sigma d\mu^{\otimes 4} \int \Big[h_2^{\otimes 4}\Big(1_{]t_k,t_{k+1}]}\Big)^{\otimes 4}\Big]_\sigma d\mu^{\otimes 4} \\
&\quad +2\sum_{k<j} \int h_1^{\otimes 4}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}, y_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}) h_2^{\otimes 4}(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}, y_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}) \\
&\qquad 1_{C^{\times 4}}(x_\sigma, y_\sigma)\Big(1_{]t_k,t_{k+1}]\times]t_j,t_{j+1}]}(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}, y_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)})\Big)^{\otimes 2}\Bigg] \\
&\qquad d\mu^{\otimes 8}(x_\sigma, y_\sigma)
\end{aligned}$$

On sait que

$$\sum_k \Big(1_{]t_k,t_{k+1}]}\Big)^{\otimes 4} \xrightarrow{L^2\left(\mu^{\otimes 4}\right)} 1_{[x_{\sigma(2)}=x_{\sigma(4)}=y_{\sigma(2)}=y_{\sigma(4)}]}$$

$$\sum_{k<j} \Big(1_{]t_k,t_{k+1}]\times]t_j,t_{j+1}]}\Big)^{\otimes 2} \xrightarrow{L^2\left(\mu^{\otimes 4}\right)} 1_{[x_{\sigma(2)}<x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(2)}=y_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}=y_{\sigma(4)}]}$$

Pour établir le dernier point il suffit de remarquer :

– d'une part que $\begin{cases} 1_{[x=y]} = \lim_{k\to\infty}^{L^2} \sum_k 1_{]t_k,t_{k+1}]\times]t_k,t_{k+1}]}(x,y) \\ 1_{[x<y]} = \lim_{j\to\infty}^{L^2} \sum_{k<j} 1_{]t_k,t_{k+1}]\times]t_j,t_{j+1}]}(x,y) \end{cases}$

– et d'autre part que $\begin{cases} 1_{[x=y]}1_{[z=t]}1_{[x<z]}1_{[y<t]} \\ = \lim\limits_{k,j\to\infty}^{L^2}\Bigg[\sum\limits_k 1_{]t_k,t_{k+1}]^2}(x,y)\cdot\sum\limits_k 1_{]t_k,t_{k+1}]^2}(z,t)\cdot \\ \sum\limits_{k<j} 1_{]t_k,t_{k+1}]\times]t_j,t_{j+1}]}(x,z)\cdot\sum\limits_{k<j} 1_{]t_k,t_{k+1}]\times]t_j,t_{j+1}]}(y,t)\Bigg] \end{cases}$

– car $\begin{cases} \Bigg[\sum\limits_k 1]t_k,t_{k+1}]^2(x,y)\cdot\sum\limits_k 1]t_k,t_{k+1}]^2(z,t)\cdot \\ \sum\limits_{k<j} 1]t_k,t_{k+1}]\times]t_j,t_{j+1}](x,z)\cdot\sum\limits_{k<j} 1]t_k,t_{k+1}]\times]t_j,t_{j+1}](y,t)\Bigg] \\ = \sum\limits_{k<j} 1]t_k,t_{k+1}]^2\otimes 1_{]t_j,t_{j+1}]^2}(x,y,z,t) \end{cases}$

Finalement, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la mesure nulle de ces ensembles on a le résultat annoncé.

△

Lemme 9.2.2.

$$\left(\Phi\Big(h_1 1_{]0,s]}\Big)\right)^2 = \Phi^{\circ^2}\Big(\Big[h_1 1_{]0,s]}\Big]^{\circ^2}\Big)+\Phi\circ a_1^2\Big(\Big[h_1 1_{]0,s]}\Big]^{\circ^2}\Big)+\left\|h_1 1_{]0,s]}\right\|^2$$

<u>Démonstration</u>

On utilise la proposition 6.2.1. :

$$\Phi\Big(h_1 1_{]0,s]}\Big)^2 = \varphi^{(2)}\Big(h_1 1_{]0,s]}\otimes h_1 1_{]0,s]}\Big)+\varphi^{(1,1)}\Big(2h_1 1_{]0,s]}\otimes h_1 1_{]0,s]}\Big)+\left\|h_1 1_{]0,s]}\right\|^2$$

La proposition 6.3.2. nous permet alors de conclure

△

9.3 Variation Quadratique

Les lemmes et calculs précédents donnent le résultat final, à savoir :

Théorème 9.3.1.

$$\lim_{k\to\infty}^{L^2}\sum_k \left|Z_{t_{k+1}}-Z_{t_k}\right|^2 = \int_0^t h_2^2(s)\Phi\big(h_1 1_{[0,s]}\big)^2 d\mu(s)+\int_0^t h_2^2(s)\Phi\circ a_1^2\circ\pi_1\big(h_1 1_{]0,s]}\big)^{\circ^2} d\mu(s)$$

Remarques

- On peut écrire $\displaystyle\int_0^t h_2^2(s)\Phi\big(h_1 1_{[0,s]}\big)^2 d\mu(s) = \int_0^t h_2^2(s)\left(\int_0^s h_1(u)d\mu(u)\right)^2 d\mu(s)$
- Dans le cas où les variables $\big(X_k\big)_k$ suivent une loi normale on retrouve la variation quadratique gaussienne puisqu'alors $a_1^2 \circ \pi_1\big(h_1 1_{]0,s]}\big)^{\circ^2} = 0$

BIBLIOGRAPHIE

[1] SIMON : *The $\mathcal{P}(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theorie*

[2] SZEGO : *Orthogonal polynomial*, 1939

[3] WILF,Herbert S. : *GeneratingFunctionology*, Academic Press,London 1990.

[4] BOCCARA : *Analyse fonctionnelle* , Masson, Paris, 19xx

[5] BREZIS, Haïm : *Analyse fonctionnelle et applications*, Masson, Paris, 1983.

[6] DACUNHA-CASTEL&DUFFLO : *Probabilités et statistiques*, Ellipse, Paris, 1983.

[7] SCHRAFTETTER, Eric : *Quelques aspects des séries aléatoires définies par une mesure vectorielle, application aux EDPS*, Thèse de doctorat, Angers, 1998.

[8] SCHWARTZ, Laurent : *Théorie des distributions*, Herman, Paris, 1966.

[9] STROMBERG, K. R. : *Probability for Analysts*, Chapman&Hall, New-York, 1994

[10] MEYER, Paul André : *Quantum Probability for Probabi-*

lists, Springer, LNM 1533, 1995.

[11] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag , Volume 113 in the series "Graduate Texts in Mathematics", 1988.