



HAL
open science

Une généralisation de la notion d'intégrale itérée relativement à un processus aléatoire.

Ludovic Valet

► **To cite this version:**

Ludovic Valet. Une généralisation de la notion d'intégrale itérée relativement à un processus aléatoire..
2001. hal-00661837

HAL Id: hal-00661837

<https://hal.science/hal-00661837>

Preprint submitted on 10 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une généralisation de la notion d'intégrale itérée relativement à un processus aléatoire.

Ludovic Valet

Département de Mathématiques, Université d'Angers, France.

Summary

In this paper we generalize notions of iterated integral with regard to an unpredictable process. We establish a formula of integration by parts, the existence of a continuous modification and give an expression of the increasing process.

Palabras llaves

Décomposition polynômiale-Intégrale itérée-Intégration par parties-Martingale-Modification continue-Produit symétrique-Produit tensoriel-Variation quadratique.

AMS

60G12, 60H05, 60G50, 41A10, 33C45

1 Introduction

Notre objectif est d'étendre le travail effectué dans [Schraf] et [MFA&ES] en construisant puis étudiant une intégrale double.

Commençons par expliciter les notations de [Schraf] pour ce qui nous concerne ici.

- $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu)$ o μ est une mesure diffuse (pour le cas gaussien nous considérerons $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue). Nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne.
- $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de probabilités sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ telle que : $\int_{\mathbb{R}} x dP_n = 0, \int_{\mathbb{R}} x^2 dP_n = 1$ et $(\forall p > 0)(\exists K_p)(\forall n \in \mathbb{N})(\int_{\mathbb{R}} x^p dP_n \leq K_p)$. Nous prendrons $L^2(P) := L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \otimes_{n \in \mathbb{N}} B(\mathbb{R}), P)$ o $P = \otimes_{n \in \mathbb{N}} P_n$, noterons X_n les projecteurs canoniques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} , ($n \in \mathbb{N}$) et $H := \overline{[X_n, n \in \mathbb{N}]}$. Nous utiliserons la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\sigma(X_k, k \leq n))_{n \in \mathbb{N}}$

Le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathcal{H} &\rightarrow H \\ h = \sum_{k=0}^n \langle h, e_k \rangle e_k &\mapsto \phi(h) := \sum_{k=0}^n \langle h, e_k \rangle X_k \end{aligned}$$

va tre à la base de notre étude. Pour des détails de ses propriétés, on renvoie à [Schraf].

Nous noterons $\Phi(h)_s := \phi(h1_{]0,s]})$

Dans un premier temps, nous allons construire cette intégrale double. Pour ce faire il nous faudra, au préalable, étudier dans $L^2(P)$, les produits $\phi(h)\phi(g)$. Nous terminerons ce premier paragraphe par une généralisation du modèle dans le but d'obtenir le développement de ces produits dans une base de polynômes orthogonaux et de faciliter le travail des paragraphes suivants.

Les deuxième et troisième temps concernent l'étude du processus $(Z_t)_{t \geq 0}$:

$$Z_t := \int \Phi(h)_s d\Phi(g1_{]0,t]})_s = \int_0^t \left(\int_0^s h(u) d\phi(u) \right) g(v) d\phi(v)$$

que nous noterons plus simplement : $Z_t := \int_0^t \Phi(h)_s d\Phi(g)_s$.
(En cela nous ne suivrons pas exactement la chronologie de [Schraf], préférant commencer par l'établissement d'une formule d'intégration par partie et terminant par l'établissement de l'existence d'une modification continue et de la variation quadratique de ce processus. Cette démarche se justifie techniquement.)

2 Construction

Nous voulons construire une intégrale double $\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s$, et ainsi généraliser la construction faite dans [Schraf]. Cette construction s'appuie sur un développement adapté dans une base de polynômes des produits $\Phi(h)\Phi(g)$.

Cette intégrale sera prise dans le sens suivant : $\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s = \lim_{L^2} \sum_{k=0}^n \Phi(h)_{t_k^n} (\Phi(g)_{t_{k+1}^n} -$

$$\Phi(g)_{t_k^n}) = \lim_{L^2} \sum_{k=0}^n \phi(h1_{]0, t_k^n]}) \phi(g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]})$$

Où $0 = t_0^n < \dots < t_n^n = t$ est une partition de $[0, t]$.

Pour ce faire nous allons, dans la proposition 2.1., étudier les produits $\phi(h)\phi(g)$. Puis montrer l'existence d'une limite, proposition 2.2., ce qui assurera l'existence de cette intégrale comme un élément de L^2 .

Nous terminerons cette étude en remarquant qu'un changement de base de polynômes peut simplifier, dans certains cas, les calculs.

2.1 Produits

Pour un élément f de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, nous allons noter :

- $\left(\sum_{j=1}^N \langle f, e_j \otimes e_j \rangle (X_j^2 - 1) \right)_{N \geq 0} =: \left(\varphi_N^{(2)}(f) \right)_{N \geq 0}$
- $\left(\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=0}^{j-1} \langle f, e_j \otimes e_k \rangle X_k \right) X_j \right)_{N \geq 1} =: \left(\varphi_N^{(1,1)}(f) \right)_{N \geq 1}$

Nous allons utiliser la base de polynômes $\{(X_j^2 - 1)_{j \geq 0}; (X_j X_k)_{j \neq k}\}$. D'une part $\left(\varphi_N^{(2)}(f) \right)_{N \geq 0}$ et $\left(\varphi_N^{(1,1)}(f) \right)_{N \geq 1}$ sont des martingales relativement à la filtration $\mathcal{F}_j = \sigma(X_k; k \leq j)$.

On vérifie qu'il existe des limites ps et dans L^2 que nous noterons $\varphi^{(2)}(f)$ et $\varphi^{(1,1)}(f)$. D'autre part, des calculs simples découlant des propriétés de martingales, montrent que ces deux éléments sont orthogonaux dans L^2 . Le résultat suivant, concernant les produits $\phi(h)\phi(g)$, sera à la base de la construction de l'intégrale double. Il découle des propriétés mentionnées précédemment.

Proposition 2.1 *Pour des fonctions f et g de \mathcal{H} on a :*

1. $\phi(h)\phi(g) \in L^2$
2. $\phi(h)\phi(g) = \varphi^{(2)}(h \otimes g) + \varphi^{(1,1)}(h \otimes g + g \otimes h) + \langle h, g \rangle$ dans L^2

Remarque

On détecte dans le point 2) le rôle particulier des fonctions symétriques, qu'on retrouve dans [PAM] pour l'intégrale d'ordre 2.

2.2 Limites

Nous allons dans ce paragraphe, déterminer la limite d'expressions du type :

$$\sum_{k=0}^n \phi\left(h1_{]0, t_k^n]}\right) \phi\left(g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}\right).$$

La proposition qui suit découle des propriétés d'orthogonalité, des propriétés de martingales et du théorème de convergence dominée.

Pour expliciter la limite nous aurons besoin des deux indicatrices suivantes :

$$1_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < y \leq t\}$$

et

$$1_{\bar{C}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < x \leq t\}.$$

Proposition 2.2 *Si nous prenons une suite de partitions de $[0, t]$:*

$$0 = t_0^n < \dots < t_{k_n}^n = t$$

dont le pas tend vers zéro, alors :

$$\sum_{k=0}^{k_n} \phi\left(h1_{]0, t_k^n]}\right) \phi\left(g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}\right) \xrightarrow{L^2} \varphi^{(1,1)}(h \otimes g1_C + g \otimes h1_{\bar{C}}) + \varphi^{(2)}(h \otimes g1_C).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{k_n} \phi\left(h1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}\right) \phi\left(g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}\right) = \\ & \sum_{k=0}^{k_n} \left[\varphi^{(1,1)}\left(h \otimes g1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} + g \otimes h1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \otimes 1_{]0, t_k^n]}\right) \right. \\ & \quad \left. + \varphi^{(2)}\left(h \otimes g1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}\right) + \langle h1_{]0, t_k^n]}, g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \rangle \right]. \end{aligned}$$

On remarque que $\langle h1_{]0, t_k^n]}, g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \rangle = 0$.

On va maintenant étudier les termes :

$$\begin{cases} N_1^n & := \left\| \sum_{k=0}^{k_n} \varphi^{(1,1)}\left(h \otimes g1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}\right) - \varphi^{(1,1)}\left(h \otimes g1_C\right) \right\|_{L^2(\nu)} \\ N_2^n & := \left\| \sum_{k=0}^{k_n} \varphi^{(1,1)}\left(g \otimes h1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \otimes 1_{]0, t_k^n]}\right) - \varphi^{(1,1)}\left(g \otimes h1_{\bar{C}}\right) \right\|_{L^2(\nu)} \\ N_3^n & := \left\| \sum_{k=0}^{k_n} \varphi^{(2)}\left(h \otimes g1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}\right) - \varphi^{(2)}\left(h \otimes g1_C\right) \right\|_{L^2(\nu)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_1^n &= \left\| \sum_{k=0}^{k_n} \varphi^{(1,1)}\left(h \otimes g1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} - h \otimes g1_C\right) \right\|_{L^2(\nu)} \\ &\leq \left\| h \otimes g \left(\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} - 1_C \right) \right\|_{L^2(\mu^{\otimes 2})} \end{aligned}$$

Nous avons :

- $\left(h \otimes g\right)^2 \left(\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} - 1_C \right)^2 \leq 4 \left(h \otimes g\right)^2 \in L^2(\mu^{\otimes 2})$
- $\left(\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} - 1_C \right)^2 \xrightarrow{\text{ps}} 0$

$$\implies \left(h \otimes g\right)^2 \left(\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} - 1_C \right)^2 \xrightarrow{\text{ps}} 0$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\left\| h \otimes g \left(\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} - 1_C \right) \right\|_{L^2(\mu^{\otimes 2})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'o

$$\sum_{k=0}^{k_n} \varphi^{(1,1)} \left(h \otimes g 1_{]0, t_k^n]} \otimes 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\nu)} \varphi^{(1,1)} \left(h \otimes g 1_C \right)$$

Les termes N_2^n et N_3^n se traitent de la mme faon.

△ Cette proposition nous permet de définir :

Définition 2.1

$$\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s := \varphi^{(1,1)}(h \otimes g 1_C + g \otimes h 1_{\bar{C}}) + \varphi^{(2)}(h \otimes g 1_C)$$

Les sections qui suivent sont consacrées à l'étude de cet objet. Avant de passer à cette étude nous allons observer les conséquences d'un changement de base pour le développement des produits.

2.3 Changement de base

Nous allons développer les séries rencontrées précédemment dans la base des polynômes orthogonaux $(P_k)_k$ associés aux variables aléatoires $(X_j)_j$. Cette écriture nous permettra, en particulier, de mettre en évidence les propriétés concernant les fonctions symétriques.

Nous allons, pour ce faire, généraliser le modèle rappelé en introduction. Nous le ferons à un ordre quelconque tout d'abord, cela nous servira dans la suite, puis à l'ordre deux, ce qui nous intéresse plus particulièrement dans ce paragraphe.

Dans l'étude faite dans [PAM], les polynômes orthogonaux qui apparaissent naturellement sont les polynômes de Hermite (cas gaussien). Nous allons, pour retrouver les propriétés du cas gaussien, prendre la différence des coefficients des polynômes issus des $(X_j)_j$ (que nous noterons $\gamma..$) et des polynômes de Hermite (que nous noterons $\Gamma..$). Pour un complément sur les polynômes orthogonaux on pourra consulter [Szego].

La construction de notre modèle requiert l'introduction de deux opérateurs :

$$\text{Fixons } \begin{cases} \bullet n \in \mathbb{N}^* \\ \bullet (r, k) \in \{1, \dots, n\}^2 \\ \bullet (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r \text{ tels que } \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n \\ \bullet (j_1, \dots, j_r) \in \mathbb{N}^r \text{ tels que } 1 \leq j_1 < \dots < j_r \end{cases}$$

On note $\mathcal{H}^{\circ n}$ le produit tensoriel symétrique et on définit les deux opérateurs qui suivent :

$$1. \Phi^{\circ n} : \begin{cases} \mathcal{H}^{\circ n} & \rightarrow L^2(P) \\ \bigcirc_{i=1}^r e_{j_i}^{\circ \alpha_i} & \mapsto P^{\alpha_1}(X_{j_1}) \cdot \dots \cdot P^{\alpha_r}(X_{j_r}) \end{cases}$$

O les $(P^{\alpha_i})_i$ sont les polynômes associés à la probabilité P_k .

$$2. a_k^n : \begin{cases} \mathcal{H}^{\circ n} & \rightarrow H^{\circ n-k} \\ \bigcirc_{i=1}^r e_{j_i}^{\circ \alpha_i} & \mapsto \sum_{\substack{(k_1 + \dots + k_r = k) \\ k_i \geq 0}} \prod_{(k_i \neq 0)} \left[(\gamma_{\alpha_i, \alpha_i - k_i} - \Gamma_{\alpha_i, \alpha_i - k_i}) 1_{[\alpha_i \geq k_i]} \right] \bigcirc_{p=1}^r e_{j_p}^{\alpha_p - k_p} \end{cases}$$

On peut étendre ces deux opérateurs par linéarité et continuité à $\mathcal{H}^{\circ n}$.

Ceux-ci nous permettent de donner l'écriture suivante de notre intégrale double :

$$\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s = \left(\Phi^{\circ 2} + \Phi \circ a_1^2 \right) \left([h \otimes g 1_C]^\circ \right)$$

Cette écriture nous servira dans l'identification que l'on fera pour étudier l'existence d'une modification continue et le calcul de la variation quadratique.

Dans le cas gaussien on retrouve la décomposition de [PAM] :

$$\int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s = \Phi^{\circ 2}([h \otimes g 1_C]^{\circ 2})$$

Remarques

- En passant sur l'espace $H^{\circ n}$ nous n'avons plus une base normale. Cela va nous obliger à transformer le produit scalaire pour conserver une isométrie, ce que nous faisons ci-après.
- On peut également remarquer que pour $n=1$, $\Phi^{\circ n}$ n'est autre que Φ .
- Nous prendrons le produit scalaire usuel sur $L^2(\mu)$ ainsi que sur $\mathcal{H}^{\otimes n}$.
- On va considérer le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{H}^{\circ n}}$ sur $\mathcal{H}^{\circ n}$ défini par :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\mathcal{H}^{\circ n}} := n! \langle A \cdot, A \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{O } A : \quad \mathcal{H}^{\circ n} &\rightarrow \mathcal{H}^{\circ n} \\ \bigcirc_{i=1}^r e_{j_i}^{\alpha_i} &\mapsto \sum_{\alpha} A_{\substack{j_1, \dots, j_r \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r}} \bigcirc_{i=1}^r e_{j_i}^{\alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^r E |P_{\alpha_i}(X_{j_i})|^2 \end{aligned}$$

avec $A_{\substack{j_1, \dots, j_r \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r}} := \frac{\prod_{i=1}^r E |P_{\alpha_i}(X_{j_i})|^2}{\prod_{i=1}^r \alpha_i!}$.

Cet opérateur apparat de façon naturelle dans la recherche d'une isométrie.

Notations

- Posons

$$\begin{aligned} - C_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r}} &:= \prod_{k_i \neq 0} [(\gamma_{\alpha_i, \alpha_i - k_i} - \Gamma_{\alpha_i, \alpha_i - k_i}) 1_{[\alpha_i \geq k_i]}] \\ - C_{(k, n)} &:= \sup_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n}} C_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_r \\ k_1, \dots, k_r}} \\ - A_{(k, n)} &:= \sup_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r = n}} A_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \alpha_1, \dots, \alpha_r}} \end{aligned}$$

- On prend le produit scalaire usuel sur $\mathcal{H}^{\circ n}$, à savoir :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{\circ n}} := (n!)^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$$

- Les normes des opérateurs sont :

$$\begin{aligned} - \|T\|_A &:= \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{\|T(f)\|_{L^2(\mu)}}{\|f\|_A} \\ - \|T_k\|_{\mathcal{H}^{\circ n}} &:= \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{\|T_k(f)\|_{\mathcal{H}^{\circ n-k}}}{\|f\|_{\mathcal{H}^{\circ n-k}}} \end{aligned}$$

3 Intégration par parties

On cherche à établir une formule du type Itô pour les produits $\phi(h)\phi(g)$. Celle-ci découle naturellement de l'étude des produits faite en 2.1 et de la définition de l'intégrale faite en 2.2.

Théorème 3.1 Soient $h, g \in \mathcal{H}$, on a :

$$\Phi(h)\Phi(g) = \int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s + \int \Phi(g)_s d\Phi(h)_s + \langle h, g \rangle$$

Démonstration

Posons $\Delta_{k,k+1}\Phi(h) := \Phi(h)_{t_{k+1}} - \Phi(h)_{t_k}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k_n} \Delta_{j,j+1}\Phi(h) \sum_{k=0}^{k_n} \Delta_{k,k+1}\Phi(g) &= \sum_{j=0}^{k_n} \Phi\left(h1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}\right) \sum_{k=0}^{k_n} \Phi\left(g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n[}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k_n} \Phi\left(h1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}\right) \Phi\left(g1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{k=0}^{j-1} \Phi\left(g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n[}\right) \Phi\left(h1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{j=0}^{k-1} \Phi\left(h1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}\right) \Phi\left(g1_{]t_k^n, t_{k+1}^n[}\right). \end{aligned}$$

Appelons S_i^n ($i \in \{1, 2, 3\}$) le $i^{\text{ième}}$ terme du membre de droite.

(a) On a :

$$\begin{aligned} S_1^n &= \left(\Phi^{\circ 2} + \Phi \circ a_1^2\right) \left(h \otimes g \sum_{j=0}^{k_n} 1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[} \otimes 1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}\right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k_n} \langle h1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}, g1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[} \rangle. \end{aligned}$$

- D'une part : $\sum_{j=0}^{k_n} 1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[} \otimes 1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[} \xrightarrow{L^2(\mu^{\otimes 2})} 1_{\Delta}$
et $\langle h \otimes g 1_{\Delta}, e_{k_1} \otimes e_{k_2} \rangle = 0$.
- D'autre part $\sum_{j=0}^{k_n} \langle h1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[}, g1_{]t_j^n, t_{j+1}^n[} \rangle = \langle h, g \rangle$.

Donc $S_1^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\nu)} \langle h, g \rangle$

(b)

$$S_2^n = \sum_{j=0}^{k_n} \phi\left(g1_{]0, t_j[}\right) \phi\left(h1_{]t_j, t_{j+1}[}\right)$$

En utilisant la propriété 2.2. on a :

$$S_2^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\nu)} \left(\Phi^{\circ 2} + \Phi \circ a_1^2\right) (g \otimes h1_C)^{\circ 2} =: \int \Phi(g)_s d\Phi(h)_s.$$

(c)

$$S_3^n = \sum_{k=0}^{k_n} \phi\left(h1_{]0, t_k[}\right) \phi\left(g1_{]t_k, t_{k+1}[}\right)$$

de la mme faon on a :

$$S_3^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\nu)} \int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s$$

△

Toujours par les mmes procédés et en écrivant astucieusement le développement d'une fonction dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, on peut calculer la norme de l'intégrale :

$$\left\| \int \Phi(h)_s d\Phi(g)_s \right\|_{L^2(\nu)}^2 = \|h \otimes g 1_C\|_{L^2(\nu)}^2 + \sum_{j \geq 0} \langle h \otimes g, e_j \otimes e_j \rangle^2 (EX_j^4 - 3).$$

Écriture qui fait immédiatement apparaître le résultat pour l'intégrale de Itô dans le cas gaussien.

4 Résultats préliminaires

Pour étudier l'existence d'une modification continue et déterminer la variation quadratique nous aurons besoin d'un certain nombre d'identifications. C'est le propos de ce paragraphe.

Plus précisément, nous voulons étudier le processus :

$$Z_t = \int_0^t \Phi(h)_s d\Phi(g)_s = (\Phi^{\circ 2} + \Phi \circ a_1^2)(h_1 \otimes (h_2 1_{]0,t]} 1_C).$$

Pour ce faire nous aurons besoin de renseignements sur l'expression :

$$|Z_t - Z_s|^2.$$

Les résultats qui suivent concernent l'étude de ce terme.

4.1 Identification

Le développement en séries de $|Z_t - Z_s|^2$ est assez difficilement exploitable, c'est pourquoi nous allons utiliser les opérateurs introduits précédemment et l'opérateur qui suit (cf [PAM]) pour obtenir une écriture de ce produit plus exploitable :

$$(f \underset{1}{\sim} f)(s_1, s_2) := \int Af(s_1, s_2) Af(s_3, s_2) d\mu(s_2)$$

Nous noterons π_1 la projection orthogonale sur $\{e_j \circ e_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Dans un premier temps on exprime $|Z_t - Z_s|^2$ dans la base des polynômes orthogonaux.

Puis on utilise les expressions de $f \circ f$, $a_k^n(f \circ f)$, $f \underset{1}{\sim} f$ et $a_k^n(f \underset{1}{\sim} f)$ dans la base $(e_j \circ e_k)_{j,k}$ de $\mathcal{H} \circ \mathcal{H}$ pour identifier, ordre par ordre, chacun des termes du développement précédemment obtenu. On obtient la proposition suivante :

Proposition 4.1

$[(\Phi^{\circ 2} + \Phi \circ a_1^2)(f)]^2$	
$= \Phi^{\circ 4}(f \circ f)$	<i>(ordre 4)</i>
$+ \Phi^{\circ 3}(a_1^4(f \circ f))$	<i>(ordre 3)</i>
$+ \Phi^{\circ 2}(4f \underset{1}{\sim} f + a_2^4(f \circ f))$	<i>(ordre 2)</i>
$+ \Phi(a_3^4(f \circ f) + 4a_1^4(f \underset{1}{\sim} f) - 6(a_1^4 \circ \pi_1)(f \underset{1}{\sim} f))$	<i>(ordre 1)</i>
$+ 2 \ f\ ^2 + a_4^4(f \circ f)$	<i>(ordre 0)</i>

5 Modification continue

Nous allons utiliser une généralisation du théorème de Kolmogorov-Centsov proposée dans [Schrif], ainsi que l'identification établie précédemment.

Lemme 5.1

$$E(|Z_t^n - Z_s^n|^2)^2 \leq \left(\frac{7}{2}C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} + 2\right) \|h_1\|_A^4 \|h_2 1_{]s,t]}\|_A^4$$

Pour la démonstration, nous procédons ordre par ordre. Les propriétés d'isométrie de $\Phi^{\circ n}$ et de continuité de a_n^k et de π_1 nous fournissent, en utilisant le développement de $(h_1 \otimes h_2 1_{]s,t]} 1_C)^{\circ 2}$ dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, des majorations rapides des termes :

$$K \|h_1\|_A^4 \|h_2 1_{]s,t]}\|_A^4$$

o K est une constante.

Ce lemme nous assure que nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Kolmogorov-Centsov généralisé et l'on a le résultat suivant :

Théorème 5.1 *Le processus $\left(\int_0^t \Phi(h_1)d\Phi(h_2)\right)_t$ admet une modification continue.*

6 Variation quadratique

On veut montrer l'existence de la variation quadratique du processus :

$$\left(\int_0^t \Phi(h_1)d\Phi(h_2)\right)_{t \geq 0}.$$

Nous conservons la notation $Z_t := \int_0^t \Phi(h_1)d\Phi(h_2)$.

Plus précisément, étant donnée une suite de partitions $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = t$ de $[0, t]$, nous cherchons la limite dans L^2 de la suite :

$$\left(\sum_{k=0}^{k_n} |Z_{t_{k+1}^n} - Z_{t_k^n}|^2\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Nous avons déjà établi que (en notant $f_{k(n)}^\circ$ pour la symétrisée de $f_{t_k^n t_{k+1}^n}$)

$$\begin{aligned} |Z_{t_{k+1}^n} - Z_{t_k^n}|^2 &= \Phi_n^{\circ 4}(f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ) \\ &+ \left(\Phi_n^{\circ 3} \circ a_1^2\right)_n(f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ) \\ &+ \Phi_n^{\circ 2}\left(4f_{k(n)}^\circ \underset{1}{\sim} f_{k(n)}^\circ + a_1^4(f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ)\right) \\ &+ \Phi_n\left(a_3^4(f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ) + 4a_1^4(f_{k(n)}^\circ \underset{1}{\sim} f_{k(n)}^\circ) - 6a_1^4 \circ \pi_1(f_{k(n)}^\circ \underset{1}{\sim} f_{k(n)}^\circ)\right) \\ &+ 2\|f_{k(n)}^\circ\|_A^2 + a_4^4(f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ) \end{aligned}$$

La linéarité et la continuité des opérateurs nous incite, avant d'identifier la variation quadratique, à étudier, dans L^2 , les deux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n} f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 4a_1^4 \left(\sum_{k=0}^{k_n} \left(f_{k(n)}^\circ \underset{1}{\sim} f_{k(n)}^\circ - 6\pi_1(f_{k(n)}^\circ \underset{1}{\sim} f_{k(n)}^\circ) \right) \right) \end{array} \right\}$$

Lemme 6.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n} f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ = 0$$

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ &= \frac{1}{4} \left(h_1 \otimes h_2^{k(n)} \otimes h_1 \otimes h_2^{k(n)} 1_C \otimes 1_C + h_1 \otimes h_2^{k(n)} \otimes h_2^{k(n)} \otimes h_1 1_C \otimes 1_{\bar{C}} + \right. \\ &\quad \left. h_2^{k(n)} \otimes h_1 \otimes h_1 \otimes h_2^{k(n)} 1_{\bar{C}} \otimes 1_C + h_2^{k(n)} \otimes h_1 \otimes h_2^{k(n)} \otimes h_1 1_{\bar{C}} \otimes 1_{\bar{C}} \right) \\ \left\| \sum_{k=0}^{k_n} f_{k(n)}^\circ \circ f_{k(n)}^\circ \right\|^2 &\leq \int \left(\sum_{k=0}^{k_n} \sum_{\sigma \in \Sigma_4} \left(h_1 \otimes h_2^{k(n)} \otimes h_1 \otimes h_2^{k(n)} 1_C \otimes 1_C \right)_\sigma \right)^2 d\mu^{\otimes 4} \\ &\leq (4!)^2 \sum_{\sigma \in \Sigma_4} \int \left(\sum_{k=0}^{k_n} \int \left(h_1 \otimes h_2^{k(n)} \otimes h_1 \otimes h_2^{k(n)} 1_C \otimes 1_C \right)_\sigma^2 d\mu^{\otimes 4} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k < j} \int \left(h_1 \otimes h_2^{k(n)} \otimes h_1 \otimes h_2^{k(n)} 1_C \otimes 1_C \right)_\sigma \left(h_1 \otimes h_2^{j(n)} \otimes h_1 \otimes h_2^{j(n)} 1_C \otimes 1_C \right)_\sigma d\mu^{\otimes 4} \right) \\ &\quad \text{(inégalité de convexité)} \\ &\leq (4!)^2 \sum_{\sigma \in \Sigma_4} \int \left[\sum_{k=0}^{k_n} \int \left[h_1^{\otimes 4} \right]_\sigma d\mu^{\otimes 4} \int \left[h_2^{\otimes 4} \left(1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \right)^{\otimes 4} \right]_\sigma d\mu^{\otimes 4} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k < j} \int h_1^{\otimes 4} (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}, y_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}) h_2^{\otimes 4} (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}, y_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}) \right. \\ &\quad \left. \cdot 1_{C \times 4} (x_\sigma, y_\sigma) \left(1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_j^n, t_{j+1}^n]} (x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}, y_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}) \right)^{\otimes 2} \right] d\mu^{\otimes 8} (x_\sigma, y_\sigma) \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k_n} \left(1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \right)^{\otimes 4} &\xrightarrow{L^2(\mu^{\otimes 4})} 1_{[x_{\sigma(2)} = x_{\sigma(4)} = y_{\sigma(2)} = y_{\sigma(4)}]} \\ \sum_{k < j} \left(1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_j^n, t_{j+1}^n]} \right)^{\otimes 2} &\xrightarrow{L^2(\mu^{\otimes 4})} 1_{[x_{\sigma(2)} < x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(2)} = y_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)} = y_{\sigma(4)}]} \end{aligned}$$

Pour établir le dernier point il suffit de remarquer :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ d'une part que } &\begin{cases} 1_{[x=y]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_k^n, t_{k+1}^n]}(x, y) \\ 1_{[x < y]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k < j} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_j^n, t_{j+1}^n]}(x, y) \end{cases} \\ \bullet \text{ et d'autre part que } &\begin{cases} 1_{[x=y]} 1_{[z=t]} 1_{[x < z]} 1_{[y < t]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}^2(x, y) \cdot \sum_{k=0}^{k_n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}^2(z, t) \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{k < j} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_j^n, t_{j+1}^n]}(x, z) \cdot \sum_{k < j} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_j^n, t_{j+1}^n]}(y, t) \right] \\ \bullet \text{ car } &\begin{cases} \left[\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}^2(x, y) \cdot \sum_{k=0}^{k_n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}^2(z, t) \cdot \right. \\ \left. \sum_{k < j} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_j^n, t_{j+1}^n]}(x, z) \cdot \sum_{k < j} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]} \times]t_j^n, t_{j+1}^n]}(y, t) \right] \\ &= \sum_{k < j} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}^2 \otimes 1_{]t_j^n, t_{j+1}^n]}^2(x, y, z, t) \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et la mesure nulle de ces ensembles on a le résultat annoncé.

△

Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ et $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = t$ une suite de partitions de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0.

Nous noterons $f_{k(n)} := h_1 \otimes (h_2 1_{]0, t_k^n]}) \cdot 1_C$

Lemme 6.2 Pour $\Psi = \Phi^{\circ 2}$ ou $\Psi = \Phi \circ a_1^4$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[4\Psi \left(\sum_{k=0}^{k_n} f_{k(n)} \underset{1}{\sim} f_{k(n)} \right) - \int_0^t h_2^2 \Psi \left([h_1 1_{]0, \cdot}] \right)^{\circ 2} d\mu \right]^2 = 0$$

Démonstration

Nous regarderons le cas $\Psi = \Phi^{\circ 2}$. Nous Introduisons quelques notations :

- $S_n := \left[4\Phi^{\circ 2} \left(\sum_{k=0}^{k_n} f_{k(n)} \underset{1}{\sim} f_{k(n)} \right) - \int_0^t h_2^2 \Phi^{\circ 2} \left([h_1 1_{]0, \cdot}] \right)^{\circ 2} d\mu \right]^2$
 - $h^{k(n)} := h 1_{]0, t_k^n]}$
- $$4f_{k(n)} \underset{1}{\sim} f_{k(n)}(s_1, s_3) =$$
- $$\int h_1^{\otimes 2}(s_1, s_2) h_2^{k(n)\otimes 2}(s_2, s_3) 1_C(s_1, s_2) 1_C(s_2, s_3) d\mu(s_2) \quad (:= I_1^{k(n)}(s_1, s_2))$$
- $$+ \int h_1^{\otimes 2}(s_1, s_3) h_2^{k(n)\otimes 2}(s_2, s_2) 1_C(s_1, s_2) 1_C(s_3, s_2) d\mu(s_2) \quad (:= I_2^{k(n)}(s_1, s_2))$$
- $$+ \int h_1^{\otimes 2}(s_2, s_2) h_2^{k(n)\otimes 2}(s_1, s_3) 1_C(s_2, s_1) 1_C(s_2, s_3) d\mu(s_2) \quad (:= I_3^{k(n)}(s_1, s_2))$$
- $$+ \int h_1^{\otimes 2}(s_2, s_3) h_2^{k(n)\otimes 2}(s_1, s_2) 1_C(s_2, s_1) 1_C(s_3, s_2) d\mu(s_2) \quad (:= I_4^{k(n)}(s_1, s_2))$$

L'inégalité de convexité nous permet d'écrire :

$$S_n \leq 4E \left[\Phi^{\circ 2} \sum_{k=0}^{k_n} I_1^{k(n)} \right]^2 + 4E \left[\Phi^{\circ 2} \sum_{k=0}^{k_n} I_2^{k(n)} - \int_0^t h_2^2 \Phi^{\circ 2} \left([h_1 1_{]0, \cdot}] \right)^{\circ 2} d\mu \right]^2$$

$$+ 4E \left[\Phi^{\circ 2} \sum_{k=0}^{k_n} I_3^{k(n)} \right]^2 + 4E \left[\Phi^{\circ 2} \sum_{k=0}^{k_n} I_4^{k(n)} \right]^2$$

Etape 1 : Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\Phi^{\circ 2} \sum_{k=0}^{k_n} I_1^{k(n)} \right]^2$

$$E \Phi^{\circ 2} (I_1^{k(n)})^2 = \| I_1^{k(n)} \|^2_{L^2(\mu^{\otimes 2})} \quad (\text{isométrie})$$

$$= \int \left(\sum_{k=0}^{k_n} \int h_1^{\otimes 2}(s_1, s_2) h_2^{k(n)\otimes 2}(s_2, s_3) 1_C(s_1, s_2) 1_C(s_2, s_3) d\mu(s_2) \right)^2 d\mu^{\otimes 2}(s_1, s_3)$$

$$= \int \left[\sum_{k=0}^{k_n} \int h_1^{\otimes 4}(s_1, s_2, s_1, t_2) h_2^{k(n)\otimes 4}(s_2, s_3, t_2, s_3) 1_{C^4}(s_1, s_2, s_2, s_3, s_1, t_2, t_2, s_3) d\mu^{\otimes 2}(s_2, t_2) \right.$$

$$+ 2 \sum_{k(n) < j(n)} \int h_1^{\otimes 4}(s_1, s_2, s_1, t_2) h_2^{k(n)\otimes 2}(s_2, s_3) h_2^{j(n)\otimes 2}(t_2, s_3)$$

$$\left. 1_{C^4}(s_1, s_2, s_2, s_3, s_1, t_2, t_2, s_3) d\mu^{\otimes 2}(s_2, t_2) \right] d\mu^{\otimes 2}(s_1, s_3)$$

- D'une part $\sum_{k=0}^{k_n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}^4(s_2, s_3, t_2, s_3) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\mu^{\otimes 4})} 1_{[s_2=s_3=t_2]}$
- D'autre part : $\sum_{k(n) < j(n)} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}^2 \times]t_j^n, t_{j+1}^n]}^2(s_2, s_3, t_2, s_3) = 0$
car $(k(n) < j(n)) \Rightarrow (]t_k^n, t_{k+1}^n] \cap]t_j^n, t_{j+1}^n]) = \emptyset$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\Phi^{\circ 2} \sum_{k=0}^{k_n} I_1^{k(n)} \right]^2 = \int h_1^{\otimes 2}(s_1, s_2) h_2^{k(n)\otimes 2}(s_2, s_3) 1_{[s_2=s_3=t_2]} d\mu^{\otimes 4}(s_1, s_2, t_2, s_3) = 0$$

Etape 2 Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\Phi^{\circ^2} \sum_{k=0}^{k_n} I_i^{k(n)} \right]^2$ pour $i \in \{3, 4\}$

On procède de la mme faon et on a également :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\Phi^{\circ^2} \sum_{k=0}^{k_n} I_3^{k(n)} \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\Phi^{\circ^2} \sum_{k=0}^{k_n} I_4^{k(n)} \right]^2 = 0$$

Etape 3 : calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\Phi^{\circ^2} \sum_{k=0}^{k_n} I_2^{k(n)} - \int_0^t h_2^2 \Phi^{\circ^2} [(h_1 1_{]0, \cdot]}]^{\circ^2} d\mu \right]^2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k_n} I_2^{k(n)}(s_2, s_3) &= \sum_{k=0}^{k_n} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} h_2^2(s_2) h_1^{\otimes^2}(s_1, s_3) 1_C(s_2, s_3) 1_{\bar{C}}(s_2, s_3) d\mu(s_2) \\ &= \int_0^t h_2^2(s_2) h_1^{\otimes^2}(s_1, s_3) 1_C(s_2, s_3) 1_{\bar{C}}(s_2, s_3) d\mu(s_2) \\ &= \int_0^t h_2^2(s_2) \left(h_1 1_{]0, s_2]} \otimes h_1 1_{]0, s_2]} \right) (s_1, s_3) d\mu(s_2) \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$\Phi^{\circ^2} \left(\int_0^t h_2^2(s_2) h_1 1_{]0, s_2]} \otimes h_1 1_{]0, s_2]} d\mu(s_2) \right) \stackrel{L^2}{=} \int_0^t h_2^2(s_2) \Phi^{\circ^2} \left((h_1 1_{]0, s_2]} \right)^{\circ^2} d\mu(s_2)$$

Pour cela on va décomposer 1_C en produit tensoriel :

$$1_C(s_1, s_2) \stackrel{L^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n} 1_{]0, t_{k-1}^n] \times]t_k^n, t_{k+1}^n]}(s_1, s_2)$$

$$1_{\bar{C}}(s_3, s_2) \stackrel{L^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n] \times]0, t_{k-1}^n]}(s_3, s_2)$$

Nous allons noter $C_1^{k(n)} := 1_{]0, t_{k-1}^n]}$ et $C_2^{k(n)} := 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}$

$$\begin{aligned} &\int_0^t h_2^2(s_2) h_1^{\otimes^2}(s_1, s_3) 1_C(s_2, s_3) 1_{\bar{C}}(s_2, s_3) d\mu(s_2) \\ &= h_1^{\otimes^2} \int_0^t h_2^2(s_2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n} \sum_{l=0}^{k_n} 1_{C_1^{k(n)} \times C_2^{l(n)}}(\cdot, s_2) 1_{C_1^{l(n)} \times C_2^{k(n)}}(s_2, \cdot) d\mu(s_2) \\ &\stackrel{\substack{\text{cvg} \\ \text{dominée}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k(n), l(n)} h_1^{\otimes^2} 1_{C_1^{k(n)}} 1_{C_1^{l(n)}} \int_0^t h_2^2(s_2) 1_{C_2^{k(n)}}(s_2) 1_{C_2^{l(n)}}(s_2) d\mu(s_2) \\ &= \Phi^{\circ^2} \left(\int_0^t h_2^2(s_2) h_1^{\otimes^2} 1_C(\cdot, s_2) 1_{\bar{C}}(s_2, \cdot) d\mu(s_2) \right) \\ &= \Phi^{\circ^2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k(n), l(n)} h_1^{\otimes^2} 1_{C_1^{k(n)}} 1_{C_1^{l(n)}} \int_0^t h_2^2(s_2) 1_{C_2^{k(n)}}(s_2) 1_{C_2^{l(n)}}(s_2) d\mu(s_2) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{\circ^2} \left(\sum_{k(n), l(n)} h_1^{\otimes^2} 1_{C_1^{k(n)}} 1_{C_1^{l(n)}} \int_0^t h_2^2(s_2) 1_{C_2^{k(n)}}(s_2) 1_{C_2^{l(n)}}(s_2) d\mu(s_2) \right) \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} t \text{ fixé} \\ \text{cont. de } \Phi^{\circ^2} \\ (\text{Prop. 2.1.4.}) \end{array} \right. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{\circ^2} \left(\sum_{k(n), l(n)} h_1^{\otimes^2} 1_{C_1^{k(n)}} 1_{C_1^{l(n)}} \right) \int_0^t h_2^2(s_2) 1_{C_2^{k(n)}}(s_2) 1_{C_2^{l(n)}}(s_2) d\mu(s_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \Phi^{\circ^2} \left(\sum_{k(n), l(n)} h_1^{\otimes^2} 1_{C_1^{k(n)}} 1_{C_1^{l(n)}} \right) h_2^2(s_2) 1_{C_2^{k(n)}}(s_2) 1_{C_2^{l(n)}}(s_2) d\mu(s_2) \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$E \left[\sum_{k=0}^{k_n} \Phi^{\circ^2} (I_2^{k(n)}) - \int_0^t h_2^2(s_2) \Phi^{\circ^2} [(h_1 1_{]0, s_2]}]^{\circ^2} d\mu(s_2) \right]^2$$

$$= E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^t h_2^2(s_2) \left(\Phi^{\circ 2} \left(h_1 \otimes h_1 \sum_{(k(n), l(n))} 1_{C_1^{k(n)} \times C_2^{k(n)}}(\cdot, s_2) 1_{C_2^{l(n)} \times C_1^{l(n)}}(s_2, \cdot) - \Phi^{\circ 2} \left(h_1 \otimes h_1 1_C(\cdot, s_2) 1_{\bar{C}}(s_2, \cdot) \right) \right) d\mu(s_2) \right] \right]^2$$

Dans la suite on va noter :

- $Z_{k(n)}(\cdot, \cdot, s_2) := \Phi^{\circ 2} \left(h_1 \otimes h_1 \sum_{(k(n), l(n))} 1_{C_1^{k(n)} \times C_2^{k(n)}}(\cdot, s_2) 1_{C_2^{l(n)} \times C_1^{l(n)}}(s_2, \cdot) \right)$
- $Z(\cdot, \cdot, s_2) := \Phi^{\circ 2} \left(h_1 \otimes h_1 1_C(\cdot, s_2) 1_{\bar{C}}(s_2, \cdot) \right)$
- $Y_{k(n)} := |Z_{k(n)} - Z|$

$$\begin{aligned} & E \left[\left[\int_0^t h_2^2(s_2) \left(\Phi^{\circ 2} \left(h_1 \otimes h_1 \sum_{(k(n), l(n))} 1_{C_1^{k(n)} \times C_2^{k(n)}}(\cdot, s_2) 1_{C_2^{l(n)} \times C_1^{l(n)}}(s_2, \cdot) - \Phi^{\circ 2} \left(h_1 \otimes h_1 1_C(\cdot, s_2) 1_{\bar{C}}(s_2, \cdot) \right) \right) d\mu(s_2) \right] \right]^2 \\ & \leq E \left(\int_0^t h_2^2(s_2) |Z_{k(n)}(\cdot, \cdot, s_2) - Z(\cdot, \cdot, s_2)| d\mu(s_2) \right)^2 \\ & = E \left(\int_0^t \int_0^t (h_2^2)^{\otimes 2}(s_2, t_2) Y_{k(n)}(s_2) Y_{k(n)}(t_2) d\mu(s_2, t_2) \right) \\ & = \int_0^t \int_0^t (h_2^2)^{\otimes 2}(s_2, t_2) E(Y_{k(n)}(s_2) Y_{k(n)}(t_2)) d\mu(s_2, t_2) \\ & \leq \int_0^t \int_0^t (h_2^2)^{\otimes 2}(s_2, t_2) \left(E|Y_{k(n)}(s_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(E|Y_{k(n)}(t_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mu(s_2, t_2) \end{aligned}$$

Pour finir il suffit de voir que :

$$\begin{aligned} E|Y_{k(n)}(s_2)|^2 &= E \left[\Phi^{\circ 2} \left(h_1 \otimes h_1 \sum_{(k(n), l(n))} 1_{C_1^{k(n)} \times C_2^{k(n)}}(\cdot, s_2) 1_{C_2^{l(n)} \times C_1^{l(n)}}(s_2, \cdot) - h_1 \otimes h_1 \sum_{(k(n), l(n))} 1_C(\cdot, s_2) 1_{\bar{C}}(s_2, \cdot) \right) \right]^2 \\ &= \left\| h_1 \otimes h_1 \left[1_C(\cdot, s_2) 1_{\bar{C}}(s_2, \cdot) - \sum_{(k(n), l(n))} 1_{C_1^{k(n)} \times C_2^{k(n)}}(\cdot, s_2) 1_{C_2^{l(n)} \times C_1^{l(n)}}(s_2, \cdot) \right] \right\|^2 \end{aligned}$$

△

Par ailleurs de simples calculs donnent :

$$\left(\Phi \left(h_1 1_{]0, s]} \right) \right)^2 = \Phi^{\circ 2} \left(\left[h_1 1_{]0, s]} \right]^{\circ 2} \right) + \Phi \circ a_1^2 \left(\left[h_1 1_{]0, s]} \right]^{\circ 2} \right) + \|h_1 1_{]0, s]}\|^2$$

Ce qui a l'aide du paragraphe préliminaire nous permet d'énoncer :

Théorème 6.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left| Z_{t_{k+1}^n} - Z_{t_k^n} \right|^2 = \int_0^t h_2^2(s) \left(\Phi \left(h_1 1_{]0, s]} \right) \right)^2 d\mu(s) + \int_0^t h_2^2(s) \Phi \circ a_1^2 \circ \pi_1 \left(h_1 1_{]0, s]} \right)^{\circ 2} d\mu(s).$$

Remarque

- Dans le cas o les variables $(X_k)_k$ suivent une loi normale on retrouve la variation quadratique gaussienne puisque dans ce cas $a_1^2 \circ \pi_1 \left(h_1 1_{]0, s]} \right)^{\circ 2} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[Szego] SZEGO : *Orthogonal polynomial*, 1939

[Schraf] SCHRAFSTETTER, Eric : *Quelques aspects des séries aléatoires définies par une mesure vectorielle, application aux EDPS*, Thèse de doctorat, Angers, 1998.

[MFA&ES] ALLAIN, Marie-France, SCHRAFSTETTER, Eric : *Quelques aspects des séries aléatoires définies par une mesure vectorielle*, Prépublication du Département de Mathématiques, Université d'Angers, n°41 (1997).

[PAM] MEYER, Paul André : *Quantum Probability for Probabilists*, Springer, LNM 1533, 1995.