



**HAL**  
open science

## Analyse morphométrique d'images à tons de gris par diagrammes de forme

Séverine Rivollier, Johan Debayle, Jean-Charles Pinoli

► **To cite this version:**

Séverine Rivollier, Johan Debayle, Jean-Charles Pinoli. Analyse morphométrique d'images à tons de gris par diagrammes de forme. RFIA 2012 (Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle), Jan 2012, Lyon, France. pp.978-2-9539515-2-3. hal-00656536

**HAL Id: hal-00656536**

**<https://hal.science/hal-00656536v1>**

Submitted on 17 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse morphométrique d'images à tons de gris par diagrammes de forme

Séverine Rivollier

Johan Debayle

Jean-Charles Pinoli

Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

CIS - LPMG/CNRS 5148, 158 cours Fauriel, 42023 Saint-Etienne cedex 2, France.  
debayle@emse.fr

## Résumé

*Les diagrammes de forme sont des représentations introduites pour étudier les ensembles connexes compacts : un tel ensemble est représenté par un point dans le plan euclidien dont les coordonnées sont deux fonctionnelles morphométriques. Néanmoins, les diagrammes de forme sont souvent limités à l'analyse globale et mono-échelle d'image binaire. L'utilisation des Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) permet de pallier ces limites. Les VAG sont des voisinages spatiaux, définis autour de chaque point du support spatial d'une image à niveaux de gris, simultanément adaptés avec les échelles d'analyse, les structures spatiales, et les intensités de l'image. Ce papier vise à introduire les diagrammes de forme à VAG, qui permettent d'analyser les images à niveaux de gris de manière locale, adaptative et multi-échelle. Les fonctionnelles morphométriques sont calculées pour le VAG de chaque point du support spatial de l'image, définissant les diagrammes de forme à VAG. Des distributions morphométriques des structures locales de l'image sont obtenues, permettant par exemple de les classifier.*

## Mots Clef

Fonctionnelles géométriques et morphométriques, Diagrammes de forme, Voisinages Adaptatifs Généraux, Analyse multi-échelle.

## Abstract

*Shape diagrams are representations introduced to study connected compact sets : such a set is represented by a point within the Euclidean plane whose coordinates are two morphometrical functionals. Nevertheless, they are often limited to binary images and achieved in a global and monoscale way. The use of General Adaptive Neighborhoods (GANs) enables to overcome these limitations. The GANs are spatial neighborhoods, defined around each point of the spatial support of a gray-tone image, simultaneously adaptive with the analyzing scales, the spatial structures and the image intensities. This paper aims at introducing the GAN-*

*based shape diagrams, which allow a gray-tone image analysis to be realized in a local, adaptive and multiscale way. The morphometrical functionals are computed on the GAN of each point of the image spatial support, which define the GAN-based shape diagrams. Morphometrical distributions of the image local structures are provided, allowing for instance, to classify them.*

## Keywords

Geometrical and morphometrical functionals, Shape diagrams, General Adaptive Neighborhoods, Multi-scale analysis.

## 1 Introduction

Ce papier a pour but d'introduire une nouvelle approche quantitative pour l'analyse morphométrique d'une image à niveaux de gris, réalisée de manière locale, adaptative et multi-échelle. L'étape de segmentation généralement effectuée au préalable de l'analyse d'image quantitative [7, 15, 16] n'est pas ici nécessaire. La description quantitative est appliquée directement sur les images à niveaux de gris originales.

Les diagrammes de forme [1, 2, 13] sont des représentations introduites pour étudier les ensembles connexes compacts : un tel ensemble est représenté par un point dans le plan euclidien dont les coordonnées sont deux fonctionnelles morphométriques. Néanmoins, les diagrammes de forme sont souvent limités à l'analyse globale et mono-échelle d'image binaire. L'utilisation des Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) [5] permet de pallier ces limites. Les VAG sont des voisinages spatiaux, définis autour de chaque point du support spatial d'une image à niveaux de gris, simultanément adaptatifs avec les échelles d'analyse, les structures spatiales et les intensités de l'image. Les fonctionnelles morphométriques sont calculées pour le VAG de chaque point du support spatial de l'image. Ceci permet de définir les diagrammes de forme à VAG, qui

fournissent des distributions statistiques de la morphométrie des structures locales d'une image à niveaux de gris.

L'objectif de ce papier est donc d'associer les Voisinages Adaptatifs Généraux aux diagrammes de forme. Les deux premières sections rappellent les notions de diagramme de forme (basés sur des fonctionnelles morphométriques) et de Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG). La section suivante introduit les diagrammes de forme à VAG, qui permettent de réaliser une analyse d'image à niveaux de gris de manière locale, adaptative et multi-échelle. La dernière section présente un exemple d'application pratique de classification de formes.

## 2 Diagrammes de forme

Les diagrammes de forme [1, 2, 13] sont des représentations dans le plan euclidien introduites pour étudier les ensembles connexes compacts 2D. Un tel ensemble est représenté par un point dans un diagramme de forme dont les coordonnées des axes sont des fonctionnelles morphométriques définies comme ratios normalisés de fonctionnelles géométriques.

Les fonctionnelles géométriques considérées sont l'aire  $A$ , le périmètre  $P$ , les rayons des cercles inscrit  $r$  et circonscrit  $R$ , et les diamètres de Feret minimal  $\omega$  et maximal  $d$  [6]. Pour un ensemble connexe compact, ces fonctionnelles géométriques vérifient des inégalités géométriques [3, 14]. Ces inégalités géométriques lient les fonctionnelles géométriques par paire. De plus, elles permettent de déterminer les fonctionnelles morphométriques.

Les fonctionnelles morphométriques sont invariantes par similitudes (par conséquent, elles ne dépendent pas de la taille globale de l'ensemble) et sont définies comme ratios de deux fonctionnelles géométriques. Dans ces ratios, les unités du numérateur et du dénominateur sont de dimensions homogènes et le résultat n'a donc pas d'unité. De plus, une normalisation par un coefficient constant (multiplication scalaire) permet d'avoir un ratio compris dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour chaque fonctionnelle morphométrique, le coefficient constant dépend directement de l'inégalité géométrique associée [4]. Au total, quinze fonctionnelles morphométriques sont définies pour un ensemble connexe compact.  $4\pi A/P^2$ ,  $r/R$ ,  $\omega/d$  et  $4R/P$  sont quatre exemples de ces fonctionnelles morphométriques. Leurs significations concrètes sont la rondeur, la circularité, la constance du diamètre et la finesse, respectivement.

Des diagrammes de forme peuvent être définis grâce à ces quinze fonctionnelles morphométriques. Chaque diagramme de forme permet de représenter la morphométrie de tout ensemble connexe compact à partir

de deux fonctionnelles morphométriques (c'est-à-dire à partir de trois fonctionnelles géométriques car les deux dénominateurs utilisent la même fonctionnelle géométrique).



Soit un triplet de fonctionnelles géométriques choisies parmi les six considérées ( $A, P, r, R, \omega, d$ ) et  $(M_1, M_2)$  un couple de fonctionnelles morphométriques particulières, à valeurs dans  $[0, 1]^2$ . Un diagramme de forme  $\mathcal{D}$  est représenté dans le plan restreint  $[0, 1]^2$  (les coordonnées des axes sont les fonctionnelles morphométriques  $M_1$  et  $M_2$ ) où tout ensemble connexe compact  $S$  est représenté par un point  $(x, y)$ . Mathématiquement, un diagramme de forme  $\mathcal{D}$  est défini par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \mathcal{K}(\mathbb{E}^2) & \rightarrow [0, 1]^2 \\ S & \mapsto (x, y) \end{cases}$$

où  $\mathcal{K}(\mathbb{E}^2)$  dénote les ensembles compacts 2D du plan euclidien. En utilisant les quinze fonctionnelles morphométriques, vingt-deux diagrammes de forme sont définis. Une étude comparative détaillée a été menée dans le but d'analyser la pertinence de la représentation de ces vingt-deux diagrammes de forme [10, 11, 12] : le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{A,R,P}$  s'est révélé le plus pertinent. Il est défini par :

$$\mathcal{D}_{A,R,P} : \begin{cases} \mathcal{K}(\mathbb{E}^2) & \rightarrow [0, 1]^2 \\ S & \mapsto \left( \frac{4\pi A}{P^2}, \frac{4R}{P} \right) \end{cases}$$

Les significations concrètes des fonctionnelles morphométriques  $4\pi A/P^2$  et  $4R/P$  sont la rondeur et la finesse, respectivement. La figure 1 illustre ce diagramme de forme où divers ensembles connexes compacts ont été situés, et sur lequel la frontière du domaine convexe est tracée (il s'agit du domaine dans lequel se situent tous les ensembles compacts convexes).

|   |                         |
|---|-------------------------|
|  | Dual Reuleaux triangles |
|  | Dual "Reuleaux" squares |
|  | Equilateral triangles   |
|  | Squares                 |
|  | Disks                   |
|  | Semi-disks              |
|  | "1/2" semi-rings        |
|  | Regular pentagrams      |
|  | Regular pentagons       |
|  | Regular hexagrams       |
|  | Regular hexagons        |
|  | Reuleaux triangles      |
|  | Regular crosses         |
|  | Line segments           |
|  | Semi-circles            |
|  | Asterisks-3             |
|  | Asterisks-4             |
|  | Asterisks-7             |
|  | Asterisks-8             |

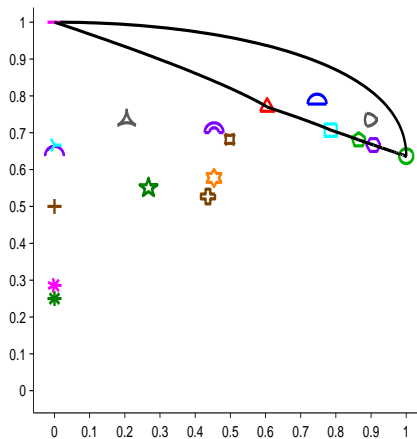


FIG. 1 – Divers ensembles compacts situés sur le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{A,R,P}$  sur lequel la frontière du domaine convexe est tracée.

De plus, ce diagramme de forme  $\mathcal{D}_{A,R,P}$  présente une bonne discrimination de la convexité [12]. Les ensembles situés en bas à gauche (ensembles de faible rondeur et faible finesse) sont fortement concaves, tandis que les ensembles situés en haut (ensembles de forte finesse) sont fortement convexes.

Les diagrammes de forme sont souvent limités à l'analyse globale et mono-échelle d'image binaire. L'utilisation des Voisinages Adaptatifs Généraux, présentés dans la section suivante, permettra de pallier ces limites.

### 3 Voisinages adaptatifs généraux

L'approche récemment publiée sous le sigle TIVAG (Traitement d'Image à Voisinages Adaptatifs Généraux) / GANIP (General Adaptive Neighborhood Image Processing) [5] fournit un cadre général et opérationnel pour le traitement et l'analyse adaptative locale et multi-échelle d'image à niveaux de gris.

Elle est basée sur une représentation intrinsèque d'image par Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) qui présentent trois caractéristiques principales répondant à la problématique énoncée en introduction. Ils sont adaptatifs à la fois :

- en espace : les voisinages sont de taille et de forme adaptées au contexte local de l'image,
- en échelle : les échelles d'analyse sont fournies par l'image elle-même et non fixées *a priori*,
- en intensité : les voisinages sont définis suivant une

structure GLIP (Generalized Linear Image Processing) [8, 9] permettant de considérer les caractéristiques physiques et/ou psychophysiques de l'image à étudier.

A chaque point  $x$  de l'image  $f$  est associé un ensemble de VAG appartenant au support spatial  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  de  $f$ . Un voisinage de  $x$ , noté  $V_{m\ominus}^h(x)$ , est un ensemble connexe et homogène par rapport à un critère d'analyse  $h$  (tel que la luminance ou le contraste local de  $f$ ) suivant une tolérance d'homogénéité notée  $m\ominus$ , représentée dans un modèle GLIP (Generalized Linear Image Processing), c'est-à-dire dans un espace vectoriel muni des lois d'addition vectorielle  $\oplus$  et de multiplication scalaire  $\otimes$ . Par exemple, pour la structure d'image classique CLIP (Classical Linear Image Processing), les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  correspondent aux opérations usuelles entre images, respectivement  $+$  et  $\times$ . Plus particulièrement, la structure LIP (Logarithmic Image Processing) [9] présente l'avantage d'être cohérente avec les modèles de formation d'image par transmission, par réflexion/transmission multiplicative et avec plusieurs lois et caractéristiques de la perception visuelle humaine. Un VAG d'un point  $x$  est mathématiquement défini par :

$$V_{m\ominus}^h(x) := C_{h^{-1}([h(x) \ominus m\ominus; h(x) \oplus m\ominus])}(x) \quad (1)$$

où  $C_X(x)$  représente la composante connexe par arcs (avec la topologie usuelle sur  $X$ ) de  $X \subseteq D$  contenant  $x$ .

La figure 2 donne une représentation de la construction d'un VAG en dimension 1 ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ) avec les opérations du modèle CLIP ( $\oplus = +$ ,  $\otimes = \times$ ,  $\ominus = -$ ).

mesure liée au critère d'analyse

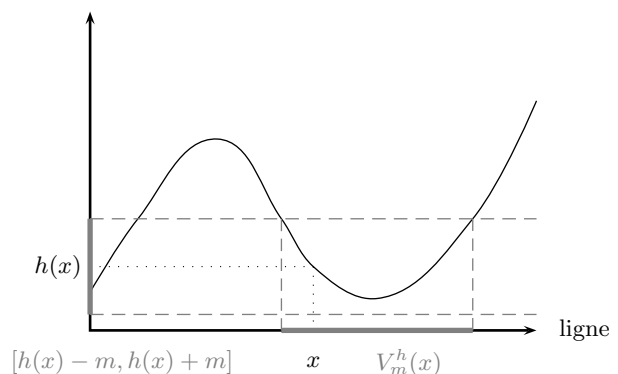


FIG. 2 – Représentation monodimensionnelle du VAG  $V_m^h(x)$  par rapport au critère  $h$  suivant la tolérance d'homogénéité  $m$  dans le cadre du modèle CLIP.

La figure 3 illustre les VAG déterminés par rapport au critère de luminance selon le modèle vectoriel CLIP, à partir de deux points d'une image de rétine.

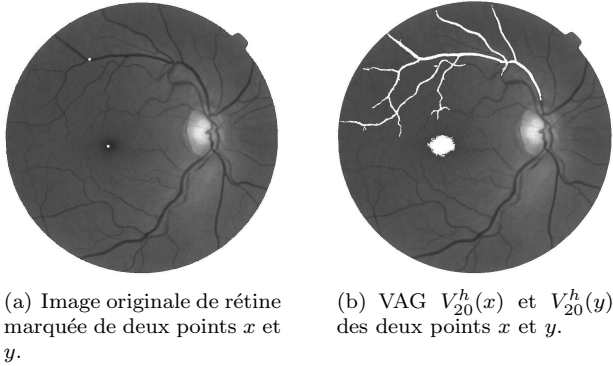


FIG. 3 – Les VAG des deux points de l'image originale (a) sont respectivement homogènes (b), avec la tolérance 20, par rapport au critère de luminance, selon le modèle vectoriel CLIP.

En faisant varier la tolérance d'homogénéité, une famille de voisinages adaptatifs généraux  $\{V_{m_{\square}}^h(\cdot)\}_{m_{\square}}$  est construite. Ces VAG sont définis en chaque point du support spatial et par rapport aux structures locales d'une image à niveaux de gris. Par conséquent, l'image est représentée de manière intrinsèque et multi-échelle.

Définis sur le support spatial  $D$  de l'image (Figure 4), les VAG sont adaptatifs à la fois en espace, en intensité et en échelle. A l'inverse, les voisinages  $\{B_r(\cdot)\}_r$  (disques isotropes homothétiques centrés de rayon  $r$ ), généralement utilisés comme fenêtres d'analyse pour la définition d'opérateurs de traitement d'image, sont de forme et de taille fixées *a priori*.

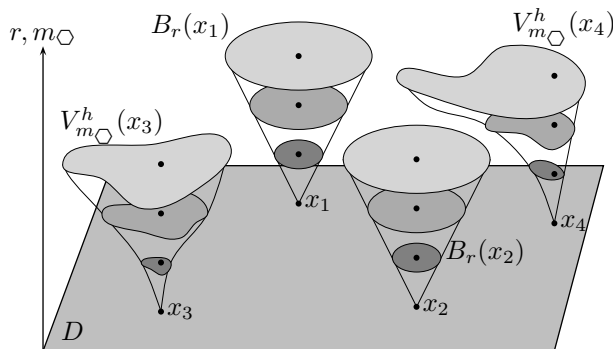


FIG. 4 – Voisinages isotropes  $B_r(x)$  vs. VAG  $V_{m_{\square}}^h(x)$

Une étude bibliographique a été réalisée lors de la création et du développement des VAG, les restituant par rapport à d'autres techniques telles que les croissances de régions ou de diffusion.

L'objectif de ce papier est d'utiliser ces Voisinages Adaptatifs Généraux en les associant aux diagrammes de forme définis précédemment, dans le but d'obtenir une analyse quantitative d'image à niveaux de gris, réalisée de manière locale, adaptative et multi-échelle. La section suivante présente donc l'association de ces deux concepts.

## 4 Diagrammes de forme à VAG

A chaque point du support spatial d'une image à niveaux de gris est associé un VAG qui peut être caractérisé morphométriquement. En effet, chaque VAG est un ensemble connexe compact et peut être situé sur les diagrammes de forme. Plusieurs points du support spatial de l'image peuvent avoir les mêmes VAG et par conséquent, ils correspondent à la même localisation dans le diagramme de forme. Cette fréquence d'apparition est représentée selon une échelle de couleurs dans le diagramme de forme à VAG, dénoté  $\mathcal{D}(V_{m_{\square}}^h)$ , où les VAG sont déterminés par rapport au critère d'analyse  $h$  suivant la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  selon le modèle vectoriel GLIP  $\square$ .

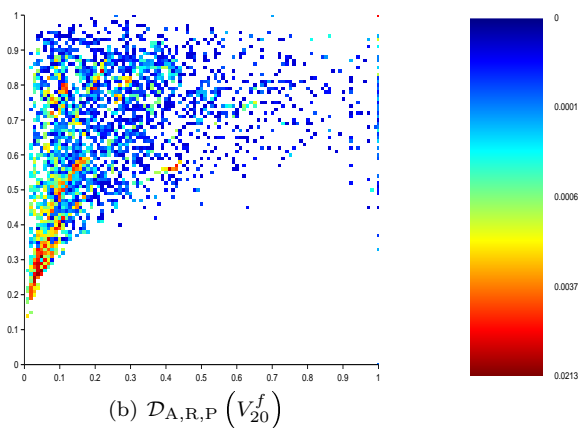
La figure 5 illustre le diagramme de forme à VAG  $\mathcal{D}_{A,R,P}(V_{20}^f)$  obtenu à partir de l'image à niveaux de gris originale 'Lena'. Pour chaque point du support spatial de l'image, le VAG est déterminé par rapport au critère de luminance  $f$  suivant la tolérance d'homogénéité 20 selon le modèle vectoriel CLIP.

Une petite tache rouge (hautes fréquences) apparaît en bas à gauche du diagramme de forme à VAG. Elle correspond à la localisation des VAG de faible rondeur ( $0 \leq 4\pi A/P^2 < 0.1$ ) et de faible finesse ( $0 \leq 4R/P < 0.3$ ). La comparaison avec le diagramme de forme de la figure 1, permet de déduire que peu de VAG de l'image 'Lena' sont convexes, et beaucoup d'entre eux sont fortement concaves.

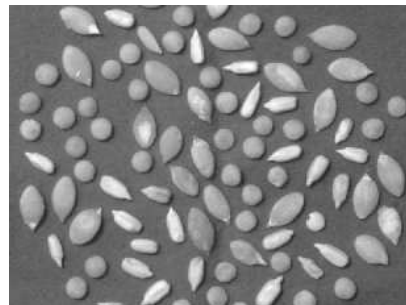
Les représentations par diagrammes de forme à VAG permettent de définir une signature morphométrique d'une image à niveaux de gris. Ces diagrammes fournissent une distribution statistique de la morphométrie des structures locales de l'image à niveaux de gris, en attribuant une fonctionnelle morphométrique du VAG associé à chaque point du support spatial de l'image. Une des applications de ces diagrammes de forme à VAG est la classification des structures locales d'une image selon leurs formes.



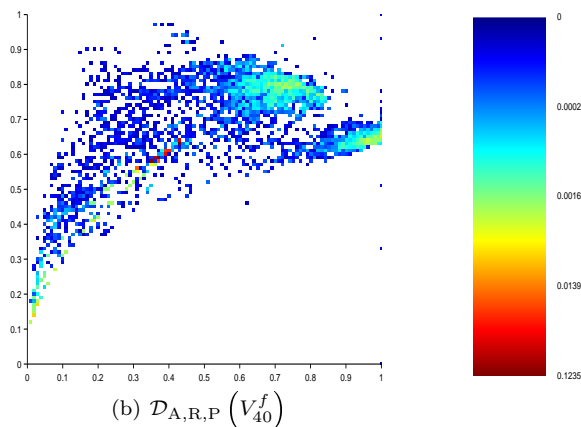
(a) image originale  $f$



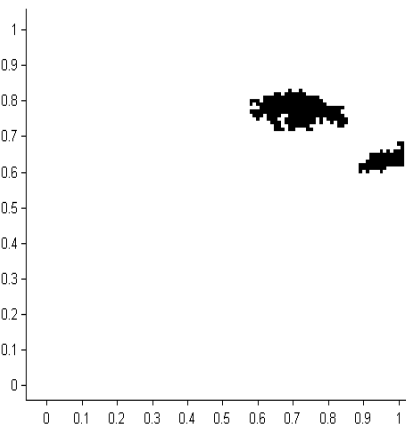
(b)  $\mathcal{D}_{A,R,P}(V_{20}^f)$



(a) image originale  $f$



(b)  $\mathcal{D}_{A,R,P}(V_{40}^f)$



(c)  $\mathcal{D}_{A,R,P}(V_{40}^f)$  seuillé

FIG. 5 – Diagramme de forme à VAG  $\mathcal{D}_{A,R,P}(V_{20}^f)$  (b), associé à l'image originale  $f$  'Lena' (a), utilisant les VAG homogènes par rapport au critère de luminance ( $h = f$ ) suivant la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  selon le modèle vectoriel CLIP.

## 5 Exemple d'application pratique : classification morphométrique de graines

La figure 6.(a) illustre une image à niveaux de gris représentant des graines. Pour chaque point du support spatial de l'image, le VAG (par rapport au critère de luminance suivant la tolérance d'homogénéité 40 selon le modèle vectoriel CLIP) est déterminé puis localisé dans le diagramme de forme  $\mathcal{D}_{A,R,P}$ . Ainsi, la figure 6.(b) illustre le diagramme de forme à VAG  $\mathcal{D}_{A,R,P}(V_{40}^f)$ . Pour cet exemple d'application, la valeur de la tolérance d'homogénéité est convenablement choisie, de sorte que les structures d'intérêt de l'image soit mise en évidence.

FIG. 6 – Diagramme de forme à VAG  $\mathcal{D}_{A,R,P}(V_{40}^f)$  (b) de l'image de graines  $f$  (a). Les VAG sont déterminés par rapport au critère de luminance ( $h = f$ ) suivant la tolérance d'homogénéité  $m = 40$  selon le modèle vectoriel CLIP. Le diagramme (c) représente un seuillage (suivi d'une suppression de bruit) du diagramme (b).

Ce diagramme de forme à VAG permet de regrouper les VAG de cette image selon leur forme en trois classes :

- Une petite tache rouge (hautes fréquences) est associée aux VAG correspondant au fond de l'image, c'est-à-dire aux VAG des pixels du fond, ce qui explique la haute fréquence d'apparition.
- Une première tache de couleur cyan à jaune se trouve sur la droite dans le diagramme de forme à VAG. L'emplacement de cette tache l'associe aux VAG de forme circulaire (Figure 1), c'est-à-dire aux VAG des pixels des graines circulaires.
- Une seconde tache de couleur cyan à jaune se trouve à gauche de la précédente dans le diagramme de forme à VAG. L'emplacement de cette tache l'associe aux VAG de forme un peu allongée (Figure 1), c'est-à-dire aux VAG des pixels des graines allongées.

Ce diagramme de forme à VAG permet donc de conclure que les graines de l'image se rassemblent en deux classes : les graines circulaires et les graines allongées. Le résultat obtenu après seuillage (et suppression de bruit) du diagramme de forme à VAG confirme ce nombre.

A partir d'une analyse visuelle de l'image originale, les graines se rassemblent en trois classes : les graines circulaires, les graines petites et allongées (et claires), et les graines en forme d'amande.

Le nombre de classes fournies par l'analyse visuelle diffère donc du nombre de classes fournies par le diagramme de forme à VAG. Ceci s'explique par le fait que les graines petites et allongées et les graines en forme d'amande diffèrent essentiellement par leurs tailles et leurs textures, leurs formes étant plutôt similaires. Il suffit de segmenter les graines et de les mettre à la même taille pour ne plus percevoir cette différence à l'oeil.

Ainsi, les diagrammes de forme à VAG permettent par exemple de classifier les structures présentes dans une image à niveaux de gris en fonction de leurs formes, sans passer au préalable par une étape de segmentation des structures.

## 6 Conclusion

Dans ce papier, une nouvelle approche quantitative pour l'analyse morphométrique d'image à niveaux de gris, réalisée de manière locale, adaptative et multi-échelle, est proposée. Le principal avantage est que l'étape de segmentation, généralement effectuée au préalable de l'analyse d'image quantitative, n'est pas ici nécessaire. La description quantitative est appliquée directement sur les images à niveaux de gris originales.

Les diagrammes de forme sont des représentations in-

troduites pour étudier les ensembles connexes compacts : un tel ensemble est représenté par un point dans le plan euclidien dont les coordonnées sont deux fonctionnelles morphométriques. Néanmoins, les diagrammes de forme sont souvent limités à l'analyse globale et mono-échelle d'image binaire. L'utilisation des Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG) permet de pallier ces limites. Les VAG sont des voisinages spatiaux, définis autour de chaque point du support spatial d'une image à niveaux de gris, simultanément adaptatifs avec les échelles d'analyse, les structures spatiales et les intensités de l'image.

En attribuant une fonctionnelle morphométrique du VAG associé à chaque point du support spatial de l'image à étudier, les diagrammes de forme à VAG sont définis. Ils fournissent des distributions statistiques de la morphométrie des structures locales de l'image à niveaux de gris. Cette nouvelle approche peut être utilisée pour classifier les structures locales d'une image à niveaux de gris, en se basant sur leurs formes.

Les auteurs travaillent actuellement sur des études mettant en évidence la potentialité des diagrammes de forme à VAG. La mise en place de distances entre des diagrammes de forme permettant de voir si ceux-ci sont similaires pour des images semblables est une de ces études. L'automatisation de la détermination du seuil utilisé pour la segmentation du diagramme de forme à VAG en est une autre.

## Références

- [1] W. Blaschke, Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts, *Mathematische Annalen*, Vol. 76, pp. 504-513, 1915.
- [2] W. Blaschke, Eine frage über konvexe körper, *Jahresbericht Deutsch. Math.-Verein.*, Vol. 25, pp. 121-125, 1916.
- [3] Y.D. Burago and V.A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Springer-Verlag, 1988.
- [4] M.A.H. Cifre and G. Salinas and S.S. Gomis, Complete systems of inequalities, *Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 2(1-10)(10), pp. 1-12, 2001.
- [5] J. Debayle and J.C. Pinoli, General adaptive neighborhood image processing, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 25(2), pp. 245-286, January 2006.
- [6] L.R. Feret, La grosseur des grains des matières pulvérulentes, *Premières Communications de la Nouvelle Association Internationale pour l'Essai des Matériaux, Groupe D*, pp. 428-436, 1930.
- [7] T. Mattfeldt and D. Meschenmoser and U. Pantle and V. Schmidt, Characterization of mammary gland tissue using joint estimators of Minkowski

functionals, *Image Analysis and Stereology*, Vol. 26, pp. 13-22, March 2007.

- [8] A.V. Oppenheim, Generalized superposition, *Information and Control*, Vol. 11(5-6), pp. 528-536, November-December 1967.
- [9] J.C. Pinoli, A general comparative study of the multiplicative homomorphic, log-ratio and logarithmic image processing approaches, *Signal Processing*, Vol. 58, pp. 11-45, January 1997.
- [10] S. Rivollier and J. Debayle and J.C. Pinoli, Shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex sets, *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 7(2-3), pp. 1-27, 2010.
- [11] S. Rivollier and J. Debayle and J.C. Pinoli, Shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets, *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 7(2-4), pp. 1-21, 2010.
- [12] S. Rivollier and J. Debayle and J.C. Pinoli, Shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets, *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 7(2-5), pp. 1-18, 2010.
- [13] L.A. Santalo, Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura plana, *Math. Notae.*, Vol. 17, pp. 82-104, 1961.
- [14] P.R. Scott and P.W. Awyong, Inequalities for convex sets, *Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 1(1-6), pp. 1-6, 2000.
- [15] F.I. Siddiqui and S.M. Ali Shah and M.Y. Behan, Measurement of size distribution of blasted rock using digital image processing, *Journal of King Abdulaziz University*, Vol. 20(2), pp. 81-93, 2009.
- [16] K. Teknomo and G.P. Gerilla and K. Hokao, Cellular urban descriptors of lowland urban model, *Proceedings of International Symposium of Lowland Technology*, pp. 297-302, September 2004.