HAL
open science

Maximisation du débit sous contrainte de qualité de service : équivalence des approches

Jean-Yves Baudais

To cite this version:

Jean-Yves Baudais. Maximisation du débit sous contrainte de qualité de service : équivalence des approches. GRETSI 2011, Sep 2011, Bordeau, France. 4p. hal-00657430

HAL Id: hal-00657430

https://hal.science/hal-00657430v1

Submitted on 18 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Maximisation du débit sous contrainte de qualité de service : équivalence des approches

Jean-Yves Baudais

CNRS, Institut d'électronique et de télécommunication de Rennes, UMR 6164, F-35708 Rennes, France
jean-yves.baudais@insa-rennes.fr

Résumé – Les débits de systèmes de communication, exploitant plusieurs canaux parallèles et indépendants, sont maximisés sous différentes contraintes de qualité de service. Les solutions obtenues sont comparées afin de définir les domaines d'équivalence des approches.

Abstract – Data-rates of communication systems through parallel and independent channels are maximized under QoS constraints. Solutions are compared to identify the equivalence of approaches.

1 Contexte

Dans un système de communication, lorsque la connaissance du canal à l'émission peut se faire à faible coût de bande passante et de complexité, il est avantageux d'adapter le débit du système à la capacité du canal [1]. Pour n canaux indépendants et sans mémoire, la capacité est

$$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{n} \log_2(1 + \mathsf{rsb}_i)\,, \tag{1}$$

où rsb_i est le rapport signal sur bruit du canal i. L'utilisation de la marge de bruit γ_i du canal i permet d'analyser tout système fiable fonctionnant à un débit $r_i \leq \mathcal{C}_i$,

$$\gamma_i = \frac{2^{\mathcal{C}_i} - 1}{2^{r_i} - 1} = \frac{\mathsf{rsb}_i}{2^{r_i} - 1}\,. \tag{2}$$

L'allocation de l'information a largement été étudiée, depuis ses premiers développements pour l'ADSL [2, 3], et dérivée pour d'autres applications [4]. De nombreux algorithmes ont été proposés, pour des liaisons de point à point, afin de maximiser le débit, sous différentes contraintes de qualité de service (marge de bruit, probabilité d'erreur symbole ou binaire, approchée ou exact, contrainte crête ou moyenne), tout en cherchant à réduire la complexité de la solution itérative optimale [5, 6]. Mais ces solutions optimales n'ont jamais, à notre connaissance, été comparées, ce que nous proposons de faire dans cet article en montrant sous quelles conditions les différentes qualités de service conduisent à des débits proches ou identiques. L'objectif est d'obtenir des équivalences entre ces approches.

2 Formulation du problème

On considère n canaux parallèles, indépendants et sans interférences. Ces canaux peuvent être les sous-porteuses d'un système à porteuse multiple, les modes propres d'un système exploitant la dimension spatiale, ou tout système exploitant les dimensions temps, fréquence et espace. Sur le i^{e} canal, la relation entre le signal émis S_i et le signal reçu Y_i s'écrit, en bande de base,

$$Y_i = h_i S_i + W_i\,. \tag{3}$$

La variable h_i modélise le gain complexe du canal de transmission, et W_i le bruit gaussien complexe circulaire de variance $\sigma^2_{W_i}$.

Nous considérons une contrainte de puissance crête qui s'écrit $\forall i \in [1;n]$, $E[|S_i|^2] \leq P_i$ et en utilisant des symboles $\{X_i\}_{i=1}^n$ de puissance unité, $S_i = \sqrt{p_i P_i} X_i$, la contrainte énergétique devient $\forall i \in [1;n]$, $p_i \leq 1$. Le rapport signal sur bruit par canal est alors

$$\mathsf{rsb}_i = |h_i|^2 p_i \frac{P_i}{\sigma^2_{W_i}}\,. \tag{4}$$

Avec $p_i = \gamma_i = 1$ pour tout i, le débit r_i par canal est la capacité du canal sous la contrainte de puissance P_i. Ce résultat est obtenu avec des modulations gaussiennes non contraintes, c'est-à-dire $r_i \in \mathbb{R}_+$. Nous nous intéressons au cas $r_i \in \{0, \beta, 2\beta, \cdots, r_{\max}\}$ où β est la granularité et $r_{\max}$ le débit maximal par canal. Les contraintes de puissance crête et de débit s'écrivent

$$\forall i \; p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad r_i \in \{0, \beta, 2\beta, \cdots, r_{\max}\}\,. \tag{5}$$

À noter que l'exploitation de toute la puissance disponible conduit à $p_i = 1$ pour tout i.

La marge de bruit γ_i, qui caractérise la distance entre la capacité du canal et le point de fonctionnement du système sur le canal i selon l'équation (2), est également fonction de la probabilité d'erreur symbole ou binaire f_i et du débit r_i, soit

$$\gamma_i = \phi(f_i, r_i)\,. \tag{6}$$

La probabilité d'erreur f_i dépend du débit et du rapport signal sur bruit, soit

$$f_i = \varphi(r_i, \mathsf{rsb}_i)\,. \tag{7}$$

Cette probabilité d'erreur par canal est en relation avec les différentes contraintes Ψ de probabilité d'erreur symbole ou binaire, crête ou moyenne selon l'équation générique

$$\max_i \psi\big(\{r_i\}_{i=1}^n, \{f_i\}_{i=1}^n\big) \leq \Psi \tag{8}$$

exprimée pour les différents cas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ du tableau 1. À noter que dans le cas $\mathcal{A}$

$$\max_i \psi\big(\{r_i\}_{i=1}^n, \{f_i\}_{i=1}^n\big) = \max_i \frac{2^{r_i} - 1}{\mathsf{rsb}_i}\,, \tag{9}$$

Contrainte	Marge de bruit Γ	Probabilité d'erreur			
		symbole		binaire	
		crête P_s	moyenne $\bar{P}_s$	crête P_b	moyenne $\bar{P}_b$
Expression	$\max_i \gamma_i^{-1} \leq \Gamma^{-1}$ $(\mathcal{A})$	$\max_i f_i \leq P_s$ $(\mathcal{B})$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \leq \bar{P}_s$ $(\mathcal{C})$	$\max_i f_i \leq P_b$ $(\mathcal{D})$	$\sum_{i=1}^{n} r_i f_i \leq \bar{P}_b \times \sum_{i=1}^{n} r_i$ $(\mathcal{E})$

TABLE 1 – Contraintes de marge de bruit et de probabilité d'erreur.

et la contrainte est

$$\Psi = \frac{1}{\Gamma}\,. \tag{10}$$

La marge de bruit est également en relation avec une valeur approchée de la probabilité d'erreur symbole [7].

Le problème qui nous intéresse est la maximisation du débit sous contrainte de marge de bruit ou de probabilité d'erreur, de puissance crête et de modulation, soit

$$r^* = [r_1^*, \cdots, r_n^*] = \underset{\{r_i\}_{i=1}^n}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{11}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} p_i = 1\,, \\ r_i \in \{0, \beta, 2\beta, \cdots, r_{\max}\}\,, \\ \psi\big(\{r_i\}_{i=1}^n, \{f_i\}_{i=1}^n\big) \leq \Psi\,. \end{cases} \tag{12}$$

Notation Afin d'alléger les notations, nous notons x le vecteur $[x_1, \cdots, x_n]$ ou l'ensemble des éléments $\{x_i\}_{i=1}^n$.

3 Solution algorithmique générale et résultats analytiques

Le problème d'allocation (11) sous les contraintes (12) est un problème combinatoire qui est également un problème de programmation non-linéaire en nombre entier. Ce problème peut être résolu à l'aide de méthodes gloutonnes qui convergent vers la solution optimale sous certaines conditions. La convexité des fonctions est une condition suffisante mais elle n'est pas nécessaire [8]. Nous nous intéressons aux modulations d'amplitude en quadrature (MAQ) de type III, carrées et rectangulaires. Les probabilités d'erreur sont les valeurs exactes, calculées selon les formules classiques [9] pour la probabilité d'erreur symbole et selon celles développées dans [10] pour la probabilité d'erreur binaire. Le système de communication étant étudié sans codage de canal, les probabilités d'erreur cibles seront donc élevées et, en pratique, la convergence des méthodes gloutonnes est assurée pour des probabilités d'erreur allant jusqu'à $5 \cdot 10^{-2}$.

Quel que soit r^* solution de (11) sous les conditions (12), nous avons

$$\forall ||r||_1 > ||r^*||_1\,,\ \psi(r, f) > \Psi \geq \psi(r^*, f)\,. \tag{13}$$

Ainsi, maximiser le débit sous les contraintes (12) est équivalent à minimiser $\psi(r, f)$ sous la contrainte de débit $||r^*||_1$. La structure générale de la procédure d'allocation est alors donnée par l'algorithme 1 [8]. Cet algorithme est décrit pour $r_{\max} = +\infty$. Avec des valeurs finies, il faut supprimer de la boucle les canaux i pour lesquels $r_i^{(k+1)} = r_{\max}$.

ALGORITHME 1

1) Initialisation $k = 0$, $[r_1^{(k)}, \cdots, r_n^{(k)}] = 0$;
2) Allouer β bits au canal j pour lequel

$$\psi\big(\{r_i^{(k+1)}\}_{i=1}^n, \{f_i^{(k+1)}\}_{i=1}^n\big)$$

est minimal, avec $r_j^{(k+1)} = r_j^{(k)} + \beta$, et

$$\forall i \neq j \begin{cases} r_j^{(k+1)} = r_j^{(k)} \\ f_i^{(k+1)} = \varphi\big(r_i^{(k+1)}, \mathsf{rsb}_i\big) \end{cases}$$

3) Répéter l'étape 2 si

$$\max_i \psi\big(\{r_i^{(k+1)}\}_{i=1}^n, \{f_i^{(k+1)}\}_{i=1}^n\big) < \Psi$$

et accroitre k, sinon

$$[r_1^*, \cdots, r_n^*] = [r_1^{(k)}, \cdots, r_n^{(k)}]\,.$$

À noter que dans les cas de contrainte crête, des structures d'algorithmes plus rapides permettent également d'atteindre la solution optimale. Le nombre d'itérations est alors au plus n et non plus $\frac{1}{\beta}\sum_i r_i^*$. De façon générale, la fonction $\psi(\cdot)$ de l'étape 2 peut être différente de celle de l'étape 3.

Proposition 1. *À fort RSB, le canal j de l'étape 2 de l'algorithme 1 est donné par*

$$j = \arg\min_i \varphi\big(r_i^{(k)} + \beta, \mathsf{rsb}_i\big)\,,$$

avec $\varphi(\cdot)$ la probabilité d'erreur symbole, dans les cas $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.

Démonstration. Le cas $\mathcal{B}$ est trivial. Pour les cas $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$, la condition de fort régime est nécessaire et permet, asymptotiquement, de remplacer une différence de probabilité d'erreur par une probabilité d'erreur. De même, sous cette condition, une erreur sur un symbole de r_i bits conduit à une seule erreur sur les bits, dans le cas d'un codage de Gray. □

La démonstration de ce premier résultat ne faisant pas appel aux expressions des probabilités d'erreur, il s'applique alors à tout système et notamment aux systèmes codés. Cette proposition 1 s'applique aussi dans le cas $\mathcal{D}$: la fonction $\varphi(\cdot)$ n'est plus la probabilité d'erreur symbole mais binaire. Ce résultat peut également s'appliquer dans le cas $\mathcal{A}$ mais de façon moins générale car la marge de bruit doit être indépendante le couple modulation-codage. Dans le cas des modulations MAQ, le résultat reste valable avec

une très bonne approximation même à forte probabilité d'erreur, typiquement $5 \cdot 10^{-2}$, ou à faible RSB.

Corollaire 1. *L'ajout de β bits à une distribution des débits $[r_1, \cdots, r_n]$ conduit à la même répartition des débits à fort RSB dans les cas $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Ce corollaire est une conséquence directe de la proposition 1. □

Ce résultat reste encore valable à faible RSB. Ainsi, les trois stratégies d'allocation $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ offrent un accroissement des débits asymptotiquement équivalent. Pour obtenir l'équivalence complète des trois approches, il reste à montrer que la fonction $\varphi(\cdot)$ conserve la relation d'ordre. Malheureusement, on trouve facilement des exemples pour lesquels $\varphi(r_i, \mathsf{rsb}_i) \leq \varphi(r_j, \mathsf{rsb}_j)$ n'implique pas $\varphi(r_i + \beta, \mathsf{rsb}_i) \leq \varphi(r_j + \beta, \mathsf{rsb}_j)$. On obtient cependant le résultat suivant dans un cas moins général.

Proposition 2. *Pour des MAQ d'ordre soit pair, soit impair, et pour une même condition d'arrêt, les stratégies d'allocation $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, conduisent à la même répartition des débits à fort RSB.*

Démonstration. Soit $g(\beta) = \varphi(r_i+\beta, \mathsf{rsb}_i) - \varphi(r_j+\beta, \mathsf{rsb}_j)$. En utilisant les expressions des probabilités d'erreur pour les deux cas de débit dans $2\mathbb{N}$ et dans $2\mathbb{N}+1$, on montre que $g(2)$ est de même signe que $g(0)$ à fort RSB. La démonstration se termine en appliquant le corollaire 1. □

Ainsi, avec une même condition d'arrêt, les trois stratégies d'allocation, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ conduisent à la même allocation de l'information à fort régime. À faible RSB, les allocations restent très proches. De plus, on obtient de façon empirique que sous les mêmes conditions de modulation, la minimisation locale de la marge de bruit ou de la probabilité d'erreur binaire crête conduisent à des répartitions des débits très proches. La généralisation aux systèmes codés est plus délicate car elle nécessite des choix d'ordre de modulation, de rendement et de schéma de codage tels que la relation d'ordre soit conservée.

Il ne reste plus qu'à étudier les conditions d'arrêt pour caractériser complètement les différentes approches.

Proposition 3. *À fort RSB et sous les conditions de modulation de la proposition 2, la maximisation du débit conduit à la même répartition des débits si les conditions d'arrêt $\bar{P}_s$ et $\bar{P}_b$ vérifient $\bar{P}_s = \bar{r}\bar{P}_b$ où $\bar{r}$ est le débit moyen par canal.*

Démonstration. Sous contrainte de codage de Gray et à fort RSB $\bar{r}\bar{P}_b = \frac{1}{n}\sum_i r_i f_i = \bar{P}_s$. L'application de la proposition 2 termine la démonstration. □

Ce résultat ne peut pas être étendu aux contraintes crêtes des stratégies $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.

4 Résultats empiriques

L'étude analytique a permis d'obtenir des équivalences entre les approches. Afin de comparer les allocations obtenues par ces différentes approches, et par simulation, nous définissons une mesure de ressemblance qui caractérise les similitudes entre deux allocations.

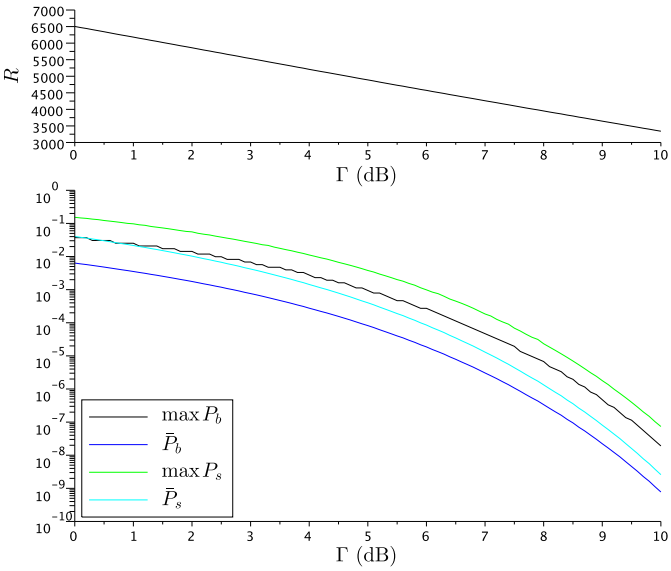

FIGURE 1 – Débits et probabilités d'erreur en fonction de la marge de bruit Γ, stratégie $\mathcal{A}$.

Définition 1. *La mesure de ressemblance de deux allocations $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est*

$$\mu(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{r_i(\mathcal{X}), r_i(\mathcal{Y})}, \tag{14}$$

avec $\delta_{x,y}$ le symbole de Kronecker.

Cette mesure évalue tout simplement le nombre de débits r_i égaux. Ainsi, $\mu(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 1$ si et seulement si les deux allocations $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont identiques, c.-à-d. $\forall i\ r_i(\mathcal{X}) = r_i(\mathcal{Y})$, et $\mu(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ si et seulement si elles sont totalement différentes.

La stratégie $\mathcal{A}$ est évaluée sur la figure 1. La somme R des débits $\{r_i\}_{i=1}^n$, en bits par symbole, et les probabilités d'erreur effectives sont données en fonction de la contrainte de marge de bruit Γ, avec $n = 1000$, $r_{\max} = 10$, $\beta = 2$, une distribution de Rayleigh des coefficients $\{[h_i|\}_{i=1}^n$ de moment d'ordre deux égal à un et un RSB moyen de 25 dB. Les cinq stratégies sont comparées sur la figure 2 dans les mêmes conditions de simulation, et les contraintes de probabilité d'erreur des stratégies $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont celles obtenues en sortie de l'allocation $\mathcal{A}$. Les stratégies $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ sont identiques même à très forte probabilité d'erreur et les différences avec les allocations $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ sont faibles, voire négligeables à fort régime, autant en terme de débit que de mesure de ressemblance.

Résultat 1 (Généralisation de la proposition 2)**.** *Pour tous les ordres de modulation ($\beta = 1$), et pour une même contrainte conduisant à un taux d'erreur binaire moyen de 10^{-2}, les fonctions de répartition des mesures de ressemblance $F_{\mu(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ vérifient la relation* (15)*.*

Ce résultat 1, représenté sur la figure 3, est obtenu avec $n = 1000$, $r_{\max} = 10$, un RSB moyen de 25 dB et 1000 tirages des coefficients $\{h_i\}_{i=1}^n$, ce qui correspond à des débits variant de 6671 à 6951 bits. Les fonctions de répartition des mesures de ressemblance sont données par la probabilité que la ressemblance soit inférieure à une certaine valeur

$$F_{\mu(\mathcal{X},\mathcal{Y})}(z) = P\Big(\mu(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \leq z\Big). \tag{16}$$

$$F_{\mu(\mathcal{E},\mathcal{C})} \leq \left\{F_{\mu(\mathcal{E},\mathcal{B})}, F_{\mu(\mathcal{B},\mathcal{C})}, F_{\mu(\mathcal{D},\mathcal{B})}, F_{\mu(\mathcal{A},\mathcal{B})}\right\} \leq \left\{F_{\mu(\mathcal{A},\mathcal{D})}, F_{\mu(\mathcal{D},\mathcal{E})}, F_{\mu(\mathcal{D},\mathcal{C})}\right\} \leq \left\{F_{\mu(\mathcal{A},\mathcal{E})}, F_{\mu(\mathcal{A},\mathcal{C})}\right\}. \tag{15}$$

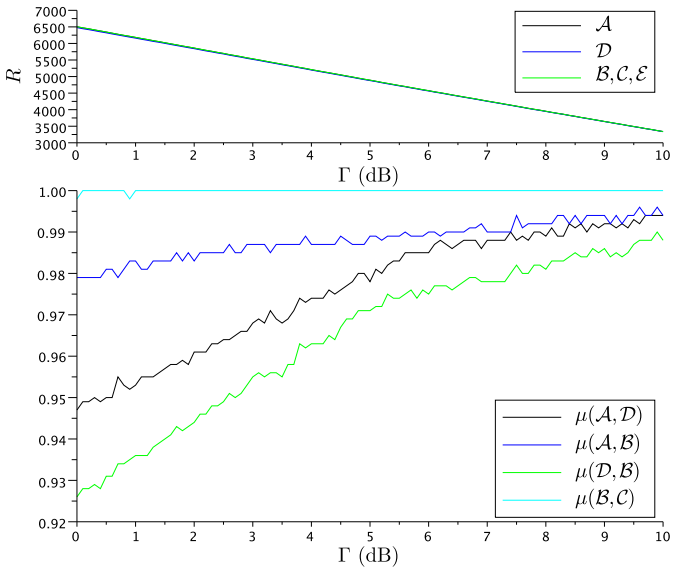

FIGURE 2 – Débits et mesures de ressemblance des cinq stratégies d'allocation.

Ainsi, la ressemblance entre la stratégie $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ est supérieur à 97 % avec une très forte probabilité, plus de 999 ‰. Quelle que soit la contrainte utilisée, autre que la probabilité d'erreur binaire moyenne, les deux approches $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ conduisent toujours à des allocations d'une très grande ressemblance, et la plus faible ressemblance est obtenue entre l'une de ces allocations et l'allocation de la stratégie $\mathcal{A}$.

Résultat 2. *Dans les mêmes conditions que celles du résultat 1, les débits vérifient* $R_{\mathcal{A}} \leq R_{\mathcal{D}} \leq R_{\mathcal{B}} \leq \{R_{\mathcal{C}}, R_{\mathcal{E}}\}$.

Les différences relatives de débit sont données sur la figure 3 sous forme de fonction de répartition des différences

$$F_{\Delta R_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}}(z) = P\left(\frac{R_{\mathcal{X}} - R_{\mathcal{Y}}}{R_{\mathcal{X}} + R_{\mathcal{Y}}} \leq 2z\right), \tag{17}$$

en notant $R = \sum_i r_i$. Les différences entre les débits restent faibles, inférieures à 1 %.

Résultat 3. $\forall i,\ |r_i(\mathcal{X}) - r_i(\mathcal{Y})| \leq \beta$.

Ce dernier résultat est important car il permet de passer d'une allocation, optimale pour une stratégie donnée, à une autre avec un nombre d'itérations inférieur au nombre de canaux.

5 Conclusion

L'allocation de l'information, exploitant la connaissance du canal à l'émission, a conduit au développement de nombreux algorithmes prenant en compte des contraintes variées de qualité de service. À partir d'une approche générique, nous avons montré sous quelles conditions ces différentes contraintes de qualité de service conduisent à des débits et des allocations identiques ou très proches. Ces équivalences permettent de réduire efficacement la complexité de certains algorithmes d'allocation en exploitant la faible complexité des autres approches.

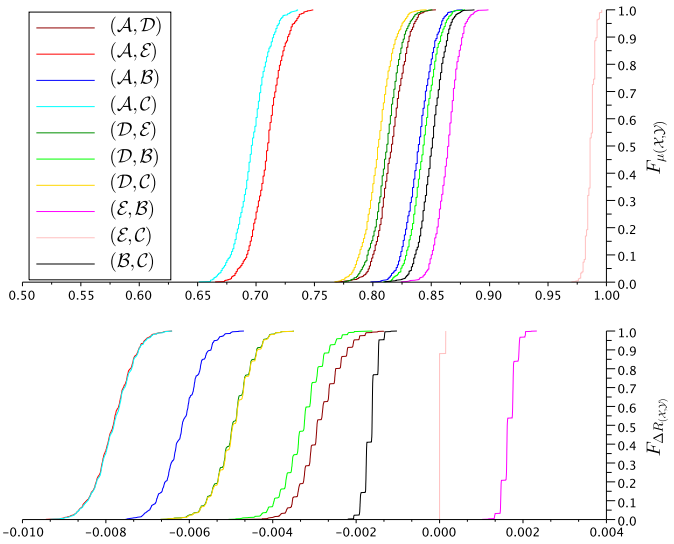

FIGURE 3 – Fonction de répartition des mesures de ressemblance et des différences de débit.

Références

[1] A.J. GOLDSMITH et S.-G. CHUA, « Variable-rate variable-power MQAM for fading channels ». *IEEE Transactions on Communications*, vol. 45, n° 10, pages 1218–1230, octobre 1997.

[2] D. HUGHES-HARTOGS, *Ensemble modem structure for imperfect transmission media*. Telebit Corporation, Cupertino, CA, juillet 1987. US Patent 4,679,227.

[3] P.S. CHOW, J.M. CIOFFI et J.A.C. BINGHAM, « DMT-based ADSL: concept, architecture, and performance ». In *IEE Colloquium on High speed Access Technology and Services, Including Video-on-Demand*, pages 3/1–3/6, octobre 1994.

[4] A. STEPHAN, J.-Y. BAUDAIS et J.-F. HÉLARD, « Efficient allocation algorithms for multicarrier spread-spectrum schemes in UWB applications ». In *IEEE International Conference on Ultra-Wideband*, (Marina Mandarin, Singapore), pages 551–555, 24–26 septembre 2007.

[5] A.M. WYGLINSKI, F. LABEAU et P. KABAL, « Bit Loading With BER-Constraint for Multicarrier Systems ». *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, n° 4, pages 1383–1387, juillet 2005.

[6] N. PAPANDREOU et T. ANTONAKOPOULOS, « Bit and power allocation in constrained multicarrier systems: The single-user case ». *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2008, page 14p, 2008.

[7] J.M. CIOFFI, « A Multicarrier Primer ». Rapport, *ANSI T1E1.4/91–157, Committee contribution*, novembre 1991.

[8] B. FOX, « Discrete optimization via marginal analysis ». *Management Science*, vol. 13, n° 3, pages 210–216, novembre 1966.

[9] J.G. PROAKIS, *Digital communications*. Electrical engineering, McGraw-Hill, 3rd ed., 1995.

[10] K. CHO et D. YOON, « On the general BER expression of one- and two-dimensional amplitude modulations ». *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, n° 7, pages 1074–1080, juillet 2002.