



HAL
open science

Représentations p -adiques de $GL_2(L)$ et catégories dérivées

Benjamin Schraen

► **To cite this version:**

Benjamin Schraen. Représentations p -adiques de $GL_2(L)$ et catégories dérivées. Israel Journal of Mathematics, 2010, 176 (1), pp.307-361. 10.1007/s11856-010-0031-z . hal-00661713

HAL Id: hal-00661713

<https://hal.science/hal-00661713>

Submitted on 20 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES DE $GL_2(L)$ ET CATÉGORIES DÉRIVÉES

par

Benjamin Schraen

Résumé. — Nous construisons des représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques de $GL_2(L)$, où L est une extension finie de \mathbb{Q}_p , associées à certaines représentations p -adiques du groupe de Galois de L . Nous prouvons ensuite que l'espace des morphismes de ces représentations vers le complexe de de Rham du demi-plan de Drinfel'd peut être muni d'une structure de (φ, N) -module filtré admissible de rang 2. Enfin nous prouvons que ce module filtré est associé à la représentation galoisienne de départ.

Abstract. — We construct some locally \mathbb{Q}_p -analytic representations of $GL_2(L)$, L a finite extension of \mathbb{Q}_p , associated to some p -adic representations of the absolute Galois group of L . We prove that the space of morphisms from this representations to the de Rham complex of the Drinfel'd's upper half space has a structure of rank 2 admissible filtered (φ, N) -module. Finally we prove that this filtered module is associated, via Fontaine's theory, to the initial Galois representation.

Ces dernières années, l'existence d'une correspondance entre représentations p -adiques de dimension 2 du groupe $G_p = \text{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ et représentations unitaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur des espaces de Banach p -adiques s'est considérablement précisée. Cette recherche a commencé sous l'impulsion de Christophe Breuil et une des premières constructions fut celle de représentations localement analytiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ associées à une représentation semi-stable non cristalline de G_p en dimension 2. Ces représentations font apparaître un paramètre de la représentation galoisienne, l'invariant \mathcal{L} , invisible sur la correspondance de Langlands locale classique. Une première certitude que ces représentations sont des objets pertinents fut la vérification par Christophe Breuil et Ariane Mézard ([6]) que, dans certains cas, leur complété unitaire universel est non nul, admissible, et que sa réduction modulo p est compatible avec la correspondance modulo p définie dans [3]. Nous savons maintenant, suite à des travaux de Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez ([10], [1]) que c'est toujours le cas. Une autre confirmation de l'intérêt de ces objets vient d'une remarque faite par Alain Genestier à la suite de discussions avec Christophe Breuil et Jean-François Dat. Toujours dans le cas semi-stable non cristallin, on devrait retrouver le module de Fontaine associé à la représentation galoisienne en considérant l'espace des morphismes, dans une catégorie dérivée bien choisie, entre le dual de la représentation localement analytique et le complexe de de Rham du demi-plan de Drinfel'd. Le fait de considérer le complexe comme objet de la catégorie dérivée et non juste les espaces de cohomologie est proche des idées apparaissant dans les travaux de Jean-François Dat ([12], [11]). C'est ce résultat que nous démontrons dans cet article. En écrivant la démonstration, nous nous sommes rendus compte que les calculs et constructions effectués ne sont pas spécialement propres au corps \mathbb{Q}_p : ils devraient fonctionner aussi bien

sur une extension finie L . C'est pourquoi nous sommes tentés de définir des représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ de $\mathrm{GL}_2(L)$ ne faisant plus intervenir un seul invariant \mathcal{L} , mais une famille $\vec{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_\sigma)$ indexée par les plongements de L dans une clôture algébrique. Au passage nous avons été amenés à déterminer les composantes de Jordan-Hölder des induites localement \mathbb{Q}_p -analytiques de $\mathrm{GL}_2(L)$.

Cependant nous ne sommes pas certains que les $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ soient les bons objets dans le cas $L \neq \mathbb{Q}_p$. En effet, l'examen de la situation modulo p par Breuil et Paskunas ([7]) suggère que tout est plus complexe. Par exemple, il n'est pas clair que son complété unitaire universel soit admissible. On peut néanmoins s'attendre à ce que les représentations $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ interviennent comme sous-objets des « bonnes » représentations.

0.1. Notations. — On fixe L une extension finie de \mathbb{Q}_p , $d = [L : \mathbb{Q}_p]$ et π_L une uniformisante de L . Soit L_0 le plus grand sous corps non ramifié de L , on pose $d_0 = [L_0 : \mathbb{Q}_p]$. On désignera toujours par K une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant les racines $2d_0$ -ièmes de l'unités, ainsi qu'une racine $2d$ -ième de p que nous fixons. La notation $p^{\frac{a}{2d}}$ a donc un sens pour $a \in \mathbb{Z}$. On demande aussi que

$$|\mathcal{P}| = d = [L : \mathbb{Q}_p],$$

où $\mathcal{P} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(L, K)$. Dans la suite K joue toujours le rôle d'un corps de coefficients, nous nous autoriserons donc à l'élargir si le besoin s'en fait sentir. En général, si E désigne L ou K , on note \mathcal{O}_E son anneau d'entiers et \mathbb{F}_E son corps résiduel.

On a alors un isomorphisme d'algèbres θ

$$\begin{aligned} L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} K \\ f \otimes e &\longmapsto (\sigma(f)e)_\sigma. \end{aligned}$$

Si M est un $L \otimes K$ -module, on note $M_\sigma = M \otimes_{L \otimes K, \sigma} K$. Le morphisme θ permet de voir M_σ comme un sous- $(L \otimes K)$ -module de M et un facteur direct. On a alors un isomorphisme de K -espaces vectoriels

$$M \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} M_\sigma.$$

Si m est un élément de M , on note m_σ sa composante appartenant à M_σ via l'isomorphisme ci-dessus.

On appelle caractère de Lubin-Tate le caractère de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ correspondant au caractère $x \mapsto x|x|$ par la théorie du corps de classes locale, où l'on choisit d'envoyer uniformisantes sur frobenius arithmétiques.

Si $a \in L$ et $r > 0$, on note $D(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon r .

Si σ est un plongement de L dans K et $\mathcal{L} \in K$, on note $\log_{\sigma, \mathcal{L}}$ l'unique morphisme de groupes topologiques $L^\times \rightarrow K$ coïncidant avec $\sigma \circ \log$ sur $1 + \pi_L \mathcal{O}_L$ et vérifiant $\log_{\sigma, \mathcal{L}}(\pi_L) = \mathcal{L}$.

Si $\vec{k} = (k_\sigma)$ est un vecteur de d entiers indexés par \mathcal{P} , on définit $|\vec{k}| = \sum_\sigma k_\sigma$. On note $\epsilon(\vec{k})$ le caractère $a \mapsto \prod \sigma(a)^{k_\sigma}$ de L^\times à valeurs dans K^\times .

On pose

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\sigma \in \mathcal{P}$, on note $u_\sigma, t_\sigma, \dots$ les éléments de $\mathfrak{gl}_2(L) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ obtenus par la recette expliquée plus haut.

On note $\mathrm{St}_{\mathbb{Q}_p}$ la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(L)$. Il s'agit du quotient de l'espace des fonctions localement constantes de la droite projective $\mathbf{P}^1(L)$ vers \mathbb{Q}_p par le sous-espace

des fonctions constantes. C'est une représentation lisse irréductible, et donc admissible, de $GL_2(L)$. Si E est une extension finie de \mathbb{Q}_p , on note $St_E = St_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Nous choisirons le plus souvent $E = K$, c'est pourquoi nous écrirons $St = St_K$.

Si V est un K -espace vectoriel topologique, on note V' son dual topologique muni de la topologie forte ([26], §9).

0.2. Énoncé des résultats. — Supposons pour simplifier que $L = \mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{L} \in K$. On note $V(k, \mathcal{L})$, pour $k \geq 2$, la représentation galoisienne dont le module de Fontaine est

$$\begin{aligned} D_{st}^*(V(k, \mathcal{L})) &= Ke_0 \oplus Ke_1 \\ \varphi(e_0) &= p^{\frac{k-2}{2}} e_0 \\ \varphi(e_1) &= p^{\frac{k}{2}} e_1 \\ N(e_1) &= e_0 \\ \text{Fil}^n(D_{st}^*(V(k, \mathcal{L}))) &= \begin{cases} D_{st}^*(V(k, \mathcal{L})) & \text{si } n \leq 0 \\ K(e_1 + \mathcal{L}e_0) & \text{si } 1 \leq n \leq k-1 \\ \{0\} & \text{si } n \geq k \end{cases} \end{aligned}$$

Breuil construit dans [4], une représentation localement analytique de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ s'insérant dans une suite exacte

$$0 \rightarrow \Sigma(k) \rightarrow \Sigma(k, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Sym}^{k-2} K^2 \rightarrow 0,$$

où $\Sigma(k)$ est le quotient d'une série principale localement \mathbb{Q}_p -analytique et où la classe d'isomorphisme de l'extension dépend du paramètre \mathcal{L} .

Soit \mathcal{X} le demi-plan de Drinfel'd. Nous aimerions dans un premier temps définir $D_k(\Sigma(k, \mathcal{L}))$ comme étant

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_k}(\Sigma(k, \mathcal{L})'[-1], R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes (\text{Sym}^{k-2} K^2)')$$

où \mathcal{D}_k est la catégorie dérivée des $D(GL_2(\mathbb{Q}_p), K)$ -modules coadmissibles de caractère central $a \mapsto a^{2-k}$. Cet espace est de dimension 2. Il serait alors tentant de tirer parti de l'isomorphisme de Große-Klönne $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \simeq R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ (voir [17]) pour munir $D_k(\Sigma(k, \mathcal{L}))$ d'endomorphismes φ et N lui donnant ainsi une structure de (φ, N) -module. En utilisant une méthode de Schneider et Stuhler, on peut filtrer le complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes (\text{Sym}^{k-2} K^2)'$ pour faire de $D_k(\Sigma(k, \mathcal{L}))$ un (φ, N) -module filtré. Cependant nous expliquons dans la remarque 5.2 pourquoi une telle approche n'est pas possible, du moins dans l'état actuel des connaissances. C'est pourquoi nous construisons $D_k(\Sigma(k, \mathcal{L}))$, dans la partie 5.1, en ne faisant intervenir que la théorie des représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. On pose

$$D_k(\Sigma(k, \mathcal{L})) = \text{Hom}_{\mathcal{D}_k}(\Sigma(k, \mathcal{L})'[-1], \mathcal{H}(k)),$$

où $\mathcal{H}(k)$ est l'objet $(\text{Sym}^{k-2} K^2)' \oplus (\text{Sym}^{k-2} K^2)' \otimes St'[-1]$ de la catégorie \mathcal{D}_k . L'endomorphisme φ est alors défini comme la multiplication par $p^{\frac{k-2}{2}}$ sur $(\text{Sym}^{k-2} K^2)'$ et par $p^{\frac{k}{2}}$ sur $(\text{Sym}^{k-2} K^2)' \otimes St'$. L'endomorphisme de monodromie N provient simplement d'un élément de $\text{Ext}_{GL_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\text{Sym}^{k-2} K^2, (\text{Sym}^{k-2} K^2) \otimes St)$. Enfin, on munit $D_k(\Sigma(k, \mathcal{L}))$ d'une filtration en utilisant un morphisme $\Sigma(k)'[-1] \rightarrow \mathcal{H}(k)$ qui, dans le cas $k = 2$, n'est autre que l'application naturelle $\Omega^1[-1] \rightarrow R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$ composée avec l'isomorphisme de Morita $\Omega^1 \simeq \Sigma(2)'$ et un scindage $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \simeq H_{dR}^0 \oplus H_{dR}^1[-1]$, ce dernier étant isomorphe à $\mathcal{H}(2)$ grâce à l'isomorphisme de Schneider et Stuhler ([27]).

Dans le cas plus général où L est une extension finie de \mathbb{Q}_p et \vec{k} est un vecteur d'entiers ≥ 2 indexé par les plongements de L dans K , plusieurs difficultés surgissent. Tout d'abord, si l'on

écrit le module de Fontaine associé à une représentation semi-stable non cristalline, plusieurs invariants \mathcal{L} apparaissent, un pour chaque plongement de L dans K . Plus précisément, notons $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ le (φ, N, L, K) -module filtré

$$\begin{aligned} D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) &= (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_0 \oplus (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_1 \\ \varphi(e_0) &= p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}} e_0 \\ \varphi(e_1) &= p^{\frac{|\vec{k}|}{2d}} e_1 \\ N(e_1) &= e_0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Fil}^j(D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) \otimes_{L_0} L)_\sigma = \begin{cases} (D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) \otimes_{L_0} L)_\sigma & \text{si } j \leq 0 \\ K(e_{1,\sigma} + \mathcal{L}_\sigma e_{0,\sigma}) & \text{si } 1 \leq j \leq k_\sigma - 1 \\ 0 & \text{si } j \geq k_\sigma. \end{cases}$$

La généralisation de la représentation $\Sigma(k, \mathcal{L})$ de Breuil est alors une extension

$$0 \rightarrow \Sigma(\vec{k}) \rightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) \rightarrow V(\chi_{\vec{k}})^d \rightarrow 0,$$

où $V(\chi_{\vec{k}})$ est la représentation algébrique irréductible de plus haut poids $\chi_{\vec{k}}$ (voir le §3 pour plus de détails).

Une autre difficulté est que pour avoir une structure de (φ, N, L, K) -module filtré sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'[-1], R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}))$, il faut maintenant définir une $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -structure munie d'opérateurs φ et N . Nous expliquons au §5 comment contourner ce problème et définir un (φ, N, L, K) -module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma)$ pour toute représentation Σ localement \mathbb{Q}_p -analytique admissible de $\mathrm{GL}_2(L)$ ayant $\epsilon(\vec{k})$ pour caractère central.

Ceci construit, notre résultat principal est alors

Théorème 0.1. — *Le (φ, N, L, K) -module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))$ est isomorphe au module de Fontaine $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$.*

0.3. Plan de l'article. — Dans le chapitre 1, nous déterminons la forme des modules de Fontaine associés aux représentations p -adiques semi-stables non cristallines de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ en dimension 2. Dans le chapitre 2, nous démontrons la décomposition des induites localement \mathbb{Q}_p -analytiques de caractères pour $\mathrm{GL}_2(L)$. Au chapitre 3 nous rappelons quelques généralités sur la cohomologie localement analytique des groupes localement analytiques p -adiques, que nous appliquerons dans le chapitre 4 afin de construire les représentations $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ à partir de morceaux de séries principales et en déduire plusieurs propriétés sur leurs extensions. Le chapitre 5 est consacré à la construction des (φ, N, L, K) -modules filtrés $D_{\vec{k}}(V)$ au moyen du demi-plan de Drinfel'd et à la preuve du résultat principal.

0.4. Remerciements. — Mes plus sincères remerciements vont à mon directeur de thèse Christophe Breuil, ainsi qu'à Alain Genestier. La plupart des idées de ce travail leur sont dues. Je remercie Mathieu Cossutta, Guillaume Pouchin et Simon Riche pour avoir écouté une version préliminaire de ces résultats, ainsi que pour les suggestions qu'ils ont apportées. J'ai également pu exposer ces résultats à l'université Columbia, je remercie Éric Urban pour son invitation. Je n'oublie pas Elmar Große-Klönne, Jan Kohlhaase, Sascha Orlik et Jacques Tilouine pour avoir répondu à toutes les questions que je leur ai posées en rapport avec ce travail. Enfin je voudrais aussi remercier le rapporteur de cet article pour ses précieux conseils concernant la rédaction de certaines parties.

1. Modules de Fontaine

Soit (ρ, V) une représentation semi-stable non cristalline de $\text{Gal}(\bar{L}/L)$ sur un K -espace vectoriel V de dimension 2. On pose

$$D_{st}^*(V) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, B_{st})^{\text{Gal}(\bar{L}/L)}.$$

C'est un (φ, N, L, K) -module filtré admissible. Rappelons qu'un (φ, N, L, K) -module filtré est un $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -module libre de rang fini D muni d'un endomorphisme bijectif φ qui est $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur L_0 et l'identité sur K), d'un endomorphisme nilpotent $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -linéaire et d'une filtration décroissante exhaustive de $D_{dR} = L \otimes_{L_0} D$ par des $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -sous-modules. On note

$$t_N(D) = \sum_i i \dim_{L_0} D[i],$$

où $D[i]$ est le $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ sous-module de pente i pour φ et

$$t_H(D) = \sum_i i \dim_L \text{gr}^i(L \otimes_{L_0} D),$$

où $\text{gr}^i(D)$ désigne le i -ième gradué de la filtration. La condition d'admissibilité s'exprime alors par $t_N(D) = t_H(D)$ et $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -sous-module D' stable par φ et N , muni de la filtration induite. Les poids de Hodge-Tate de D sont les sauts de la filtration.

Pour un plongement σ de L dans K , on peut considérer le K -espace vectoriel $D_\sigma = (D_{dR}) \otimes_{(L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K, \sigma)} K$. Il est filtré par $\text{Fil}^n D_\sigma = (\text{Fil}^n D_{dR}) \otimes_{(L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K, \sigma)} K$. L'égalité

$$D_{dR} = \bigoplus_{\sigma} D_\sigma$$

ainsi que la stabilité par $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ de la filtration induisent des égalités

$$\text{Fil}^n(D_{dR}) = \bigoplus_{\sigma} \text{Fil}^n D_\sigma.$$

Un poids de Hodge-Tate h est dit de type S , pour S un ensemble de plongements de L dans K , si S est exactement l'ensemble des σ tels que h soit un poids de la filtration $(\text{Fil}^n D_\sigma)$.

Quitte à tordre la représentation ρ par un caractère, on peut supposer qu'elle n'a pas de poids de Hodge-Tate strictement négatif, que 0 est un poids de type \mathcal{P} et que la représentation $\det_K \rho$ est donnée par un caractère de la forme

$$(1) \quad \prod_{\sigma} (\sigma \circ \chi_{LT})^{h_\sigma},$$

où χ_{LT} est le caractère de Lubin-Tate. Nous nous intéresserons exclusivement au cas où les h_σ sont tous strictement positifs, nous dirons dans ce cas que ρ est à poids de Hodge-Tate non dégénérés.

Lemme 1.1. — *Si D_1 et D_2 sont les (φ, N, L, K) -modules filtrés associés aux K -représentations ρ_1 et ρ_2 , alors le (φ, N, L, K) -module filtré associé à $\rho_1 \otimes_K \rho_2$ est $D_1 \otimes_{L_0 \otimes K} D_2$.*

Démonstration. — Il est connu que le (φ, N, L, K) -module associé à $\rho_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_2$ est $D_1 \otimes_{L_0} D_2$. On sait de plus que $\rho_1 \otimes_K \rho_2$ est le conoyau de la flèche

$$\begin{array}{ccc} (\rho_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_2)^{[K:\mathbb{Q}_p]} & \longrightarrow & \rho_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_2 \\ (x_i \otimes y_i)_i & \longmapsto & \sum_i [(a_i x_i) \otimes y_i - x_i \otimes (a_i y_i)] \end{array}$$

où la famille (a_i) est une base de K sur \mathbb{Q}_p . L'exactitude du foncteur D_{st}^* ([15], 5.1.7) prouve le résultat. \square

Lemme 1.2. — *Le (φ, N, L, K) -module filtré associé à la représentation $\det_K \rho$ est isomorphe à $\det_{L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} D_{st}^*(V)$.*

Démonstration. — Soit n la dimension de V sur K . On a $\det_K V = \Lambda_K^n V$. C'est le noyau de l'application

$$\begin{aligned} \bigotimes_K^n V &\rightarrow \bigoplus_{s \in \mathfrak{S}_n} (\bigotimes^n V) \\ \otimes v_i &\mapsto (\otimes v_i - \epsilon(s)(\otimes v_{s(i)}))_{s \in \mathfrak{S}_n}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que D_{st}^* est un \otimes -foncteur exact de la catégorie des représentations admissibles dans la catégorie des (φ, N) -modules filtrés admissibles. \square

Notons alors $h_\sigma^0 \leq h_\sigma^1$ les poids (comptés avec multiplicité) de la filtration $(\text{Fil}^n D_\sigma)$. Le lemme 1.2 ainsi que (1) impliquent que $h_\sigma^0 = 0$ et $h_\sigma^1 = h_\sigma$. Comme ρ est à poids de Hodge-Tate non dégénérés, $h_\sigma^0 < h_\sigma^1$. Posons $k_\sigma = h_\sigma + 1$ et $\vec{k} = (k_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}}$.

Par ailleurs, comme V n'est pas cristalline, l'opérateur N est non nul. Comme $\ker N$ est stable par φ , c'est un $L_0 \otimes K$ -module libre, nécessairement de rang 1. On peut donc choisir e_0 dans $\ker N$ tel que $\ker N = (L_0 \otimes K)e_0$. On a de plus, $\varphi(e_0) = \alpha e_0$ avec $\alpha \in (L_0 \otimes K)^\times$. Soit e tel que $N(e) = e_0$, (e, e_0) est alors une base de D sur $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. Posons

$$\varphi(e) = \beta e + \gamma e_0.$$

La relation $N\varphi = p\varphi N$ implique alors que $\beta = p\alpha$. En posant $e_1 = e - \gamma\alpha^{-1}e_0$, on a $\varphi(e_1) = p\alpha e_1$ et $N(e_1) = e_0$. Cherchons maintenant à modifier (e_0, e_1) de façon que α soit d'une forme particulièrement simple. L'isomorphisme $L_0 \otimes K \xrightarrow{\sim} K^{d_0}$ permet d'écrire α comme un d_0 -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_{d_0})$. Supposons maintenant K suffisamment grand pour qu'il contienne une racine d_0 -ième du produit des α_i , ce produit étant justement la norme de la K -algèbre $L_0 \otimes K$ appliquée à l'élément α . Soit x une telle racine. On peut alors remarquer que l'élément $(1 \otimes x)\alpha^{-1}$ est dans le noyau de cette norme, donc d'après le théorème 90 de Hilbert (pour la K -algèbre $L_0 \otimes K$), il existe un élément $\beta \in L_0 \otimes K$ tel que

$$(1 \otimes x) = \frac{\varphi(\beta)}{\beta} \alpha.$$

On a alors

$$\varphi(\beta e_i) = (p^i \otimes x)(\beta e_i).$$

On remplace donc désormais e_i par βe_i . Il est facile de vérifier qu'un élément $1 \otimes x$ est de la forme $\frac{\varphi(\beta)}{\beta}$ si et seulement si x est une racine d_0 -ième de l'unité. En utilisant le lemme 1.2 ainsi que la forme de $\det_K \rho$, on voit qu'il existe une racine d_0 -ième ζ telle que

$$px^2 = p^{\frac{|\vec{k}|-d}{d}} \zeta,$$

et donc une racine $2d_0$ -ième ζ' telle que

$$x = \zeta' p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}}.$$

Quitte à tordre ρ par l'unique caractère non ramifié d'ordre 2 de $\text{Gal}(\overline{L}/L)$, on peut choisir la base (e_0, e_1) de telle sorte que $D_{st}^*(V)$ soit de la forme

$$\begin{aligned}
D_{st}^*(V) &= (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_0 \oplus (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_1 \\
\varphi(e_0) &= p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}} e_0 \\
\varphi(e_1) &= p^{\frac{|\vec{k}|}{2d}} e_1 \\
N(e_1) &= e_0
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Fil}^j(D_{dR}^*(V)_\sigma) = \begin{cases} D_{dR}^*(V)_\sigma & \text{si } j \leq 0 \\ K(e_{1,\sigma} + \mathcal{L}_\sigma e_{0,\sigma}) & \text{si } 1 \leq j \leq k_\sigma - 1 \text{ et } \sigma \notin S \\ K e_{0,\sigma} & \text{si } 1 \leq j \leq k_\sigma - 1 \text{ et } \sigma \in S \\ 0 & \text{si } j \geq k_\sigma \end{cases}$$

où $\vec{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \notin S} \in K^{d-|S|}$ et S est un ensemble de plongements de L dans K tel que

$$\sum_{\sigma \in S} h_\sigma \leq \frac{\sum_{\sigma \in \mathcal{P}} h_\sigma}{2}.$$

On note $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S)$ l'unique représentation galoisienne dont le (φ, N, L, K) -module a cette forme, et si χ est un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$, on pose $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S, \chi) = V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S) \otimes \chi$.

Ce qui précède peut se résumer dans la proposition suivante

Proposition 1.3. — *Si (ρ, V) est une représentation p -adique semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$. Supposons en plus que ses poids de Hodge-Tate sont non dégénérés. Alors V est isomorphe à une et une seule représentation $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, S, \chi)$.*

Nous nous intéresserons désormais uniquement aux représentations V à poids de Hodge-Tate non dégénérés et telles que $S = \emptyset$. On note $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) = D_{st}^*(V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, \emptyset, 1))$.

Remarque 1.4. — Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d sur \mathbb{Q} et π une forme automorphe irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_2(F)$ de poids (k_1, \dots, k_d) où tous les k_i sont des entiers ≥ 2 de même parité. Supposons qu'en une place v divisant p , π_v soit de niveau Iwahori, c'est-à-dire $\dim(\pi_v)^I = 1$, où I est le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F_v)$. Il est très probable que si ρ_π est la représentation galoisienne globale associée à π , la localisation de ρ_π en v est de la forme $V(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}, \emptyset, \chi)$.

2. Représentations S -analytiques

2.1. Généralités. — Soit M une variété localement L -analytique. Si V est un K -espace vectoriel localement convexe séparé, on peut définir, suivant [22] 2.1.10 (voir aussi [28] §2), l'espace des fonctions \mathbb{Q}_p -analytiques de M dans V comme étant l'espace des fonctions localement analytiques de M_0 dans V , où M_0 est obtenu par restriction des scalaires de L à \mathbb{Q}_p à partir de M . On note $C^{\mathbb{Q}_p-an}(M, V)$ l'espace de ces fonctions. Si x est un point de M , on peut associer à tout élément f de $C^{\mathbb{Q}_p-an}(M, V)$ sa différentielle en x , c'est un élément df_x appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(T_x M, V) = \mathrm{Hom}_K(T_x M \otimes_{\mathbb{Q}_p} K, V)$, $T_x M$ étant l'espace tangent à M en x . L'espace $T_x M$ est muni d'une L -structure et est de dimension $\dim_L M$ sur L , ainsi l'espace $T_x M \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ est un $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -module libre de rang $\dim_L M$.

Définition 2.1. — Soit S un ensemble fini de plongements de L dans K et I_S l'idéal noyau du morphisme d'algèbres θ_S obtenu par composition de θ avec la projection de $\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} K$ sur $\bigoplus_{\sigma \in S} K$. Une fonction \mathbb{Q}_p -analytique de M dans V est dite S -analytique si pour tout $x \in M$ l'application df_x s'annule sur $I_S \otimes_{L \otimes K} (T_x M \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)$.

L'ensemble des fonctions S -analytiques est un sous-espace fermé de $C^{\mathbb{Q}_p-an}(M, V)$. On le munit de la topologie induite et on le note $C^{S-an}(M, V)$.

Définition 2.2. — On note $D_S(M, K)$ le dual continu de $C^{S-an}(M, K)$ muni de la topologie forte ([26] §9). Ses éléments sont appelés les distributions localement S -analytiques.

Exemple 2.3. — Si $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ est un d -uplet (n_σ) d'entiers positifs, on note, pour $z \in L$, $z^{\underline{n}} = \prod_{\sigma} \sigma(z)^{n_\sigma}$. Si $M = \mathcal{O}_L$, une fonction localement \mathbb{Q}_p -analytique f de M dans K peut s'écrire, au voisinage de $z_0 \in \mathcal{O}_L$

$$f(z) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{n}}(z_0)(z - z_0)^{\underline{n}},$$

où les $a_{\underline{n}}(z_0)$ sont des éléments de K . On désignera par z_σ la fonction $z \mapsto \sigma(z)$. On a

$$T_x M \simeq L \frac{\partial}{\partial z},$$

et on définit alors par $\frac{\partial}{\partial z_\sigma}$ la $T_{x_0} M \otimes_{L, \sigma} K$ -composante de $\frac{\partial}{\partial z}$ via l'isomorphisme

$$T_{x_0} M \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \simeq \bigoplus_{\sigma} T_{x_0} M \otimes_{L, \sigma} K.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{\sigma} \frac{\partial}{\partial z_\sigma}.$$

On vérifie alors que $\frac{\partial}{\partial z_\sigma} z_{\sigma'} = 1$ si et seulement si $\sigma = \sigma'$, et 0 dans le cas contraire. Ainsi f est localement S -analytique si et seulement si $a_{\underline{n}} = 0$ lorsque \underline{n} a son support hors de S . De même l'ensemble des fonctions f localement S -analytiques vérifiant $\frac{\partial^n}{\partial z_\sigma^n} f = 0$ (pour un $\sigma \in S$) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_\sigma^k f_k,$$

où chaque f_k est une fonction localement $S \setminus \{\sigma\}$ -analytique.

Il est alors immédiat de généraliser la définition de [28] §3. Soit G un groupe de Lie localement L -analytique.

Définition 2.4. — Une représentation V de G est localement S -analytique si V est un espace vectoriel muni d'une topologie séparée localement convexe tonnelée et G agit sur V par endomorphismes continus. On impose de plus que pour tout $v \in V$, l'application de G dans V définie par $g \mapsto gv$ soit localement S -analytique.

Si G est un groupe de Lie L -analytique, et V une représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique de G sur V , on a une action \mathbb{Q}_p -linéaire de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G sur l'espace V définie par

$$\mathfrak{x} \cdot v = \frac{d}{dt} \exp(t\mathfrak{x}) \cdot v|_{t=0}.$$

Par \mathbb{Q}_p -linéarité, elle se prolonge en une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. Cette dernière est en fait une algèbre de Lie sur l'anneau $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. On note \mathfrak{g}_S la somme directe des K -algèbres de Lie obtenues par changement de base de L à K via σ lorsque σ parcourt S . L'algèbre de Lie \mathfrak{g}_S est également le quotient de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ par l'idéal

$$\mathfrak{I}_S = I_S \otimes_{L \otimes K} (\mathfrak{g} \otimes K).$$

Lemme 2.5. — *Une fonction \mathbb{Q}_p -analytique $f : G \rightarrow V$ est S -analytique si et seulement elle est annulée par les éléments de \mathfrak{I}_S pour l'action par translation à gauche (resp. à droite) de G sur $C^{\mathbb{Q}_p-an}(G, V)$.*

Ainsi, si (ρ, V) est une représentation S -analytique, l'action de $\mathfrak{g} \otimes K$ sur V se factorise par \mathfrak{g}_S .

On peut utiliser les fonctions S -analytiques pour construire des représentations localement S -analytiques de G par induction. Supposons en effet que (ρ, V) soit une représentation localement S -analytique d'un sous-groupe H fermé, L -analytique de G . On note $\text{Ind}_H^G(\rho)^{S-an}$ l'espace des fonctions S -analytiques de G dans V telles que pour tout $g \in G, h \in H$:

$$f(gh) = \rho(h^{-1})f(g).$$

On munit alors cet espace d'une action de G par translation à gauche, ce qui en fait une représentation S -analytique. On l'appelle l'induite localement S -analytique de H à G de ρ .

Nous avons besoin ici d'une généralisation du critère d'irréductibilité de Frommer (dont la preuve a été complétée par Orlik et Strauch dans [23]) afin de prouver que le procédé d'induction permet de construire des représentations topologiquement irréductibles.

Soit \mathfrak{G} un groupe réductif sur L , \mathfrak{T} un sous-tore déployé maximal, \mathfrak{P} un sous-groupe parabolique contenant \mathfrak{T} , \mathfrak{M} le sous-groupe de Levi de \mathfrak{P} contenant \mathfrak{T} . On note $G = \mathfrak{G}(L)$, $T = \mathfrak{T}(L)$, $P = \mathfrak{P}(L)$ et $M = \mathfrak{M}(L)$. Soit ρ une représentation localement S -analytique de M sur un K -espace vectoriel V de dimension finie. Par inflation, ρ donne une représentation de P . Soient \mathfrak{p} et \mathfrak{g} les algèbres de Lie de P et G respectivement. On note ρ' la représentation de \mathfrak{p}_S sur l'espace dual de V . L'action de \mathfrak{p}_S sur V se prolonge en une action de $U(\mathfrak{p}_S)$. On note alors $m_S(\rho)$ le module de Verma généralisé

$$m_S(\rho) = U(\mathfrak{g}_S) \otimes_{U(\mathfrak{p}_S)} V'.$$

La généralisation du critère d'irréductibilité de Frommer, Orlik et Strauch ([23]) est alors

Théorème 2.6. — *Si $m_S(\rho)$ est un $U(\mathfrak{g}_S)$ -module simple, la représentation $\text{Ind}_P^G(\rho)^{S-an}$ est topologiquement irréductible.*

Ce théorème se prouve exactement comme celui de Frommer, Orlik et Strauch, à quelques différences près que nous expliquons à la fin de ce chapitre.

2.2. Représentations algébriques. — Soit G un groupe réductif déployé défini sur L . On note G_0 sa restriction à la Weil de L à \mathbb{Q}_p . Une fonction de $G_0(\mathbb{Q}_p) = G(L)$ dans K est dite \mathbb{Q}_p -algébrique si elle est dans l'image de l'injection

$$K[G_0] \hookrightarrow C(G_0(\mathbb{Q}_p), K).$$

L'algèbre $K[G_0]$ est l'algèbre des fonctions K -rationnelles sur la variété algébrique G_0 . Cette flèche est une injection par densité de Zariski des \mathbb{Q}_p -points de G_0 dans les $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -points ([18], §34.4). Une représentation \mathbb{Q}_p -algébrique de G est alors une représentation de dimension finie de $G(L)$ sur un K -espace vectoriel dont les applications orbites sont \mathbb{Q}_p -algébriques. Il est

facile de vérifier qu'une telle représentation est la restriction à $G_0(\mathbb{Q}_p)$ d'une représentation algébrique de $G_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$. On sait alors que les représentations algébriques irréductibles de $G_0 \otimes K$ sont en bijection avec les d -uplets $(\rho_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}}$ où ρ_σ est une représentation algébrique irréductible du groupe $G \otimes_{L,\sigma} K$. Cette bijection étant donnée par

$$(\rho_\sigma) \longmapsto \bigotimes_{\sigma} \rho_\sigma.$$

On peut être plus explicite. En effet si on fixe T un tore déployé maximal de G et un sous-groupe de Borel B contenant T , les représentations irréductibles de $G \otimes_{L,\sigma} K$ sont en bijection avec les caractères dominants (relativement à B) de

$$T \otimes_{L,\sigma} K.$$

Soit w l'élément le plus long du groupe de Weyl de G et χ^w le caractère de T défini par $\chi^w(t) = \chi(w^{-1}tw)$. Cette bijection est alors donnée par

$$\chi \longmapsto \text{Ind}_B^G(\chi^w)^{\sigma\text{-alg}},$$

où $\text{Ind}_B^G(\chi^w)^{\sigma\text{-alg}}$ est simplement l'induite algébrique, L étant considéré plongé dans K via σ . On remarquera que cet espace est isomorphe à l'espace des fonctions σ -algébriques de $G(L)$ dans K telles que

$$f(\cdot b) = \chi^w(b)^{-1} f(\cdot)$$

pour tout $b \in B(L)$. Tout caractère \mathbb{Q}_p -algébrique χ de $T(L)$ peut s'écrire comme un produit $\prod \chi_\sigma$ où χ_σ est σ -algébrique. De plus χ est dominant si et seulement si chaque χ_σ est dominant. On a finalement une bijection entre représentations irréductibles \mathbb{Q}_p -algébriques de $G(L)$ et caractères \mathbb{Q}_p -algébriques dominants de $T(L)$ donnée par

$$(2) \quad \prod_{\sigma \in \mathcal{P}} \chi_\sigma \longmapsto \bigotimes_{\sigma \in \mathcal{P}} \text{Ind}_{B(L)}^{G(L)}(\chi_\sigma^w)^{\sigma\text{-alg}}.$$

Remarquons que cette représentation peut encore être décrite comme l'espace des fonctions \mathbb{Q}_p -algébriques de $G(L) = G_0(\mathbb{Q}_p)$ dans K vérifiant

$$f(\cdot b) = \chi^w(b)^{-1} f(\cdot)$$

pour tout $b \in B(L) = B_0(\mathbb{Q}_p)$ et muni de l'action par translation à gauche.

Définition 2.7. — Si χ est un caractère \mathbb{Q}_p -algébrique dominant de $T(L)$, on note $V(\chi)$ la représentation définie par (2).

Soit N le radical unipotent de B .

Proposition 2.8 ([19], prop II.2.11). — Si χ est un caractère dominant σ -algébrique de T , notons V la représentation irréductible σ -algébrique de G de plus haut poids χ . Alors l'espace des N -invariants de V est isomorphe à χ comme T -représentation et l'espace des coinvariants est isomorphe à χ^w où w est l'unique élément de longueur maximale dans le groupe de Weyl de G .

2.3. Induites localement S -analytiques. — On fixe désormais une partie S non vide de \mathcal{P} jusqu'à la fin du chapitre 2. Considérons $G = GL_2(L)$, P le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, N le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures et T le sous-groupe des matrices diagonales. Soit χ un caractère localement S -analytique de T . Par inflation on peut aussi le voir comme une représentation localement S -analytique de P . Nous allons ici étudier les sous-quotients de la représentation $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$. Orlik et Strauch mentionnent déjà à la fin de l'introduction de [23] que leur théorème permet de décomposer des induites \mathbb{Q}_p -analytiques dans le cas où L est une extension quadratique de \mathbb{Q}_p . En effet, dans ce cas, ses composantes de Jordan-Hölder peuvent s'exprimer en termes d'induites localement L -analytiques classiques. Dans le cas général, nous devons avoir recours à des induites localement S -analytiques pour S non réduit à un singleton.

Posons

$$\chi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \chi_1(a)\chi_2(d).$$

Quitte à considérer la représentation $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \otimes (\chi_1 \circ \det)^{-1} = \text{Ind}_P^G(\chi(\chi_1 \circ \det)^{-1})^{S-an}$, on peut considérer qu'au voisinage de 1,

$$\chi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \prod_{\sigma \in S} \exp(c_\sigma \sigma(\log d)),$$

avec $c_\sigma \in K$. On désigne par $\mathcal{P}(S, \chi)$ l'ensemble des $\sigma \in S$ tels que $c_\sigma \in \mathbb{N}$. Pour $\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi)$, on pose alors

$$\chi_\sigma \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \sigma(d)^{c_\sigma}.$$

Pour $S' \subset \mathcal{P}(S, \chi)$, on peut écrire

$$\chi = \left(\prod_{\sigma \in S'} \chi_\sigma \right) \chi^{S'},$$

où $\chi^{S'}$ est un caractère localement $S \setminus S'$ -analytique. On note aussi $S^c = S \setminus \mathcal{P}(S, \chi)$ et $\bar{\chi} = \chi^{\mathcal{P}(S, \chi)}$.

Considérons pour l'instant le cas où $\mathcal{P}(S, \chi) = \emptyset$. Au voisinage de 1 on écrit

$$\chi = \prod_{\sigma \in S} \psi_\sigma,$$

où

$$\psi_\sigma \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \exp(c_\sigma(\chi)\sigma(\log d)).$$

Or, d'après [13] 7.6.24, le module de Verma $U(\mathfrak{g}_\sigma) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\sigma)} (\psi_\sigma^{-1})$ est simple. Ainsi la formule

$$U(\mathfrak{g}_S) \otimes_{U(\mathfrak{p}_S)} (\chi^{-1}) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\sigma \in S} (U(\mathfrak{g}_\sigma) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\sigma)} (\psi_\sigma^{-1}))$$

associée au théorème 2.6 implique que la représentation $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ est topologiquement irréductible.

Dans les autres cas, la représentation n'est pas topologiquement irréductible, on a par exemple une flèche non nulle

$$\begin{array}{ccc} (\bigotimes_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi)} \text{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg}) \otimes \text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{S^c-an} & \rightarrow & \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \\ (f, g) & \mapsto & fg. \end{array}$$

Nous allons en fait voir que le membre de gauche est topologiquement irréductible, de telle sorte que cette flèche est une injection.

Proposition 2.9. — *Soit V une représentation S' -algébrique irréductible de G et W une représentation localement S'' -analytique de G topologiquement irréductible telle que $S' \cap S'' = \emptyset$. Alors $V \otimes_K W$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — Soit $\underline{i} = (i_\sigma)_{\sigma \in S'} \in \mathbb{N}^{|S'|}$. On pose

$$u^{\underline{i}} = \prod_{\sigma \in S'} (u_\sigma^-)^{i_\sigma} \in U(\mathfrak{g}_S).$$

La théorie des représentations algébriques de GL_2 nous dit que si e est le vecteur de plus haut poids (pour le Borel P) $(c_\sigma)_{\sigma \in S'}$ de V , une base de V est donnée par les $u^{\underline{i}}e$ pour $i_\sigma \leq c_\sigma - 1$. Remarquons que si $v \otimes w \in V \otimes W$ et $\mathfrak{x} \in U(\mathfrak{g}_{S'})$, la relation de disjonction $S' \cap S'' = \emptyset$ implique que $\mathfrak{x}(v \otimes w) = (\mathfrak{x}v) \otimes w$.

Ceci étant dit, supposons que U soit un sous-espace fermé, G -stable et non vide de $V \otimes W$. Comme $U(\mathfrak{g}_{S'})v = V$ pour tout vecteur non nul v dans V , on a une égalité

$$\{w \in W, \exists v \in V \setminus \{0\}, v \otimes w \in U\} = \{w \in W, \forall v \in V, v \otimes w \in U\}.$$

Le deuxième de ces ensembles est visiblement fermé et G -stable dans W . Donc s'il est non vide, il s'agit de W et donc évidemment $U = V \otimes W$. Il reste juste à prouver que le premier de ces deux ensembles est non réduit à zéro.

Il existe un vecteur non nul

$$x = \sum (u^{\underline{i}}e) \otimes w_{\underline{i}} \in U.$$

Si \underline{i}_0 est un élément minimal (pour l'ordre lexicographique) de l'ensemble des \underline{i} pour lesquels $w_{\underline{i}} \neq 0$, remarquons que $u^{\underline{j}}x = (u^{\underline{i}_0 + \underline{j}}e) \otimes w_{\underline{i}_0}$, où $\underline{j} = (c_\sigma - 1 - i_{0,\sigma})$, est un tenseur pur non nul de U , ce qu'il nous fallait. \square

Corollaire 2.10. — *Si $S^c \neq \emptyset$, la représentation*

$$I_S(\chi) = \bigotimes_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi)} \mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma\text{-alg}} \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{S^c\text{-an}}$$

est topologiquement irréductible.

Expliquons maintenant comment utiliser les représentations $I_S(\chi)$ pour décomposer les induites $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S\text{-an}}$. La méthode utilisée doit énormément au §6 de [28].

Si $\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi)$, on note $\mathfrak{z}_\sigma = (u_\sigma^-)^{c_\sigma + 1}$ et de la même façon l'application

$$C^{S\text{-an}}(G, K) \rightarrow C^{S\text{-an}}(G, K)$$

obtenue par dérivation à droite. On écrit également

$$\chi = \chi_\sigma \chi^\sigma.$$

Le caractère χ^σ est alors localement $S \setminus \{\sigma\}$ -analytique. On pose enfin

$$\epsilon_\sigma \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \sigma(ad^{-1}).$$

Proposition 2.11. — *L'application \mathfrak{z}_σ induit une application de $\mathrm{Ind}_P^G(\chi)^{S\text{-an}}$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(\chi \epsilon_\sigma^{c_\sigma + 1})^{S\text{-an}}$ qui est surjective et dont le noyau est isomorphe à*

$$\mathrm{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma\text{-alg}} \otimes_K \mathrm{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S \setminus \{\sigma\}\text{-an}}.$$

Démonstration. — Posons $m = c_\sigma + 1$ et $\chi' = \chi \epsilon_\sigma^m$. Il faut vérifier que si $f \in \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$, $\mathfrak{z}_\sigma \cdot f(gb) = \chi'(b^{-1})(\mathfrak{z}_\sigma \cdot f)(g)$ pour tout $(g, b) \in G \times P$. Il suffit en fait de le vérifier pour $b \in T$ et $b \in N$. Commençons par $b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in T$.

$$\begin{aligned} u_\sigma^- \cdot f(gb) &= \frac{d}{dt} f(gb \exp(tu_\sigma^-))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(g \exp(\sigma(a^{-1}d)tu_\sigma^-)b) \\ &= \sigma(a^{-1}d)\chi(b^{-1})u_\sigma^- \cdot f(g) \end{aligned}$$

Et

$$\mathfrak{z}_\sigma \cdot f(gb) = \chi'(b^{-1})f(g)$$

car

$$\chi' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \sigma(ad^{-1})^m.$$

Choisissons maintenant $b \in N$, donc $b = \exp(au)$, $a \in L$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\sigma \cdot f(gb) &= \text{Ad}(\exp(au))(\mathfrak{z}_\sigma) \cdot f(g) \\ &= \exp(a\text{ad}(u)(\mathfrak{z}_\sigma)) \cdot f(g) \\ &= f(g) + a\text{ad}(u)(\mathfrak{z}_\sigma) \cdot f(g) + \frac{a^2}{2}\text{ad}(u)^2(\mathfrak{z}_\sigma) \cdot f(g) + \dots \end{aligned}$$

On a alors

$$[u, u_\sigma^-] = [u_\sigma, u_\sigma^-] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_\sigma = t_\sigma.$$

Le même calcul que dans [28] §6 montre que

$$\text{ad}(u)(\mathfrak{z}_\sigma) = m(u_\sigma^-)^{m-1}(t_\sigma - (m-1))$$

et

$$[\text{ad}(u)]^j(\mathfrak{z}_\sigma) \in U(\mathfrak{gl}_{2,K})(t_\sigma - c_\sigma) + U(\mathfrak{gl}_{2,K})u_\sigma^+$$

pour $j \geq 1$. Comme $u_\sigma \cdot f = 0$ et $t_\sigma \cdot f = c_\sigma f$, on a

$$\mathfrak{z}_\sigma(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \subset \text{Ind}_P^G(\chi \epsilon_\sigma^m)^{S-an}.$$

Pour les assertions restantes, nous utilisons l'isomorphisme topologique

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} & \simeq & C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \\ f & \longmapsto & ((x \mapsto f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi_L x & 1 \end{pmatrix})), (x \mapsto f(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w))). \end{array}$$

Sous ces identifications, il est facile de vérifier que le morphisme

$$\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \xrightarrow{\mathfrak{z}_\sigma} \text{Ind}_P^G(\chi \epsilon_\sigma^m)^{S-an}$$

devient

$$C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \xrightarrow{\left(\frac{\partial^m}{\partial z_\sigma^m}, -\frac{\partial^m}{\partial z_\sigma^m}\right)} C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K).$$

D'où la surjectivité.

Enfin, pour voir que $\text{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma\text{-alg}} \otimes \text{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S \setminus \{\sigma\}\text{-an}}$ est le sous-espace des vecteurs annulés par \mathfrak{z}_σ , il suffit de remarquer que l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme

$$\text{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma\text{-alg}} \otimes \text{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S \setminus \{\sigma\}\text{-an}} \simeq ((K_{c_\sigma}[z_\sigma] \otimes C^{S \setminus \{\sigma\}\text{-an}}(\mathcal{O}_L, K)))^2$$

où $K_{c_\sigma}[z_\sigma]$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur à c_σ . Il se trouve justement que d'après l'exemple 2.3 $K_{c_\sigma}[z] \otimes C^{S \setminus \{\sigma\}\text{-an}}(\mathcal{O}_L, K)$ est exactement l'ensemble des fonctions f de $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)$ telles que $\frac{\partial^m f}{\partial z_\sigma^m} = 0$. \square

Définissons une filtration décroissante sur $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ par

$$\text{Fil}^i(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \sum_{S' \subset \mathcal{P}(S, \chi), |S'|=i} \bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma.$$

Remarquons immédiatement qu'en utilisant la proposition 2.11, on a un isomorphisme

$$(3) \quad \bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{\sigma \in S'} \text{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg} \right) \otimes \text{Ind}_P^G(\chi^{S'})^{S \setminus S' - an}.$$

Si S' est une partie de $\mathcal{P}(S, \chi)$, on pose

$$\mathfrak{z}_{S'} = \prod_{\sigma \in S'} \mathfrak{z}_\sigma.$$

Il s'agit, d'après la proposition 2.11, d'une application surjective

$$\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \rightarrow \text{Ind}_P^G(\chi) \prod_{\sigma \in S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1} S^{-an}.$$

De plus, l'ordre dans le produit n'importe pas car tous les termes commutent deux à deux.

Théorème 2.12. — *Nous avons un isomorphisme G -équivariant*

$$\text{gr}^i(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S, \chi), |S'|=i} I_S(\chi) \prod_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi) \setminus S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1}$$

Démonstration. — Soit Z_i l'application

$$\bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S, \chi), |S'|=i} \mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S, \chi) \setminus S'} : \text{Fil}^i(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \rightarrow \bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S, \chi), |S'|=i} \text{Ind}_P^G(\chi) \prod_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi) \setminus S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1} S^{-an}.$$

Il est immédiat de remarquer que $\text{Fil}^{i+1}(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \subset \ker Z_i$, donc la flèche Z_i se factorise par $\text{gr}^i(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})$.

Remarquons que

$$Z_i \left(\bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma \right) = \mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S, \chi) \setminus S'} \left(\bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma \right).$$

Or d'après (3) et la proposition 2.11, on a

$$Z_i \left(\bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma \right) = \bigotimes_{\sigma \in S'} \text{Ind}_P^G(\chi_\sigma)^{\sigma-alg} \otimes \text{Ind}_P^G(\chi^{S'}) \prod_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi) \setminus S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1} S \setminus S' - an.$$

Nous avons donc prouvé la surjectivité. Il reste juste à prouver que le noyau de ce morphisme est exactement $\text{Fil}^{i+1}(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})$.

Soit $f \in \ker Z_i$. On peut écrire

$$f = \sum_{S' \subset \mathcal{P}(S, \chi), |S'|=i} f_{S'}$$

où $f_{S'} \in \bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma$. On a donc, pour tout $S' \subset \mathcal{P}(S, \chi)$ de cardinal i ,

$$\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S, \chi) \setminus S'} f_{S'} = 0.$$

Notons $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ les éléments de $\mathcal{P}(S, \chi) \setminus S'$. Par surjectivité de $\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S, \chi) \setminus (S' \cup \{\sigma_1\})}$, il existe $f_{S', 1} \in \bigcap_{\sigma \in S' \cup \{\sigma_1\}} \ker \mathfrak{z}_\sigma$ tel que $\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S, \chi) \setminus (S' \cup \{\sigma_1\})}(f_{S'} - f_{S', 1}) = 0$. Par itération on construit des fonctions $f_{S', j}$ pour $1 \leq j \leq r$ telles que

$$f_{S', j} \in \bigcap_{\sigma \in S' \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_j\}} \ker \mathfrak{z}_\sigma$$

et

$$\mathfrak{z}_{\mathcal{P}(S,\chi)\setminus(S'\cup\{\sigma_1,\dots,\sigma_j\})}(f_{S'} - f_{S',1} - \dots - f_{S',j}) = 0.$$

Ainsi on a

$$f_{S'} = \sum_{j=1}^r f_{S',j} \in \text{Fil}^{i+1} \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}.$$

□

D'après le corollaire 2.10, tous les morceaux apparaissant dans ces gradués sont topologiquement irréductibles. Excepté si $S' = S$, auquel cas on a $\chi = \chi_{alg}\chi_\infty$ où χ_{alg} est \mathbb{Q}_p -algébrique et χ_∞ lisse, et

$$\text{gr}^{|S|}(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \text{Ind}_P^G(\chi_{alg})^{\mathbb{Q}_p-alg} \otimes \text{Ind}_P^G(\chi_\infty)^\infty.$$

D'après le résultat principal de [24], et comme $\text{Ind}_P^G(\chi_{alg})^{\mathbb{Q}_p-alg}$ est irréductible, l'irréductibilité de cette représentation est équivalente à celle de $\text{Ind}_P^G(\chi_\infty)^\infty$. Or on sait que cette représentation est non scindée de longueur 2 (resp. 1), selon que χ_∞ est (resp. n'est pas) de la forme $(\psi \circ \det)$ ou $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \psi(ad)|ad^{-1}|$.

Dans le cas où le caractère est localement algébrique et $c_\sigma \in \mathbb{N}$ pour tout σ , on obtient les composantes de Jordan-Hölder de la représentation $\text{Ind}_P^G(\chi)^{\mathbb{Q}_p-an}$. En particulier la représentation de Steinberg \mathbb{Q}_p -analytique est de longueur $2^{[L:\mathbb{Q}_p]}$.

2.4. Entrelacements entre induites et filtration par le socle. — Soit χ un caractère localement S -analytique de T dans K^\times . La réciprocité de Frobenius ([22] 4.2.6) appliquée à l'induite $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ implique que pour toute représentation V localement S -analytique de G :

$$\text{Hom}_G(V, \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \text{Hom}_P(V, \chi) = \text{Hom}_T(H_0(N, V), \chi)$$

où $H_0(N, V)$ est l'espace des coinvariants selon N , c'est le plus grand quotient séparé de V sur lequel N agit trivialement, c'est aussi le quotient de V par l'adhérence $N(V)$ du sous-espace de V engendré par les $n \cdot v - v$ où $n \in N$ et $v \in V$. C'est une T -représentation localement S -analytique sur un espace de type compact.

Ainsi pour en savoir plus sur les entrelacements entre séries principales, il nous faut déterminer les T -représentations $H_0(N, V)$ lorsque V est une série principale.

Nous avons un morphisme P -équivariant

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} & \rightarrow & \bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)} \chi \prod_{\sigma \in S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1} \\ f & \mapsto & (((\mathfrak{z}_{S \setminus S'} \cdot f)(1))_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)}) \end{array}$$

où la représentation de droite est l'inflation de T à P . D'où un morphisme

$$J : H_0(N, \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) \rightarrow \bigoplus_{S' \subset \mathcal{P}(S,\chi)} \chi \prod_{\sigma \in S'} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1}.$$

Théorème 2.13. — *Le morphisme J est un P -isomorphisme.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu qu'il existe un isomorphisme

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} & \simeq & C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K) \\ f & \mapsto & ((x \mapsto f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi_L x & 1 \end{pmatrix}), (x \mapsto f \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w)). \end{array}$$

Notons $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_1$ le facteur de gauche isomorphe à $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)$ et $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2$ le facteur de droite.

Vu à travers cet isomorphisme, la flèche (4), est

$$\begin{aligned} C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_1 \oplus C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2 &\rightarrow \bigoplus_{S \subset \mathcal{P}} \chi \prod_{\sigma \in S} \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1} \\ (f_1, f_2) &\mapsto \left(\frac{\partial^{|S|} f_1}{\prod_{\sigma \in S} \partial z_\sigma^{c_\sigma+1}}(1) \right)_{S \subset \mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Il est donc déjà clair que cette flèche est surjective, il reste à montrer l'injectivité. Pour une représentation localement analytique V , notons $N(V)$ l'adhérence du sous-espace engendré par les vecteurs de la forme $nv - v$ pour $n \in N$ et $v \in V$. Remarquons que pour tout σ et tout couple (f_1, f_2) , $u_\sigma \cdot (f_1, f_2)$ est dans $N(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})$. Comme u_σ agit comme $\frac{\partial}{\partial z_\sigma}$ sur $C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2$ et que cet opérateur est surjectif, on a déjà

$$C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_2 \subset N(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}).$$

Soit U un ouvert fermé de \mathcal{O}_L ne contenant pas 0. Nous allons montrer que $N(C^{S-an}(U, K))$ est égal à $C^{S-an}(U, K)$, pour cela nous allons prouver que pour tout $a \in U$, il existe un voisinage W de a tel que $N(C^{S-an}(U, K))$ contienne toutes les fonctions de la forme $1_W(z-a)^i$ pour $i \in \mathbb{N}^{|S|}$.

Un petit calcul montre que

$$u_\sigma \cdot f = \pi_L \left(-(\sigma(z)c_\sigma f + \sigma(z)^2 \frac{\partial f}{\partial z_\sigma}) \right).$$

Il nous faut donc prouver qu'il existe un $r > 0$ assez petit, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation différentielle

$$(z-a)^n = \pi_L \left(-z_\sigma c_\sigma f + z_\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial z_\sigma} \right)$$

ait une solution dans l'anneau des séries formelles en les variables z_σ , convergente sur $D(a, r)$. Il suffit en fait de le vérifier pour une seule variable, z_σ , car les autres n'interviennent pas dans l'équation aux dérivées partielles. Il s'agit donc de prouver qu'il existe un $r > 0$ tel que toutes les équations différentielles

$$(6) \quad z^2 f'(z) - czf(z) = (z-a)^n$$

aient une solution développable en série entière dans le disque $D(a, r)$. Cherchons une solution sous la forme $z^c f(z)$, l'équation (6) se ramène donc à

$$f'(z) = (z-a)^n / z^c.$$

Or cette fraction rationnelle est développable en série entière sur tout disque ouvert $D(a, r)$ ne contenant pas 0, une primitive convergera donc sur tout disque de rayon $< r$.

Remarquons ensuite que pour $\underline{m} \in \mathbb{N}^d$,

$$u_\sigma \cdot z^{\underline{m}} = -\pi_L(c_\sigma + m_\sigma) z^{\underline{m}+(0, \dots, 1, \dots, 0)}.$$

Ainsi $z^{\underline{m}} \in N(C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K))$ sauf si pour tout σ , $m_\sigma = 0$ ou $m_\sigma - 1 = c_\sigma$, c'est-à-dire $\underline{m} = (1_{S'}(\sigma)(c_\sigma + 1))_{\sigma \in \mathcal{P}}$ pour un $S' \subset \mathcal{P}(S, \chi)$ (où $1_{S'}$ est la fonction indicatrice de S' dans \mathcal{P}).

Prenons maintenant $f \in C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_1$ telle que $J(f) = 0$. Alors quitte à ajouter à f une fonction à support disjoint de $\{0\}$, on peut supposer que f est à support dans un voisinage de 0 où elle est développable en série entière

$$f(z) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{m}} z^{\underline{m}},$$

Les conditions $\mathfrak{z}_\sigma \cdot f(1) = 0$ impliquent alors $a_{\underline{m}} = 0$ si \underline{m} est de la forme $\underline{m} = (1_{S'}(\sigma)(c_\sigma + 1))_{\sigma \in \mathcal{P}}$ pour un $S' \subset \mathcal{P}(S, \chi)$. Mais nous avons vu qu'il s'agit exactement des monômes

qui ne sont pas dans $N(C^{S-an}(\mathcal{O}_{\mathcal{L}}, \mathcal{K})_1)$. Ainsi $f \in N(C^{S-an}(\mathcal{O}_L, K)_1)$, et le théorème est démontré. \square

Corollaire 2.14. — *Si χ est un caractère localement S -analytique de T , tout endomorphisme continu G -équivariant de $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ est scalaire.*

Corollaire 2.15. — *Si $S \neq \emptyset$,*

$$H_0(N, I_S(\chi)) = \chi.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que $H_0(\mathfrak{n}, I_S(\chi)) = \chi$. Mais la même technique que dans la preuve de la proposition 2.9 montre que

$$H_0(\mathfrak{n}, I_S(\chi)) = H_0(\mathfrak{n}_{\mathcal{P}(S, \chi)}, V(\prod_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi)} \chi_{\sigma})) \otimes H_0(\mathfrak{n}_{S^c}, \text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{S^c-an}).$$

On conclut alors grâce au théorème 2.13 et à la proposition 2.8. \square

Corollaire 2.16. — *Les représentations de Steinberg ne sont jamais des sous-objets d'induites localement analytiques.*

Démonstration. — En effet, l'exactitude à droite du foncteur des N -coinvariants montre que

$$H_0(N, \text{Ind}_P^G(1)^{S-an}/1) \simeq \bigoplus_{S' \subset S, S' \neq \emptyset} \prod_{\sigma \in S'} \epsilon_{\sigma}.$$

Si la représentation de Steinberg S -analytique était sous-objet d'une induite, ce serait dans l'induite de l'un de ces caractères. Or il est très facile de voir qu'aucune de ces induites ne contient de vecteur lisse, et donc ne peut contenir la représentation de Steinberg lisse. \square

Remarquons enfin que notre filtration est la filtration par le socle. Si V est une représentation localement analytique admissible de $GL_2(L)$ de longueur finie, on définit par récurrence son n -socle de la façon suivante. Le 0-socle est le socle classique, c'est-à-dire la plus grande sous-représentation somme directe de représentations irréductibles. Le n -socle est le socle du quotient de V par $\text{Fil}_{n-1}V$. On définit alors Fil_n comme étant l'image réciproque dans V du n -socle. La filtration $(\text{Fil}_n V)$ est appelée filtration par le socle et son n -ième gradué est le n -socle de V . Remarquons que si $\mathcal{P}(S, \chi) = S$, $\bar{\chi}$ est un caractère lisse, on note $\text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{\infty}$ l'induite lisse. Dans ce cas on note aussi

$$\chi_{alg} = \prod_{\sigma \in S} \chi_{\sigma}$$

et

$$\chi = \chi_{alg} \bar{\chi}.$$

Théorème 2.17. — — *Si $\mathcal{P}(S, \chi) \subsetneq S$ ou $\text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{\infty}$ est irréductible, alors, pour tout $n \geq 0$,*

$$\text{Fil}_n(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \text{Fil}^{|\mathcal{P}(S, \chi)|-n}(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}).$$

– *Si $\mathcal{P}(S, \chi) = S$ et $\text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{\infty}$ est réductible, alors*

$$\text{Fil}_{n+1}(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = \text{Fil}^{|\mathcal{P}(S, \chi)|-n}(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an})$$

si $n \geq 1$,

$$\text{Fil}_0(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = V(\chi_{alg}) \otimes \text{soc}(\text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{\infty})$$

$$\text{Fil}_1(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = V(\chi_{alg}) \otimes \text{cosoc}(\text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^{\infty}).$$

Démonstration. — Commençons par le cas où $\mathcal{P}(S, \chi) \neq S$ ou $\text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^\infty$ irréductible. On voit alors par réciprocity de Frobenius et le corollaire 2.15 que $I_S(\chi)$ est le seul sous-objet irréductible de $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$. Le quotient se plonge alors dans

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi)} \text{Ind}_P^G(\chi \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1})^{S-an},$$

et de même on voit que le socle de cette représentation est

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}(S, \chi)} I_S(\chi \epsilon_\sigma^{c_\sigma+1}).$$

On continue de la même façon. Le deuxième cas se traite de façon identique, il suffit juste de prendre garde à ce que, cette fois-ci,

$$\text{Fil}^{|\mathcal{P}(S, \chi)|}(\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}) = V(\chi_{alg}) \otimes \text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^\infty,$$

et la représentation lisse $\text{Ind}_P^G(\bar{\chi})^\infty$ est de longueur 2 et non scindée. \square

2.5. Preuve du critère d'irréductibilité. — La preuve est en réalité la même que celle de Frommer, Orlik et Strauch ([23]), une fois certains faits généralisés au cas localement S -analytique. Ce sont ces faits que nous prouvons ici.

Premièrement le même raisonnement que dans [23] 3.2.2 nous autorise à considérer que G est un groupe de Lie L -analytique compact.

2.5.1. Un peu d'analyse fonctionnelle p -adique. — On fixe désormais S un ensemble fini de plongements de L dans K et on désigne par I le noyau de la surjection

$$D(G_0, K) \longrightarrow D_S(G, K),$$

G_0 étant la restriction des scalaires de G à \mathbb{Q}_p .

Proposition 2.18. — *L'idéal I coïncide avec l'idéal à droite fermé engendré par \mathfrak{I}_S .*

Démonstration. — Par bidualité de $C^{\mathbb{Q}_p-an}(G_0, K)$, il suffit de prouver que si f est une fonction appartenant au dual de l'idéal fermé engendré par \mathfrak{I}_S , f appartient à $C^{S-an}(G, K)$. Pour tout $\mathfrak{r} \in \mathfrak{I}_S$, on a

$$(\mathfrak{r} \star \delta_g) \cdot f = 0$$

c'est-à-dire

$$(\mathfrak{r} \cdot f)(g) = 0$$

et ceci pour tout g , donc $\mathfrak{r} \cdot f = 0$ et $f \in C_S^{an}(G, K)$. \square

D'après [29] théorème 5.1, l'algèbre $D(G_0, K)$ est de Fréchet-Stein et l'idéal à droite engendré par \mathfrak{I}_S est de type fini, et donc fermé.

Soient v_1, \dots, v_d une base de \mathcal{O}_L sur \mathbb{Z}_p et $\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_m$ une base de \mathfrak{g} sur L . Il est prouvé dans [21] (1.3.5 et 1.4.2) que quitte à multiplier les \mathfrak{r}_i par des scalaires, il existe un sous-groupe ouvert L -analytique H de G tel que si Λ désigne le \mathbb{Z}_p -réseau de \mathfrak{g} engendré par les $v_i \mathfrak{r}_j$, la base

$$(v_1 \mathfrak{r}_1, \dots, v_d \mathfrak{r}_m)$$

définit un isomorphisme

$$\Lambda \simeq H$$

et H est un pro- p -groupe uniforme (voir [14] pour la définition d'un groupe uniforme).

On obtient ainsi un système de générateurs topologiques de H

$$(h_{ij}) = (\exp(v_1 \mathbf{r}_1), \dots, \exp(v_d \mathbf{r}_m)).$$

Posons $b_{ij} = h_{ij} - 1$. Il est prouvé par Schneider et Teitelbaum ([29] §4) que tout élément de l'algèbre $D(H_0, K)$ est de façon unique une série convergente

$$\sum_{\alpha} d_{\alpha} b^{\alpha},$$

où $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{N}^{dm}$, telle que la famille $(|d_{\alpha}| r^{|\alpha|})$ est bornée pour tout $0 < r < 1$. Les normes $\|\cdot\|_r$ sur $D(H_0, K)$ sont définies par

$$\|\lambda\|_r = \sup_{\alpha} |d_{\alpha}| r^{|\alpha|}.$$

Pour $\frac{1}{p} < r < 1$ elles sont multiplicatives ([29] proposition 4.2). On définit la norme q_r sur $D(G_0, K)$ en utilisant la décomposition

$$D(G_0, K) = \bigoplus_{g \in R} \delta_g \star D(H_0, K)$$

où R est un système de représentants de G/H et en prenant la norme sup associée (elle ne dépend pas des choix des g).

Notons, pour $0 < r < 1$, \bar{q}_r la norme obtenue sur $D_S(G, K)$ par passage au quotient de la norme q_r . D'après [29] théorème 5.1, $D(G_0, K)$ munie de la famille (q_r) est une algèbre de Fréchet-Stein. D'après la proposition 3.7 de [29], c'est également le cas de $D_S(G, K)$ munie de la famille (\bar{q}_r) .

On note $D(G_0, K)_r$ le complété de $D(G_0, K)$ pour la norme q_r et $D_S(G, K)_r$ celui de $D_S(G, K)$ pour la norme \bar{q}_r . Alors $D_S(G, K)_r$ est isomorphe comme K -algèbre de Banach au quotient de $D(G_0, K)_r$ par l'adhérence I_r de I dans $D(G_0, K)_r$ et

$$D_S(G, K) \simeq \varprojlim_r D_S(G, K)_r.$$

Fixons $\frac{1}{p} < r < 1$. Soit $U(\mathfrak{g}_0, K)_r$ l'adhérence de $U(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ dans $D(H_0, K)_r$ (et donc aussi dans $D(G_0, K)_r$). On a l'égalité dans $D(H_0, K)$:

$$v_i \mathbf{r}_j = \log(1 + b_{ij}).$$

Si $\beta = (\beta_{ij}) \in \mathbb{N}^{dm}$, on pose $|\beta| = \sum \beta_{ij}$,

$$\mathfrak{Y}^{\beta} = (v_1 \mathbf{r}_1)^{\beta_{11}} (v_2 \mathbf{r}_1)^{\beta_{21}} \dots (v_d \mathbf{r}_m)^{\beta_{dm}} \in U(\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K),$$

et

$$l_{i,j} = \|v_i \mathbf{r}_j\|_r.$$

Les lemmes 1 à 3 de [16] §1.4, impliquent que $D(H_0, K)_r$ est un $U(\mathfrak{g}_0, K)_r$ -module libre de type fini dont une base est constituée des $b_{ij}^{\alpha_{ij}}$ où α_{ij} parcourt les entiers $0 \leq \alpha_{ij} < l_{i,j}$. De plus le corollaire 1 de [16] 1.4 implique que

$$U(\mathfrak{g}_0, K)_r = \left\{ \sum_{\beta} d_{\beta} \mathfrak{Y}^{\beta}, |d_{\beta}| \|\mathfrak{Y}^{\beta}\|_r \rightarrow 0 \right\}$$

et que la norme $\|\cdot\|_r$ s'exprime par

$$\left\| \sum_{\beta} d_{\beta} \mathfrak{Y}^{\beta} \right\|_r = \sup_{\beta} |d_{\beta}| \|\mathfrak{Y}^{\beta}\|_r.$$

Remarquons que par multiplicativité de $\|\cdot\|_r$, $\|\mathfrak{Y}^{\beta}\|_r$ ne dépend que de $|\beta|$.

Proposition 2.19. — $I \cap (U(\mathfrak{g}_0) \otimes K) = U(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{I}_S$.

Démonstration. — Soit $U(\mathfrak{g}_0)_n$ le sous-espace des éléments de degré $\leq n$. Nous allons prouver que pour tout n , $U(\mathfrak{g}_0)_{n-1}\mathfrak{I}_S = I \cap U(\mathfrak{g}_0)_n$. Il est classique ([28] lemme 2.4), que l'inclusion de $U(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ dans $D(G_0, K)$ induit un isomorphisme entre l'espace $U(\mathfrak{g}_0)_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ et le dual de l'espace des polynômes de degré $\leq n$ en les b_{ij} . De plus le sous-espace de ces polynômes qui sont S -analytiques est de dimension N , la dimension d'un espace de polynômes à $m|S|$ indéterminées de degré $\leq n$. Ainsi la dimension de $(U(\mathfrak{g}_0)_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)/(I \cap U(\mathfrak{g}_0)_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)$ est supérieure ou égale à N . Or il s'agit justement de la dimension de $U(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{I}_S)_n = U(\mathfrak{g}_0)_{n-1}/U(\mathfrak{g}_0)_n\mathfrak{I}_S$. Comme $U(\mathfrak{g}_0)_{n-1}\mathfrak{I}_S \subset I \cap U(\mathfrak{g}_0)_n$, on a l'égalité. \square

Ainsi la composée

$$U(\mathfrak{g}_0) \otimes_{K_0} K \subset D(H_0, K) \rightarrow D_S(H, K)$$

induit une injection

$$U(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{I}_S) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \hookrightarrow D_S(H, K).$$

On note $U_S(\mathfrak{g}, K)_r$ son adhérence pour la norme \bar{q}_r . Cet espace est encore isomorphe, comme K -algèbre de Banach, à $U(\mathfrak{g}_0, K)_r/J_r$ où $J_r = I_r \cap U(\mathfrak{g}_0, K)_r$.

L'isomorphisme $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{I}_S \simeq \mathfrak{g}_S = \bigoplus_{\sigma \in S} \mathfrak{g}_\sigma$ induit un isomorphisme

$$U(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{I}_S) \simeq \bigotimes_{\sigma \in S} U(\mathfrak{g}_\sigma).$$

Soit \mathcal{R} le réseau image de $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$ dans l'algèbre déployée K^d . Il est engendré comme \mathcal{O}_K -module par les $\theta(v_i)$. Soient $i_1 < \dots < i_{|S|}$ tels que les $\theta(v_{i_j})$ forment une \mathcal{O}_K -base du réseau \mathcal{R} . On pose $\mathfrak{r}_{kj} = \theta(v_{i_k})\mathfrak{r}_j \in \mathfrak{g}_S$ pour $1 \leq k \leq |S|$ et $1 \leq j \leq m$. Les \mathfrak{r}_{kj} forment alors une base de \mathfrak{g}_S sur K . Pour $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{N}^{|S|m}$, on pose

$$\mathfrak{x}^\alpha = \mathfrak{r}_{11}^{\alpha_{11}} \mathfrak{r}_{21}^{\alpha_{21}} \dots \mathfrak{r}_{|S|m}^{\alpha_{|S|m}} \in U(\mathfrak{g}_S),$$

ils forment une base de $U(\mathfrak{g}_S)$.

Reprenons les notations du théorème 2.6. Soit W le groupe de Weyl de \mathfrak{G} par rapport à \mathfrak{T} et $W_P \subset W$ le groupe de Weyl de \mathfrak{M} . Soit encore U^- le groupe des L -points du radical unipotent du parabolique opposé à \mathfrak{P} . Comme dans [23], section 3.2.1, on se ramène au cas où \mathfrak{G} est semi-simple simplement connexe. On choisit un sous-groupe parahorique B de G comme dans la section 3.2.2 de [23]. On pose alors, pour $w \in W_p \backslash W/W_P$,

$$P_w^+ = B \cap wPw^{-1}, \quad U_w^- = B \cap wU^-w^{-1},$$

et $\rho^w = \rho(w^{-1} \cdot w)$ la représentation de P_w^+ . Il faut prouver que pour $r < 1$ suffisamment proche de 1, les $D_S(B, K)_r$ -modules $D_S(B, K)_r \otimes_{D_S(P_w^+, K)_r} V_w'$ sont simples.

On note $m_S^w(\rho)$ le $U(\mathfrak{g}_S)$ -module

$$U(\mathfrak{g}_S) \otimes_{U(\mathfrak{p}_{w,S})} (\rho^w)'$$

On peut montrer que pour r assez proche de 1, il s'injecte dans $D_S(G, K)_r \otimes_{D_S(P_w, K)_r} V_w'$ et on note $m_S^w(\rho)_r$ son adhérence dans cet espace.

Pour que la stratégie de l'article [23] s'applique au cas S -analytique, on constate que les seuls résultats à changer sont les suivants :

- le lemme 3.4.4 de [23], où l'on a remplacé $m_r^w(\rho)$ par $m_S^w(\rho)_r$,
- la proposition 3.3.5 de [23] en remplaçant l'anneau $D_r(U_w^-, K)$ par $D_S(U_w^-, K)_r$.

Ce sont ces deux généralisations que nous prouvons à partir de maintenant.

2.5.2. *Le lemme 3.4.4.* — Il se déduit du résultat suivant, généralisant un théorème de Kohlhaase ([21] théorème 1.4.2).

Théorème 2.20. — *Pour $\frac{1}{p} < r < 1$, $D_S(H, K)_r$ est un $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$ -module libre de type fini dont une base est donnée par les b^α pour $0 \leq \alpha_{ij} < l_{ij}$. De plus $U_S(\mathfrak{g}, K)_r$ est l'ensemble des séries*

$$\sum_{\gamma} c_{\gamma} \mathfrak{X}^{\gamma}$$

telles que $|c_{\gamma}|r^{|\gamma|}$ tend vers 0 lorsque $|\gamma|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. — Posons

$$\mathcal{B} = \{b^\alpha, 0 \leq \alpha_{ij} < l_{ij}\}.$$

Soit $J_r = I_r \cap U(\mathfrak{g}_S, K)_r$. Pour prouver la liberté du module, il suffit de prouver que

$$I_r = \bigoplus_{b \in \mathcal{B}} b J_r.$$

L'inclusion \supset est évidente. L'autre inclusion se prouve en remarquant que le membre de droite est fermé ($D(H_0, K)_r$ est une algèbre de Banach noethérienne) et contient $\sum_{g \in H} \mathfrak{I}_S \star \delta_g$ qui est dense dans I par la proposition 2.18, donc dans I_r . Remarquons au passage que le même raisonnement s'applique en remplaçant J_r par l'adhérence de J dans $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$, ce qui implique que J est dense dans J_r .

L'application $\tau : D(H_0, K) \rightarrow D_S(H, K)$ induit

$$\tau_r : U(\mathfrak{g}_0, K)_r \rightarrow U(\mathfrak{g}_S, K)_r.$$

Cette flèche est surjective car son image est complète, donc fermée dans $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$ et contient une partie dense. Son noyau est J_r . Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq d$,

$$\tau_r(\mathfrak{x}_{ij}) = \sum_{k=1}^{|\mathcal{S}|} a_{kj} \mathfrak{r}_{kj},$$

avec $a_{kj} \in \mathcal{O}_K$. Comme \mathfrak{r}_{kj} et \mathfrak{r}_{ij} commutent pour $i \neq k$, on en déduit que $\tau_r(\mathfrak{Y}^\beta)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans \mathcal{O}_K d'éléments \mathfrak{X}^α où $|\alpha| = |\beta|$. Autrement dit

$$\tau_r(\mathfrak{Y}^\beta) = \sum_{|\alpha|=|\beta|} c(\beta, \alpha) \mathfrak{X}^\alpha$$

avec $c(\beta, \alpha) \in \mathcal{O}_K$. Si un élément $\sum c_\beta \mathfrak{Y}^\beta \in U(\mathfrak{g}_0, K)_r$, on a

$$\tau_r\left(\sum_{\beta} c_{\beta} \mathfrak{Y}^{\beta}\right) = \sum_{\gamma} \left(\sum_{|\beta|=|\gamma|} c(\beta, \gamma) c_{\beta}\right) \mathfrak{X}^{\gamma},$$

et

$$\left| \sum_{|\beta|=|\gamma|} c(\beta, \gamma) c_{\beta} r^{|\gamma|} \right| \leq \sup_{|\beta|=|\gamma|} |c_{\beta}| \|\mathfrak{Y}^{\beta}\|_r \rightarrow_{|\gamma| \rightarrow +\infty} 0.$$

Réciproquement, tout élément de la forme

$$\sum c_{\gamma} \mathfrak{X}^{\gamma}$$

où $|c_{\gamma}| r^{|\gamma|} \rightarrow 0$ est dans $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$. □

Proposition 2.21. — *La norme ν_r sur $U(\mathfrak{g}_S, K)_r$, obtenue comme quotient de la norme $\|\cdot\|_r$, est donnée par*

$$\nu_r \left(\sum_{\gamma} c_{\gamma} \mathfrak{X}^{\gamma} \right) = \sup_{\gamma} |c_{\gamma}| r^{\gamma}.$$

Démonstration. — Nous avons prouvé au cours de la démonstration précédente que l'idéal J est dense dans J_r . Soit $\lambda = \sum_{\gamma} c_{\gamma} \mathfrak{X}^{\gamma}$. Pour $\epsilon > 0$, on peut trouver N assez grand tel que

$$\sup_{|\gamma| \leq N} |c_{\gamma}| r^{\gamma} = \sup_{\gamma} |c_{\gamma}| r^{\gamma}$$

et $\nu_r(\sum_{|\gamma| > N} c_{\gamma} \mathfrak{X}^{\gamma}) \leq \epsilon$. Il existe un élément $\mu = \sum_{\beta} a_{\beta} \mathfrak{Y}^{\beta}$ de $U(\mathfrak{g}_0) \otimes K$ tel que $\tau_r(\mu) = \sum_{|\gamma| \leq N} c_{\gamma} \mathfrak{X}^{\gamma}$. Comme J est dense dans J_r , on peut même choisir μ tel que

$$\nu_r(\lambda) \geq \|\mu\|_r - \epsilon.$$

Comme les \mathfrak{X}^{α} forment une base de $U(\mathfrak{g}_S)$, on a

$$c_{\gamma} = \sum_{|\beta| = |\gamma|} c(\beta, \gamma) a_{\beta}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\beta} a_{\beta} \mathfrak{Y}^{\beta} \right\|_r &\geq \sup_{|\gamma| \leq N} \left| \sum_{|\beta| = |\gamma|} c(\beta, \gamma) a_{\beta} \right| r^{|\beta|} \\ &= \sup_{|\gamma| \leq N} |c_{\gamma}| r^{|\gamma|} \\ &= \sup_{\gamma} |c_{\gamma}| r^{\gamma} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sup_{\gamma} |c_{\gamma}| r^{\gamma} \geq \nu_r(\lambda) \geq \sup_{\gamma} |c_{\gamma}| r^{\gamma} - \epsilon.$$

□

Une conséquence de cette proposition est que la décomposition des éléments de $U_S(\mathfrak{g}, K)_r$ donnée par le théorème 2.20 est unique.

On note \mathfrak{t} l'algèbre de Lie du tore T_0 (la restriction à \mathbb{Q}_p de T). Elle agit par restriction sur $m_S^w(\rho)_r$. La généralisation du lemme 3.4.4 de [23] est alors la suivante

Corollaire 2.22. — *Pour tout caractère λ de \mathfrak{t} , le sous-espace λ -isotypique de $m_S^w(\rho)_r$ est de dimension finie.*

Démonstration. — Le $U(\mathfrak{g}_S)_r$ -module $m_S^w(\rho)_r$ est isomorphe à $U_S(\mathfrak{u}_{w,S}^-)_r \otimes_K V'_w$ comme $U(\mathfrak{p}_{w,S})$ -module. Nous pouvons choisir la L -base (\mathfrak{r}_i) de \mathfrak{u}_w^- constituée de vecteurs propres pour l'action adjointe de \mathfrak{t} . Ainsi dans la base (\mathfrak{X}^{α}) , on a

$$\mathrm{ad}(x) \cdot \mathfrak{X}^{\alpha} = \sum_{|\alpha'| = |\alpha|} \gamma_{\alpha, \alpha'}(x) \mathfrak{X}^{\alpha'},$$

avec $\gamma_{\alpha, \alpha'}(x) \in K$, lorsque $x \in \mathfrak{t}$. Soit aussi (e_j) une base de V'_w constituée de vecteurs propres. Si

$$\mu = \sum_{\alpha, 1 \leq i \leq k} d_{\alpha, i} \mathfrak{X}^{\alpha} \otimes e_i \in m_S^w(\rho)_r$$

est un vecteur de poids λ , on doit avoir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{ad}(x) \cdot \left(\sum_{|\alpha|=n, 1 \leq i \leq k} d_{\alpha,i} \mathfrak{X}^\alpha \otimes e_i \right) = \lambda(x) \left(\sum_{|\alpha|=n, 1 \leq i \leq k} d_{\alpha,i} \mathfrak{X}^\alpha \otimes e_i \right).$$

Mais on peut alors diagonaliser la représentation de \mathfrak{t} sur le K -espace vectoriel de dimension finie engendré par les \mathfrak{X}^α , $|\alpha| = n$. Ainsi on a une égalité

$$\lambda = \gamma_i + \sum n_j \alpha_j$$

où les α_i sont des poids de l'action de \mathfrak{t} sur \mathfrak{u}_w^- et $n = \sum_j n_j$. Or il n'y a qu'un nombre fini de telles écritures, donc un nombre fini de n tels que $d_{i,\alpha} \neq 0$ (où $n = |\alpha|$). Ainsi le sous-espace λ -isotypique de $m_S^w(\rho)_r$ est de dimension finie. \square

2.5.3. La proposition 3.3.5. — Pour $\frac{1}{p} < r < 1$, on note $\|\cdot\|_r$ la norme quotient sur $D_S(H, K)$ obtenue à partir de $\|\cdot\|_r$ sur $D(H_0, K)$. Elle induit une filtration décroissante sur l'anneau $D_S(H, K)_r$ de la façon suivante

$$\mathrm{Fil}^s D_S(H, K)_r = \{x \in D_S(H, K)_r, \overline{\|x\|}_r \leq p^{-s}\}.$$

On note $gr \cdot D_S(H, K)_r$ le groupe gradué associé. La norme $\overline{\|\cdot\|}_r$ étant sous-multiplicative, il est muni d'une structure de K -algèbre. Si $x \in D_S(H, K)_r$, il existe un unique s tel que $\overline{\|x\|}_r = p^{-s}$. On appelle partie principale de x et on note $[x]$, l'image de x dans $gr^s D_S(H, K)_r$. On veut montrer qu'il existe $\frac{1}{p} < r < 1$ pour lequel $gr \cdot D_S(H, K)_r$ est isomorphe à un anneau de polynômes.

D'après [29] théorème 4.5, on a un isomorphisme

$$gr \cdot D(H_0, K)_r = (gr \cdot K)[X_{11}, \dots, X_{dm}]$$

où X_{ij} est la partie principale de b_{ij} .

Supposons $r^\kappa < p^{-\frac{1}{p-1}}$ où $\kappa = 2$ si $p = 2$ et $\kappa = 1$ dans les autres cas. Les calculs de [25] 3.3.1 montrent que si $t = \sum a_{ij} v_i \mathfrak{t}_j$ est un élément de $\mathfrak{g}_0 \otimes K \subset D(H_0, K)_r$ tel que $\|t\|_r = 1$, sa partie principale dans $gr \cdot D(H_0, K)_r$ est $\sum_{ij} \overline{a_{ij}} X_{ij}$, où $\overline{a_{ij}}$ est la réduction de a_{ij} modulo l'idéal maximal de \mathcal{O}_K .

Choisissons une base $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_l\}$ de \mathfrak{I}_S constituée d'éléments de norme 1. Alors le raisonnement de la partie 3.3.2 de [25] s'applique à notre situation pour montrer que les $[F]$ pour $F \in \mathcal{F}$ engendrent $gr \cdot I_r$ en tant que $gr \cdot D(H_0, K)_r$ -module. Comme la filtration est discontinue et K de valuation discrète, on a un isomorphisme

$$gr \cdot (D_S(H, K)_r) \simeq gr \cdot (D(H_0, K)_r) / gr \cdot I_r.$$

L'anneau $gr \cdot K$ est isomorphe à $\mathbb{F}_K[X, X^{-1}]$ et comme les $\sigma(F_i)$ appartiennent à $\mathbb{F}_K[X_{ij}]$,

$$gr \cdot D_S(H, K)_r \simeq K[X, X^{-1}] \otimes_K (K[X_{ij}] / \langle \sigma(F_i) \rangle).$$

L'anneau $K[X_{ij}] / \langle \sigma(F_i) \rangle$ est le quotient de $K[X_{ij}]$ par un idéal engendré par des formes linéaires, c'est donc lui-même un anneau de polynômes à coefficients dans $gr \cdot K$. Ainsi l'anneau $gr \cdot D_S(H, K)_r$ est un anneau de polynômes à coefficients dans $K[X, X^{-1}]$ et l'anneau $D_S(H, K)_r$ est intègre. Un examen de la preuve de la proposition 3.3.5 de [23] montre que cela suffit à prouver notre généralisation.

Proposition 2.23. — Pour $\frac{1}{p} < r < 1$ assez proche de 1, l'anneau $D_S(U_w^-, K)_r$ est intègre.

3. Cohomologie localement analytique

3.1. Généralités. — Cette partie est consacrée aux définitions et résultats sur la cohomologie localement analytique des groupes de Lie L -analytiques dont nous aurons besoin par la suite. L'approche est très naïve, mais nous suffit dans la mesure où nous considérerons uniquement des Ext¹. Une théorie beaucoup plus générale de la cohomologie des groupes de Lie L -analytiques est développée par Jan Köhlhaase dans [20].

Nous fixons K une extension finie de L et G un groupe de Lie L -analytique. Soit \mathcal{C} la catégorie dont les objets sont les représentations localement L -analytiques sur des K -espaces vectoriels et les flèches les applications continues G -équivariantes. Autrement dit, il s'agit des représentations S -analytiques où S est le singleton contenant le plongement de L dans K . Nous nous autorisons, pour ce chapitre seulement, à écrire $L - an$ au lieu de $S - an$.

Soit (ρ, V) un objet de \mathcal{C} . Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $C^n(G, V)$ l'ensemble des applications localement L -analytiques de G^n dans V et ∂_n l'application de $C^n(G, V)$ dans $C^{n+1}(G, V)$ définie par

$$\begin{aligned} \partial_n f(g_0, \dots, g_n) &= g_0 f(g_1, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_{i-1} g_i, \dots, g_n) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_0, \dots, g_{n-1}), \end{aligned}$$

pour (g_0, \dots, g_n) dans G^{n+1} .

On note alors $Z^n(G, V)$ le noyau de ∂_n , $B^n(G, V)$ l'image de ∂_{n-1} et

$$H_{an}^n(G, V) = Z^n(G, V) / B^n(G, V),$$

on l'appelle le n -ième groupe de cohomologie localement analytique de V .

Soient G et H deux groupes localement L -analytiques, (ρ, V) et (ρ', W) deux représentations localement K -analytiques de G et H respectivement. Soient φ un morphisme de groupes localement analytiques de H dans G et f une application linéaire continue de V dans W tels que

$$\rho' \circ (id \times f) = f \circ \rho \circ (\varphi \times id) : H \times V \rightarrow W.$$

L'application

$$\begin{aligned} C^n(G, V) &\longrightarrow C^n(H, W) \\ c &\longmapsto f \circ c \circ \varphi \end{aligned}$$

induit un morphisme $(\varphi, f)_*$ de $H_{an}^n(G, V)$ dans $H_{an}^n(H, W)$. Si $\varphi = id$, on le note f_* .

Si H est un sous-groupe localement L -analytique de G , on note res_H^G l'application $(\varphi, f)_*$ où φ est l'inclusion de H dans G et f l'identité.

Si H est distingué dans G on note inf_H^G l'application $(\varphi, f)_*$ dans le cas où φ est l'application quotient de G dans G/H et f l'inclusion de $H_{an}^0(H, V)$ dans V .

Comme en cohomologie des groupes classiques, on a la suite exacte d'inflation-restriction.

Proposition 3.1. — *Si H est un sous-groupe localement L -analytique distingué de G , on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow H_{an}^1(G/H, H_{an}^0(H, V)) \xrightarrow{inf_H^G} H_{an}^1(G, V) \xrightarrow{res_H^G} H_{an}^0(G/H, H_{an}^1(H, V)).$$

Démonstration. — Exactement comme dans le cas de la cohomologie des groupes usuelle. \square

Corollaire 3.2. — Si V ou W est de dimension finie, la représentation $(\rho \otimes \rho', V \otimes W)$ est dans \mathcal{C} et l'application

$$(H_{an}^1(G, V) \otimes H_{an}^0(H, W)) \oplus (H_{an}^0(G, V) \otimes H_{an}^1(H, W)) \xrightarrow{\text{inf}_H^{G \times H} \oplus \text{inf}_G^{G \times H}} H_{an}^1(G \times H, V \otimes W)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On applique la suite exacte d'inflation-restriktion. \square

Proposition 3.3. — Soit

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte stricte de représentations localement analytiques de G . Supposons de plus qu'il existe une section continue (non nécessairement G -équivariante) s de β . On peut construire une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{an}^i(G, V_1) \xrightarrow{\alpha_*} H_{an}^i(G, V_2) \xrightarrow{\beta_*} H_{an}^i(G, V_3) \xrightarrow{\delta_i} H_{an}^{i+1}(G, V_1) \\ \xrightarrow{\alpha_*} H_{an}^{i+1}(G, V_2) \xrightarrow{\beta_*} H_{an}^{i+1}(G, V_3) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Démonstration. — De l'existence de s on déduit que la suite

$$0 \rightarrow C^n(G, V_1) \xrightarrow{\alpha_*} C^n(G, V_2) \xrightarrow{\beta_*} C^n(G, V_3) \rightarrow 0$$

est exacte, et on peut donc appliquer le lemme du serpent au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^n(G, V_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & C^n(G, V_2) & \xrightarrow{\beta_*} & C^n(G, V_3) & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial_n \downarrow & & \partial_n \downarrow & & \partial_n \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{n+1}(G, V_1) & \xrightarrow{\alpha_*} & C^{n+1}(G, V_2) & \xrightarrow{\beta_*} & C^{n+1}(G, V_3) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

\square

Soit H un sous-groupe de Lie localement L -analytique de G et (ρ, V) une représentation localement L -analytique de H .

Notons sh l'application $(\varphi, f)_*$ où φ est l'inclusion de H dans G et f est l'application de $\text{Ind}_H^G(V)^{L-an}$ dans V d'évaluation en l'élément neutre.

Proposition 3.4 ([8], remarque (3) après la prop. 4). — L'application sh est un isomorphisme de $H_{an}^i(G, \text{Ind}_H^G(V)^{L-an})$ sur $H_{an}^i(H, V)$.

Enfin, sous les mêmes notations, si en plus W est une représentation localement analytique de dimension finie de G , l'application

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ind}_H^G(V)^{L-an} \otimes_K W & \longrightarrow & \text{Ind}_H^G(V \otimes W)^{L-an} \\ f \otimes w & \longmapsto & (g \mapsto f(g) \otimes (g^{-1} \cdot w)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

3.2. Calcul des Ext^1 entre représentations admissibles. — Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne, $D(\mathcal{A})$ sa catégorie dérivée. Si A et B sont deux objets de \mathcal{A} , on pose

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A, B) = R^1\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B) = \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B[1]).$$

Il est immédiat à partir de la définition des morphismes dans la catégorie $D(\mathcal{A})$ que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(A, B)$ est en bijection avec les classes d'extensions dans \mathcal{A}

$$0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow 0,$$

la flèche correspondante étant donnée par

$$[0 \rightarrow A] \xleftarrow{\sim} [B \rightarrow C] \rightarrow [B \rightarrow 0],$$

A étant placé en degré 0 et B en degré -1 .

La sous-catégorie des représentations localement analytiques admissibles (voir [29]) du groupe G est une catégorie abélienne que nous noterons \mathcal{C}_{adm} . La sous-catégorie $\mathcal{C}_{adm}(\chi)$ des représentations sur lesquelles le centre Z de G agit via le caractère χ est également abélienne. Schneider et Teitelbaum ont montré que le foncteur $V \mapsto V'_b$ (le dual continu muni de la topologie forte, voir [26]) induit une anti-équivalence de catégories entre \mathcal{C}_{adm} et la catégorie, que nous notons \mathcal{C}' des $D(G, K)$ -modules coadmissibles. Dans la suite nous noterons $\mathcal{D}' = D(\mathcal{C}')$ et $\mathcal{D}(\chi)'$ la sous-catégorie triangulée, correspondant à la sous-catégorie $\mathcal{C}'(\chi)$ duale de $\mathcal{C}_{adm}(\chi)$.

Si (ρ_V, V) est un objet de \mathcal{C}_{adm} et (ρ_W, W) une représentation localement analytique de dimension finie, l'isomorphisme

$$\text{Hom}(W, V) \simeq W^\vee \otimes V \simeq V \oplus \cdots \oplus V$$

montre que l'espace vectoriel $\text{Hom}(W, V)$ est également un objet de \mathcal{C}_{adm} . On peut donc parler de ses groupes de cohomologie localement analytique.

Soit c un élément de $Z^1(G, \text{Hom}(W, V))$. Posons alors $U = W \oplus V$ et munissons le de l'action de G définie par

$$\rho_c(g)(w, v) = (\rho_W(g)w, \rho_V(g)v + c(g)(\rho_W(g)w)).$$

Pour voir que (ρ, U) est une représentation localement analytique il suffit essentiellement de vérifier qu'il s'agit bien d'une action de groupe :

$$\begin{aligned} \rho_c(gh)(w, v) &= (\rho_W(gh)w, \rho_V(gh)v + c(gh)(\rho_W(gh)w)) \\ &= (\rho_W(g)(\rho_W(h)w), \rho_V(g)(\rho_V(h)v) \\ &\quad + \rho_V(g)c(h)(\rho_W(h)w) + c(g)(\rho_W(gh)w)) \\ &= \rho_c(g)(\rho_W(h)w, \rho_V(h)v + c(h)(\rho_W(h)w)) \\ &= \rho_c(g)(\rho_c(h)(w, v)) \end{aligned}$$

Il est immédiat de voir que l'on obtient une suite exacte stricte, donc une extension dans \mathcal{C}_{adm}

$$0 \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow W \rightarrow 0,$$

et que deux cocycles dont la différence est un cobord donnent des extensions équivalentes, d'où une application

$$H_{an}^1(G, \text{Hom}(W, V)) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}_{adm}}^1(W, V).$$

Proposition 3.5. — *Cette application est un isomorphisme de K -espaces vectoriels. De plus un cocycle a pour image une extension ayant un caractère central si et seulement si ce cocycle s'annule sur le centre Z de G . D'où un isomorphisme*

$$H^1(G/Z, \text{Hom}(W, V)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{C}_{\text{adm}}(\chi)}^1(W, V).$$

Démonstration. — Il faut construire un inverse à l'application $[c] \rightarrow \rho_c$. Si (ρ, U) est une telle extension, comme W est de dimension finie, il existe une section continue s (non nécessairement G -équivariante) $W \hookrightarrow U$, d'où une décomposition $U = V \oplus s(W)$. Si $g \in G$ et $w \in W$, on pose

$$c_\rho(w) = \rho(g)s(\rho_W(g)^{-1}w) - s(w) \in V.$$

C'est un élément de $Z^1(G, \text{Hom}(W, V))$ car

$$\begin{aligned} c_\rho(gh)(w) &= \rho(gh)s(\rho_W(gh)^{-1}w) - s(w) \\ &= \rho(g)(\rho(h)s(\rho_W(h)^{-1}\rho_W(g)^{-1}w) - s(\rho_W(g)^{-1}w)) + \rho(g)s(\rho_W(g)^{-1}w) - w \\ &= \rho(g)c(h)(w) + c(g)(w). \end{aligned}$$

De plus la classe $[c_\rho] \in H_{\text{an}}^1(G, \text{Hom}(W, V))$ ne dépend pas du choix de la section s car si s_1 et s_2 sont de telles sections, $s_1 - s_2$ est une application linéaire continue de W dans V et les deux cocycles ainsi obtenus diffèrent de

$$g \mapsto \rho(g) \circ (s_1 - s_2) \circ \rho_W(g)^{-1} - (s_1 - s_2)$$

qui est un cobord. Enfin il est immédiat de vérifier que les application $[c] \mapsto \rho_{[c]}$ et $\rho \mapsto [c_\rho]$ sont réciproques l'une de l'autre.

Si l'on veut qu'une extension $(\rho_{[c]}, U)$ ait un caractère central χ , il faut déjà qu'il en soit de même de V et W . Ensuite il faut vérifier que pour $z \in Z(G)$

$$\begin{aligned} \rho(z)(v, w) &= \chi(z)(v, w) \\ (\rho_V(z)v, \rho_W(z)w) + c(z)(\rho_W(z)w) &= \chi(z)(v, w) \\ (\chi(z)v, \chi(z)w + c(z)(\rho_W(z)w)) &= (\chi(z)v, \chi(z)w) \end{aligned}$$

ce qui est encore équivalent à ce que $c(z) = 0$, ou encore que $c(gz) = c(g)$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire à $[c] \in H_{\text{an}}^1(G/Z, \text{Hom}(W, V))$. \square

4. Construction de représentations localement analytiques de $GL_2(L)$

Fixons désormais un vecteur $\vec{k} = (k_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}}$ d'entiers ≥ 2 et reprenons les notations de la section 2.3. Nous noterons également $\bar{G} = \text{PGL}_2(L)$, \bar{P} et \bar{T} les images de P et T dans \bar{G} .

4.1. Les représentations de Steinberg à coefficients. — Soit $\chi_{\vec{k}}$ le caractère du groupe P à valeurs dans K défini par

$$\chi_{\vec{k}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \prod_{\sigma \in \mathcal{P}} \sigma(d)^{k_\sigma - 2}.$$

Avec les conventions de la section 2.2, le caractère $\chi_{\vec{k}}$ est \mathbb{Q}_p -algébrique. On a

$$c_\sigma(\chi_{\vec{k}}) = k_\sigma - 2 \geq 0.$$

Le sous-espace des vecteurs localement algébriques de la représentation $\text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - \text{an}}$ est isomorphe à

$$V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \text{Ind}_P^G(1)^\infty,$$

qui est de longueur 2.

Posons $\Sigma(\vec{k}) = \text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an} / V(\chi_{\vec{k}})$. C'est une représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique fortement admissible, et ses vecteurs localement algébriques forment une sous-représentation irréductible isomorphe à $V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \text{St}$.

Lemme 4.1. — *L'isomorphisme J du théorème 2.13 induit un isomorphisme P -équivariant*

$$H_0(N, \Sigma(\vec{k})) \simeq \bigoplus_{S \subset \mathcal{P}, S \neq \emptyset} \chi_{\vec{k}} \prod_{\sigma \in S} \epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1}$$

Démonstration. — C'est un corollaire du théorème 2.13. \square

Proposition 4.2. — *On a $\text{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}), \Sigma(\vec{k})) = K$.*

Démonstration. — Soit ϕ un endomorphisme G -équivariant de $\Sigma(\vec{k})$. Alors pour tout σ , $\mathfrak{z}_{\sigma} \circ \phi$ est un morphisme G -équivariant de $\Sigma(\vec{k})$ dans $\text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}} \epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1})^{\mathbb{Q}_p - an}$. Or, par réciprocity de Frobenius

$$\text{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}), \text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}} \epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1})^{\mathbb{Q}_p - an}) = \text{Hom}_P(H_0(N, \Sigma(\vec{k})), \chi_{\vec{k}} \epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1})$$

qui est de dimension 1 d'après le calcul explicite de $H_0(N, \Sigma(\vec{k}))$. Ainsi $\mathfrak{z}_{\sigma} \circ \phi = \alpha_{\sigma} \mathfrak{z}_{\sigma}$ pour un $\alpha_{\sigma} \in K$. Le même raisonnement nous prouve que

$$\mathfrak{z}_{\sigma'} \mathfrak{z}_{\sigma} \circ \phi = \alpha_{\sigma, \sigma'} \mathfrak{z}_{\sigma'} \mathfrak{z}_{\sigma}$$

pour tout $\sigma \neq \sigma'$. Comme \mathfrak{z}_{σ} et $\mathfrak{z}_{\sigma'}$ commutent et $\mathfrak{z}_{\sigma} \mathfrak{z}_{\sigma'}$ est non nul car surjectif, on a $\alpha_{\sigma, \sigma'} = \alpha_{\sigma', \sigma}$, mais évidemment

$$\alpha_{\sigma} = \alpha_{\sigma, \sigma'} = \alpha_{\sigma'}.$$

Ainsi il existe $\alpha \in K$ tel que pour tout σ , $\mathfrak{z}_{\sigma} \circ (\phi - \alpha) = 0$. Finalement $\phi - \alpha$ est un morphisme G -équivariant de $\Sigma(\vec{k})$ dans $V(\chi_{\vec{k}}) \otimes_K \text{St} \subset \text{Ind}_P^G(|\epsilon| \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}$. Et toujours d'après la forme de $H_0(N, \Sigma(\vec{k}))$, il n'y a pas de morphisme G -équivariant de $\Sigma(\vec{k})$ dans $\text{Ind}_P^G(|\epsilon| \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}$, donc $\phi = \alpha$. \square

Proposition 4.3. — *Les $\Sigma(\vec{k})$ sont tous non isomorphes deux à deux.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un isomorphisme ϕ entre $\Sigma(\vec{k})$ et $\Sigma(\vec{k}')$. Il induit un isomorphisme entre les sous-espaces de vecteurs localement algébriques, c'est-à-dire entre $\text{St} \otimes_E V(\chi_{\vec{k}})$ et $\text{St} \otimes_E V(\chi_{\vec{k}'})$. Or on sait par [24] Théorème 1 que $V(\chi_{\vec{k}})$ et $V(\chi_{\vec{k}'})$ doivent être isomorphes, ce qui implique $\vec{k} = \vec{k}'$ par la classification des représentations algébriques de G . \square

Malgré ses propriétés d'entrelacement, $\Sigma(\vec{k})$ contient des sous-espaces intéressants. Soit $\sigma \in \mathcal{P}$. Nous avons défini dans la section 2.3 le caractère $\chi_{\vec{k}}^{\sigma}$ de P . Il est donné par

$$\chi_{\vec{k}}^{\sigma} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \prod_{\sigma' \neq \sigma} \sigma'(d)^{k_{\sigma'}-2}.$$

On pose

$$\Sigma(\vec{k})_{\sigma} = [\text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}, \sigma})^{\sigma - an} / V(\chi_{\vec{k}, \sigma})] \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma}),$$

où $V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma})$ est la représentation algébrique de la définition 2.7. On a alors $V(\chi_{\vec{k}}) = V(\chi_{\vec{k}, \sigma}) \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma})$.

D'après le théorème 2.12, $\Sigma(\vec{k})_{\sigma}$ s'insère dans la suite exacte

$$(8) \quad 0 \rightarrow V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \text{St} \rightarrow \Sigma(\vec{k})_{\sigma} \xrightarrow{\mathfrak{z}_{\sigma}} I_{\mathcal{P}}(\chi_{\vec{k}} \epsilon_{\sigma}^{k_{\sigma}-1}) \rightarrow 0.$$

On sait alors par le théorème 2.17 qu'elle est non scindée.

On a une application de représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques

$$\tau_\sigma : \begin{array}{ccc} (\mathrm{Ind}_P^G \chi_{\vec{k}, \sigma})^{\sigma - an} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}^\sigma) & \longrightarrow & (\mathrm{Ind}_P^G \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an} \\ f \otimes g & \longmapsto & fg \end{array}$$

qui induit une application

$$\tau_\sigma : \Sigma(\vec{k})_\sigma \rightarrow \Sigma(\vec{k}).$$

L'application composée

$$V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St} \hookrightarrow \Sigma(\vec{k})_\sigma \xrightarrow{\tau_\sigma} \Sigma(\vec{k})$$

est juste l'inclusion dans $\Sigma(\vec{k})$, donc $\tau_\sigma \neq 0$.

Lemme 4.4. — *Le morphisme J du théorème 2.13 induit un isomorphisme P -équivariant*

$$H_0(N, \Sigma(\vec{k})_\sigma) = \chi_{\vec{k}} \epsilon_\sigma^{k_{\sigma} - 1}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition de $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ et du corollaire 2.15. \square

Proposition 4.5. — *L'application τ_σ est injective et c'est, à un scalaire près, l'unique application G -équivariante de $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ dans $\Sigma(\vec{k})$.*

Démonstration. — Soit $f : \Sigma(\vec{k})_\sigma \rightarrow \Sigma(\vec{k})$ une application G -équivariante. En la composant avec $\mathfrak{z}_{\sigma'}$, on obtient un élément de

$$\mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k})_\sigma, \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}} \epsilon_{\sigma'}^{k_{\sigma'} - 1})^{\mathbb{Q}_p - an}) = \mathrm{Hom}_T(H_0(N, \Sigma(\vec{k})_\sigma), \chi_{\vec{k}} \epsilon_{\sigma'}^{k_{\sigma'} - 1}).$$

Donc il existe un scalaire $a \in E$ tel que $\mathfrak{z}_\sigma \circ f = a \mathfrak{z}_\sigma \circ \tau_\sigma$ et pour $\sigma' \neq \sigma$, $\mathfrak{z}_{\sigma'} \circ f = 0$. Ainsi, $f - a \tau_\sigma$ est un morphisme G -équivariant de $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ dans $V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St} \subset \mathrm{Ind}_P^G(|\epsilon| \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}$ et on voit comme avant qu'il n'y a pas de morphisme G -équivariant non nul de $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p - an}$. D'où $f = a \tau_\sigma$.

Si l'application τ_σ n'était pas injective, comme la composée

$$V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \mathrm{St} \hookrightarrow \Sigma(\vec{k})_\sigma \xrightarrow{\tau_\sigma} \Sigma(\vec{k})$$

est non nulle, son noyau est nécessairement isomorphe à $I_{\mathcal{P}}(\chi_{\vec{k}} \epsilon_\sigma^{k_{\sigma} - 1})$. Mais c'est impossible car cela contredit le fait que la suite exacte (8) est non scindée. \square

4.2. Les représentations $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$. — Soit $\vec{\mathcal{L}} \in K^d$. On fixe, dans cette partie, une énumération $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ des plongements de L dans K .

On désigne par $\psi(\vec{\mathcal{L}})$ la représentation de P sur K^{d+1} donnée par

$$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \log_{\sigma_1, \mathcal{L}\sigma_1}(ad^{-1}) & \log_{\sigma_2, \mathcal{L}\sigma_2}(ad^{-1}) & \dots & \log_{\sigma_d, \mathcal{L}\sigma_d}(ad^{-1}) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une suite exacte de représentations de G

$$0 \rightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an} \rightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}} \otimes \psi(\vec{\mathcal{L}}))^{\mathbb{Q}_p - an} \xrightarrow{s} (\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an})^d \rightarrow 0.$$

On pose alors

$$\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) = s^{-1}(V(\chi_{\vec{k}})^d) / V(\chi_{\vec{k}}).$$

D'où une suite exacte

$$(9) \quad 0 \rightarrow \Sigma(\vec{k}) \rightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) \rightarrow V(\chi_{\vec{k}})^d \rightarrow 0.$$

La représentation $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ est fortement admissible et a pour caractère central

$$\epsilon(\vec{k}) : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto \prod_{\sigma \in \mathcal{F}} \sigma(a)^{k_\sigma - 2}.$$

Nous travaillons donc à présent dans la catégorie $\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))$.

On note e_0, e_1, \dots, e_d la base canonique de K^{d+1} , et $\psi(\vec{\mathcal{L}})_i$ la sous-représentation de $\psi(\vec{\mathcal{L}})$ d'espace $Ke_0 \oplus Ke_i$. Alors on a

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}, \sigma_i}^{\sigma_i - an}) \otimes V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) &\rightarrow \text{Ind}_P^G(\psi(\vec{\mathcal{L}})_i \otimes \chi_{\vec{k}, \sigma_i}^{\sigma_i - an}) \otimes V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) \\ &\xrightarrow{s_i} \text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}, \sigma_i}^{\sigma_i - an}) \otimes V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et on pose $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_{\sigma_i} = s_i^{-1}(V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}))/V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i})$. Cette représentation s'insère dans une suite exacte

$$(10) \quad 0 \rightarrow \Sigma(\vec{k})_{\sigma_i} \rightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_{\sigma_i} \rightarrow V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) \rightarrow 0$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k})_{\sigma_i} & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_{\sigma_i} & \longrightarrow & V(\chi_{\vec{k}}^{\sigma_i}) \longrightarrow 0 \\ & & \tau_{\sigma_i} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k}) & \longrightarrow & \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) & \longrightarrow & V(\chi_{\vec{k}})^d \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les deux lignes sont exactes et la flèche verticale la plus à droite est l'inclusion dans le i -ième facteur.

Remarque 4.6. — Dans le cas où $L = \mathbb{Q}_p$, on écrit $\vec{k} = k$ et $\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. La représentation $\Sigma(k, \mathcal{L})$ est alors presque la représentation définie par Breuil dans [4]. En fait la représentation de Breuil est $\Sigma(k, \mathcal{L}) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$. Dans notre cas, la représentation susceptible d'avoir un complété unitaire intéressant serait $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}) \otimes |\det|^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}}$. La torsion par ce caractère ne change rien aux résultats de cet article, mais complique les notations. C'est pourquoi nous définissons ainsi $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$.

4.3. Le cocycle associé à $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$. — Pour alléger l'écriture, nous notons désormais $\text{Ext}_{\overline{G}}^i$ au lieu de $\text{Ext}_{\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))}^i$, toutes les représentations considérées ayant $\epsilon(\vec{k})$ pour caractère central.

D'après la proposition 3.5,

$$\text{Ext}_{\overline{G}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}) \simeq H_{an}^1(\overline{G}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes_K (\text{Ind}_P^G \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}).$$

L'utilisation de l'isomorphisme (7) et de la proposition 3.4 donne alors

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\overline{G}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \text{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}) &\simeq H_{an}^1(\overline{G}, \text{Ind}_P^G(V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}) \\ &= H_{an}^1(\overline{P}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \end{aligned}$$

L'espace $H_{an}^1(\overline{P}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ s'insère dans la suite d'inflation-restriction (proposition 3.1)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{an}^1(\overline{T}, H_{an}^0(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})) &\rightarrow H_{an}^1(\overline{P}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \\ &\rightarrow H_{an}^0(\overline{T}, H_{an}^1(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})) \end{aligned}$$

Par dérivation des cocycles, on obtient un morphisme \overline{T} -équivariant

$$H_{an}^1(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \rightarrow H^1(\mathfrak{n}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}).$$

Lemme 4.7. — *Son noyau est l'ensemble des cocycles lisses à valeurs dans les \mathfrak{n} -invariants de $V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}$.*

Démonstration. — Si un cocycle c est dans le noyau de cette flèche, sa différentielle est nulle en l'élément neutre (e, e) de $N \times N$. Par N -invariance, la différentielle de c en tout point de la diagonale de $N \times N$ est nulle. Alors si (n_0, n_1) est un élément quelconque de $N \times N$, la relation de cocycle donne pour tout $n \in N$,

$$c(n_0, n_1 + n) - c(n_0, n_1) = c(n_1 + n, n_1),$$

et donc la différentielle de c en (n_0, n_1) est nulle sur le sous-espace $\{0\} \oplus \mathfrak{n}$ de l'espace tangent en (n_0, n_1) . Symétriquement on peut montrer que cette différentielle est nulle sur le sous-espace $\mathfrak{n} \oplus \{0\}$, donc que la différentielle est nulle en (n_0, n_1) . Ainsi la différentielle de c est nulle en tout point de $N \times N$, donc c est une fonction localement constante. Enfin la différentiation selon n de la relation

$$c(n + n_0, n + n_1) = n \cdot c(n_0, n_1)$$

montre que c est à valeurs dans $(V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})^{\mathfrak{n}}$. \square

Lemme 4.8. — *La représentation $H_{an}^1(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ n'a pas de point fixe sous l'action de T . De plus $H_{an}^0(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ est de dimension 1, muni de l'action triviale de T .*

Démonstration. — Soit \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de N . D'après le lemme 4.7 le morphisme T -équivariant

$$H_{an}^1(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \rightarrow H^1(\mathfrak{n}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}).$$

a pour noyau l'ensemble des cocycles lisses à valeurs dans les \mathfrak{n} -invariants de $V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}$, c'est-à-dire la représentation triviale 1. Or les seuls morphismes continus de N dans K sont donnés par les différents morphismes de \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels et ne sont donc pas lisses. Ainsi $H_{an}^1(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ est un sous-espace de $H^1(\mathfrak{n}, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$. Par la formule de Künneth pour la cohomologie d'algèbres de Lie ([2] §1.3) et la décomposition $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{n}_{\sigma}$, ce dernier s'identifie à

$$H^1(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} \left(\bigotimes_{\sigma' \in \mathcal{P}} H^{\delta_{\sigma, \sigma'}}(\mathfrak{n}_{\sigma, K}, V(\chi_{\vec{k}, \sigma'}))' \right) \otimes \chi_{\vec{k}}.$$

Mais T agit comme $(\epsilon_{\sigma})^{-1} \chi_{\vec{k}, \sigma}^w (\chi_{\vec{k}, \sigma}^w)^{-1} = \epsilon_{\sigma}^{1-k}$ sur chaque composante et n'a donc aucun point fixe. L'assertion sur $H_{an}^0(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ se déduit directement de la proposition 2.8. \square

Fixons un isomorphisme entre $H^0(N, V(\chi_{\vec{k}})' \otimes \chi_{\vec{k}})$ et K . Dans la section 2.2, nous avons décrit $V(\chi_{\vec{k}})$ comme un espace de fonctions algébriques sur $GL_2(L)$. En utilisant cette description on identifie $1 \in K$ avec la forme $e : f \rightarrow f(1)$. Nous obtenons alors un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{\overline{G}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p - an}) \simeq H_{an}^1(\overline{T}, 1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p - an}(\overline{T}, K).$$

C'est un K -espace vectoriel isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p - an}(L^{\times}, K)$, donc de dimension $d+1$ et ayant pour base $\log_{\sigma_1, 0}, \dots, \log_{\sigma_d, 0}$, val.

Proposition 4.9. — *On a*

$$\mathrm{Ext}_{\overline{G}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})) = \mathrm{Ext}_{\overline{G}}^2(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})) = 0.$$

Démonstration. — En utilisant [8] théorème 3, on a

$$\mathrm{Ext}_G^i(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})) = H^i(\mathfrak{sl}_{2,L}, V(\chi_{\vec{k}})^\vee \otimes V(\chi_{\vec{k}}))$$

et ce dernier espace de cohomologie est nul pour $i = 1$ et $i = 2$ d'après les premier et second théorèmes de Whitehead ([31], corollaires 7.8.10 et 7.8.12). \square

En utilisant la suite exacte longue associée à

$$0 \rightarrow V(\chi_{\vec{k}}) \rightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p^{-an}} \xrightarrow{q} \Sigma(\vec{k}) \rightarrow 0,$$

et la proposition 4.9, on obtient un isomorphisme

$$q_* : \mathrm{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p^{-an}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})).$$

Nous avons, au final, un isomorphisme

$$(11) \quad \mathrm{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^{-an}}(\bar{T}, K).$$

Soit h l'unique vecteur de plus haut poids de $V(\chi_{\vec{k}})$ tel que $e(h) = 1$. Cet isomorphisme est donné explicitement par

$$c \mapsto [t \mapsto \chi_{\vec{k}}(t)^{-1}[c(t) \cdot h](1)].$$

Proposition 4.10. — *L'image du cocycle de l'extension (9) par cet isomorphisme est le morphisme de \bar{T} dans K^d défini par*

$$f \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix} \right) = (\log_{\sigma, \mathcal{L}_\sigma}(ad^{-1}))_{\sigma \in \mathcal{P}},$$

autrement dit le morphisme $(\log_{\sigma, 0} + \mathcal{L}_\sigma \mathrm{val})_{\sigma \in \mathcal{P}}$.

Démonstration. — Grâce à l'isomorphisme q_* , on est réduit à calculer la classe de l'extension

$$0 \rightarrow (\mathrm{Ind}_P^G \chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p^{-an}} \rightarrow s^{-1}(V(\chi_{\vec{k}})^d) \rightarrow V(\chi_{\vec{k}})^d \rightarrow 0.$$

Notons c un cocycle de $H_{an}^1(\mathrm{PGL}_2(L), V(\chi_{\vec{k}})^d \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p^{-an}})$ correspondant à cette extension. Pour tout g , $c(g)$ est donc une application linéaire de $V(\chi_{\vec{k}})^d$ dans $\mathrm{Ind}_P^G(\chi_{\vec{k}})^{\mathbb{Q}_p^{-an}}$. Sur les cocycles, la flèche (11) est

$$c \longmapsto (b \mapsto \chi_{\vec{k}}(b)^{-1}[c(b) \cdot e](1)).$$

Soit $h_i = (0, \dots, h, \dots, 0)$, h étant à la i -ème place. Si f_i est un antécédent de h_i dans $s^{-1}(V(\chi_{\vec{k}})^d)$, on a, à un cobord près, que

$$c(g) \cdot h_i = f_i(g^{-1} \cdot) - f_i.$$

Donc finalement l'image de c est

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto (\chi_{\vec{k}}(m)^{-1}[f(m^{-1}) - f(1)])_i = (\log_{\sigma_i, \mathcal{L}_{\sigma_i}}(ad^{-1}))_i.$$

\square

Corollaire 4.11. — *Il n'y a pas d'application G -équivariante non nulle $V(\chi_{\vec{k}}) \rightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ et*

$$\dim \mathrm{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) = 1,$$

un générateur étant donné par l'image de $\mathrm{val} \in \mathrm{Ext}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}))$.

Démonstration. — En effet, on a une suite exacte longue

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_G(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \rightarrow \mathrm{Hom}_G(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}})^d) \\ \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})) \rightarrow \mathrm{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \rightarrow 0$$

Or si j_i est l'injection G -équivariante $V(\chi_{\vec{k}}) \hookrightarrow V(\chi_{\vec{k}})^d$ dans le i -ième facteur, on a $\delta(j_i) = \log_{\sigma_i, \mathcal{L}_i}$. Donc δ est injective et son image ne contient pas val. Le corollaire en découle. \square

Corollaire 4.12. — Pour $\sigma \in \mathcal{P}$, $\dim \mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_\sigma, \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) = 1$.

Démonstration. — En effet on a d'après le corollaire précédent

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_\sigma, \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \rightarrow \mathrm{Hom}_G(\Sigma(\vec{k})_\sigma, \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})).$$

De plus, une application de $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ dans $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ se factorise nécessairement par $\Sigma(\vec{k})$ et on sait qu'il s'agit donc d'un multiple de τ_σ . \square

Nous pourrions prouver immédiatement le résultat suivant, mais comme il est également conséquence de notre théorème principal, nous nous contentons de l'énoncer.

Proposition 4.13 (voir corollaire 5.4). — Les représentations $\Sigma(\vec{k}_1, \vec{\mathcal{L}}_1)$ et $\Sigma(\vec{k}_2, \vec{\mathcal{L}}_2)$ sont isomorphes si et seulement si $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ et $\vec{\mathcal{L}}_1 = \vec{\mathcal{L}}_2$.

4.4. Extensions entre représentations localement algébriques. — Soit V une représentation irréductible de dimension finie de G . L'opération $V \otimes$ induit un morphisme

$$\mathrm{Ext}_G^1(1, \mathrm{St}) \rightarrow \mathrm{Ext}_G^1(V, V \otimes \mathrm{St}).$$

Proposition 4.14. — Ce morphisme est un isomorphisme.

Démonstration. — En effet on a

$$\mathrm{Ext}_G^1(V, V \otimes \mathrm{St}) = H_{an}^1(\overline{G}, (V \otimes V') \otimes \mathrm{St}).$$

Or la théorie des représentations des groupes algébriques nous apprend que $V \otimes V'$ est une somme directe de représentations irréductibles. De plus, comme V est irréductible, d'après le lemme de Schur, la représentation triviale apparaît une unique fois dans cette décomposition. Au final

$$\mathrm{Ext}_G^1(V, V \otimes \mathrm{St}) = \mathrm{Ext}_G^1(1, \mathrm{St}) \oplus \left(\bigoplus_{\chi} H_{an}^1(G, \mathrm{St} \otimes V(\chi)) \right),$$

où les χ apparaissant dans la somme de droite sont tous distincts du caractère trivial. Il nous reste donc à prouver que $H_{an}^1(\overline{G}, \mathrm{St} \otimes V(\chi))$ est nul lorsque χ n'est pas le caractère trivial. Or il se trouve que d'après le théorème de décomposition des induites 2.12, $\mathrm{St} \otimes V(\chi)$ est un sous-espace de l'induite localement \mathbb{Q}_p -analytique $\mathrm{Ind}_P^G(\chi|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p - an}$ et que le quotient de cette induite par $\mathrm{St} \otimes V(\chi)$ n'a pas de point fixe sous l'action de G . Ainsi on a une injection

$$H_{an}^1(\overline{G}, \mathrm{St} \otimes V(\chi)) \hookrightarrow H_{an}^1(\overline{G}, \mathrm{Ind}_P^G(\chi|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p - an}).$$

Il est maintenant facile de voir que les $H_{an}^i(N, \chi|\epsilon|)$ sont des sommes de caractères localement algébriques de T dont la partie lisse est toujours $|\epsilon|$. Ainsi $H_{an}^p(\overline{T}, H^q(N, \chi|\epsilon|)) = 0$ pour tous les p et q , et donc $H_{an}^1(\overline{G}, \mathrm{Ind}_P^G(\chi|\epsilon|)^{\mathbb{Q}_p - an}) = 0$. \square

Il reste maintenant à déterminer $\mathrm{Ext}_G^1(1, \mathrm{St})$.

Proposition 4.15. — *Si V est une représentation lisse de dimension finie et W une représentation irréductible lisse de dimension infinie de G de même caractère central, alors le groupe $\text{Ext}^1(V, W)$ dans la catégorie des représentations localement analytiques admissibles est le même que dans la catégorie des représentations lisses admissibles ou que dans la catégorie des représentations lisses.*

Démonstration. — Il suffit en fait de prouver que si U est une représentation localement analytique de la forme

$$0 \rightarrow W \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow 0,$$

alors U est lisse. En effet si ce n'était pas le cas, on aurait $U^{\mathfrak{g}} \subsetneq U$. Ainsi en appliquant la suite exacte longue provenant du foncteur $H^0(\mathfrak{g}, \cdot)$, on a une suite exacte G -équivariante

$$0 \rightarrow W^{\mathfrak{g}} \rightarrow U^{\mathfrak{g}} \rightarrow V^{\mathfrak{g}} \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, W)$$

Or comme V et W sont lisses, $W^{\mathfrak{g}} = W$, $V^{\mathfrak{g}} = V$ et $H^1(\mathfrak{g}, W) = W$. Comme W est irréductible et V de dimension finie, la flèche $V^{\mathfrak{g}} \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, W)$ est nécessairement nulle, d'où la contradiction. \square

Corollaire 4.16. — *On a $\dim \text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \text{St}) = 1$ et la flèche*

$$\text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \text{St} \otimes V(\chi_{\vec{k}})) \rightarrow \text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}))$$

induite par l'inclusion $V(\chi_{\vec{k}}) \otimes \text{St} \rightarrow \Sigma(\vec{k})$ est injective, son image est le sous-espace de dimension 1 engendré par le cocycle val.

Remarque 4.17. — On peut remarquer que le cocycle $\text{val} \in \text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}))$ est l'image d'un cocycle de $\text{Ext}_G^1(1, \text{St})$ via l'injection

$$\text{Ext}_G^1(1, \text{St}) \simeq \text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \text{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})) \hookrightarrow \text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}))$$

et qui est indépendant de \vec{k} . Nous noterons donc également $\text{val} \in \text{Ext}_G^1(1, \text{St})$.

5. Le foncteur $D_{\vec{k}}$

5.1. Construction du (φ, N, L, K) -module filtré. — L'objet de cette partie est de construire le (φ, N, L, K) -module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma)$ de l'introduction où Σ est une représentation localement analytique admissible de caractère central $\epsilon(\vec{k})$. Dans ce but, nous construisons dans un premier temps un objet $\mathcal{H}_0(\vec{k})$ dans la catégorie dérivée des $D_{\mathbb{Q}_p}(G, K)$ -modules coadmissibles que nous munissons d'endomorphismes φ et N , ainsi que de morphismes $\mathcal{F}^i : \text{Fil}^i(\mathcal{H}_0(\vec{k}) \otimes_{L_0} L) \rightarrow \mathcal{H}_0(\vec{k}) \otimes_{L_0} L$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On note $D_{\mathbb{Q}_p}(G, K)$ l'algèbre des distributions \mathbb{Q}_p -analytiques sur G . On note $\mathcal{C}_{\vec{k}}$ la catégorie abélienne de ces $D_{\mathbb{Q}_p}(G, K)$ -modules coadmissibles dont le caractère central est $\epsilon(\vec{k})^{-1}$ et $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ sa catégorie dérivée.

On définit $\mathcal{H}_0(\vec{k}) = L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})' \oplus \text{St}'_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})'[-1]$. L'endomorphisme φ est l'élément $\varphi_0 \oplus \varphi_1[-1]$ de $\text{End}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\mathcal{H}_0(\vec{k}))$ où φ_i est l'unique endomorphisme K -linéaire, L_0 -semi-linéaire coïncidant avec la multiplication par $p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}}$ (resp. $p^{\frac{|\vec{k}|}{2d}}$) sur $V(\chi_{\vec{k}})'$ (resp. $\text{St}'_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})'$).

L'endomorphisme N est l'image de l'élément $-\frac{1}{2}\text{val} \in \text{Ext}_G^1(1, \text{St})$ par

$$\text{Ext}_G^1(1, \text{St}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \text{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}^1(\text{St}'_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})', V(\chi_{\vec{k}})' \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0),$$

le premier isomorphisme provenant de la proposition 4.14 et la deuxième flèche de l'opération $\otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0$ en remarquant que $\mathrm{St}_{L_0} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}}) \simeq (\mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0$.

Les endomorphismes φ et N ainsi obtenus vérifient clairement la relation $N\varphi = p\varphi N$.

Enfin, on pose $\mathcal{H}(\vec{k}) = \mathcal{H}_0(\vec{k}) \otimes_{L_0} L$, $\mathcal{H}(\vec{k})_\sigma = \mathcal{H}(\vec{k}) \otimes_{L,\sigma} K$ et on définit des objets $\mathrm{Fil}^i \mathcal{H}(\vec{k})$ de $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ et des flèches $\mathcal{F}^i : \mathrm{Fil}^i \mathcal{H}(\vec{k}) \rightarrow \mathcal{H}(\vec{k}) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathcal{H}(\vec{k})_\sigma$ par

$$\mathrm{Fil}^i \mathcal{H}(\vec{k}) = \begin{cases} \mathcal{H}(\vec{k}) & \text{si } i \leq 0 \\ \bigoplus_{\sigma, i \leq k_\sigma - 1} \Sigma(\vec{k})'_\sigma[-1] & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

On a alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k})'_\sigma[-1], \mathcal{H}(\vec{k})_\sigma) = \mathrm{Hom}_{\overline{G}}(\mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})_\sigma) \oplus \mathrm{Ext}_{\overline{G}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k})_\sigma).$$

Pour $i \leq k_\sigma - 1$, on définit $\mathcal{F}_\sigma^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k})'_\sigma[-1], \mathcal{H}(\vec{k})_\sigma)$ par $(-2j_\sigma, -\log_{\sigma,0})$ où j_σ est la composée de l'inclusion naturelle de $\mathrm{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})$ dans $\Sigma(\vec{k})_\sigma$ et de τ_σ définie en 4.1 et les éléments $\log_{\sigma,0}$ ont été définis dans la section 4.3. La flèche \mathcal{F}^i est alors l'identité pour $i \leq 0$ et $\bigoplus_{i \leq k_\sigma - 1} \mathcal{F}_\sigma^i$ pour $i \geq 1$. Ceci implique en particulier que $\mathcal{F}^i = 0$ pour $i \geq \max(k_\sigma)$.

Si Σ est un objet de $\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))$, on peut munir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'[-1], \mathrm{Fil}^i(\mathcal{H}(\vec{k})))$ d'une structure de L -espace vectoriel. On écrit en effet, pour $i \geq 1$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'[-1], \mathrm{Fil}^i(\mathcal{H}(\vec{k}))) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'[-1], \mathrm{Fil}^i(\mathcal{H}(\vec{k}))_\sigma),$$

et on pose $l \cdot (f_\sigma) = (\sigma(l)f_\sigma)$.

Définition 5.1. — Si Σ est un objet de $\mathcal{C}_{adm}(\epsilon(\vec{k}))$, on lui associe le (φ, N) -module filtré $D_{\vec{k}}(\Sigma) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma'_b[-1], \mathcal{H}_0(\vec{k}))$, avec $\varphi(f) = \varphi \circ f$, $N(f) = N \circ f$ et

$$\mathrm{Fil}^i(D_{\vec{k}}(\Sigma) \otimes_{L_0} L) = \mathrm{Im}(\mathcal{F}_*^i)$$

où \mathcal{F}_*^i est l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma', \mathrm{Fil}^i \mathcal{H}(\vec{k}))$ dans $D_{\vec{k}}(\Sigma) \otimes_{L_0} L$ obtenue par composition avec \mathcal{F}^i . La flèche \mathcal{F}_*^i est aussi un morphisme de L -espaces vectoriels, donc $\mathrm{Fil}^i(D(\Sigma) \otimes_{L_0} L)$ est bien un sous- $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -module de $D_{\vec{k}}(\Sigma) \otimes_{L_0} L$.

Remarque 5.2. — Cette définition n'est pas si artificielle qu'elle en a l'air. En effet, considérons $\mathcal{X} = \mathbb{C}_p \setminus L$, le demi-plan de Drinfel'd sur L . Dans [17], Große-Klönne construit le complexe de cohomologie rigide associé à un schéma formel dont la fibre générique est \mathcal{X} . Ceci donne un complexe de L_0 -espaces vectoriels $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ et chaque élément de G induit un endomorphisme de cet objet dans la catégorie dérivée des L_0 -espaces vectoriels. Il munit de plus cet objet d'endomorphismes ϕ et N vérifiant la relation $N\phi = q\phi N$ et commutant à l'action de G , et construit un quasi-isomorphisme naturel $\alpha_{\pi_L} : R\Gamma_{rig}(\mathcal{X}) \otimes_{L_0} L \simeq R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$ commutant également à l'action de G . Il serait alors tentant, si on pouvait identifier l'objet $R\Gamma_{rig}$ à un complexe de représentations de G et α_{π_L} à un isomorphisme dans une catégorie dérivée de représentations de G , d'utiliser $R\Gamma_{rig}$ pour définir une L_0 -structure sur $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$, ainsi que des endomorphismes ϕ et N . Cependant la construction de ce complexe de cohomologie log-rigide dans [17] ne le permet pas, le groupe G agit sur le complexe $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ par endomorphismes dans la catégorie dérivée des L_0 -espaces vectoriels. Malgré tout, on connaît ([17], §6) l'action de ϕ sur les espaces de cohomologie rigide $H_{rig}^i(\mathcal{X})$. Dès lors, si $R\Gamma_{rig}$ était vraiment un objet de la catégorie $\mathcal{D}_{\vec{2}}$, et α_{π_L} , ϕ et N des flèches de cette catégorie, par un résultat général sur les catégories triangulées ([12] lemme A.1.4), il existerait un unique scindage de

$R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ commutant à ϕ . Les isomorphismes α_{π_L} et $H^*(\alpha_{\pi_L})$ le transporteraient alors en un scindage du complexe $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})$.

C'est pourquoi notre construction prend le chemin inverse. Les isomorphismes de Schneider et Stuhler ([27], §5 théorème 1 et §4 lemme 1) induisent un isomorphisme $\mathcal{H}(k) \simeq (H_{dR}^0 \oplus H_{dR}^1[-1]) \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\text{Sym}^{k-2} K^2)'$, ainsi $\mathcal{H}_0(\vec{k})$ est naturellement isomorphe à $(H_{rig}^0 \oplus H_{rig}^1[-1]) \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\text{Sym}^{k-2} K^2)'$ et doit être considéré comme substitut à $R\Gamma_{rig} \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\text{Sym}^{k-2} K^2)'$. Nous définissons φ tel qu'il devrait être par le calcul de Große-Klönne (il faut cependant noter que Große-Klönne calcule une puissance de φ). On peut également vérifier que l'opérateur N que nous avons défini coïncide avec celui induit par la cohomologie rigide, et ceci grâce à un résultat de de Shalit ([30] théorème 4.1) et un petit calcul sur les extensions de St_{L_0} par la représentation triviale.

Définir la filtration telle que nous l'avons fait revient à choisir un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\vec{k}) = R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})^{-1}$ et $\mathcal{H}(\vec{k})$. En effet, nous pouvons définir directement dans $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\vec{k})$ et $\mathcal{H}(\vec{k})$ et utiliser celui-ci pour transporter une filtration naturelle de $R\Gamma_{dR}(\vec{k})$. Pour cela, commençons par écrire

$$R\Gamma_{dR}(\mathcal{X})(\vec{k}) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}} (R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{\vec{k},\sigma})' \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}^\sigma)').$$

Sur chaque $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{\vec{k},\sigma})'$, Schneider et Stuhler ont défini dans [27] §5 une filtration. Ils définissent également un isomorphisme entre $R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{\vec{k},\sigma})'$ et un complexe de $D_\sigma(G, K)$ -modules $[O(2-k_\sigma) \rightarrow O(k_\sigma)]$. Nous nous reportons ici à [4] §3 pour la définition des représentations $O(k)$, la représentation $O(k)$ n'étant rien d'autre que l'espace des fonctions rigides L -analytiques sur \mathcal{X} munies d'une action « tordue » de G . On peut alors vérifier que $\text{Fil}^i(R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{k_\sigma})') \simeq [0 \rightarrow O(k_\sigma)]$ pour $1 \leq i \leq k_\sigma$. En utilisant l'isomorphisme de Morita $O(k_\sigma) \simeq \Sigma(k_\sigma)'_\sigma$ (on en trouve une description dans [4] §3 lorsque $L = \mathbb{Q}_p$), on obtient

$$\text{Fil}^i R\Gamma_{dR}(\vec{k}) \simeq \bigoplus_{\sigma, i \leq k_\sigma} [0 \rightarrow (\Sigma(\vec{k})_\sigma)'_b].$$

Enfin, ces isomorphismes permettent de définir directement un scindage de $R\Gamma_{dR}(\vec{k})$. Rappelons que Breuil a défini dans [4] §3 des espaces $O(k, \mathcal{L})$ constitués de fonctions analytiques rigides sur \mathcal{X} et de fonctions logarithmes (\mathcal{L} désignant la branche choisie du logarithme). Ils permettent de définir des scindages explicites

$$\begin{aligned} R\Gamma_{dR}(\mathcal{X}) \otimes_{L,\sigma} V(\chi_{k_\sigma})' &\xleftarrow{\sim} [V(\chi_{k_\sigma})' \oplus O(2-k_\sigma) \rightarrow O(k_\sigma, 0)] \\ &\xrightarrow{\sim} [V(\chi_{k_\sigma})' \xrightarrow{0} \text{St}' \otimes_K V(\chi_{k_\sigma})'] \end{aligned}$$

En prenant la somme directe de ces scindages, on obtient un isomorphisme $R\Gamma_{dR}(\vec{k}) \simeq \mathcal{H}(\vec{k})$ et on vérifie que le morphisme $\text{Fil}^i(R\Gamma_{dR}(\vec{k})) \rightarrow R\Gamma_{dR}(\vec{k})$ est, pour $i \geq 1$, $\bigoplus(-2j_\sigma, -\log_{0,\sigma})$. Le choix de la branche nulle du logarithme dans notre scindage se justifie par les résultats de Coleman et Iovita ([9]) qui suggèrent que si $R\Gamma_{rig}(\mathcal{X})$ peut être défini dans une catégorie dérivée de représentations de G , alors nous obtenons ainsi le scindage provenant de Frobenius. Nous espérons revenir plus en détail sur cette interprétation géométrique lorsque le problème de définir $R\Gamma_{rig}$ comme complexe de G -modules sera résolu.

5.2. Le résultat principal. —

Théorème 5.3. — *Les (φ, N, L, K) -modules filtrés $\mathcal{D}_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))$ et $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Pour commencer, décomposons

$$D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) = D_0 \oplus D_1,$$

avec

$$D_0 = \text{Ext}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}^1(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})', L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})') \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_G^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0$$

$$D_1 = \text{Hom}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})', (\text{St}_{L_0})' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(\chi_{\vec{k}})') \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(\text{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0.$$

D'après le corollaire 4.11 et la forme des composantes de Jordan-Hölder de $\Sigma(\vec{k})$ (théorème 2.12), D_0 et D_1 sont des $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -modules libres de rang 1. De plus la définition de φ implique immédiatement que $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))$ et $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ sont isomorphes en tant que φ -modules.

L'opérateur N induit un morphisme de D_1 vers D_0 qui associe à $f : \text{St} \otimes_K V(\chi_{\vec{k}}) \rightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ l'image de $-\frac{1}{2}$ val par

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \text{St} \otimes V(\chi_{\vec{k}})) \xrightarrow{f_*} \text{Ext}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})).$$

D'après le corollaire 4.16, $f_*(N) \neq 0$, ainsi les (φ, N) -modules $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))$ et $D(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$ sont isomorphes.

Il reste donc à prouver que la filtration est la bonne. Fixons σ un plongement de L dans K . Si $i \geq k_\sigma$ il est clair que $\text{Fil}^i(D(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))_\sigma) = 0$. Supposons donc $1 \leq i \leq k_\sigma - 1$. On a

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})'[-1], \text{Fil}^1 \mathcal{H}(\vec{k})_\sigma) = \text{Hom}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})', \Sigma(\vec{k})'_\sigma).$$

Le corollaire 4.12 montre que cet espace est de dimension 1 sur K , engendré par v l'élément correspondant à la flèche duale de l'inclusion naturelle

$$\Sigma(\vec{k})_\sigma \hookrightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}).$$

L'image de v dans $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))_\sigma$ s'écrit $v_0 + v_1$ où $v_i \in D_i \otimes_{L \otimes K, \sigma} K$. L'élément v_1 est le composé des flèches

$$\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})' \rightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})'_\sigma \xrightarrow{-2j_\sigma} \text{St}' \otimes_K V(\chi_{\vec{k}})'$$

Il s'agit de $-2j'$ où j' est la flèche duale de l'inclusion naturelle

$$j : \text{St} \otimes V(\chi_{\vec{k}}) \hookrightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})_\sigma \hookrightarrow \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}).$$

L'élément $N(v_1)$ est alors l'image du cocycle $-\frac{1}{2}$ val par la flèche

$$(-2j)_* : \text{Ext}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \text{St} \otimes V(\chi_{\vec{k}})) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{C}_{\vec{k}}}^1(V(\chi_{\vec{k}}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})),$$

c'est donc l'élément val.

Déterminons maintenant v_0 . Il s'agit de l'image du cocycle $-\log_{\sigma, 0}$ par la flèche

$$\text{Ext}^1(V(\vec{k}), \Sigma(\vec{k})_\sigma) \rightarrow \text{Ext}^1(V(\vec{k}), \Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})).$$

Or on sait, d'après la proposition 4.10, que dans ce dernier espace,

$$-\log_{\sigma, 0} = \mathcal{L}_\sigma \text{ val}.$$

Ainsi l'image de v est de la forme $v_1 + \mathcal{L}_\sigma N v_1$ dans $D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}}))_\sigma$. □

Corollaire 5.4. — *Les représentations $\Sigma(\vec{k}_1, \vec{\mathcal{L}}_1)$ et $\Sigma(\vec{k}_2, \vec{\mathcal{L}}_2)$ sont isomorphes si et seulement si $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ et $\vec{\mathcal{L}}_1 = \vec{\mathcal{L}}_2$.*

Remarque 5.5. — Dans le cas où $L = \mathbb{Q}_p$, l'espace $\Sigma(k, \mathcal{L}) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$ est en fait vraisemblablement plus petit que le sous-espace des vecteurs localement analytiques de son complété unitaire universel $B(k, \mathcal{L})$. En réalité cet espace de vecteurs localement analytiques devrait être une extension

$$0 \rightarrow \Sigma(k, \mathcal{L}) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}} \rightarrow \tilde{\Sigma}(k, \mathcal{L}) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}} \rightarrow \text{Ind}_P^G((|\cdot|^{\frac{k}{2}} \otimes |\cdot|^{\frac{k-4}{2}}) \chi_k \epsilon^{k-1})^{\mathbb{Q}_p - an} \rightarrow 0.$$

Il est cependant facile de vérifier que remplacer $\Sigma(k, \mathcal{L})$ par $\tilde{\Sigma}(k, \mathcal{L})$ ne change en rien notre résultat :

$$D_k(\Sigma(k, \mathcal{L})) = D_k(\tilde{\Sigma}(k, \mathcal{L})).$$

5.3. Le cas cristallin non scindé. — Supposons d'abord $L = \mathbb{Q}_p$.

À la suite de ces résultats, on peut se demander ce qu'il se passe si dans la construction de $\Sigma(k, \mathcal{L})$, on choisit la valuation à la place de $\log_{\mathcal{L}}$ pour construire l'extension. On obtient alors une représentation $\Sigma(k, \infty)$ qui est une extension de la forme

$$0 \rightarrow \Sigma(k) \rightarrow \Sigma(k, \infty) \rightarrow V(k) \rightarrow 0$$

et qui contient la représentation localement algébrique $V(k) \otimes \tilde{\text{St}}$ où $\tilde{\text{St}}$ est l'unique extension non triviale (et lisse d'après la proposition 4.14) de 1 par St . On peut considérer le (φ, N) -module filtré $D_k(\Sigma(k, \infty))$. Ce (φ, N) -module filtré est admissible, de dimension 2, cristallin ($N = 0$) et isomorphe à $D = Ke_0 \oplus Ke_1$ vérifiant

$$\varphi(e_i) = p^{\frac{k-2}{2}+i} e_i \text{ pour } i = 0, 1$$

$$\text{Fil}^n D = \begin{cases} D & \text{si } n \leq 0 \\ K(e_0 + e_1) & \text{si } 1 \leq n \leq k-1 \\ \{0\} & \text{si } n \geq k. \end{cases}$$

Il s'agit, à isomorphisme et torsion par un caractère quadratique près, du module de Fontaine de l'unique représentation cristalline de dimension 2 non scindée ayant pour poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$. Cette remarque rejoint donc la suggestion de Breuil et Emerton ([5] remarque 3.2.1) d'associer aux représentations cristallines non scindées, une représentation unitaire de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dont les vecteurs lisses contiennent la représentation de Steinberg.

Enfin, dans le cas d'une extension L quelconque, on peut choisir un plongement σ , ainsi que des éléments $c_{\sigma'} \in K$ pour tout $\sigma' \neq \sigma$. En remplaçant, dans la construction de $\Sigma(\vec{k}, \vec{\mathcal{L}})$, $\log_{\sigma, \mathcal{L}_{\sigma}}$ par val , et $\log_{\sigma', \mathcal{L}_{\sigma'}}$ par $\log_{\sigma'} + c_{\sigma'} \log_{\sigma}$, on obtient une représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique $\Sigma(\vec{k}, \sigma, (c_{\sigma'})_{\sigma' \neq \sigma})$ telle que le (φ, N, L, K) -module filtré $D = D_{\vec{k}}(\Sigma(\vec{k}, \sigma, (c_{\sigma'})_{\sigma' \neq \sigma}))$ soit cristallin de la forme $(L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_0 \oplus (L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K)e_1$ avec

$$\varphi(e_i) = p^{\frac{|\vec{k}|-2d}{2d}+i} e_i \text{ pour } i = 0, 1$$

$$\text{Fil}^n (D \otimes_{L_0} L) \otimes_{L \otimes K, \sigma'} K = \begin{cases} (D \otimes_{L_0} L) \otimes_{L \otimes K, \sigma'} K & \text{si } n \leq 0 \\ K(e_0, \sigma' + e_1, \sigma') & \text{si } 1 \leq n \leq k-1 \text{ et } \sigma' = \sigma \\ K(e_1, \sigma' + c_{\sigma'} e_0, \sigma') & \text{si } 1 \leq n \leq k-1 \text{ et } \sigma' \neq \sigma \\ \{0\} & \text{si } n \geq k. \end{cases}$$

Références

- [1] L. BERGER – « Représentations modulaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2 », à paraître à Astérisque *Représentations p -adiques de groupes p -adiques II*.
- [2] A. BOREL & N. R. WALLACH – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 94, Princeton University Press, 1980.
- [3] C. BREUIL – « Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. I. », *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.
- [4] ———, « Invariant \mathcal{L} et série spéciale p -adique », *Ann. Scient. de l'E.N.S.* **37** (2004), p. 559–610.
- [5] C. BREUIL & M. EMERTON – « Représentation ordinaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global », à paraître à Astérisque *Représentations p -adiques de groupes p -adiques III*, 2005.
- [6] C. BREUIL & A. MÉZARD – « Représentations semi-stables de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, demi-plan p -adique et réduction modulo p », à paraître à Astérisque *Représentations p -adiques de groupes p -adiques III*.
- [7] C. BREUIL & V. PASKUNAS – « Toward a modulo p Langlands correspondence for GL_2 », prépublication, 2007.
- [8] W. CASSELMAN & D. WIGNER – « Continuous cohomology and a conjecture of serre », *Invent. Math.* **25** (1974), p. 199–211.
- [9] R. COLEMAN & A. IOVITA – « Hidden structures on semistable curves », à paraître à Astérisque *Représentations p -adiques de groupes p -adiques III*.
- [10] P. COLMEZ – « Une correspondance de Langlands p -adique pour les représentations semi-stables de dimension 2 », à paraître à Astérisque *Représentations p -adiques de groupes p -adiques II*, 2004.
- [11] J.-F. DAT – « Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques », *Invent. Math.* **169** (2007), no. 1, p. 75–152.
- [12] J. F. DAT – « Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), p. 1–74.
- [13] J. DIXMIER – *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars Éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXVII.
- [14] J. D. DIXON, M. P. F. DU SAUTOY, A. MANN & D. SEGAL – *Analytic pro- p -groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 157, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [15] J.-M. FONTAINE – « Représentations p -adiques semi-stables », Astérisque **223**, 1994, 113–184.
- [16] H. FROMMER – « The locally analytic principal series of split reductive groups », prépublication Münster, 2003.
- [17] E. GROSSE-KLÖNNE – « Frobenius and monodromy operators in rigid analysis, and Drinfel'd's symmetric space », *J. Algebraic Geom.* **14** (2005), no. 3, p. 391–437.
- [18] J. E. HUMPHREYS – *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, 1975, Graduate Texts in Mathematics, No. 21.
- [19] J. C. JANTZEN – *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Academic Press Inc., 1987.
- [20] J. KOHLHAASE – « The cohomology of locally analytic representations », prépublication Münster, 2007.
- [21] ———, « Invariant distributions on p -adic analytic groups. », *Duke Math. J.* **137** (2007), no. 1, p. 19–62.
- [22] C. T. FÉAUX DE LACROIX – « Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p -adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p -adischen Körper », Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster. 3. Serie, Heft 23, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster 3. Ser., vol. 23, Univ. Münster, 1999, p. x+111.

- [23] S. ORLIK & M. STRAUCH – « On the irreducibility of locally analytic principal series representations. », prépublication, 2007, to appear in the journal *Representation Theory*.
- [24] D. PRASAD – « Locally algebraic representations of p -adic groups », *Representation theory* **5** (2001), 125–128, Appendix to *$U(\mathfrak{g})$ -finite locally analytic representations*.
- [25] T. SCHMIDT – « Auslander regularity of p -adic distribution algebras », *Represent. Theory*, **12** (2008), 37–57.
- [26] P. SCHNEIDER – *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2002.
- [27] P. SCHNEIDER & U. STUHLER – « The cohomology of p -adic symmetric spaces », *Invent. Math.* **105** (1991), p. 44–122.
- [28] P. SCHNEIDER & J. TEITELBAUM – « Locally analytic distributions and p -adic representation theory, with application to GL_2 . », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.
- [29] ———, « Algebras of p -adic distributions and admissible representations. », *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.
- [30] E. DE SHALIT – « The p -adic monodromy-weight conjecture for p -adically uniformized varieties », *Compos. Math.* **141** (2005), no. 1, p. 101–120.
- [31] C. A. WEIBEL – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, 1994.