



HAL
open science

Un exemple de feuilletage modulaire déduit d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI

Gaël Cousin

► **To cite this version:**

Gaël Cousin. Un exemple de feuilletage modulaire déduit d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. 2012. hal-00659358v1

HAL Id: hal-00659358

<https://hal.science/hal-00659358v1>

Preprint submitted on 12 Jan 2012 (v1), last revised 14 Jan 2013 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN EXEMPLE DE FEUILLETAGE MODULAIRE DÉDUIT D'UNE SOLUTION ALGÈBRIQUE DE L'ÉQUATION DE PAINLEVÉ VI

par

Gaël Cousin

Résumé. — On peut construire facilement des exemples de connexions plates de rang 2 sur \mathbb{P}^2 par pull-back rationnel de connexions sur \mathbb{P}^1 . On donne un exemple de connexion qui ne peut être obtenue de cette manière, cet exemple est construit à partir d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. On en déduit un feuilletage modulaire de Hilbert. La preuve de ce fait repose sur la classification des feuilletages sur les surfaces projectives par leurs dimensions de Kodaira, fruit du travail de Mendes, Brunella et Mc Quillan. On décrit ensuite le feuilletage dual. Par une analyse fine de monodromie, on voit que notre surface bifeuilletée est revêtue par la surface modulaire de Hilbert classique construite en faisant agir $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ sur le bidisque.

1. Introduction

Dans une classification récente de Brunella, Mc Quillan et Mendes, parmi les feuilletages sur les surfaces projectives, les feuilletages modulaires sont caractérisés par leurs dimensions de Kodaira : $\mathbf{kod} = -\infty$ et $\nu = 1$; ce sont deux invariants numériques codant les propriétés de tangence du feuilletage. Dans [MP05], Mendes et Pereira donnent les premiers exemples de modèles birationnels explicites pour des feuilletages modulaires. La découverte de ces feuilletages est fondée sur une bonne connaissance de la surface sous-jacente. Il apparaît que les structures transversalement projectives de deux de ces exemples correspondent à des déformations isomonodromiques de feuilletages de Riccati à quatre pôles sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, c'est à dire à des solutions algébriques de

Mots clefs. — feuilletages holomorphes, dimension de Kodaira, surfaces modulaires de Hilbert, connexions plates, équation de Painlevé VI.

l'équation de Painlevé VI. En effet, les feuilletages \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_3 de [MP05] correspondent à des transformées d'Okamoto de solutions icosaédrales de Dubrovin-Mazzocco [DM00], les solutions 16 et 17 de la liste de Tykhyi-Lisovyy [LT08]. On a cherché à produire un exemple de feuilletage modulaire en partant cette fois d'une (autre) solution algébrique de l'équation de Painlevé VI (PVI). Une telle solution donne un feuilletage de Riccati \mathcal{R} sur, un \mathbb{P}^1 -fibré $P \rightarrow S$. En choisissant une section de ce fibré, on se donne un feuilletage transversalement projectif \mathcal{F} sur la surface S . Le choix de la solution de (PVI) est bien sûr guidé par les propriétés des feuilletages modulaires : on a des contraintes sur la monodromie de \mathcal{R} et, d'après Touzet [Tou03] Théorème III.2.6. p 835, \mathcal{F} ne doit pas être pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati sur une surface algébrique. Une fois donné un tel feuilletage de Riccati \mathcal{R} , une façon d'augmenter ses chances de succès est de se rappeler le résultat de [Tou03] Lemme III.2.8. p 837 : si $\tilde{\mathcal{H}} = r^*\mathcal{H}$ avec r une application rationnelle, alors $\mathbf{kod}(\mathcal{H}) \leq \mathbf{kod}(\tilde{\mathcal{H}})$; on a donc intérêt à quotienter \mathcal{R} par ses symétries, ce que nous faisons ici. Cette entreprise à remporté un certain succès.

Théorème 1.1. — *La surface bifeuilletée $(\mathbb{P}^2, \{\mathcal{F}_\omega, \mathcal{G}_\tau\})$ est un modèle birationnel d'une surface modulaire munie de ses feuilletages modulaires, où*

$$\omega = -12y(1+3y)(3x-y)dx + [(10-18x)y^2 - 9x(18x-5)y - 9x^2(9x-2)] dy$$

et

$$\tau = -12y(1+3y)(12x-y-3)dx$$

$$+ [(4-18x)y^2 - 3(18x-1)(3x-1)y + 9x(2-9x)(x-1)] dy.$$

De plus, l'involution birationnelle de \mathbb{P}^2 suivante échange \mathcal{F} et \mathcal{G} .

$$\sigma : (x, y) \mapsto \left(\frac{3y(3y+13)x-y(7y+9)}{(135y+9)x-3y(3y+13)}, y \right).$$

Par revêtement, on déduit les feuilletages modulaires associés à $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Théorème 1.2. — *Un modèle birationnel de la surface modulaire bifeuilletée $(Y_{\sqrt{3}}, \mathcal{F}_{\sqrt{3}}, \mathcal{G}_{\sqrt{3}})$ est $(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}_{\omega_1}, \mathcal{G}_{\tau_1})$ où*

$$\omega_1 = 6(3y^2+1)y(y^2+9xy^2+3x)dx$$

$$+ ((9x-5)(9x-2)(9x-1)y^4 + 9x(5+54x^2-30x)y^2 + 9x^2(9x-2)) dy.$$

$$\tau_1 = 6(3y^2+1)y(-8y^2-3+36xy^2+12x)dx$$

$$+ ((9x-5)(9x+1)(9x-1)y^4 + (3+486x^3-432x^2+45x)y^2 + 9x(9x-2)(x-1)) dy.$$

$$De\ plus,\ \sigma_1 : (x, y) \mapsto \left(\frac{3y^2(36y^2+13)x-y^2(20y^2+9)}{9(12y^2-1)(3y^2+1)x-3y^2(36y^2+13)}, y \right) \text{ est une involution}$$

birationnelle de \mathbb{P}^2 qui échange \mathcal{F}_{ω_1} et \mathcal{G}_{τ_1} .

Dans [CS08], Corlette et Simpson établissent un résultat de factorisation pour certaines représentations $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ de groupes fondamentaux de variétés quasiprojectives : si la représentation ne se factorise pas par une courbe, alors elle est pull-back par une application $f : X \rightarrow Y$ d'une des représentations tautologiques d'un quotient Y d'un polydisque (Theorem 2 p

1273). Ils manifestent leur intérêt pour la détermination de l'application f pour les représentations de monodromie des feuilletages de Riccati obtenus à partir de solutions algébriques de (PVI). Il semble qu'ici c'est ce que nous avons fait pour notre feuilletage initial \mathcal{R} , avec Y une surface modulaire.

Pour les propriétés générales des feuilletages sur les surfaces on se réfère à [Bru00]. Pour des propriétés particulières des feuilletages modulaires, on pourra consulter [MP05]. Pour les notions relatives aux feuilletages transversalement projectifs, on recommande [LP07] et [CLNL⁺07]. Pour une introduction aux connexions logarithmiques plates, voir [NY02]. Enfin, pour les calculs de groupes fondamentaux, on propose [Shi].

L'auteur tient à remercier chaleureusement son directeur de thèse Frank Loray ainsi que Jorge Pereira pour leurs nombreuses indications. Remerciements également au CNRS pour son financement de thèse, à l'IRMAR pour son accueil permanent et à l'IMPA pour un séjour fructueux. On remercie aussi les membres de l'équipe de géométrie analytique de l'IRMAR et Serge Cantat, pour d'utiles discussions ainsi que Matthieu Calvez pour nous avoir fait connaître [Bir75] Theorem 1.9 p 30.

2. Préliminaires

2.1. Surfaces modulaires, feuilletages modulaires. — Les surfaces modulaires de Hilbert ont été introduites par Hilbert, compactifiées en des surfaces projectives par Baily-Borel et désingularisées par Hirzebruch. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ avec $d \in \mathbb{N}$ sans facteur carré. Les deux plongements de K dans \mathbb{R} induisent deux plongements de $\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$: $\gamma \mapsto A$ et $\gamma \mapsto \bar{A}$, où $A \mapsto \bar{A}$ est l'action du groupe de Galois de K . On obtient un plongement $i : \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2, \gamma \mapsto (A, \bar{A})$.

Définition 2.1. — Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$ commensurable à $i(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K))$. Le quotient $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma$ est une surface complexe à singularités de Hirzebruch-Jung qui se compactifie en une surface projective par adjonction de cycles de courbes rationnelles. La compactification en question est appelée surface modulaire de Hilbert et notée Y_Γ . Si $\Gamma = i(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K))$, on pourra noter $Y_\Gamma = Y_{\sqrt{d}}$.

Dans son article [Bru03], Brunella définit des objets plus généraux.

Définition 2.2 (Brunella). — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$ non commensurable à un produit $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et tel que $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma$ est compact ou se compactifie en une surface projective comme les surfaces précédentes. La surface ainsi compactifiée $\overline{(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\Gamma}$ est appelée surface modulaire et notée Y_Γ .

Remarque 2.3. — Il semble que dans la définition 2.2 les quotients non compacts correspondent aux surfaces de la définition 2.1.

Définition 2.4. — Les feuilletages modulaires de Y_Γ sont les images des feuilletages verticaux et horizontaux de \mathbb{H}^2 . On les note $(\mathcal{F}_\Gamma, \mathcal{G}_\Gamma)$. Si Y_Γ est une surface modulaire de Hilbert \mathcal{F}_Γ et \mathcal{G}_Γ sont appelés feuilletages modulaires de Hilbert.

La surface modulaire $(Y_\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma, \mathcal{G}_\Gamma)$ se désingularise en $(\tilde{Y}_\Gamma, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma, \tilde{\mathcal{G}}_\Gamma) \rightarrow (Y_\Gamma, \mathcal{F}_\Gamma, \mathcal{G}_\Gamma)$ en remplaçant ses singularités par des chaînes de courbes rationnelles, les chaînes de Hirzebruch-Jung, c'est un travail de Hirzebruch [Hir53]. Le résultat suivant semble connu, on le donne pour utilisation ultérieure.

Théorème 2.5. — *Soit Y_Γ une surface modulaire de Hilbert.*

1. *Les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ et $\tilde{\mathcal{G}}_\Gamma$ sont à singularités réduites et minimaux au sens de [Bru00].*
2. *De plus leur diviseur de tangence est réduit et son support est la réunion des chaînes de Hirzebruch-Jung et des cycles de courbe rationnelles.*

Démonstration. — 1. Il suffit de voir que les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ sont réduites et que $\tilde{\mathcal{F}}$ est relativement minimal, d'après [Bru00] Theorem 1 p 75 et sa preuve. Le fait que les singularités sur les chaînes de Hirzebruch-Jung soient réduites peut se voir par un calcul simple à l'aide des descriptions locales explicites de $\mathbb{H}^2 \rightarrow Y_\Gamma$ et de $\tilde{Y}_\Gamma \rightarrow Y_\Gamma$ données dans [Rie74] §3 pp 220 – 223. Pour les singularités sur les cycles de courbes rationnelles utilisés pour compactifier, c'est encore un calcul local à l'aide de [Hir73] §§2.2 – 2.4 pp 204 – 215. Il n'y a pas d'autre singularité et, d'après [MP05] Theorem 1 a. p 244, les courbes algébriques irréductibles invariantes par $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ sont seulement les composantes des chaînes et cycles cités plus haut, comme ces composantes sont d'autointersection inférieure à -2 , le feuilletage est relativement minimal.

2. Par les mêmes calculs on voit que le diviseur de tangence est réduit. \square

Les feuilletages modulaires sont naturellement munis d'une structure transversalement projective.

2.2. Feuilletages transversalement projectifs, feuilletages de Riccati.

— La définition suivante est due à [LP07] et inspirée de [Scá97].

Définition 2.6. — Soit \mathcal{H} un feuilletage de codimension 1 sur une variété complexe lisse M . Une **structure transversalement projective** (singulière) pour \mathcal{H} est la donnée d'un triplet $(\pi, \mathcal{R}, \sigma)$ consistant en

1. un fibré en \mathbb{P}^1 localement trivial $\pi : P \rightarrow M$;
2. un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{R} de codimension 1 sur P transverse à la fibre générique de π et

3. une section méromorphe σ de π telle que $\mathcal{H} = \sigma^*\mathcal{R}$.

En présence des conditions 1 et 2, on dit que \mathcal{R} est un **feuilletage de Riccati** sur le fibré π .

Définition 2.7. — Soit \mathcal{R} un feuilletage de Riccati sur π , si D est un diviseur de M tel que $\mathcal{R}|_{M \setminus D}$ est transverse aux fibres de $\pi|_{M \setminus D}$, par compacité des fibres, en relevant les lacets de $M \setminus D$ dans les feuilles de \mathcal{R} , on peut définir une représentation $\pi_1(M \setminus D, *) \rightarrow \text{Aut}(\pi^{-1}(*))$. Si D est le plus petit diviseur ayant cette propriété, on l'appelle le **lieu polaire** de \mathcal{R} et la représentation est appelée **représentation de monodromie** de \mathcal{R} .

En pratique, on doit choisir une coordonnée sur $\pi^{-1}(*)$ et la monodromie est donnée par des éléments de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Pour se donner un feuilletage de Riccati, on peut utiliser une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI.

On définit une relation d'équivalence naturelle entre feuilletages de Riccati.

Définition 2.8. — Soit \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux feuilletages de Riccati sur $\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X$. On dit que \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont **birationnellement équivalents** si il existe une **transformation de jauge méromorphe**

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1 \times X &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times X \\ (z, x) &\longmapsto (A(x).z, x) \end{aligned}$$

avec $x \mapsto A(x) \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ méromorphe et $\mathcal{R} = \phi^*\mathcal{R}'$.

Le résultat suivant explique notre intérêt pour la notion de feuilletage transversalement projectif.

Lemme 2.9. — Soit Y_Γ une surface modulaire. Soit Γ_i la projection de Γ sur le i -ème facteur de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})^2$. Les feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ et $\tilde{\mathcal{G}}_\Gamma$ sur \tilde{Y}_Γ possèdent des structures transversalement projectives de monodromies respectives Γ_1 et Γ_2 .

Démonstration. — Il suffit de faire la preuve pour $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$. On construit d'abord la structure au dessus du complémentaire X des chaînes et des cycles. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ le complémentaire des points à stabilisateurs non triviaux pour l'action de Γ et (u_1, u_2) son point courant. Cet ouvert \mathcal{U} est le revêtement universel de X : on obtient X comme quotient de \mathcal{U} par l'action de Γ . Soit $\sigma = \{z = u_1\}$ une section de $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. En fixant $(z, u).\gamma = (z.\gamma_1, u.\gamma)$ pour tout $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})^2$ et tout $(z, u) \in \mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$, on définit une action proprement discontinue de Γ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$. Le quotient $P = (\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U})/\Gamma$ est muni d'une structure de \mathbb{P}^1 -fibré $\pi : P \rightarrow X$ dont une section holomorphe $\tilde{\sigma}$ est induite par σ . De surcroît, le feuilletage de Riccati sur $\mathbb{P}^1 \times \mathcal{U}$ défini par $dz = 0$ passe au quotient et fournit un feuilletage de Riccati \mathcal{R} de telle sorte que $(\pi, \mathcal{R}, \tilde{\sigma})$ est une structure transversalement projective pour la restriction de $\tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$ à X . Par construction cette structure a pour monodromie la projection Γ_1 de la représentation tautologique du quotient \mathcal{U}/Γ .

Ensuite, comme dans la preuve du théorème 2.5, on prolonge $(\pi, \mathcal{R}, \tilde{\sigma})$ à tout \tilde{Y}_Γ en utilisant les modèles pour \tilde{Y}_Γ au voisinage des chaînes et cycles de courbes rationnelles invariantes. \square

2.3. Equation de Painlevé VI et déformations isomonodromiques.

— Il est bien connu que les solutions de l'équation de Painlevé VI (PVI) gouvernent les déformations isomonodromiques à un paramètre $(\nabla_s)_{s \in U}$ des connexions logarithmiques de rang 2 à trace nulle et à 4 pôles sur $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Les connexions plates (∇_s) sont les restrictions d'une connexion plate logarithmique ∇ sur $\mathbb{C}^2 \times U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow U \times \mathbb{P}^1$. On s'intéresse ici aux déformations qui correspondent aux solutions algébriques de (PVI). Dans ce cas l'espace des paramètres est $U = \mathcal{C} \setminus \{s_1, \dots, s_n\}$ où \mathcal{C} est une surface de Riemann compacte et on peut compactifier la situation en prolongeant ∇ méromorphiquement à $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$. La connexion ∇ est alors donnée par un système : si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ est une section locale de $\mathbb{C}^2 \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$, alors $\nabla \cdot \sigma = d\sigma - \Omega \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$, où $\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} & \alpha \\ -\gamma & -\frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$ est une matrice de 1-formes méromorphes sur \mathcal{C} . Les sections locales horizontales de ∇ sont alors les solutions de $dZ = \Omega \cdot Z$. Si $Z = (z_1, z_2)$ est une telle section alors $\mathbb{P}(Z) = [z_1 : z_2] = [z : 1]$ est une section locale de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ telle que l'équation de Riccati $dz = \alpha + \beta z + \gamma z^2$ soit satisfaite. La platitude de ∇ revient à l'intégrabilité de la forme $\omega = -dz + \alpha + \beta z + \gamma z^2$ sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$, i.e. ω définit un feuilletage holomorphe singulier sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ qui est, par construction, un feuilletage de Riccati. On voit que ce dernier caractérise ∇ et on peut préférer son étude à celle du système $dZ = \Omega \cdot Z$. Des formules donnant (∇_s) à partir d'une solution de (PVI) sont classiquement connues, voir par exemple [Boa07] pp 105 – 106 ou [LSS] p 28. Localement, t donne une coordonnée sur $\mathcal{C} \setminus \{s_1, \dots, s_n\}$ et l'équation de Riccati correspondant à ∇ est donnée par $dz = \sum_{i=0,1,t} \frac{P_i(z)}{x-i} dx + A(z)dt$ où $P_i(z) = \alpha_i + \beta_i z + \gamma_i z^2$. Les formules de [LSS] donnent α_i, β_i et γ_i en fonction de t mais nullement A . Par logarithmicité et platitude de ∇ , on peut toutefois déterminer A qui est de la forme $A = -\frac{P_t}{x-t} + u + vz + wz^2$. Dans le cas des solutions algébriques de (PVI), $u, v, w, \alpha_i, \beta_i$ et γ_i se prolongent en des fonctions méromorphes sur \mathcal{C} .

3. Une famille non pull-back

Suivant la démarche introduite dans la section précédente on a construit un feuilletage de Riccati sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \times \mathcal{C} \times \mathbb{P}^1$ à partir d'une solution algébrique de l'équation de Painlevé VI. Cette solution est l'image de la solution tétraédrale n°6 de Boalch [Boa07] par une transformation d'Okamoto, la transformation $s_\delta \circ s_\infty$ dans le langage de [LT08]. Donnons la solution et ses paramètres :

$$q(s) = \frac{(s^6+15s^4-5s^2+45)s(s+1)(s-3)^2}{(5s^6-5s^4+135s^2+81)(s+3)(s-1)^2}, \quad t(s) = -\frac{(s+1)^3(s-3)^3}{(s-1)^3(s+3)^3}, \quad \theta_0 = -\frac{5}{6}, \quad \theta_1 = -1, \\ \theta_t = -1, \quad \theta_\infty = \frac{1}{6}.$$

Ayant en tête [Tou03] Théorème III.2.6.(cf notre introduction) et pour nos besoins ultérieurs, on va montrer que cette solution algébrique de (PVI) ne correspond pas à une déformation isomonodromique $(\mathcal{R}_s)_{s \in \mathbb{P}^1}$ de feuilletages de Riccati au dessus de \mathbb{P}^1 obtenue par pull-back rationnel d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

Précisons ce que l'on entend par là.

Définition 3.1. — On dit qu'un feuilletage de Riccati \mathcal{R} sur le \mathbb{P}^1 -fibré $\pi : \mathbb{P}^1 \times M \rightarrow M$ est **pull-back** (rationnel) d'un feuilletage de Riccati \mathcal{R}_0 sur $\pi' : \mathbb{P}^1 \times M' \rightarrow M'$ si il existe une application rationnelle dominante $\phi : M \dashrightarrow M'$ telle que $\mathcal{R} = \phi^* \mathcal{R}_0$. Dans le cas où M' est une courbe algébrique, on dit que \mathcal{R} est pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.

Ici comme $M = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, une telle situation ne peut se présenter que pour $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1$.

Remarque 3.2. — On va utiliser des modèles locaux. On indique comment ils se comportent quand on les tire en arrière par un revêtement.

- Si la monodromie en $x = 0$ d'une équation de Riccati à pôle simple sur $(\mathbb{C}, 0)$ est conjuguée à $z \mapsto \lambda z$ alors, à transformation de jauge holomorphe près $z' = \phi(x).z$, $\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}\{x\})$, l'équation est $dz = \alpha \frac{dx}{x} z$, avec $\lambda = \exp(2i\pi\alpha)$. Si $x = y^k$, on obtient $dz = k\alpha \frac{dy}{y} z$.
- Si la monodromie en $x = 0$ d'une équation de Riccati à pôle simple sur $(\mathbb{C}, 0)$ est conjuguée à $z \mapsto z + 1$ alors, à transformation de jauge holomorphe près, l'équation est $dz = (nz + x^n) \frac{dx}{x}$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Si $x = y^k$ alors on obtient, $dz = (knz + y^{kn}) \frac{dy}{y}$.

Dans les deux cas, l'**exposant** α ou n est multiplié par l'indice de ramification k . Les paramètres $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$ d'une solution de Painlevé sont les exposants qui décrivent le feuilletage \mathcal{R}_s au voisinage de $x = 0, 1, t, \infty$, respectivement. Quand $\theta_i \in \mathbb{Z}$, on doit avoir plus d'informations pour connaître la monodromie. Dans notre cas, $\theta_i = -1$ correspond à une monodromie locale parabolique.

Revenons à notre démonstration. Raisonnons par l'absurde : soit $\phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ une application rationnelle et $\mu = -dz + \alpha + \beta z + \gamma z^2$ une équation de Riccati telle que $\phi^* \mu$ donne notre déformation (\mathcal{R}_s) de paramètres $\theta = (-\frac{5}{6}, -1, -1, \frac{1}{6})$. On va étudier la restriction ϕ_s de ϕ à la valeur s du paramètre de la déformation. L'application ϕ_s ne peut être constante pour un s générique, sous peine de ne pas avoir de monodromie pour \mathcal{R}_s . C'est donc que nous avons, pour s générique, un revêtement $\phi_s : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Pour obtenir les bonnes monodromies locales pour \mathcal{R}_s , μ doit donc avoir un pôle d'indice $\frac{1}{6k}$ et un pôle non apparent d'indice entier. De plus, comme la monodromie de \mathcal{R}_s n'est pas abélienne, il doit en être de même pour μ , ce qui implique que μ a au moins trois pôles non apparents. En outre, le birapport des quatre pôles de \mathcal{R}_s varie avec s , ce qui signifie que le revêtement ϕ_s se déforme et qu'il existe une valeur critique $k(s)$ non-constante, distincte des pôles, pour ϕ_s . Soient $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}$ les exposants de μ avec $p_i \wedge q_i = 1$ et $q_i > 0$. Fixons $\beta_i = 1/q_i$ si $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$ et $\beta_i = 0$ sinon. On peut alors interpréter $\phi_s : \mathbb{P}^1 = S \rightarrow \Sigma = \mathbb{P}^1$ comme revêtement ramifié entre surfaces de Riemann munies de métriques singulières de courbure -1 telles que les pôles de nos équations de Riccati correspondent à des singularités des métriques dont les angles sont $(2\pi\beta_i)$ et $(\frac{2a\pi}{6}, 0, 0, \frac{2b\pi}{6})$ avec $ab \neq 0$. En effet, on peut appliquer le théorème suivant à Σ puis relever la métrique à S par ϕ_s .

Théorème 3.3 (Poincaré). — Soient Σ une surface de Riemann, $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de points distincts de Σ et $(q_i)_{i \in I}$ avec, pour tout i , $q_i \in \{2, 3, \dots, \infty\}$. Soit $A = 2\pi \left(2g(\Sigma) - 2 + \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{q_i} \right) \right)$. Si $A > 0$ alors il existe un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{H}/\Gamma \stackrel{hol.}{\simeq} \Sigma$ et tel que la métrique sur \mathbb{H} donne une métrique singulière exactement aux (a_i) avec les angles $(\frac{2\pi}{q_i})$ et l'aire de Σ pour cette métrique est donnée par A .

On peut ensuite comparer les aires de Σ et S pour cette métrique :

$$(1) \quad \text{Aire}(S) = d \cdot \text{Aire}(\Sigma)$$

où d est le degré de ϕ_s . De plus, nous avons d'une part

$$\text{Aire}(\Sigma) = 2\pi \left(-2 + \sum_i (1 - \beta_i) \right),$$

ce qui donne

$$\text{Aire}(\Sigma) \geq 2\pi \left(-2 + (1 - 0) + \left(1 - \frac{1}{6} \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \text{termes positifs} \right) \geq \frac{2\pi}{3}$$

et d'autre part, de la même manière, comme on peut le voir à l'aide d'une triangulation géodésique de S ,

$$\text{Aire}(S) = 2\pi \left(-2 + ((1 - 0) + (1 - 0) + \left(1 - \frac{a}{6} \right) + \left(1 - \frac{b}{6} \right) + \sum_i (1 - r_i)) \right)$$

où les r_i sont les indices de ramifications des points qui ne correspondent pas à des pôles sur S . On a ainsi $\text{Aire}(S) \leq 2\pi(-2 + 2(1 - 0) + 2(1 - \frac{1}{6}) + (1 - 2)) = \frac{4\pi}{3}$. L'équation (1) donne donc $d \frac{2\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ ou encore $d \leq 2$. La famille (ϕ_s) est donc une famille de revêtements de degré deux de \mathbb{P}^1 vers lui même, c'est donc une

déformation de $x \mapsto x^2$, consistant à faire bouger les points de ramification par rapport aux pôles de μ . Or cette famille de revêtements correspond à la solution à paramètre \sqrt{t} de l'équation de Painlevé VI et ne peut donc correspondre à la nôtre cf [LT08], d'où la conclusion.

Notons que le raisonnement que nous venons de faire ne dépend que de la monodromie de \mathcal{R}_s , on en déduit ce qui suit.

Lemme 3.4. — *Le feuilletage de Riccati \mathcal{R} n'est pas birationnellement équivalent à un feuilletage de Riccati pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe.*

Remarque 3.5. — Évidemment ce type de méthode peut s'appliquer à d'autres déformations isomonodromiques, voir la thèse de K. Diarra.

4. Construction de notre exemple

C'est dans cette partie de notre travail que l'utilisation d'un logiciel de calcul formel est indispensable. Notre exemple est donné par un feuilletage de Riccati $\hat{\mathcal{R}}$ sur $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Ce feuilletage provient du feuilletage \mathcal{R} de la section 2.3 au sens suivant : $\mathcal{R} = \pi^*\hat{\mathcal{R}}$, où $\pi : (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ est une application rationnelle dominante de fibre générique finie. On pense à π comme à un revêtement ramifié entre variétés vues modulo transformations birationnelles. L'application π est obtenue en quotientant \mathcal{R} par un groupe de symétries birationnelles.

Ces symétries sont recherchées comme préservant deux fibrations sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: la fibration $(s, x, z) \rightarrow s$ qui donne le paramètre de la déformation isomonodromique et la projection $(s, x, z) \mapsto (s, x)$ du \mathbb{P}^1 -fibré ; elles sont donc de la forme $\phi : (s, x, z) \mapsto (A.s, B(s).x, C(s, x).z)$ avec $A, B(s), C(s, x) \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ et $s \mapsto B(s), (s, x) \mapsto C(s, x)$ rationnelles.

Le lieu polaire de \mathcal{R} contient quatre sections $D_i = \{x = p_i(s)\}, i \in \{1, \dots, 4\}$ de $(s, x) \rightarrow s$ qui doivent être préservées dans leur ensemble par $(s, x) \mapsto (A.s, B(s).x)$. Le birapport $t(s) = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ est une fonction rationnelle. Il est bien connu (cf [Art98] pp 38-39) que $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_i(s) | i = 1, \dots, 4\}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_i(A.s) | i = 1, \dots, 4\}$ si et seulement si $u(s) = u(A.s)$, où $u(s) = \frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}$. Un tel A correspond alors à $B(s)$ qui induit une permutation $\{D_i | i = 1, \dots, 4\} = \{D_{\sigma(i)} | i = 1, \dots, 4\}$. Si A et B correspondent à une symétrie de \mathcal{R} , cette permutation doit préserver modulo \mathbb{Z}^4 le quadruplet $(\pm\theta_i)$ des exposants associés aux D_i . Si \mathcal{R} a des pôles non-apparents de la forme $\{s = c_k\}$, ils doivent aussi être préservés dans leur ensemble par A en respectant les exposants $\pm\theta_{c_k}$ correspondants.

Toutes ces conditions étant réunies, on doit déterminer si il existe C tel que $\phi : (s, x, z) \mapsto (A.s, B(s).x, C(s, x).z)$ soit effectivement une symétrie de

\mathcal{R} . Pour ce faire, on calcule les singularités du feuilletage \mathcal{R} . On s'intéresse particulièrement aux singularités $(z = f_{i,+}(s), z = f_{i,-}(s))$ au dessus de D_i , si il n'y a qu'une section de singularité f_i au dessus de D_i on note $f_i = f_{i,+} = f_{i,-}$. La transformation C doit être telle que

$$\{f_{\sigma(i),+}(A.s), f_{\sigma(i),-}(A.s)\} = \{C(s, x).f_{i,+}(s), C(s, x).f_{i,-}(s)\}.$$

En fait, on peut même déterminer qui de $f_{i,+}$ et $f_{i,-}$ correspond à $f_{\sigma(i),+}$: les singularités $f_{i,\pm}$ correspondent aux directions propres des résidus de la connexion de rang 2 dont provient \mathcal{R} , on peut donc y attacher les valeurs propres correspondantes et ϕ devra les respecter.

Dans le cas où $(\pm\theta_i)_{1 \leq i \leq 4} = (\pm\theta_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq 4}$ -modulo rien- $C(s, x)$ varie homomorphiquement avec $x \in \mathbb{P}^1$ pour s générique, donc $C(s, x) = C(s)$ et, si trois des $s_{i,\pm}$ sont distincts, cela permet de décider l'existence de C et, le cas échéant, de le calculer.

Quand $(\pm\theta_i)_{1 \leq i \leq 4} = (\pm\theta_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq 4}$ modulo \mathbb{Z}^4 seulement, on peut essayer de se ramener à la situation précédente, en ajoutant un cinquième pôle apparent $p_5(x)$ par transformation de jauge méromorphe, c'est ce qu'on a dû faire pour l'exemple que nous présentons ici.

Une fois trouvé un groupe fini de transformation $(\phi_k)_{k \in K}$, avec $C_k(s, x) = C_k(s)$, on veut quotienter \mathcal{R} par son action. Pour ce faire on se ramène à un problème de dimension 1 : on cherche des coordonnées $\tilde{x} = U(s).x$ et $\tilde{z} = V(s).z$ telles que les ϕ_k se lisent $(s, \tilde{x}, \tilde{z}) \mapsto (A_k.s, \tilde{x}, \tilde{z})$ à l'aide de ces coordonnées. On est ainsi amené à résoudre $(U(s) = U(A_k.s)B_k(s))_k$ pour connaître \tilde{x} , ce qui nous semble assez délicat en général. Cela fait, on doit encore résoudre $(V(s) = V(A_k.s)C_k(s))_k$ pour déterminer \tilde{z} . L'expérience de l'auteur semble indiquer que la résolution du second système est étroitement liée à celle du premier.

Finalement, on obtient un feuilletage de Riccati $\tilde{\mathcal{R}}$ dont un groupe de symétries G est donné par des transformations du type $s \mapsto A_k.s$. On trouve ensuite une fonction rationnelle $y(s)$ qui est invariante sur les orbites de G et qui sépare les orbites. La projection sur le quotient de \mathbb{P}^1 par G est alors donnée par $y : \mathbb{P}_s^1 \rightarrow \mathbb{P}_y^1$. Les formes différentielles, α, β, γ qui définissent $\tilde{\mathcal{R}}$ sont invariantes par G et s'écrivent donc sous la forme $a(y, \tilde{x})d\tilde{x} + b(y, \tilde{x})dy$, avec a et b rationnelles. C'est ce qui donne $\hat{\mathcal{R}}$. La détermination de a ou de b se réduit au problème suivant : connaissant des fractions rationnelles $y(s)$ et $F(s)$ telles qu'il existe $G(y)$ rationnelle satisfaisant $G(y(s)) = F(s)$, déterminer G . Ce problème se résout par des considérations de multiplicités ou l'emploi de bases de Gröbner.

Pour notre exemple on a $y(s) = \frac{(469045 s+1)^2(807139 s+1)^2}{(4268135377 s^2+599996 s+1)^2}$.

Pour obtenir une connexion sur $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, on a utilisé l'application birationnelle standard $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ qui induit un biholomorphisme en restriction à la carte

affine (\tilde{x}, y) . Le feuilletage $\hat{\mathcal{R}}$ est défini par la forme $-dz + \alpha + \beta z + \gamma z^2$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ avec α , β et γ donnés ci-dessous, où on a remplacé \tilde{x} par x .

$$\begin{aligned} \alpha &= -5 \frac{x(3y+1)(-y+3x)dx}{(-y+27x^2-6x)(-2y^2-9y+30yx+9x^2)} - \frac{5}{12} \frac{(18y^2x-10y^2+162yx^2-45yx+81x^3-18x^2)xdy}{(-y+27x^2-6x)y(-2y^2-9y+30yx+9x^2)}, \\ \beta &= \frac{(-75y^3x+12y^3-45y^2x^2+54y^2-40y^2x-1212yx^2+810yx^3+265yx+15x^2-216x^3)dx}{6(-y+27x^2-6x)x(-2y^2-9y+30yx+9x^2)} \\ &+ \frac{(1350y^4x-966y^4+17010y^3x^2-4707y^3x-256y^3-17064y^2x^2+2466y^2x)dy}{72(-y+27x^2-6x)y(-2y^2-9y+30yx+9x^2)(3y+1)} \\ &+ \frac{(49815y^2x^3-428y^2-1845yx-30780yx^3+14508yx^2+21870yx^4-5832x^4+1701x^3-90x^2)dy}{72(-y+27x^2-6x)y(-2y^2-9y+30yx+9x^2)(3y+1)} \text{ et} \\ \gamma &= \frac{(226800y^2x^2-8325y^3x-67665y^2x+33yx+2376yx^2-1080x^2+2593y^2+565y-75x+1875y^4-5033y^3)dx}{720(-y+27x^2-6x)x(-2y^2-9y+30yx+9x^2)} \\ &- \frac{(-7950y^5+33750y^5x+104906y^4-374769y^4x-36450y^4x^2-6169500y^3x^2+776799y^3x+1322y^3)dy}{1864(-y+27x^2-6x)x(-2y^2-9y+30yx+9x^2)y(3y+1)} \\ &- \frac{(11524275y^3x^3-2426517y^2x^3+7654500y^2x^4+72945y^2x-71244y^2x^2-4030y^2-951831yx^3+224028yx^2-17325yx)dy}{1864(-y+27x^2-6x)x(-2y^2-9y+30yx+9x^2)y(3y+1)} \\ &- \frac{(1968300yx^5+801900yx^4-145800x^4-450x^2+14985x^3+393660x^5)dy}{1864(-y+27x^2-6x)x(-2y^2-9y+30yx+9x^2)y(3y+1)}. \end{aligned}$$

5. Dimensions de Kodaira

On choisit de s'intéresser au feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{P}^2 dont la structure transverse est donnée par notre feuilletage de Riccati $\hat{\mathcal{R}}$ et la section $z = 0$. Ce feuilletage est ainsi donné, dans la carte affine (x, y) par la forme

$$\omega = -12y(1+3y)(3x-y)dx + [(10-18x)y^2 - 9x(18x-5)y - 9x^2(9x-2)] dy$$

Nous souhaitons décider si ce feuilletage est un feuilletage modulaire au sens de la définition 2.2. Pour ce faire, on emploie le théorème de Mc Quillan et Brunella indiqué dans [Bru03] p 71 : les feuilletages modulaires sont à transformation birationnelle près les seuls feuilletages sur des surfaces projectives qui aient dimension de Kodaira $\mathbf{kod} = -\infty$ et dimension de Kodaira numérique $\nu = 1$.

On commence par calculer la dimension de Kodaira numérique de \mathcal{F} . Par définition elle se calcule en désingularisant le feuilletage puis en calculant la décomposition de Zariski⁽¹⁾ du diviseur canonique $K_{\tilde{\mathcal{F}}}$ du feuilletage désingularisé $\tilde{\mathcal{F}} : K_{\tilde{\mathcal{F}}}$ se décompose numériquement en $K_{\tilde{\mathcal{F}}} \stackrel{num}{=} P + N$ où P est un \mathbb{Q} -diviseur nef et N est un \mathbb{Q}^+ -diviseur contractile dont les composantes irréductibles sont orthogonales à P , comme décrit dans [Bru00] pp 101-102.

1. Cette décomposition existe à condition que le feuilletage ne soit pas une fibration rationnelle, on verra plus loin que les courbes rationnelles invariantes sont suffisamment rares pour exclure cette situation.

La dimension de Kodaira numérique de \mathcal{F} est alors définie par :

$$\nu(\mathcal{F}) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \stackrel{num}{=} 0, \\ 1 & \text{si } P \stackrel{num}{\neq} 0 \text{ et } P.P = 0, \\ 2 & \text{si } P.P > 0. \end{cases}$$

D'après un théorème de Mc Quillan (voir Theorem 1 p 106 de [Bru00]), pourvu que $\tilde{\mathcal{F}}$ est relativement minimal, le support de N est bien connu : c'est la réunion des supports des $\tilde{\mathcal{F}}$ -chaînes maximales.

Les $\tilde{\mathcal{F}}$ -chaînes sont les courbes C de composantes irréductibles $(C_i)_{i=1\dots r}$ telles que, pour tous $i, j \in \{1, \dots, r\}$, on ait

- C_i est une courbe rationnelle lisse invariante de $\tilde{\mathcal{F}}$,
- $C_i.C_j = 1$ si $|i - j| = 1$,
- $C_i.C_j = 0$ si $|i - j| > 1$,
- $C_i.C_i < -1$,
- C_1 contient une seule singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$ et, pour $i \in \{2, \dots, r\}$, C_i contient exactement deux singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$.

La condition de relative minimalité est une condition qui porte sur les courbes rationnelles invariantes de $\tilde{\mathcal{F}}$ (cf [Bru00] chapitre 5).

On voit que la compréhension des courbes rationnelles invariantes de \mathcal{F} est un préliminaire à la bonne réalisation de notre objectif.

On sait que certaines composantes du lieu polaire de $\hat{\mathcal{R}}$ peuvent donner des courbes invariantes pour le feuilletage, ce qui se vérifie pour les composantes suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \ell_1 : & y = 0; \\ \ell_2 : & y + \frac{1}{3} = 0; \\ \ell_\infty : & \text{la droite à l'infini}; \\ R : & -\frac{1}{27}y + x^2 - \frac{2}{9}x = 0 \text{ et} \\ V : & -\frac{2}{9}y^2 - y + \frac{10}{3}xy + x^2 = 0. \end{cases}$$

Chacune de ces composantes est une courbe rationnelle lisse.

On calcule à l'aide de Maple l'ensemble des points singuliers $\Sigma = \text{Sing}(\mathcal{F})$ du feuilletage \mathcal{F} sur \mathbb{P}^2 , et pour tout $p \in \Sigma$, on calcule la partie linéaire $L(p)$ d'un champs de vecteurs à zéros isolés définissant \mathcal{F} au voisinage de p . Les singularités non-réduites sont les éléments p de Σ tels que $L(p) = 0$ ou bien tels que le rapport $\lambda = \lambda(p)$ des valeurs propres de $L(p)$ soit un rationnel strictement positif. Ce sont ces singularités qu'il faut éclater pour désingulariser le feuilletage \mathcal{F} , cf [Bru00] Chapitre 1.

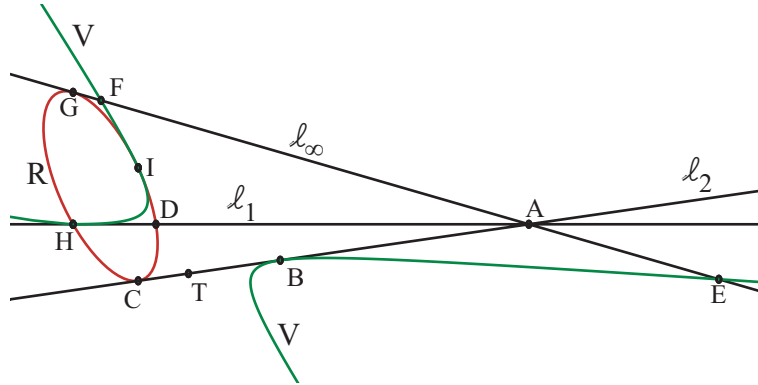
On donne la liste des éléments p de Σ et leurs propriétés dans le tableau 1. On donne un dessin de la configuration de nos courbes dans la figure 1. On y place aussi les points singuliers qui, à l'exception du point T , correspondent à des intersections de nos composantes de pôle.

TABLE 1. Description des points singuliers

p	λ	élément de	coordonnées de p
A	1	ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_∞	$(u, v) = (0, 0)$
B	2	V et ℓ_2	$(x, y) = (5/9, -1/3)$
C	2	R et ℓ_2	$(x, y) = (1/9, -1/3)$
D	-2	R et ℓ_1	$(x, y) = (2/9, 0)$
E, F	$\lambda < 0$	V et ℓ_∞	$(u, v) = (15/2 \pm 9/2 \sqrt{3}, 0)$
G	2	R et ℓ_∞	$(s, t) = (0, 0)$
H	partie linéaire nulle	V, R et ℓ_1	$(x, y) = (0, 0)$
I	3	V et R	$(x, y) = (1/3, 1)$
T	-4	ℓ_2	$(x, y) = (2/9, -1/3)$

On utilise sur \mathbb{P}^2 les cartes $[x : y : 1] \mapsto (x, y)$, $[1 : u : v] \mapsto (u, v)$ et $[s : 1 : t] \mapsto (s, t)$.

FIGURE 1. configuration de courbes et positions des points



5.1. Désingularisation. — Par inspection de la figure 1, on voit que si p est élément de $\{A, B, C, G, I\}$ alors le feuilletage \mathcal{F} a une singularité dicritique en p . Comme $\lambda = \lambda(p) \in \mathbb{N}^*$, en appliquant le théorème de forme normale de Poincaré-Dulac on obtient que, dans de bonnes coordonnées (z, w) au voisinage de p , le feuilletage est donné par le champ $z\partial_z + (\lambda w + \varepsilon z^\lambda)\partial_w$, avec $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$.

De plus, le fait que la singularité soit dicritique impose $\varepsilon = 0$. À l'aide la forme normale, on peut alors voir que la singularité en p se résout par une suite de λ éclatements de diviseur exceptionnel une chaîne de courbes rationnelles $Ch(p)$, dont seulement la dernière est transverse au feuilletage et d'auto-intersection -1 , tandis que les autres sont d'auto-intersection -2 :

pour $p = B, C, G$, $\lambda = 2$ on appelle D_p la première composante de $Ch(p)$ et E_p la seconde ; pour $p = A$, il n'y a qu'une composante à $Ch(p)$, qu'on nomme D_A et pour $p = I$, il y a trois composantes, la première est appelée F_I , la deuxième est appelée D_I et la troisième est appelée E_I .

Soit $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ la désingularisation de A, B, C, G, I décrite ci-dessus. La désingularisation de H n'est pas aussi prévisible. Toutefois, on voit, en calculant, que si on éclate X en H , le feuilletage induit sur l'éclaté a trois singularités sur le diviseur exceptionnel D_H : une réduite en H_1 avec $\lambda(H_1) = -7/2$, une réduite en H_2 avec $\lambda(H_2) = -7/12$ et une dicritique en H_3 avec $\lambda(H_3) = 1$. Il suffit ensuite d'éclater encore une fois en H_3 pour désingulariser le feuilletage, le nouveau diviseur exceptionnel E_H est alors transverse au feuilletage, tandis que la transformée stricte de D_H , qu'on note encore D_H , est invariante par le feuilletage.

On note $\tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ la désingularisation complète ainsi obtenue et $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage désingularisé, on donne un dessin décrivant cette désingularisation dans la figure 3, les singularités y sont représentées par des points. Dans la figure 2, on donne un dessin plus épuré qui indique les intersections entre les courbes rationnelles invariantes par $\tilde{\mathcal{F}}$ que nous connaissons. Le diviseur canonique du feuilletage \mathcal{F} est aisément calculé : \mathcal{F} est de degré 3, si δ est une droite générique de \mathbb{P}^2 , alors $K_{\mathcal{F}} = (3 - 1)\delta = 2\delta$ d'après [Bru00] p 27. Dans la suite d'éclatements on peut suivre ce que devient le diviseur canonique du nouveau feuilletage, c'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 5.1. — Soient $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ l'éclatement d'une surface Y en un point p et E le diviseur exceptionnel. Soit \mathcal{H} un feuilletage sur Y et $\tilde{\mathcal{H}}$ le feuilletage induit sur \tilde{Y} . Soit $a(p)$ l'ordre d'annulation d'une forme ω , à zéros isolés, donnant le feuilletage \mathcal{H} au voisinage de p .

- Si E est invariant par \mathcal{H} alors $K_{\tilde{\mathcal{H}}} = \pi^*(K_{\mathcal{H}}) - (a(p) - 1)E$.
- Si E n'est pas invariant par \mathcal{H} alors $K_{\tilde{\mathcal{H}}} = \pi^*(K_{\mathcal{H}}) - a(p)E$.

Démonstration. — Voir [Bru00] Chapitre 2. □

Signalons que si \mathcal{C} est une courbe, $\pi^*(\mathcal{C})$ est la **transformée totale** de \mathcal{C} par l'éclatement π . On utilisera le nom des diviseurs de \mathbb{P}^2 pour désigner leurs **transformées strictes** par $\tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Par utilisations successives de cette proposition on obtient $K_{\tilde{\mathcal{F}}} = 2\delta - D_A - E_B - E_C - D_H - 2E_H - E_G - E_I$.

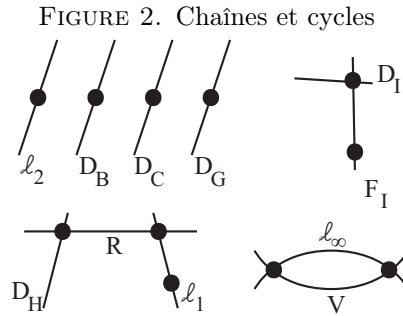
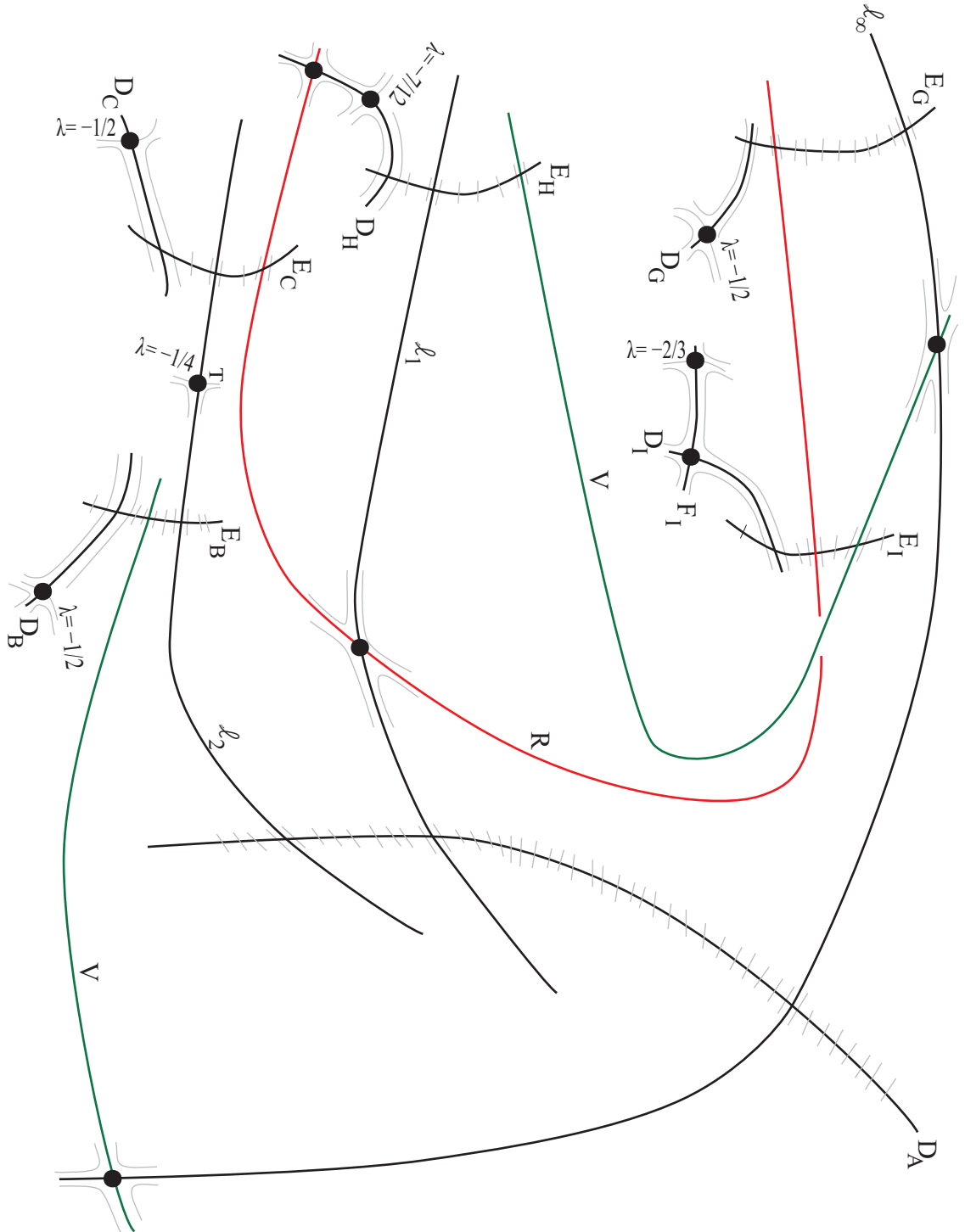


FIGURE 3. Désingularisation du feuilletage.



5.2. Étude des courbes rationnelles invariantes. — Nous entrons dans un passage technique, qui permet d'exclure la présence de courbes rationnelles lisses invariantes inconnues pour le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ qui feraient obstruction au bon calcul de sa dimension de Kodaira numérique. Soit \mathcal{C}_0 une telle courbe. On définit des inconnues pour le nombre d'intersections entre \mathcal{C}_0 et les diviseurs qui nous intéressent dans le tableau 2.

TABLE 2. Intersections de \mathcal{C}_0 avec nos diviseurs.

D	R	V	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_∞	D_A	D_B	D_C	D_H	D_G	D_I	F_I	E_H	E_B	E_C	E_I	E_G	δ
$D.\mathcal{C}_0$	0	0	0	ε_T	0	n_A	ε_B	ε_C	ε_H	ε_G	0	ε_I	n_H	n_B	n_C	n_I	n_G	d

Le degré de l'image de \mathcal{C}_0 dans \mathbb{P}^2 est d . En appliquant le théorème de Bézout et en utilisant notre connaissance de la désingularisation du feuilletage, on obtient les équations suivantes qui lient les intersections lues dans \mathbb{P}^2 et celles lues dans $\tilde{\mathbb{P}}^2$.

$$(3) \quad \begin{cases} E_{\ell_1} : & d = n_A + 2n_H + \varepsilon_H \\ E_{\ell_2} : & d = 2n_B + \varepsilon_B + 2n_C + \varepsilon_C + n_A + \varepsilon_T \\ E_{\ell_\infty} : & d = n_A + 2n_G + \varepsilon_G \\ E_R : & 2d = n_H + \varepsilon_H + 3n_I + \varepsilon_I + 2n_G + \varepsilon_G + 2n_C + \varepsilon_C \\ E_V : & 2d = 2n_H + \varepsilon_H + 3n_I + \varepsilon_I + 2n_B + \varepsilon_B \end{cases}$$

D'autre part (cf [Bru00], chapitre 3), l'auto-intersection de \mathcal{C}_0 peut être calculée en fonction des ε_p à l'aide des indices de Camacho-Sad (qui correspondent aux $\lambda(p)$) : par la formule de Camacho-Sad, on a $\mathcal{C}_0^2 = -\frac{1}{2}(\varepsilon_B + \varepsilon_C + \varepsilon_G) - \frac{7}{12}\varepsilon_H - \frac{2}{3}\varepsilon_I - \frac{1}{4}\varepsilon_T$. Comme les singularités sont réduites, on doit avoir, pour tout p , $\varepsilon_p \in \{0, 1\}$. De plus, comme l'auto-intersection de \mathcal{C}_0 est entière, les configurations envisageables pour les ε_p se restreignent à celles données dans le tableau 3 où l'on mentionne les valeurs de \mathcal{C}_0^2 qui y correspondraient.

TABLE 3. Auto-intersections envisageables pour \mathcal{C}_0 .

n°	ε_H	ε_I	ε_B	ε_C	ε_G	ε_T	\mathcal{C}_0^2
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	-1
3	0	0	1	0	1	0	-1
4	0	0	1	1	0	0	-1
5	1	1	0	0	1	1	-2
6	1	1	0	1	0	1	-2
7	1	1	1	0	0	1	-2
8	1	1	1	1	1	1	-3

Pour chacun de ces choix de (ε_p) , on peut résoudre le système linéaire (3). Seuls les choix n°1, 4, 5 et 8 correspondent à des solutions entières pour ce système. L'ensemble des solutions σ est alors un \mathbb{Z} -module de rang deux. Toutefois on peut donner encore deux contraintes sur les inconnues du système (3). Premièrement, on peut calculer \mathcal{C}_0^2 en fonction de l'auto-intersection d^2 de sa projetée dans \mathbb{P}^2 et de la désingularisation $\tilde{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, en utilisant la proposition suivante.

Proposition 5.2 (voir [GH78] p 187 et p 476). — Soient $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ l'éclatement d'une surface Y en un point p et E le diviseur exceptionnel.

1. Si $\mathcal{C} \subset Y$ est une courbe qui passe par p avec multiplicité m et si $\tilde{\mathcal{C}} \subset \tilde{Y}$ est sa transformée stricte alors $\tilde{\mathcal{C}}^2 = \mathcal{C}^2 - m^2$.
2. De plus le diviseur canonique $K_{\tilde{Y}}$ de \tilde{Y} est donné par $K_{\tilde{Y}} = \pi^*(K_Y) + E$.

En appliquant successivement la première propriété, on obtient

$$(4) \quad \mathcal{C}_0^2 = d^2 - n_A^2 - 3n_I^2 - 2\varepsilon_I n_I - \varepsilon_I - \sum_{p=B,C,G,H} ((n_p + \varepsilon_p)^2 + n_p^2).$$

En appliquant la seconde propriété et en sachant $K_{\mathbb{P}^2} = -3\delta$, on obtient : $K_{\tilde{\mathbb{P}}^2} = -3\delta + F_I + 2D_I + D_C + D_H + D_G + D_A + D_B + 2E_B + 2E_C + 2E_G + 2E_H + 3E_I$. Deuxièmement, on utilise la formule du genre : $0 = \frac{1}{2}\mathcal{C}_0 \cdot (\mathcal{C}_0 + K_{\tilde{\mathbb{P}}^2}) + 1$, pour obtenir

$$(5) \quad 0 = 1 + \frac{1}{2}d^2 - \frac{3}{2}d + \frac{1}{2}n_A + \frac{3}{2}n_I - \varepsilon_I n_I - \frac{1}{2}n_A^2 - \frac{3}{2}n_I^2 + \sum_{p=B,C,G,H} n_p(1 - n_p - \varepsilon_p).$$

Pour chacun des choix n°1, 4, 5 et 8 en injectant les valeurs des ε_p , la valeur de \mathcal{C}_0^2 correspondante, ainsi qu'une paramétrisation de σ par $(\lambda, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ dans (4), on arrive à paramétrer λ en fonction de β puis à conclure en utilisant (5). Les seules possibilités cohérentes sont alors celles données dans le tableau 4. Dans

TABLE 4.

n_H	ε_H	n_I	ε_I	n_B	ε_B	n_C	ε_C	n_G	ε_G	n_A	ε_T	d
1	1	2	1	1	0	0	0	1	1	3	1	6
3	1	5	1	2	1	0	1	3	1	7	1	14

les deux cas, l'éventuelle courbe invariante \mathcal{C}_0 traverse plus de trois singularités, ce qui indique qu'elle n'est pas dans une $\tilde{\mathcal{F}}$ -chaîne, de plus son auto-intersection est -3 ou -2 , ce qui indique que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est relativement minimal.

5.4. Dimension de Kodaira. — Dans cette section on commence par répéter les résultats généraux donnés dans [Bru00] qui circonscrivent $\mathbf{kod}(\tilde{\mathcal{F}})$ en fonction de $\nu(\mathcal{F})$, ce qui nous permet ensuite d’obtenir $\mathbf{kod}(\tilde{\mathcal{F}}) = -\infty$. Premièrement, on a l’inégalité suivante pour tout fibré en droites L :

$$(6) \quad \nu(L) \geq \mathbf{kod}(L).$$

Ensuite, deux théorèmes.

Théorème 5.3 (McQuillan-Mendes). — *Si \mathcal{H} est un feuilletage réduit sur une surface algébrique et $\mathbf{kod}(\mathcal{H}) = 1$ alors \mathcal{H} est*

1. *un feuilletage turbulent,*
2. *une fibration elliptique non-isotriviale,*
3. *une fibration isotriviale de genre $g \geq 2$ ou*
4. *un feuilletage de Riccati.*

Théorème 5.4 (McQuillan). — *Si \mathcal{H} un feuilletage réduit sur une surface algébrique tel que $\mathbf{kod}(\mathcal{H}) = 0$ alors $\nu(\mathcal{H}) = 0$.*

On déduit de cela l’énoncé suivant.

Proposition 5.5. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage réduit transversalement projectif sur une surface projective X , tel que $\nu(\mathcal{F}) = 1$, dont une structure transverse $(\pi : E \times X \rightarrow X, \mathcal{R}, \sigma)$ a une monodromie non métabélienne. On suppose aussi que \mathcal{R} n’est pas birationnellement équivalent au pull-back d’un feuilletage de Riccati au dessus d’une courbe. Alors \mathcal{F} est un feuilletage modulaire.*

Démonstration. — Par le théorème 5.4, on ne peut avoir $\mathbf{kod}(\mathcal{F}) = 0$. Il nous reste à exclure les éventualités 1 – 4 données dans le théorème 5.3 et à utiliser (6) et $\mathbf{kod} \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$ pour conclure. Pour ce faire, on utilise le lemme suivant.

Lemme 5.6 (Loray-Pereira). — *Soit X une variété complexe projective lisse. Si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension 1 sur X qui possède deux structures transversalement projectives $\mathcal{T} = (\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X, \mathcal{R}, \sigma)$ et \mathcal{U} non-équivalentes au sens de [LP07], alors la monodromie de \mathcal{T} est métabélienne ou \mathcal{R} est birationnellement équivalent à un feuilletage de Riccati pull-back d’un feuilletage de Riccati au dessus d’une courbe.*

Démonstration. — La preuve utilise [Scá97] Proposition 2.1, voir [LP07], Lemma 5.4. \square

Ainsi \mathcal{F} a une unique structure transversalement projective au sens de [LP07].

1. Si \mathcal{F} est un feuilletage turbulent, alors il admet une structure transversalement projective à monodromie virtuellement abélienne (donnée par des automorphismes de la courbe elliptique sous-jacente), ce qui est exclu.
2. Il n'est pas donné par une fibration, sans quoi il aurait une intégrale première méromorphe f qui lui fournirait une structure de feuilletage transversalement euclidien : $dz = df$, de monodromie triviale; ce qui n'est pas conforme à nos hypothèses.
3. Le feuilletage \mathcal{F} ne peut être un feuilletage de Riccati, puisque les feuilletages de Riccati sur X ont une structure transverse donnée par un feuilletage de Riccati birationnellement équivalent à un pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, cf [LP07], section 3.1.

□

On en déduit le cœur de nos résultats.

Théorème 5.7. — *Le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ décrit à la partie 5.1 est un feuilletage modulaire de Hilbert.*

Démonstration. — Les hypothèses de la proposition 5.5 sont satisfaites par $\tilde{\mathcal{F}}$ puisque :

- sa dimension de Kodaira numérique est $\nu = 1$;
- le groupe de monodromie de sa structure transverse est gros, comme on le verra dans le lemme 8.3 ;
- Le feuilletage de Riccati de sa structure transverse n'est pas birationnellement équivalent au pull-back d'un feuilletage de Riccati au dessus d'une courbe, d'après le lemme 3.4.

Ainsi, par minimalité, $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma$, pour un certain Γ . De plus, on montre dans la partie 8.2 que Γ est commensurable à $i(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}]))$, ce qui permet de conclure. □

6. Feuilletage dual

On vient d'obtenir $(\tilde{\mathbb{P}}^2, \tilde{\mathcal{F}}) = (\tilde{Y}_\Gamma, \tilde{\mathcal{F}}_\Gamma)$, pour un certain Γ . On se propose de déterminer le feuilletage \mathcal{G} sur \mathbb{P}^2 qui correspond au feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}_\Gamma$ sur $\tilde{\mathbb{P}}^2$. Par le théorème 2.5, les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} ont un diviseur de tangence réduit $Tang$, donné par le lieu polaire de la structure transverse de \mathcal{F} , c'est à dire de degré 7. De plus, le diviseur de tangence de deux feuilletages sur \mathbb{P}^2 de degrés d et d' est de degré $d + d' + 1$. Comme \mathcal{F} est de degré 3 on obtient que \mathcal{G} l'est aussi. Par un calcul affine, on voit que l'ensemble des feuilletages de degré 3 ayant $Tang - \ell_\infty$ parmi leurs courbes invariantes est un pinceau $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ dont seul un élément ne laisse pas invariant ℓ_∞ . Ce pinceau est donné par $\omega_t = P_t dx + Q_t dy$ où $P_t = -12(1 + 3y)y(-2ty - y - 10t + 36tx + 3x)$ et $Q_t = (-81 - 162t)x^3 +$

$(-162y + 756ty + 18 + 306t)x^2 + (-36y^2t - 18y^2 + 45y - 270ty - 60t)x + 10y(y + t)$.

On remarque que

$$\begin{cases} s_1 = \left\{ (x, y) = \left(\frac{10t}{9(1+2t)}, \frac{20t(3t-1)}{3(1+2t)^2} \right) \right\} \subset R \text{ et} \\ s_2 = \left\{ (x, y) = \left(\frac{10t(-9+2t)}{3(44t^2-96t-9)}, \frac{-100t^2}{44t^2-96t-9} \right) \right\} \subset V \end{cases}$$

sont deux singularités de \mathcal{F}_t , cela va nous permettre de déterminer le t tel que $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}$. En effet, comme $\tilde{\mathcal{G}}_\Gamma$ n'a pas de singularité sur R et V en dehors des intersections avec les autres courbes rationnelles invariantes, le t recherché doit être tel que $s_1(t) \in \{C, D, G, H, I\}$ et $s_2(t) \in \{B, E, F, H, I\}$. La seule valeur de t qui satisfait ces deux conditions est $t = 3/4$, on a donc finalement $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{3/4}$. On a trouvé une involution holomorphe de $\tilde{\mathbb{P}}^2$ (voir section 7) qui échange \mathcal{F} et \mathcal{G} , ainsi la structure transverse de \mathcal{G} , unique d'après 5.6, peut être obtenue en tirant en arrière celle de \mathcal{F} par σ .

7. L'involution

Cette involution est donnée dans la carte affine (x, y) de \mathbb{P}^2 par :

$$\sigma : (x, y) \mapsto \left(\frac{3y(3y+13)x - y(7y+9)}{(135y+9)x - 3y(3y+13)}, y \right).$$

On voit que c'est une transformation de de Joncquières.

On l'a découverte en étudiant les tangences entre le pinceau des droites issues de A et les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} . C'est une transformation de jauge méromorphe du \mathbb{P}^1 -fibré $(x, y) \mapsto y$ d'espace total l'éclatement de \mathbb{P}^2 en A , qui est holomorphe en dehors de $\{(y-1)y = 0\}$. Quand on la conjugue par la désingularisation de \mathcal{F} , on obtient une transformation holomorphe de $\tilde{\mathbb{P}}^2 = \tilde{Y}_\Gamma$ qui échange D_I et F_I ainsi que E_I et $\{y = 1\}$. De même, elle échange ℓ_1 et D_H en fixant globalement E_H et en réalisant un automorphisme non-trivial de R . Comme indiqué précédemment, cette involution échange \mathcal{F} et \mathcal{G} .

8. Calcul de la monodromie des structures transverses

On souhaite comprendre ici les représentations de monodromie de $\hat{\mathcal{R}}$ et $\sigma^*\hat{\mathcal{R}}$.

Remarque 8.1. — Soit \mathcal{R}_0 un feuilletage de Riccati au dessus de X et D son lieu polaire. Soit D_1 une composante de D . Si, localement, par transformation de jauge méromorphe, on peut faire disparaître le pôle D_1 , alors \mathcal{R}_0 n'a pas de monodromie locale près du point générique de D_1 . L'hypersurface D_1 est appelé **pôle apparent** de \mathcal{R}_0 . Si D' est l'hypersurface formée des composantes de D non apparentes, alors D' est appelé **lieu polaire non apparent** de \mathcal{R}_0 et la monodromie de \mathcal{R}_0 se réduit à $\rho : \pi_1(X \setminus D') \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

8.1. Groupe fondamental. — Un préalable au calcul de la représentation de monodromie de $\hat{\mathcal{R}}$, est la compréhension du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe dans une surface. L'outil principal utilisé pour cela est le théorème topologique suivant, dû à Zariski et Van-Kampen :

Théorème 8.2. — Soit $p : E \rightarrow B$ un fibré localement trivial qui possède une section s , avec E connexe par arcs. Soit $b \in B$ et F_b sa fibre.

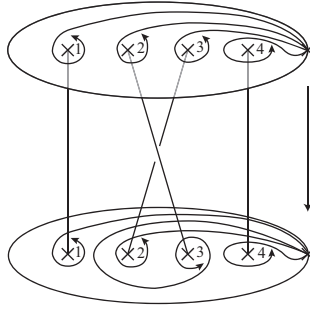
Le groupe fondamental de E est donné par la suite exacte scindée suivante $0 \rightarrow \pi_1(F_b, b) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, b) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(B, b) \rightarrow 0$. La section est donnée par s_* .

Démonstration. — Voir [Shi] □

Précisons l'action du facteur $\pi_1(B, b)$ sur $\pi_1(F_b, b)$ pour le produit semi-direct $\pi_1(B, b) \ltimes \pi_1(F_b, b)$ induit par cette suite exacte. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un lacet partant de b , γ^*E est un fibré localement trivial de base simplement connexe, il est donc trivialisable : $\gamma^*E \cong [0, 1] \times F_b$ et tout lacet τ_0 de F_b de point de base b se déforme continument en τ_t , un lacet de point de base $\gamma(t)$ dans la fibre $F_{\gamma(t)}$. On définit ainsi une action de $\gamma \in \pi_1(B, b)$ sur $\pi_1(F_b, b)$ en posant $\tau_0 \cdot \gamma = \tau_1$; c'est l'action qui intervient dans la structure de produit semi-direct mentionnée ci-haut.

Dans le cas où F_b est un disque épointé, l'action correspond à l'action d'une tresse, comme indiqué dans la figure 4.

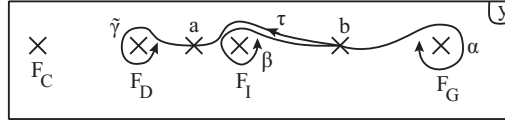
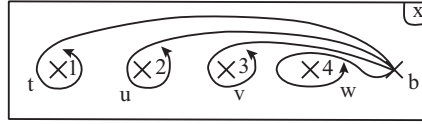
FIGURE 4. Action de la tresse σ_2



Soit $X \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^2$ l'éclatement de \mathbb{P}^2 en A et E le diviseur exceptionnel. On va travailler avec $\hat{\mathcal{R}}' = \psi^*\hat{\mathcal{R}}$. Remarquons que X est muni d'une structure de fibré en $\mathbb{P}^1 : X \xrightarrow{\pi} E$. Soit P le lieu polaire non-apparent de $\hat{\mathcal{R}}'$, on voit que E n'est pas une composante de P . Les composantes de P sont les transformées strictes des composantes du lieu polaire de $\hat{\mathcal{R}}$: trois fibres de π , à savoir l_1, l_2 et l_∞ , et les deux coniques. Soit l_I la fibre de I pour π . Soit $Q = P \cup l_I$, $X^0 = X \setminus Q$ et $E^0 = E \setminus Q$, on voit que $\pi|_{X^0} : X^0 \rightarrow E^0$ est un fibré topologiquement

localement trivial de fibre \mathbb{S}_4^2 , la sphère privée de quatre points. De plus, ce fibré admet une section, donnée par E^0 , on a ainsi, par le théorème ci-dessus, une description du groupe fondamental de X^0 comme produit semi-direct : $\pi_1(X^0, b) = \pi_1(F_b, b) \rtimes \pi_1(E^0, b)$.

Reste à identifier de façon effective les deux facteurs et l'action. Pour la base on choisit les générateurs α, β, γ comme sur la figure 5, où l'on rapporte les fibres à l'ordonnée y de leur point d'intersection avec $\{x = 0\}$. On choisit pour F_b la transformée stricte de $\{y = 4\}$ par l'éclatement de \mathbb{P}^2 en A . On choisit alors comme générateurs pour $\pi_1(F_b, b)$ les lacets t, u, v, w comme sur la figure 6, où l'on utilise l'abscisse x des points comme coordonnée ; la seule relation entre ces lacets est $tuvw = 1$.

 FIGURE 5. Chemins de la base E^0

 FIGURE 6. Lacets de la fibre F_b


On identifie les points 1, 2, 3 et 4 de F_b avec les points 1, 2, 3 et 4 du disque époiné quatre fois, ce qui permet d'interpréter l'action de α, β et γ à l'aide de l'action du groupe de tresses \mathcal{B}_4 . Comme on le voit sur la figure 4, \mathcal{B}_4 agit -à droite par morphisme de groupe- sur (t, u, v, w) de la manière suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_1 : (t, u, v, w) \mapsto (tut^{-1}, t, v, w) \\ \sigma_2 : (t, u, v, w) \mapsto (t, uvu^{-1}, u, w) \\ \sigma_3 : (t, u, v, w) \mapsto (t, u, vvw^{-1}, v) \end{cases}$$

Par inspection de notre figure réelle 1 et la connaissance des ordres de contacts entre les composantes de P , on voit que α agit comme la tresse σ_2 , que β correspond à la tresse σ_3^6 et que l'action de $\gamma = \tau\tilde{\gamma}\tau^{-1}$ est celle de σ_3^3 suivie de celle de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ sur la fibre F_a de a , puis enfin suivie de l'action de σ_3^{-3} . Puisque des générateurs pour les facteurs sont donnés par les familles $f = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $g = (t, u, v, w)$, notre structure de produit semi-direct pour $\pi_1(X^0, b)$ nous fournit la description par générateurs et relations suivante :

$$\pi_1(X^0, b) = \langle f \cup g | f_i^{-1} g_j f_i = g_j \cdot f_i, tuvw = 1 \rangle .$$

De manière explicite, l'ensemble des relations est le suivant.

$$(8) \quad tuvw = 1$$

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha^{-1}t\alpha = t \\ \alpha^{-1}u\alpha = uvu^{-1} \\ \alpha^{-1}v\alpha = u \\ \alpha^{-1}w\alpha = w \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \beta^{-1}t\beta = t \\ \beta^{-1}u\beta = u \\ \beta^{-1}v\beta = (vw)^3v(vw)^{-3} \\ \beta^{-1}w\beta = ((vw)^2v) w ((vw)^2v)^{-1} \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \gamma^{-1}t\gamma = (tu(vw)^{-1}) w (tu(vw)^{-1})^{-1} \\ \gamma^{-1}u\gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1}w\gamma = (t(wvw)^{-1}(vw)^2) t (t(wvw)^{-1}(vw)^2)^{-1} \\ \gamma^{-1}v\gamma = (t(wvw)^{-1}(vw)^2t(wvw)^{-1}) v (t(wvw)^{-1}(vw)^2t(wvw)^{-1})^{-1} \end{cases}$$

Par la relation (8) et le fait que $\pi_1(E^0, b)$ agit par morphismes de groupe, on peut déduire une des quatre équations de (9), (10) ou (11) des trois autres. On peut donc simplifier la présentation en enlevant une équation de son choix dans chacune des familles de relations (9), (10) et (11), par exemple la plus longue, ce qui donne l'ensemble de relations suivant, où l'on a aussi appliqué $tu = (vw)^{-1}$ dans la relation $\gamma^{-1}t\gamma = (tu(vw)^{-1}) w (tu(vw)^{-1})^{-1}$.

$$(12) \quad \begin{cases} tuvw = 1 \\ \alpha^{-1}t\alpha = t \\ \alpha^{-1}v\alpha = u \\ \alpha^{-1}w\alpha = w \\ \beta^{-1}t\beta = t \\ \beta^{-1}u\beta = u \\ \beta^{-1}v\beta = (vw)^3v(vw)^{-3} \\ \gamma^{-1}t\gamma = (vw)^{-2}w(vw)^2 \\ \gamma^{-1}u\gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1}w\gamma = (t(wvw)^{-1}(vw)^2) t (t(wvw)^{-1}(vw)^2)^{-1} \end{cases}$$

D'après le théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental de l'union de sous espaces topologiques, pour avoir une présentation du groupe fondamental de $X^1 = X \setminus P$, il suffit d'ajouter à cette présentation la relation $\beta = 1$. Ce

groupe est donc donné par les générateurs $\{\alpha, \gamma, t, u, v, w\}$ et les relations :

$$(13) \quad \begin{cases} tuv w = 1 \\ \alpha^{-1}t\alpha = t \\ \alpha^{-1}v\alpha = u \\ \alpha^{-1}w\alpha = w \\ v = (vw)^3v(vw)^{-3} \\ \gamma^{-1}t\gamma = (vw)^{-2}w(vw)^2 \\ \gamma^{-1}u\gamma = tut^{-1} \\ \gamma^{-1}w\gamma = (t(vvw)^{-1}(vw)^2) t (t(vvw)^{-1}(vw)^2)^{-1} \end{cases}$$

8.2. Monodromie. — Il nous suffira de comprendre la représentation de monodromie $\rho : \pi_1(X^1, b) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ de $\hat{\mathcal{R}}'$ en restriction à $\pi_1(F_b)$ et à $\pi_1(E \setminus P)$ pour la comprendre globalement. Remarquons que toute représentation de l'un de ces groupes vers $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ se relève à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ puisque ce sont des groupes libres. On pourra ainsi avoir recours à des raisonnements matriciels. Le pinceau des droites passant par A est le projeté du pinceau de \mathbb{P}^1 de la déformation isomonodromique initiale \mathcal{R}_s et on a un isomorphisme birationnel entre les feuilletages de Riccati restreints à deux éléments génériques ℓ_h et ℓ_b de ces pinceaux, en particulier la monodromie de $\hat{\mathcal{R}}'_{|F_b}$ est la même que celle d'un \mathcal{R}_s . Dans [Boa07], Boalch donne des traces de matrices qui permettent de déterminer les images de t, u, v et w par la représentation de monodromie de \mathcal{R}_s modulo conjugaison globale et modulo l'action de $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$ le mapping class group de la sphère épointée \mathbb{S}_4^2 . L'action de $\mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$ correspond à l'ambiguïté sur le choix des lacets simples t, u, v, w tels que $\pi_1(F_b) = \langle u, v, w \rangle$ et $tuvw = 1$, voir [Bir75] Theorem 1.9 p 30. Le théorème principal de [IIS04] (Theorem 2.3 p 6) permet de déduire des traces correspondant à un relèvement $\tilde{\rho}$ de $\pi_1(F_b, b) \xrightarrow{i^*} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, où $i : F_b \rightarrow X^1$ désigne l'injection naturelle. Elles sont données dans le tableau 6, où $T = \tilde{\rho}(t)$, $U = \tilde{\rho}(u)$, $V = \tilde{\rho}(v)$ et $W = \tilde{\rho}(w)$.

TABLE 6. Traces modulo l'action de \mathcal{B}_3

M	V	W	T	U	VW	WT	VT
$\mathrm{trace}(M)$	$\sqrt{3}$	2	2	$-\sqrt{3}$	1	0	1

Un quadruplet qui donne ces traces est donné ci-dessous.

$$V_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 + \sqrt{3} \\ -1 & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} + 5 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, T_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{3} - 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} -2 & 2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3} - 4 & 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\phi.(T_0, U_0, V_0, W_0) = (T, U, V, W)$ pour un $\phi \in \mathcal{MCG}(\mathbb{S}_4^2)$. De plus, l'action induite sur les traces par ϕ doit être triviale. En particulier, ϕ doit induire une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ qui fixe 1. Par quelques arguments topologiques [Bir75], on arrive ainsi à voir que l'action de ϕ sur la classe de conjugaison de (U_0, V_0, W_0) est celle d'une tresse à trois brins $b \in \mathcal{B}_3$ comme dans [LT08], où l'on montre que cette orbite est finie. A l'aide de Maple, on calcule l'orbite de la classe de conjugaison de (U_0, V_0, W_0) sous \mathcal{B}_3 . Cette orbite \mathcal{O} comporte 18 éléments et se décompose de la façon suivante :

$$(14) \quad \mathcal{O} = \sqcup_{i \in I} b_i \mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$$

où \mathcal{P}_3 est le noyau du morphisme naturel $\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ et les b_i ont des images distinctes par ce morphisme. On constate par calcul que l'orbite $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$ est de cardinal 6 et en déduit que I comporte 3 éléments. De plus, \mathcal{P}_3 agit trivialement sur le triplet $(\text{trace}(U), \text{trace}(V), \text{trace}(W)) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$ au contraire de σ_2 et de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ qui induisent respectivement $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2) \mapsto (\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2) \mapsto (2, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, la décomposition (14) est donc donnée par $b_0 = 1$, $b_1 = \sigma_1$ et $b_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$. En particulier, (U, V, W) est dans l'orbite $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$.

La monodromie de $\hat{\mathcal{R}}'_E$ se relève aussi en $\hat{\rho}$ à SL_2 . Elle est aisément calculée grâce à la connaissance des exposants : $\theta_\infty = 0$, $\theta_1 = \frac{1}{12}$, $\theta_2 = \frac{1}{4}$ correspondent respectivement à l_∞ , l_1 et l_2 . Soient $A = \hat{\rho}(\alpha)$ et $G = \hat{\rho}(\gamma)$, on a $\text{trace}(A) = 2 \cos(\pi\theta_\infty)$, $\text{trace}(G) = 2 \cos(\pi\theta_1)$ et $\text{trace}(AG) = 2 \cos(\pi\theta_2)$, ce qui détermine une représentation vers $\text{SL}_2(\mathbb{C})$, unique modulo conjugaison et irréductible,

d'après [Chu99]. Après calcul, elle est donnée par $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ et

$$G = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(5 - 3\sqrt{3}) & \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) \end{bmatrix}.$$

En utilisant la deuxième et la quatrième relation de (13), ainsi que le fait que T soit parabolique, on voit que T et W commutent. Dans l'orbite $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$, seuls deux triplets satisfont cette condition, même projectivement. En utilisant la troisième et la septième relation de (13), on arrive à voir que l'un d'eux ne peut correspondre à notre représentation tandis qu'un seul représentant de la classe de conjugaison du second satisfait (13), il est donné ci-dessous.

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1 & 1 \\ -2 + \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} -1 + 2\sqrt{3} & 1 \\ -8 + 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} + 1 \end{bmatrix};$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} - 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le groupe $\langle A, G, U, V, W \rangle$ est un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\xi])$ où $\xi = 2 \cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$. Notons que $\mathbb{Z}[\xi]$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[\xi] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. On remarque aussi que la représentation ρ ne se relève pas à SL_2 .

Exactement la même démarche permet de déterminer la monodromie de la structure transverse du feuilletage dual \mathcal{G} : vue l'involution, les images de u , v et w sont encore dans l'orbite $\mathcal{P}_3.(U_0, V_0, W_0)$ et une seule trace de monodromie locale change : $\theta_1 = \frac{7}{12}$. La représentation obtenue est l'image de la précédente par $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$.

Un examen plus approfondi donne le résultat suivant.

Lemme 8.3. — *Le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ engendré par U, V, W, A et G est une extension de degré 2 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$, en particulier il est gros.*

Démonstration. — En effet, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ est engendré par ses deux sous-groupes de matrices triangulaires : $T_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix}, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \right\}$ et $T_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \right\}$. L'isomorphisme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \mapsto u$ permet d'identifier T_1 à $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, on voit ainsi facilement que T_1 est engendré par les matrices A et W . De même, les matrices $H = G^2AG^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 12 + 7\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $F = G^2WG^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 19 + 11\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ engendrent T_2 , puisque $12 + 7\sqrt{3}$ et $19 + 11\sqrt{3}$ sont des générateurs du \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ en vertu des identités suivantes :

$$1 = -11(12 + 7\sqrt{3}) + 7(19 + 11\sqrt{3}) \text{ et } \sqrt{3} = 19(12 + 7\sqrt{3}) - 12(19 + 11\sqrt{3}).$$

Ainsi le groupe $\langle A, G, U, V, W \rangle$ contient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$. D'autre part, G est le seul générateur non contenu dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ tandis que G^2 l'est, ce qui montre que $\langle A, G, U, V, W \rangle / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}])$ se réduit à deux éléments. \square

9. La surface modulaire associée à $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

On déduit de notre travail suffisamment d'information sur la surface $Y_{\sqrt{3}}$.

Preuve du Théorème 1.2. — D'après le calcul de la monodromie des structures transverses de \mathcal{F} et \mathcal{G} , on voit que l'on obtient la surface $(Y_{\sqrt{3}}, \mathcal{F}_{\sqrt{3}}, \mathcal{G}_{\sqrt{3}})$ comme revêtement double de $(Y_{\Gamma}, \mathcal{F}_{\Gamma}, \mathcal{G}_{\Gamma})$. Soit $\pi : Y_{\sqrt{3}} \rightarrow Y_{\Gamma}$ le revêtement en question. Soit X l'éclatement de \mathbb{P}^2 en A , comme dans la section 8.2. La fin de la désingularisation de \mathcal{F} donne un morphisme $\phi : \tilde{Y}_{\Gamma} \rightarrow X$ et on note $\psi : Y_{\Gamma} \dashrightarrow \tilde{Y}_{\Gamma}$ la désingularisation de Y_{Γ} . Soient P le lieu invariant du feuilletage induit par \mathcal{F} sur X , $X^1 = X \setminus P$, $Y_{\sqrt{3}}^1 = Y_{\sqrt{3}} \setminus (\pi \circ \psi \circ \phi)^*P$. La composée

$\pi \circ \psi \circ \phi$ induit un revêtement étale $\pi^1 : Y_{\sqrt{3}}^1 \rightarrow X^1$ qui est déterminé par sa représentation de monodromie : $\pi_1(X^1) \xrightarrow{r} \Gamma/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{3}]) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'après le lemme 8.3, on voit que $p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X, (x, y) \mapsto (x, \frac{-y^2}{3y^2+1})$ induit en restriction à X^1 un revêtement étale qui a exactement r pour monodromie. Ainsi on a biholomorphisme T entre $Y_{\sqrt{3}}^1$ et $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus r^*P$, tel que $p \circ T = \pi^1$. Comme $p^{-1} \circ \pi^1$ est une correspondance algébrique, on en déduit que T se prolonge en une application birationnelle, de sorte que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 Y_{\sqrt{3}} & \xrightarrow{\quad T \quad} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\
 \pi \downarrow & \searrow \pi^1 & \downarrow p \\
 Y_{\Gamma} & \xrightarrow[\psi]{} \tilde{Y}_{\Gamma} \xrightarrow[\phi]{} & X
 \end{array}$$

Ainsi en pratique, le revêtement double qu'on utilise est p , ce qui permet de déduire le résultat. \square

Références

- [Art98] E. ARTIN – *Galois theory*, second éd., Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1998, Edited and with a supplemental chapter by Arthur N. Milgram.
- [Bir75] J. S. BIRMAN – *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1975, Based on lecture notes by James Cannon.
- [Boa07] P. BOALCH – « Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem », in *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, p. 85–112.
- [Bru00] M. BRUNELLA – *Birational geometry of foliations*, Monografias de Matemática. [Mathematical Monographs], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2000, disponible en ligne à <http://www.impa.br/Publicacoes/Monografias/Abstracts/brunella.ps>.
- [Bru03] ———, « Foliations on complex projective surfaces », in *Dynamical systems. Part II*, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 2003, p. 49–77.
- [Chu99] R. C. CHURCHILL – « Two generator subgroups of $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ and the hypergeometric, Riemann, and Lamé equations », *J. Symbolic Comput.* **28** (1999), no. 4-5, p. 521–545, Differential algebra and differential equations.
- [CLNL⁺07] D. CERVEAU, A. LINS-NETO, F. LORAY, J. V. PEREIRA & F. TOUZET – « Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences », *Mosc. Math. J.* **7** (2007), no. 1, p. 21–54, 166.

- [CS08] K. CORLETTE & C. SIMPSON – « On the classification of rank-two representations of quasiprojective fundamental groups », *Compos. Math.* **144** (2008), no. 5, p. 1271–1331.
- [DM00] B. DUBROVIN & M. MAZZOCCO – « Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups », *Invent. Math.* **141** (2000), no. 1, p. 55–147.
- [GH78] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.
- [Hir53] F. HIRZEBRUCH – « Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen », *Math. Ann.* **126** (1953), p. 1–22.
- [Hir73] F. E. P. HIRZEBRUCH – « Hilbert modular surfaces », *Enseignement Math. (2)* **19** (1973), p. 183–281.
- [IIS04] M.-A. INABA, K. IWASAKI & M.-H. SAITO – « Bäcklund transformations of the sixth Painlevé equation in terms of Riemann-Hilbert correspondence », *Int. Math. Res. Not.* (2004), no. 1, p. 1–30.
- [LP07] F. LORAY & J. V. PEREIRA – « Transversely projective foliations on surfaces : existence of minimal form and prescription of monodromy », *Internat. J. Math.* **18** (2007), no. 6, p. 723–747.
- [LSS] F. LORAY, M.-H. SAITO & C. SIMPSON – « Foliations on the moduli space of rank two connections on the projective line minus four points », JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (S)19104002.
- [LT08] O. LISOVYY & Y. TYKHYY – « Algebraic solutions of the sixth painlevé equation », *arXiv :0809.4873v2* (2008).
- [MP05] L. G. MENDES & J. V. PEREIRA – « Hilbert modular foliations on the projective plane », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 2, p. 243–291.
- [NY02] D. NOVIKOV & S. YAKOVENKO – « Lectures on meromorphic flat connexions », *disponible en ligne* (2002).
- [Rie74] O. RIEMENSCHNEIDER – « Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen) », *Math. Ann.* **209** (1974), p. 211–248.
- [Scá97] B. A. SCÁRDUA – « Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **30** (1997), no. 2, p. 169–204.
- [Shi] I. SHIMADA – « Lectures on Zariski-Van Kampen theorem », *Notes de Cours, disponibles en ligne*.
- [Tou03] F. TOUZET – « Sur les feuilletages holomorphes transversalement projectifs », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), no. 3, p. 815–846.