HAL
open science

Fentes de Young : trajectoires d'électrons ?

Alexandre Gondran

To cite this version:

Alexandre Gondran. Fentes de Young : trajectoires d'électrons ?. 2001. hal-00656118

HAL Id: hal-00656118

https://hal.science/hal-00656118v1

Submitted on 3 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rapport de stage
septembre-novembre 2001[1]

Alexandre Gondran
Etudiant de troisième année de l'ENST

Fentes de Young : trajectoires d'électrons ?

Responsable de stage : Jean-François Colonna
École Polytechnique - CMAP

Correspondant de stage : Francis Schmitt
École Nationale Supérieure des Télécommunications

[1] Les images de ce rapport de stage ont été perdues en 2005 et ce document reproduit des images scanées de la version papier. Pour une meilleure visibilité certaines images (figures 1, 21, 22, 32, 33) ont été refaites en 2005.

Remerciments :

Je remercie tout particulièrement Jean-François Colonna d'avoir accepté d'encadrer ce stage. Il m'a initié à la problématique de la visualisation scientifique et m'a appris à structurer l'architeture de mes programmes.

Merci également à Francis Schmitt de m'avoir apporté son soutien durant ce stage, ainsi qu'à Alain Maruani pour l'intérêt porté à ce stage. Je remercie enfin Michel Gondran de m'avoir proposé ce sujet et initié aux trajectoires de De Broglie.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Calcul de la fonction d'onde pour les fentes de Young **3**
2.1 Description de l'expérience 3
2.2 Méthode de Feynman 5
2.3 Trajectoires de de Broglie et Bohm 6

3 Evolution de la densité de probabilité **6**
3.1 Densité de probabilité avant les fentes 7
3.2 Densité de probabilité pour une fente (cas 1) 8
3.3 Densité de probabilité pour deux fentes (cas 2) 13
3.4 Comparaison des deux phénomènes 19

4 Trajectoires d'électrons **22**
4.1 Trajectoires pour une fente 22
4.2 Trajectoires pour deux fentes 24
4.3 Comparaison des deux trajectoires 28

5 Conclusion **29**

A Explicitation des calculs **30**

B Les paramétrages **35**

C Vérification du phénomène ondulatoire **37**

D Approximation des fentes gaussiennes **39**

E La programmation **43**

1 Introduction

Bien que le débat sur les fondements de la théorie quantique n'ait jamais cessé, il s'est particulièrement intensifié à deux époques : lors de l'élaboration de la nouvelle théorie (Congrès Solvay 1927) et au cours des années 1980 (inégalités de Bell [1],[2] et expériences d'Aspet [3]).

L'expérience des fentes de Young est l'expérience cruciale du débat sur l'interprétation du dualisme onde-particule.

Feynman [4] a écrit à propos de cette expérience réalisée avec des électrons qu'elle aborde *"le point fondamental du comportement mystérieux [des électrons] sous son aspect le plus étrange. [... C'est] un phénomène qui est impossible, absolument impossible à expliquer de façon classique et qui contient le cœur de la mécanique quantique. En réalité, il en contient même l'unique mystère..."*

De Broglie (1927) [5] et Bohm (1952) [6] ont proposé des trajectoires pour les particules quantiques, cohérentes avec l'équation de Schrödinger mais en contradiction avec les inégalités d'Heisenberg.

Michel Gondran vient de proposer un nouveau modèle non standard de trajectoires [7] qui permet de démontrer l'équation de Schrödinger tout en vérifiant les inégalités d'Heisenberg. Les trajectoires de De Broglie et Bohm correspondent alors à la partie standard de ce modèle. Il devient donc intéressant de relancer le débat de l'interprétation de la mécanique quantique.

Mon stage a eu pour but d'apporter une contribution à ce débat. Il a été réalisé sous la direction de Jean-François Colonna au laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique (CMAP).

Il s'agissait de montrer la plausibilité du modèle des trajectoires par leurs simulations dans le cas de l'expérience des fentes de Young réalisée avec des électrons.

Une simulation de cette expérience a déjà été réalisée il y a quelques années par Philippidis, Dewdney et Hiley [8]. Cependant cette simulation n'est qu'approchée car d'une part elle n'est effectuée qu'à partir de la sortie des fentes et d'autre part les fentes sont considérées comme "gaussiennes", ce qui rend le modèle peu réalise. Les trajectoires présentées ici correspondent à l'expérience réelle en partant d'une source unique d'électrons et ne faisant pas l'approximation gaussienne des fentes.

Nous présentons dans le paragraphe 2 les conditions de l'expérience des fentes de Young et les calculs permettant de déterminer la solution de Schrödinger à partir de l'intégrale de chemin de Feynman.

Les deux paragraphes suivants sont consacrés à l'interprétation des résultats de simulation. Le troisième paragraphe s'intéresse à l'évolution de la densité de probabilité de présence des électrons dans le cas d'une seule fente (phénomène de diffraction) et de deux fentes (phénomène d'interférences : expérience des fentes de Young).

Le quatrième paragraphe correspond aux trajectoires des particules dans les deux cas précédents.

2 Calcul de la fonction d'onde pour les fentes de Young

2.1 Description de l'expérience

L'expérience des fentes de Young (cf. figure 1) consiste à émettre des électrons (source : canon à électrons) et à les détecter sur un écran (écran d'arrêt ou de détection) après un passage à travers une plaque percée de N fentes (plaque ; N=2 pour les fentes de Young).

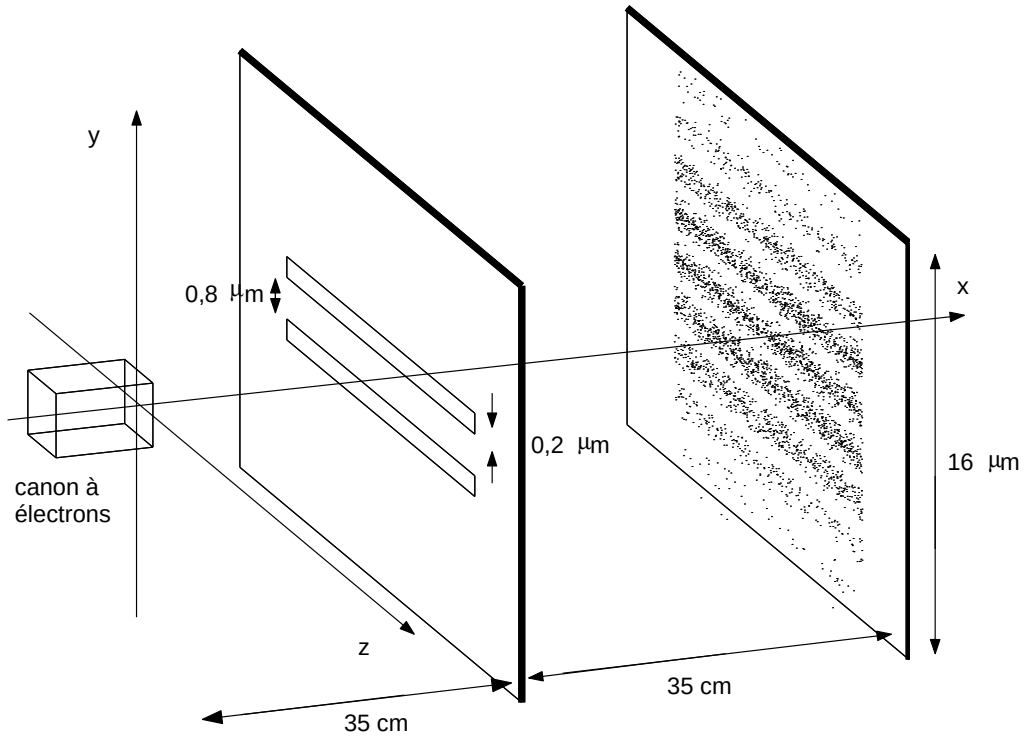

FIG. 1 – Expérience des fentes de Young réalisée avec des électrons (image refaite en 2005)

Dans l'expérience que nous allons modéliser, nous ne nous intéresserons qu'aux dimensions $(x; y)$ de l'espace.

Les calculs numériques sont faits (comme ceux de Philippidis, Dewdney et Hiley [8]) en utilisant des données issues des expériences menées par Jönsson [9]. Nous disposons donc le canon à électrons aux coordonnées $(x = -X\,;\, y = 0)$. Il émet des électrons ayant une vitesse $V_x = 1,3 \times 10^8\ ms^{-1}$ selon l'axe $(0x)$ et $V_y = 0\ ms^{-1}$ selon l'axe $(0y)$ (correspondant à une énergie de 45 keV). On suppose que la source d'électrons est "gaussienne" selon les axes $(0x)$ et $(0y)$ c'est-à-dire qu'un électron émis par cette source a pour coordonnée initiale $(x = w\,;\, y = u)$ où $(w\,;\, u)$ suit une répartition gaussienne centrée en $(-X\,;\, 0)$ et d'écart type (σ_x, σ_y).

Une plaque est placée en $x = 0$ orthogonalement à l'axe $(0x)$ dans le plan $(z0y)$. Des fentes, dont le nombre N variera, sont percées dans cette plaque ; ces fentes sont centrées en $y = Y_\xi,\ pour\ \xi = 1 \ldots N$ et ont comme demi-largeur selon $(0y)\ :\ b = 10^{-7}$ mètre.

Dans le cas des fentes de Young (2 trous), ces deux trous sont centrés en $y =^{+}_{-} 5 \times 10^{-7}$ mètre ($Y_1 = 5 \times 10^{-7}$ m et $Y_2 = -5 \times 10^{-7}$ m). Lorsque l'on bouchera une des fentes (phénomène de diffraction), les calculs seront faits avec la fente supérieure (la fente 1) mais les résultats seraient analogues s'il s'agissait de la fente inférieure.

La figure 2 schématise une telle expérience.

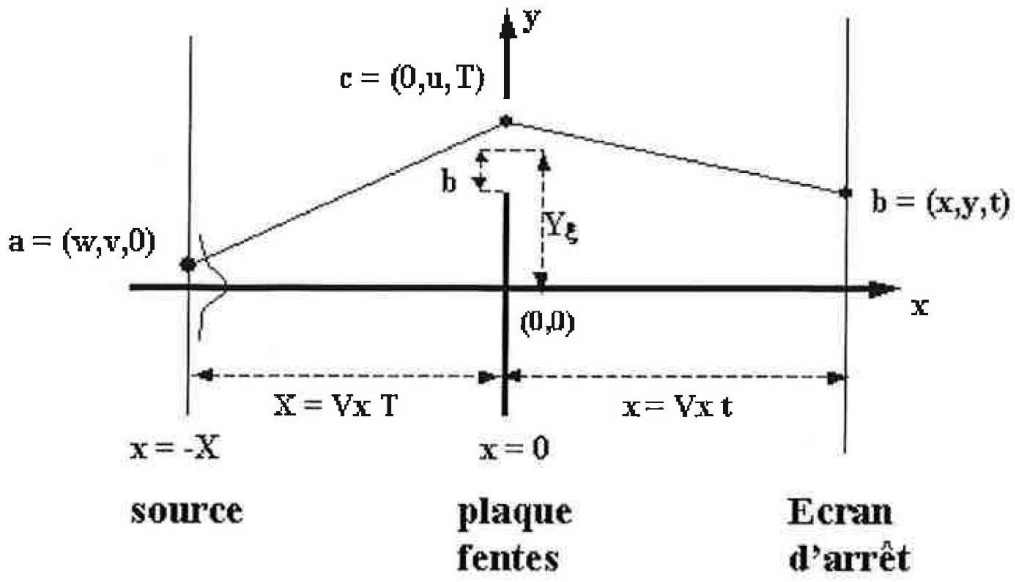

FIG. 2 – Schéma de l'expérience

2.2 Méthode de Feynman

La fonction d'onde $\psi(x, y, t)$ liée à l'électron vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + V\psi$$
$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y)$$

Le calcul des solutions de l'équation de Schrödinger dans le cas des fentes de Young se fera par la méthode des intégrales de chemins de Feynman. Feynman [10] définit pour une particule libre une *amplitude* appelée "kernel" (noyau). Le kernel caractérise la trajectoire d'une particule partant à l'instant t_a du point $a(x_a)$ et arrivant à l'instant t_b au point $b(x_b)$. Par la suite, on associera un point avec un instant (i.e. on notera le point $a(x_a, t_a)$ pour dire que la particule est en x_a à l'instant t_a). Le kernel se calcule, grâce à une méthode définie par Feynman , comme une somme de toutes les trajectoires possibles entre ces deux points, chaque trajectoire étant pondérée par une fonction de *l'action classique* de la dite particule.

Le lagrangien pour une particule libre est

$$L(\dot{x}, x, t) = \left(m\,\frac{\dot{x}^2}{2}\right).$$

donc *l'action classique* d'une particule libre entre deux points a et b est :

$$S_{cl}(b; a) = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t)\,dt = \frac{m(x_b - x_a)^2}{2(t_b - t_a)}$$

Feynman définit alors le kernel par

$$K(b; a) \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}(b; a)\right)$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} K(a, b)\,dx_a = 1$ d'où

$$K(b; a) = \left(\frac{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}{m}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)}\right).$$

De plus, pour tout autre point $c(x_c, t_c)$, on a

$$K(b;a) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(b;c) \times K(c;a)\, dx_c. \tag{1}$$

La solution de l'équation de Schrödinger au point $a(x_1, t_1)$ peut être déterminée à partir de la fonction d'onde aux points $b = (x_2, t_2)$ et des kernels $K(a, b)$ où x_2 balaye les abscisses

$$\psi(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x_1, t_1\,;\, x_2, t_2)\, \psi(x_2, t_2)\, dx_2 \tag{2}$$

Si on étend le kernel à une seconde dimension, on a

$$K(b;a) = \left(\frac{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}{m}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{im((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)}{2\hbar(t_b - t_a)}\right) \tag{3}$$

2.3 Trajectoires de de Broglie et Bohm

On peut écrire la fonction d'onde sous la forme

$$\psi(x, y, t) = \sqrt{\rho(x, y, t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x, y, t)\right)$$

où $\rho(x, y, t) \geq 0$ représente la densité de probabilité de présence de l'électron.

En reportant cette expression de ψ en fonction de ρ et S dans l'équation de Schrödinger, on trouve les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} S)^2 + V + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\triangle \rho}{\rho} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \frac{\vec{\nabla} S}{m}\right) = 0 \tag{5}$$

Cette dernière équation montre que si on prend comme vitesse des électrons $\vec{v}(x, y, t) = \frac{\vec{\nabla} S(x,y,t)}{m}$, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \vec{v}) = 0$$

qui est l'équation de conservation de la densité de probabilité (cf. Madelung [11]).

Les trajectoires décrites par cette vitesse correspondent aux trajectoires définies par de Broglie [5] et Bohm [6]. Ce sont celles-ci que nous allons simuler. On vérifie que l'on a

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \frac{Im(\vec{\nabla}\psi\, \psi^*)}{\psi\, \psi^*} \tag{6}$$

d'où si $\vec{\nabla}\psi = \psi(\vec{A} + i\vec{B})$ alors $\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\vec{B}$.

Les calculs des densités de probabilité et des vitesses pour ces expériences sont faits en annexe A : Explicitation des calculs.

3 Evolution de la densité de probabilité

On étudie dans ce paragraphe l'évolution de la densité de probabilité dans les expériences précédentes pour les cas d'une fente (cas 1) et de deux fentes (cas 2).

3.1 Densité de probabilité avant les fentes

En annexe A (Explicitation des calculs), nous avons vu que la fonction d'onde avant les fentes (équation 10 de l'annexe A) est :

$$\begin{aligned}\psi(x,y,t) = \quad & (2\pi Y_0^2)^{-1/4}\left(-1 - i\frac{\hbar t}{2mY_0^2}\right)^{-1/2} \\ & \times \exp\left[\frac{im}{\hbar}\left(\frac{(x+X)^2}{2t} - V_x X + \frac{y^2}{2t} - \frac{y^2}{2t(1+C_t^2)}\right) - \frac{mC_t y^2}{2\hbar t(1+C_t^2)}\right]\end{aligned}$$

avec $C_t = \frac{\hbar t}{2mY_0^2}$.
Donc :

$$\rho(x,y,t) = |\psi(x,y,t)|^2 = (2\pi Y_0^2(1+C_t^2))^{-1/2}\exp\left(-\frac{y^2}{2Y_0^2(1+C_t^2)}\right).$$

Les figures 3, 4 et 5 représentent les résultats des simulations de cette densité de probabilité $\rho(x,y,t)$.

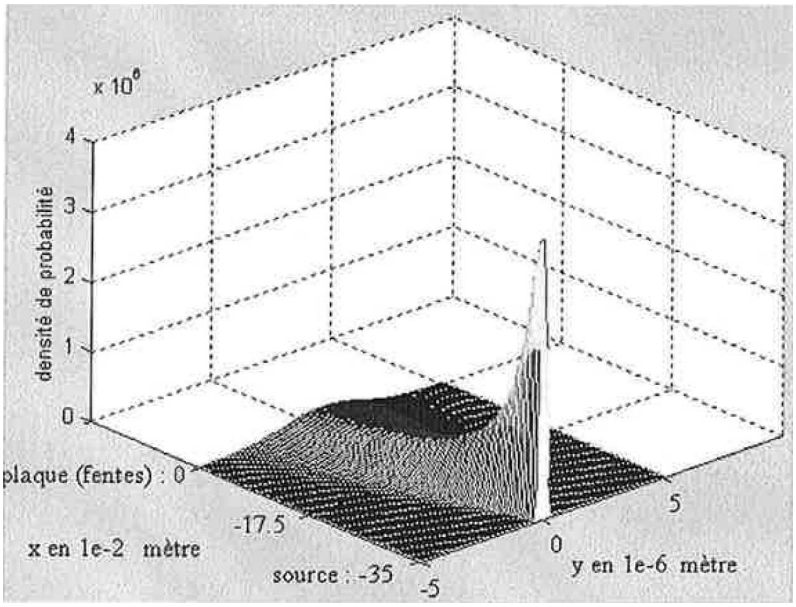

FIG. 3 – Densité de probabilité de la source (le canon à électrons) aux fentes.

On constate sur la figure 3 que la densité de probabilité diminue rapidement : à 35 centimètres après la source, on ne la distingue quasiment plus. Le phénomène de dispersion est assez rapide. Il est donc nécessaire de prendre une échelle logarithmique pour représenter la densité de probabilité. On visualise mieux le phénomène avec la figure 4 où l'échelle verticale est logarithmique (ln(1+10× densité de probabilité)).

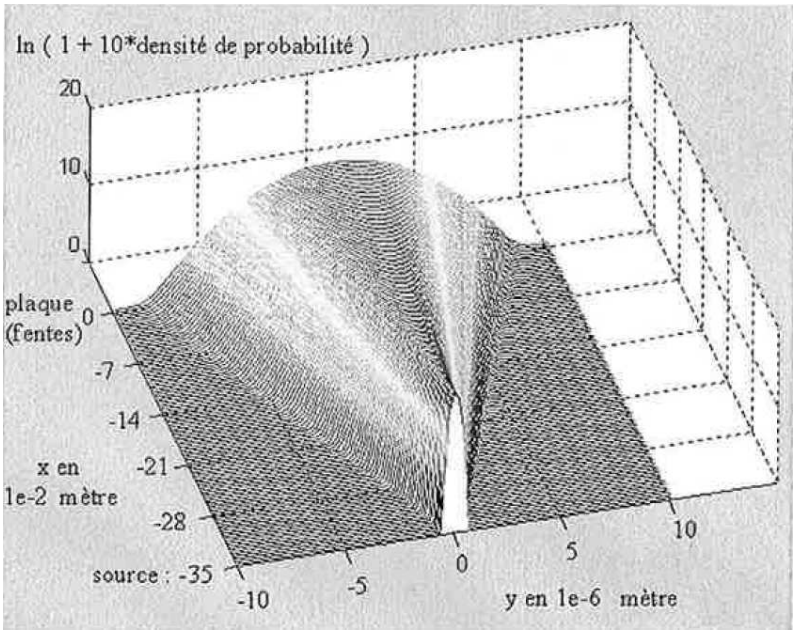

FIG. 4 – Densité de probabilité de la source (le canon à électrons) aux fentes avec une échelle logarithmique

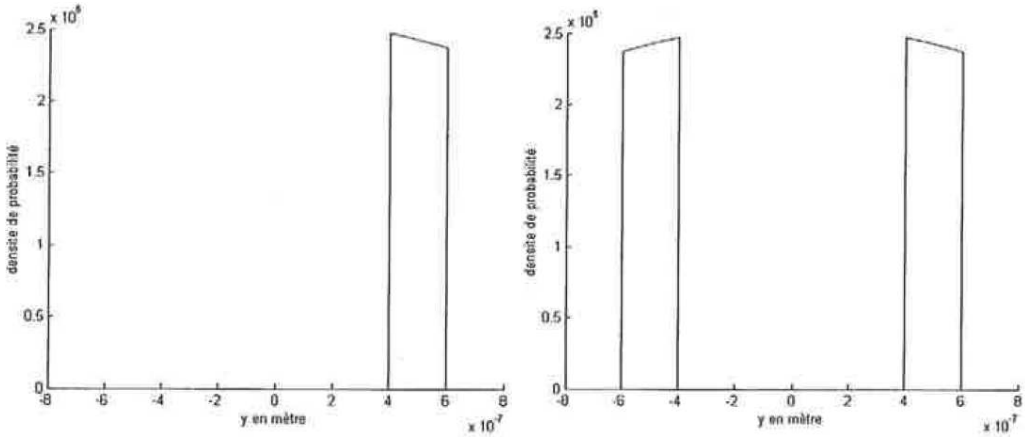

FIG. 5 – La figure de gauche représente la densité de probabilité au niveau de la plaque percée d'une seule fente centrée en $y = 5 \times 10^{-7}$ mètre (cas 1). La figure de droite représente la densité de probabilité pour deux fentes centrées en $y = 5 \pm 10^{-7}$ mètre (cas 2)

.

3.2 Densité de probabilité pour une fente (cas 1)

La fonction d'onde $\psi(x, y, t)$ après les fentes (cf. équations 12, 13, 14, 15 et 18 de l'annexe A), est

$$\psi(x, y, t) = F(t)\, G(x, y, t)\, H(y, t)$$

avec

$$F(t) = -i(2\pi Y_0^2)^{-1/4}\left(\frac{m}{2\pi\hbar(t-T)}\right)^{1/2}\left(i - \frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)^{-1/2}$$
$$G(x,y,t) = \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{x^2}{t-T} + \frac{y^2}{t-T} - V_x X\right)\right)$$
$$H(y,t) = \sum_{\xi=1}^{\xi=N}\int_{Y_\xi - b}^{Y_\xi + b} f(y,v)\,dv.$$

d'où

$$|\psi(x,y,t)|^2 = (2\pi Y_0^2)^{-1/2}\left(\frac{m}{2\pi\hbar(t-T)}\right)\left(1 + \left(\frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)^2\right)^{-1/2}|H(y,t)|^2.$$

Cette formule est valable quel que soit le nombre de fentes.

On considère une seule fente ; elle est centrée en $y = 5 \times 10^{-7}$ mètre et a une demi largeur $b = 10^{-7}$ mètre. L'évolution de la densité de probabilité au sortir de la fente est représentée sur les figure 6 et 7.

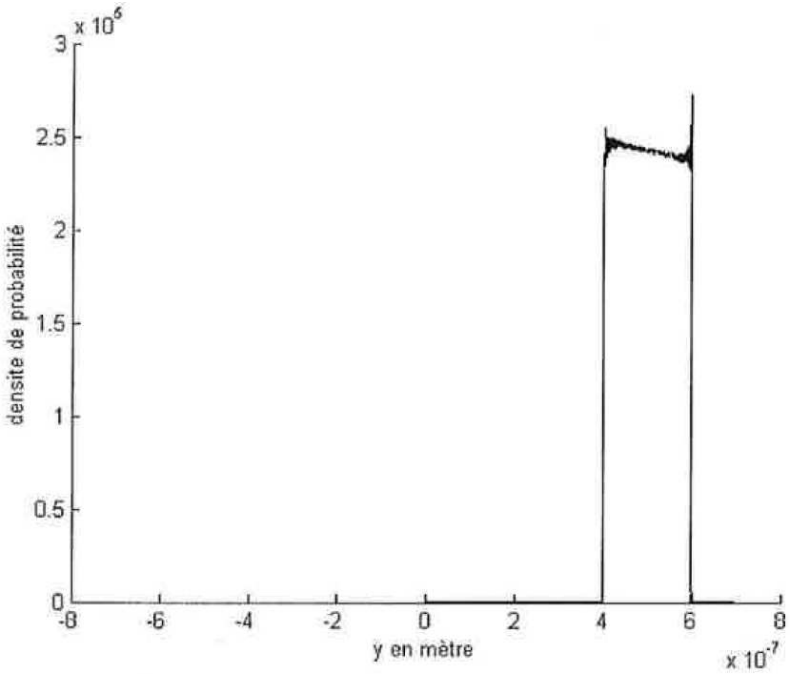

FIG. 6 – Densité de probabilité à 10^{-7} m de la sortie de la fente.

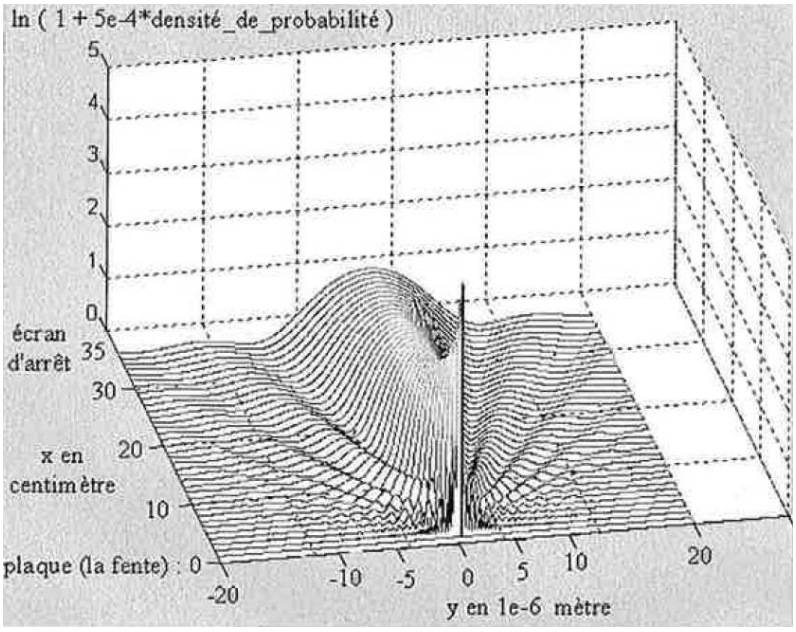

FIG. 7 – Évolution de la densité de probabilité pour les 35 cm suivant la sortie de la fente (phénomène de diffraction).

On peut mettre en évidence quatre périodes caractéristiques dans cette évolution. Rappelons que la fente est centrée en $y = 5 \times 10^{-7}$ m et que la demi-largeur est $b = 10^{-7}$ m.

De 10^{-7} m à 10^{-5} m après la fente : un rectangle très bruité. Au niveau de la fente la densité de probabilité est quasi-rectangulaire (cf. figure 5), elle reste d'apparence rectangulaire jusqu'à une distance de 10^{-5} mètre malgré un bruitage quasi-chaotique, voir la figure 8.

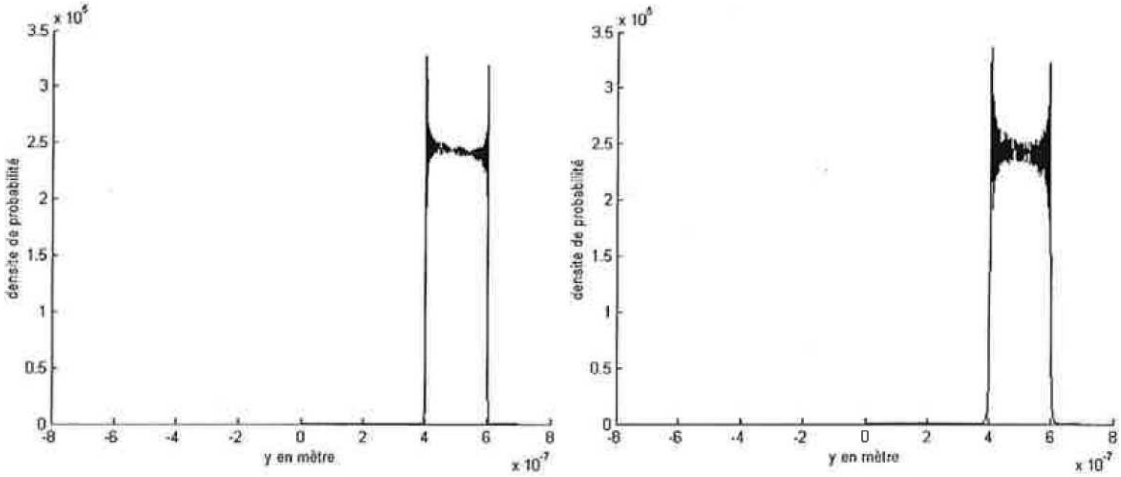

FIG. 8 – Densité de probabilité à 10^{-6} et à 10^{-5} mètre de la sortie de la fente.

De 10^{-5} à 10^{-3} m après la fente : du rectangle très irrégulier jusqu'à un minimum central. Comme le montre la figure 9, de 10^{-5} à 10^{-3} m, le bruitage quasi-chaotique s'harmonise.

La densité de probabilité qui était de forme rectangulaire se transforme en une forme admettant un minimum central.

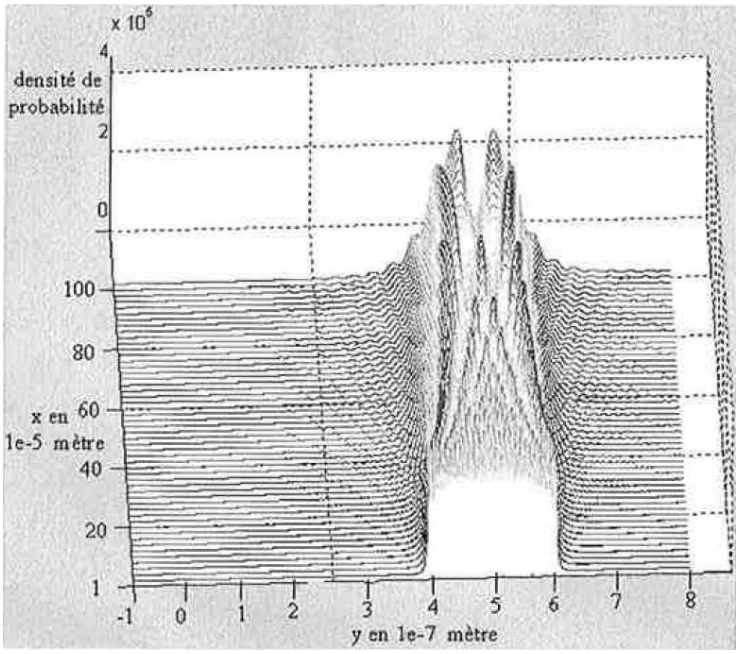

FIG. 9 – Évolution de la densité de probabilité de 10^{-5} mètre à 10^{-3} mètre de la sortie de la fente (cas 1).

De 10^{-3} à 2×10^{-3} m après la fente : du minimum central au pic central. Comme le montre la figure 10, lors de cette période, le minimum central va peu à peu devenir un maximum global.

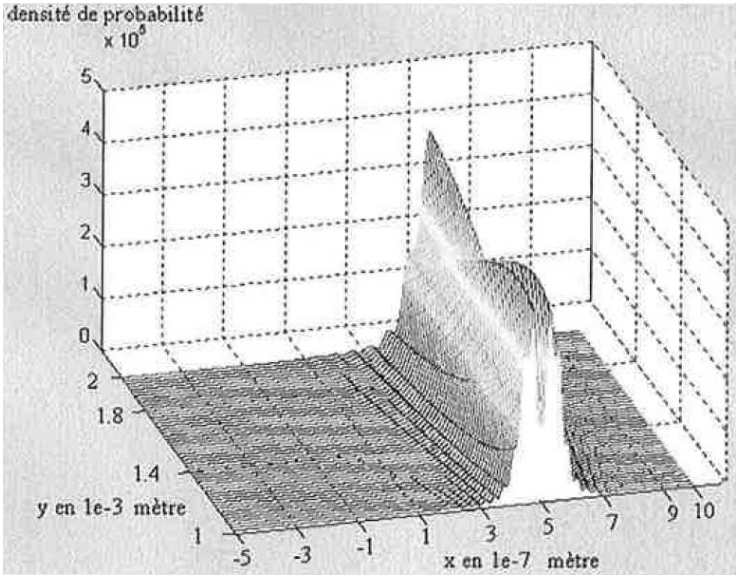

FIG. 10 – Évolution de la densité de probabilité de 10^{-3} mètre à 2×10^{-3} mètre de la sortie de la fente.

De 2×10^{-3} à 35×10^{-2} m après la fente (et au delà) : du pic central à la figure de diffraction classique. La figure 11 représente la dernière évolution de la densité de probabilité : le pic central se disperse. Lors de cette période, on retrouve la densité de probabilité (de type sinuscardinal) calculée par les approximations de Fraunhofer (cf. annexe C). La figure 12 représente cette densité de probabilité à 35×10^{-2} mètre de la fente.

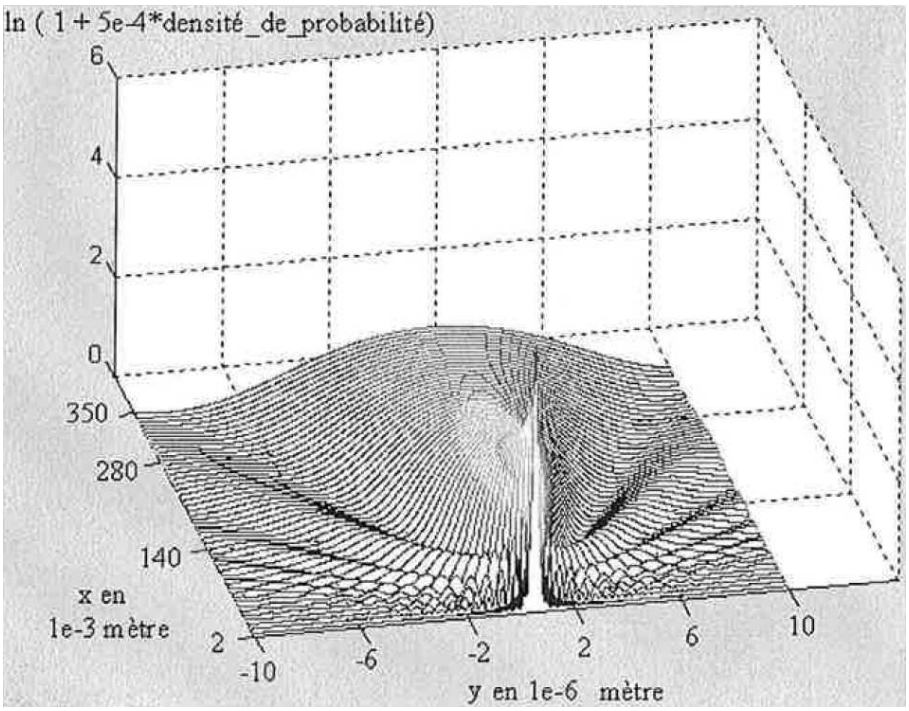

FIG. 11 – Évolution de la densité de probabilité de 2×10^{-3} mètre à 35×10^{-2} mètre de la sortie de la fente (attention représentation avec une échelle logarithmique).

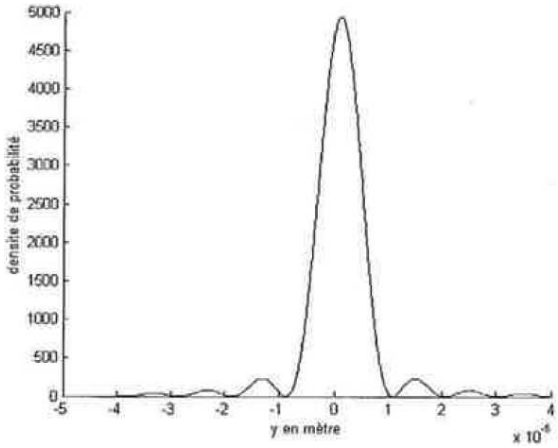

FIG. 12 – Densité de probabilité à 35 cm de la sortie de la fente (phénomène de diffraction).

3.3 Densité de probabilité pour deux fentes (cas 2)

On représente sur les figure 13 et 14, l'évolution de la densité de probabilité au sortir des deux fentes.

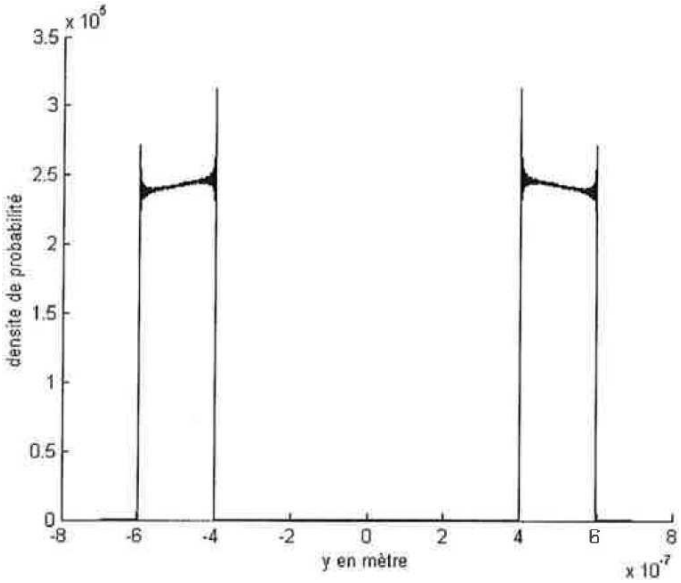

FIG. 13 – Densité de probabilité pour le phénomène d'interférence (2 trous) à 10^{-7} m de la sortie des fentes.

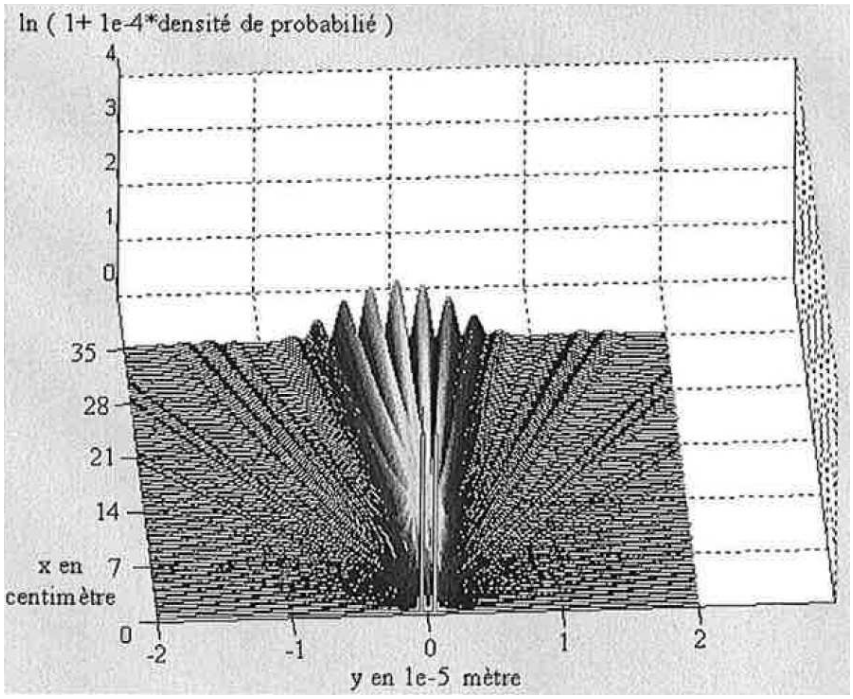

FIG. 14 – Évolution globale de la densité de probabilité à la sortie des 2 fentes et jusqu'à 35 cm des fentes.

On peut mettre en évidence cinq périodes dans cette évolution. Rappelons que les fentes pour ce cas sont centrées en $y = \pm 5 \times 10^{-7}$ m et ont une demi-largeur égale à $b = 10^{-7}$ m.

De 10^{-7} m à 10^{-5} m après les fentes : deux rectangles très bruités. Au passage par la plaque, la densité de probabilité est quasi-rectangulaire au niveau de chacune des fentes (cf. figure 5). Elle reste d'apparence rectangulaire jusqu'à une distance de 10^{-5} mètre malgré un bruitage quasi-chaotique, voir la figure 15. Cette période est similaire au cas d'une seule fente.

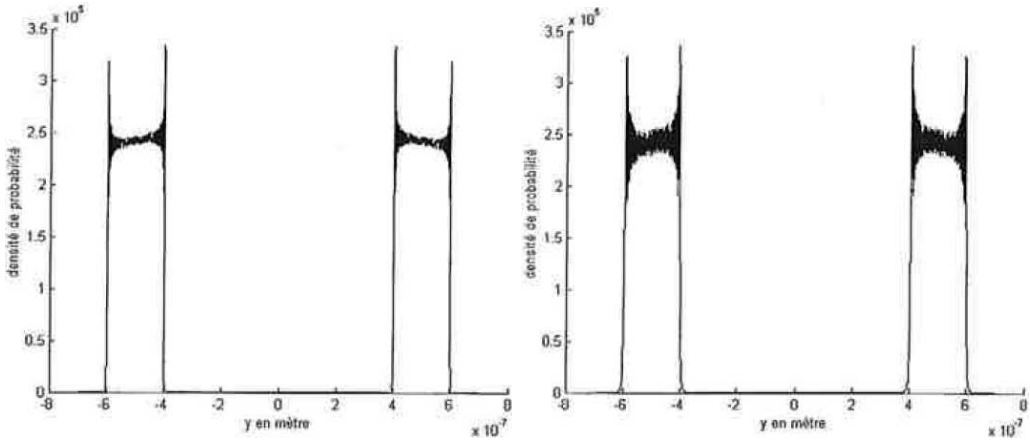

FIG. 15 – Densité de probabilité à 10^{-6} et 10^{-5} mètre de la sortie des deux fentes.

De 10^{-5} à 10^{-3} m après les fentes : des rectangles très irréguliers jusqu'à un minimum central. Comme le montre la figure 16, de 10^{-5} à 10^{-3} m, le bruitage quasi-chaotique s'harmonise. La densité de probabilité qui était de forme rectangulaire se transforme en une forme admettant un minimum central. Jusqu'à 10^{-3} m les phénomènes avec une ou deux fentes sont très similaires.

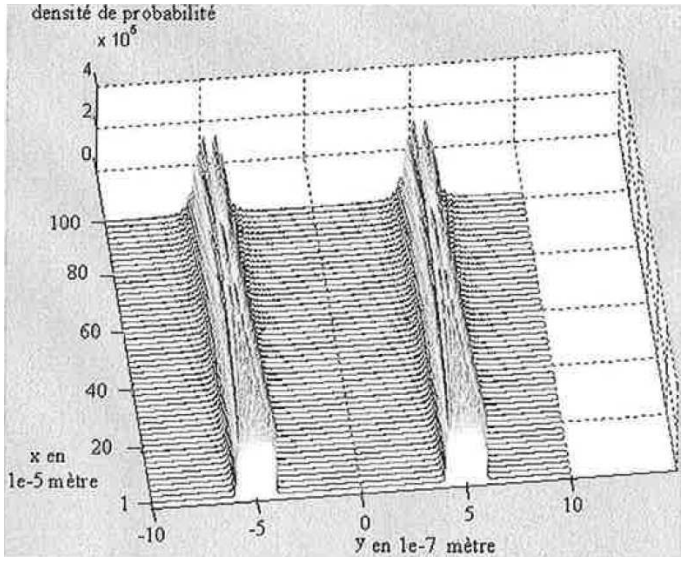

FIG. 16 – Évolution de la densité de probabilité de 10^{-5} mètre à 10^{-3} mètre après la sortie des deux fentes.

De 10^{-3} à 10^{-2} m après les fentes : rapprochement des densités de probabilité. Comme le montre la figure 17, lors de cette période, les deux densités vont s'étaler et se rapprocher.

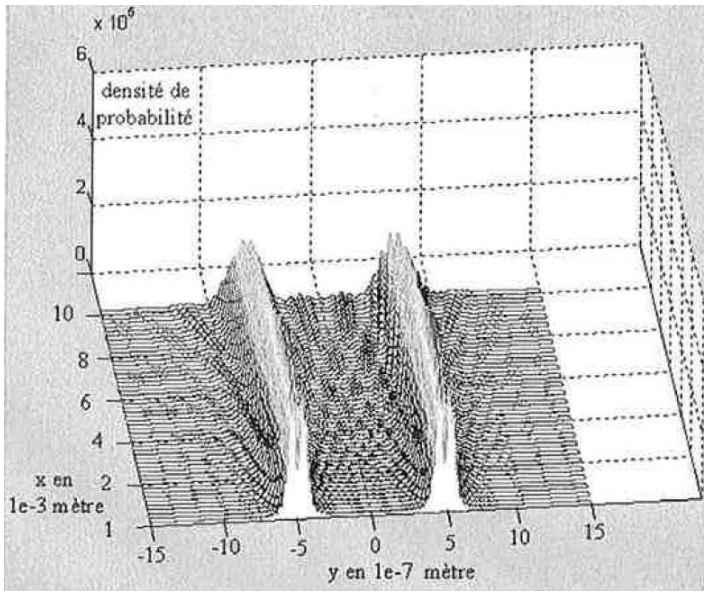

FIG. 17 – Évolution de la densité de probabilité de 10^{-3} mètre à 10^{-2} mètre après la sortie des deux fentes.

De 10^{-2} à 4×10^{-2} m après les deux fentes : formation d'un pic central. Comme le montre la figure 18, lors de cette période, les deux densités vont s'unir et former un pic central (maximum global de la densité). C'est la période durant laquelle se forme l'ébauche des franges d'interférences.

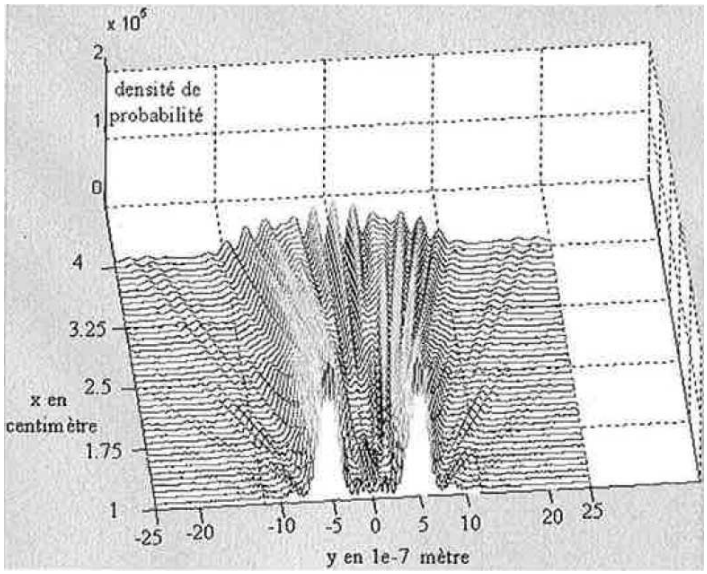

FIG. 18 – Évolution de la densité de probabilité de 10^{-2} mètre à 4×10^{-2} mètre après la sortie des deux fentes.

De 4×10^{-2} à 35×10^{-2} m après les deux fentes (et au delà) : du pic central à la figure d'interférence classique. La figure 19 représente la dernière évolution de la densité de probabilité. La formation des franges d'interférence s'achève. Lors de cette période, on retrouve la densité de probabilité (de type sinuscardinal) calculée par les approximations de Fraunhofer (cf. annexe C). La figure 20 représente cette densité de probabilité à 35×10^{-2} mètre des deux fentes.

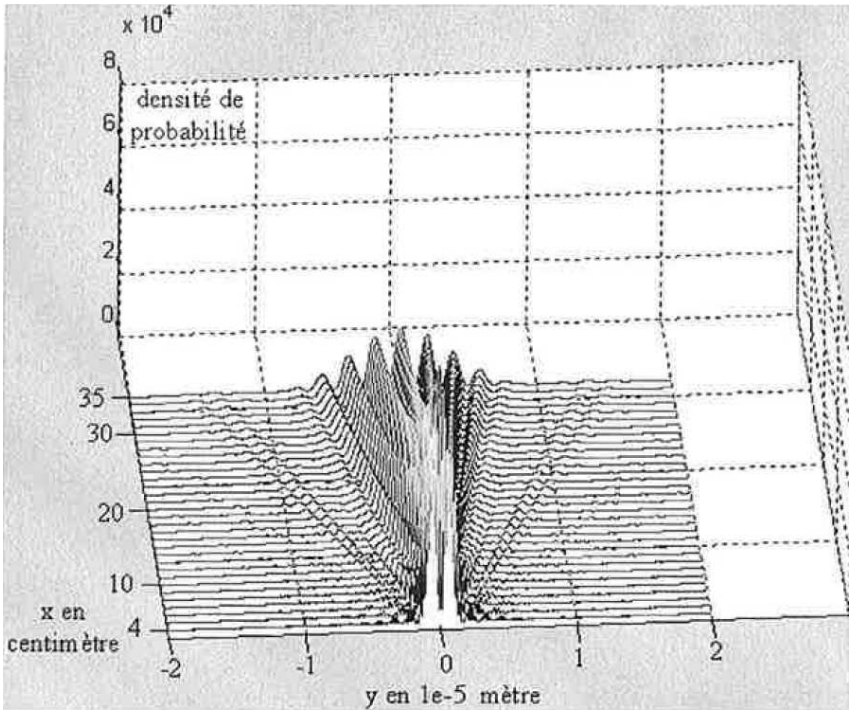

FIG. 19 – Evolution de la densité de probabilité de 4×10^{-2} mètre à 35×10^{-2} mètre après la sortie des deux fentes.

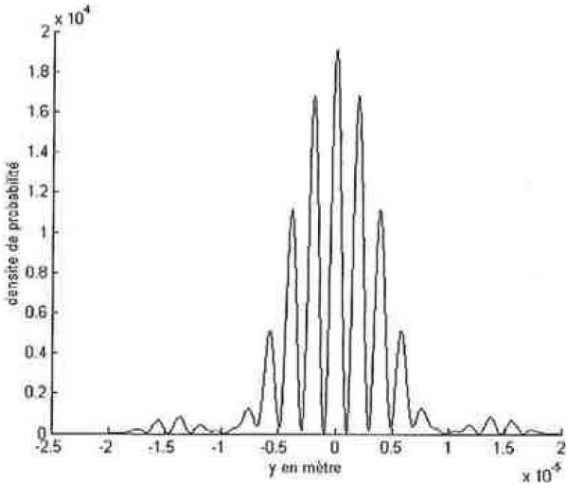

FIG. 20 – Densité de probabilité à 35 cm de la sortie des deux fentes (phénomène d'interférences).

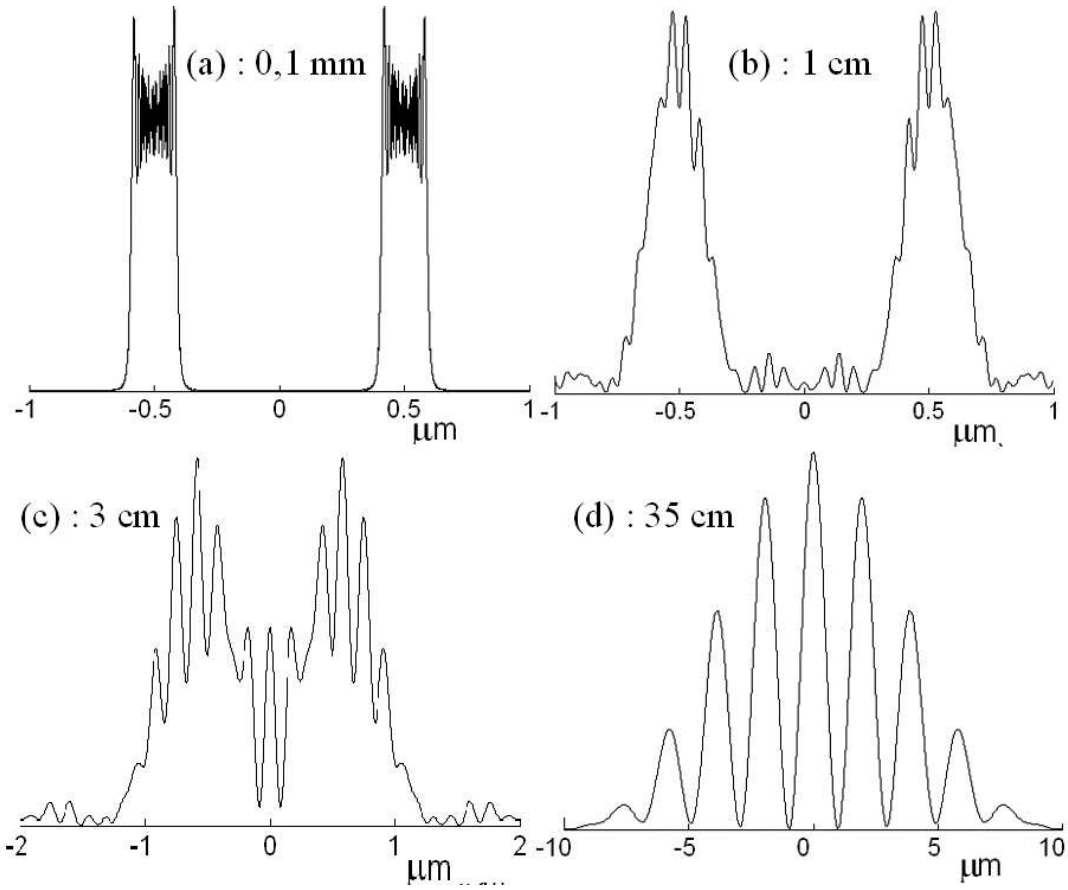

FIG. 21 – Densité de probabilité à $0,1$ mm (a), à 1 cm (b), à 3 cm (c) et à 35 cm (d) de la sortie des deux fentes (phénomène d'interférences) - image refaite en 2005.

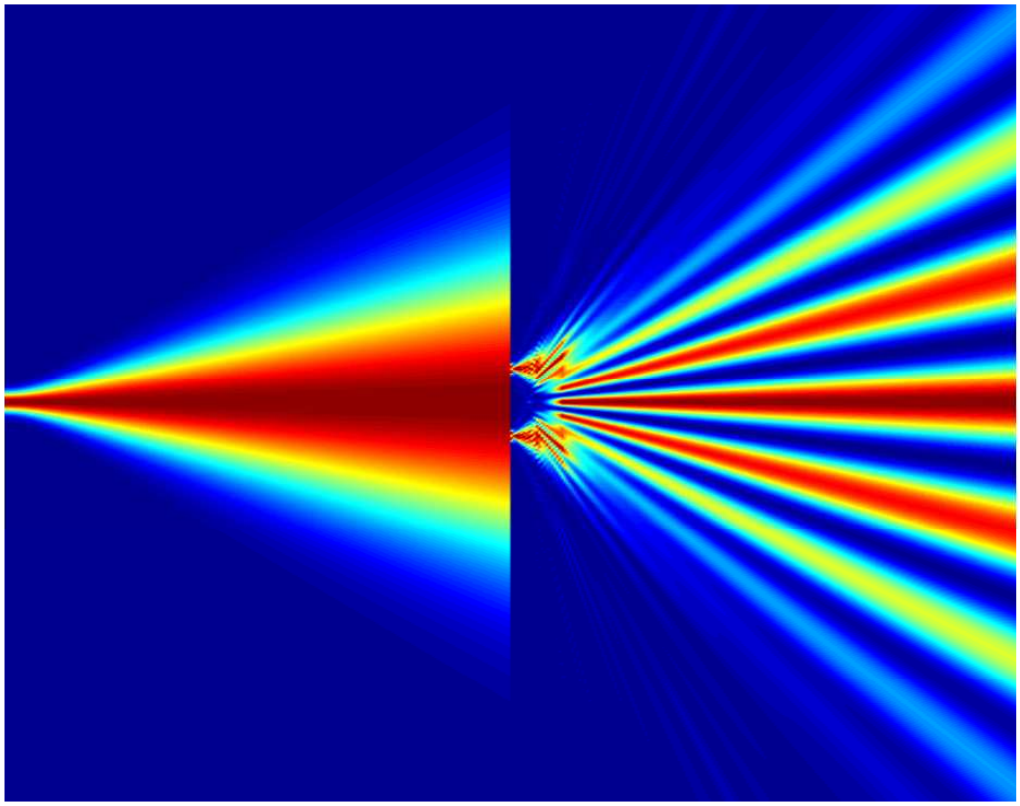

FIG. 22 – Évolution de la densité de probabilité de la sortie du canon à électrons à l'écran de détection - image refaite en 2005.

3.4 Comparaison des deux phénomènes

On s'intéresse ici aux similitudes des deux phénomènes : lorsque les deux trous sont ouverts et lorsque l'on en bouche un.

Les deux premières périodes sont identiques. Bien que ces deux phénomènes soient fondamentalement différents, les densités de probabilité sont similaires jusqu'à une distance de 10^{-3} mètre. Les figures 23 et 24 superposent les densité de probabilités pour une et deux fentes à 10^{-5}, 10^{-4} et 10^{-3} mètre de la sortie des fentes ; on constate qu'à ces distances il est difficile, voir impossible, de discerner les deux courbes.

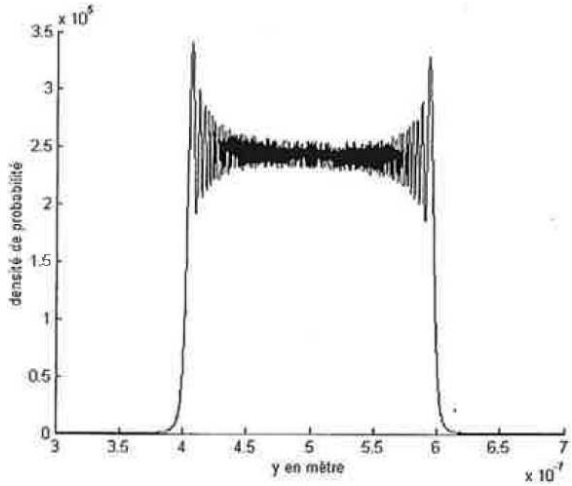

FIG. 23 – Densités de probabilité après une seule fente (trait en pointillé) et après deux fentes (trait plein) à une distance de 10^{-5} m de la sortie de la fente supérieure. A cette distance, il est impossible de discerner les deux courbes.

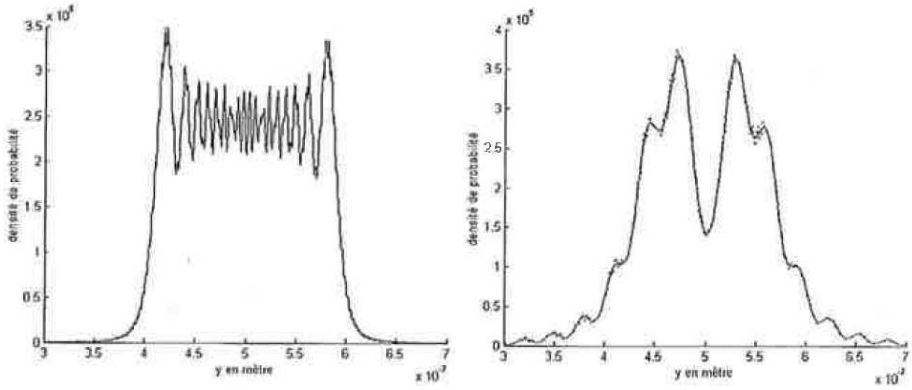

FIG. 24 – Densités de probabilité après une seule fente (trait plein) et après deux fentes (en trait en pointillé) à une distance de 10^{-4} m (figure de gauche) et 10^{-3} m (figure de droite) de la sortie de la fente supérieure.

A partir de 10^{-3} m après la sortie des fentes. Il est intéressant de comparer la densité de probabilité après deux fentes par rapport à celle après une seule fente (cas où l'on bouche une des deux fentes). Mais il est encore plus intéressant de comparer la densité de probabilité après deux

fentes par rapport à la somme des densité de probabilités de chacune des deux fentes considérées séparément. En effet ce qui est surprenant en mécanique quantique par rapport à la mécanique classique, c'est le phénomène d'interférence : avec la mécanique classique, on s'attend à une simple addition des densité de probabilités de chacune des deux fentes, mais en mécanique quantique il y a une "interaction" entre ces deux fentes avec l'apparition des franges d'interférence. On va donc s'intéresser à cette comparaison dans les figures suivantes (figures 25, 26, 27). Les traits en pointillés représentent la densité de probabilité lorsque les deux fentes sont ouvertes ($|\psi_{AB}|^2$ si A et B sont les fentes) et les traits pleins la somme des densité de probabilités de chacune des deux fentes considérées séparément ($|\psi_A|^2 + |\psi_B|^2$). Les figures 25, 26, 27 montrent le début et l'évolution des différences entre les deux phénomènes.

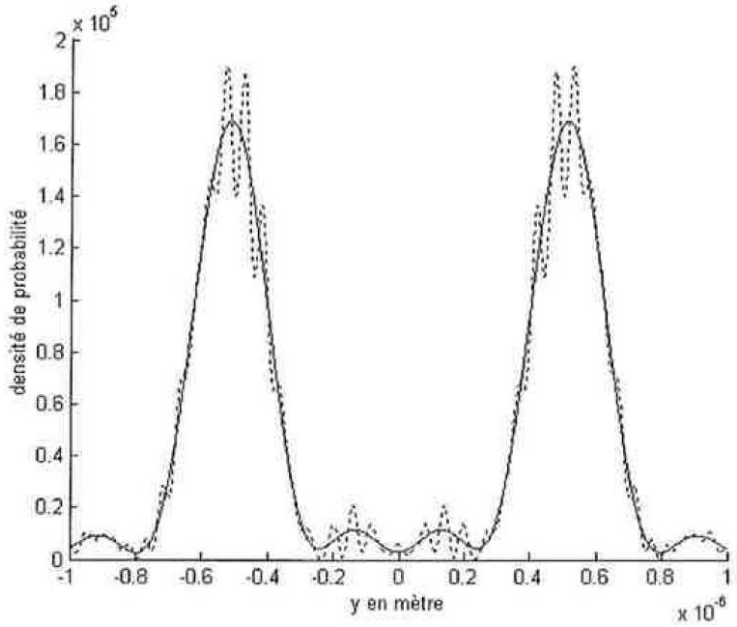

FIG. 25 – Vue à une distance de 1 cm des fentes de la densité de probabilité après deux fentes (trait en pointillé) et de la somme des densité de probabilités des deux fentes considérées séparément (trait plein).

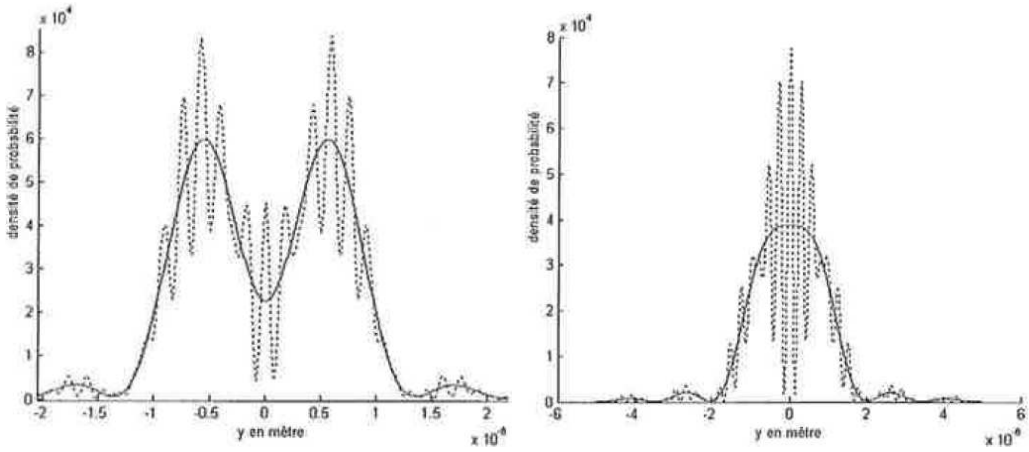

FIG. 26 – Vue à une distance de 3 centimètres (figure de gauche) et de 5 centimètres (figure de droite) de la densité de probabilité après deux fentes (trait en pointillé) et de la somme des densité de probabilités des deux fentes considérées séparément (trait plein).

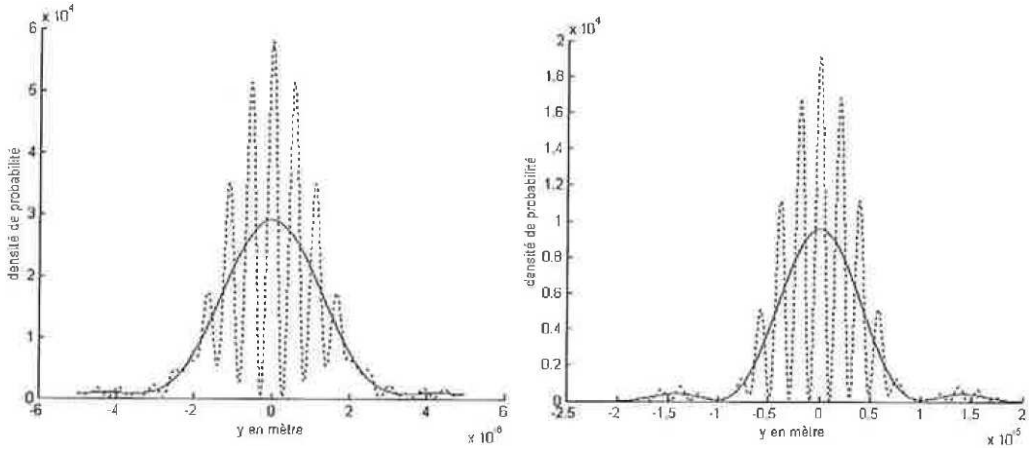

FIG. 27 – Vue à une distance de 10 centimètres (figure de gauche) et de 35 centimètres (figure de droite) de la densité de probabilité après deux fentes (trait en pointillé) et de la somme des densité de probabilités des deux fentes considérées séparément (trait plein).

Questions. Nous avons calculé la densité de probabilité de présence des électrons pour ces deux phénomènes et on peut se poser la question : *par quelle(s) fente(s) un électron, capté par l'écran d'arrêt, est-il passé ?* (la fente 1, la fente 2 ou les deux fentes à la fois)
Lorsqu'il n'y a qu'une seule fente ouverte, il est évident que l'électron est passé par la seule fente existante.
Lorsque les deux fentes sont ouvertes, dans les premiers 10^{-3} m qui suivent la sortie des fentes, étant donné que les densité de probabilités pour un ou deux trous sont quasiment les mêmes (figures 23 et 24), il est difficile de ne pas conclure par quel trou passe chaque électron. En effet les densité de probabilités *juste avant* les fentes et *juste après* les fentes étant continues, il est difficile de concevoir qu'un électron capté *juste après* une fente ($< 10^{-3}$ mètre) soit passé par l'autre fente ou par les deux fentes à la fois.
Ensuite à 1 centimètre, bien que les densité de probabilités des deux fentes se soient réunies, il apparaît normal que les deux principaux *paquets* proviennent chacun d'une des deux fentes

(cf. figure 25). Par la suite la formation des franges d'interférence suit le même processus logique (cf. figure 26). La simple observation de l'évolution de la densité de probabilité permet donc une interprétation du phénomène.

Il semble bien que l'électron passe par l'une **ou** l'autre des fentes lors de l'expérience des fentes de Young.

Au paragraphe 4, nous allons voir comment la théorie de l'onde pilote de De Broglie [5] permet d'attribuer une trajectoire aux électrons.

4 Trajectoires d'électrons

Après avoir observé l'évolution de la densité de probabilité, l'idée d'une existence de trajectoire pour les électrons semble assez naturelle. Nous allons donc définir des trajectoires pour les électrons par la méthode de De Broglie et de Bohm, définit au paragraphe 2.3.

Nous simulons le canon à électrons par un tirage aléatoire des coordonnées initiales ($x_{initial}$; $y_{initial}$) des électrons, où $x_{initial} = -X$ est fixé et où $y_{initial}$ suit la loi normale ($m = 0$; $\sigma_y = 10^{-7}$). Le calcul des vitesses est décrit en annexe A. Très peu d'électrons passent par les fentes (environ 5% par chacune des fentes). On peut même déterminer la position initiale des électrons qui vont passer par les fentes. Par exemple, les électrons qui passeront à travers la fente ouverte en y sur l'intervalle $[4 \cdot 10^{-7}m$; $6 \cdot 10^{-7}m]$ seront émis par la source (située à 35 centimètre avant la plaque) avec un $y_{initial}$ compris dans l'intervalle $[2.561 \cdot 10^{-8}m$; $3.84 \cdot 10^{-8}m]$.

Le calcul des trajectoires m'a posé des problèmes pour définir les pas de temps (cf. discussion en annexe B).

4.1 Trajectoires pour une fente

Commençons par "voir" les trajectoires des électrons à travers une seule fente (l'autre étant obstruée) : c'est un phénomène de diffraction.

Nous allons voir que ce phénomène est explicable si l'on considère les électrons comme des particules guidées par l'onde-pilote de De Broglie [5]. Nous observons sur la figure 28 que les trajectoires représentent le phénomène de diffraction.

Tout se passe comme si ce phénomène ondulatoire n'était qu'une émergence d'un phénomène corpusculaire. En effet, une propriété fondamentale de ces trajectoires est que, comme nous l'avons vu, la densité de probabilité $\rho(x, y, t)$ d'une famille de ces particules dont la vitesse est donnée par (6) vérifie l'équation de continuité de Madelung [11] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0.$$

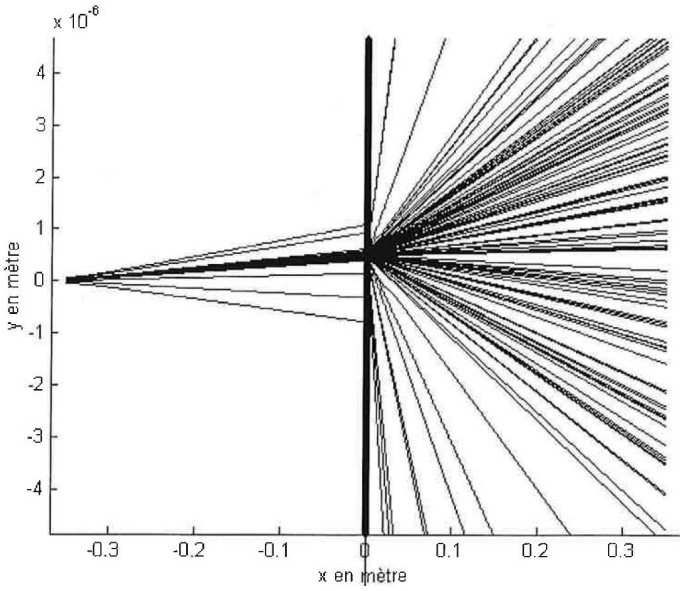

FIG. 28 – Trajectoires de 100 électrons émis par la source suivant une loi normale et traversant une plaque percée d'une seule fente.

Après la fente, on observe que les électrons adoptent assez rapidement une trajectoire rectiligne.

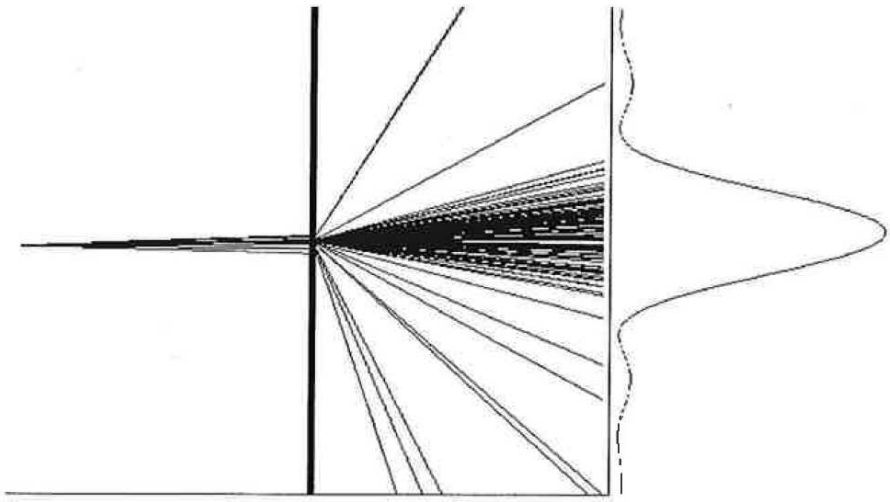

FIG. 29 – Sur cette figure, après qu'un grand nombre de particules ait été émis, on retrouve la densité de probabilité caractérisant la diffraction.

Nous nous intéressons maintenant à la simulation de l'expérience des fentes de Young pour des électrons (cf. expérience de Jönsson [9])

4.2 Trajectoires pour deux fentes

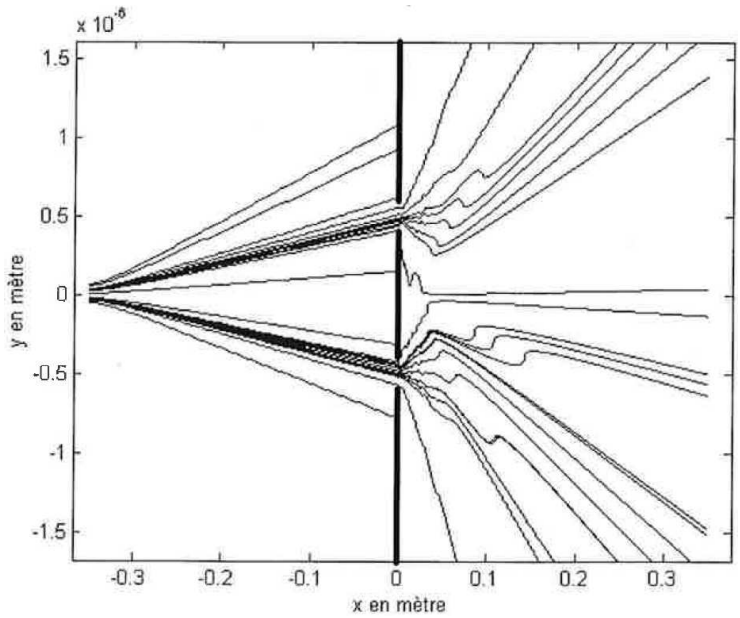

FIG. 30 – Trajectoires de 25 électrons émis par la source, 20 d'entre eux passent par une des deux fentes.

Il est intéressant de noter qu'aucune trajectoire ne franchit le plan de symétrie. Ceci signifie que toutes les particules observées dans la partie supérieure (respectivement inférieure) de l'écran d'arrêt (à 35 cm des fentes) proviennent de la fente supérieure (respectivement inférieure).

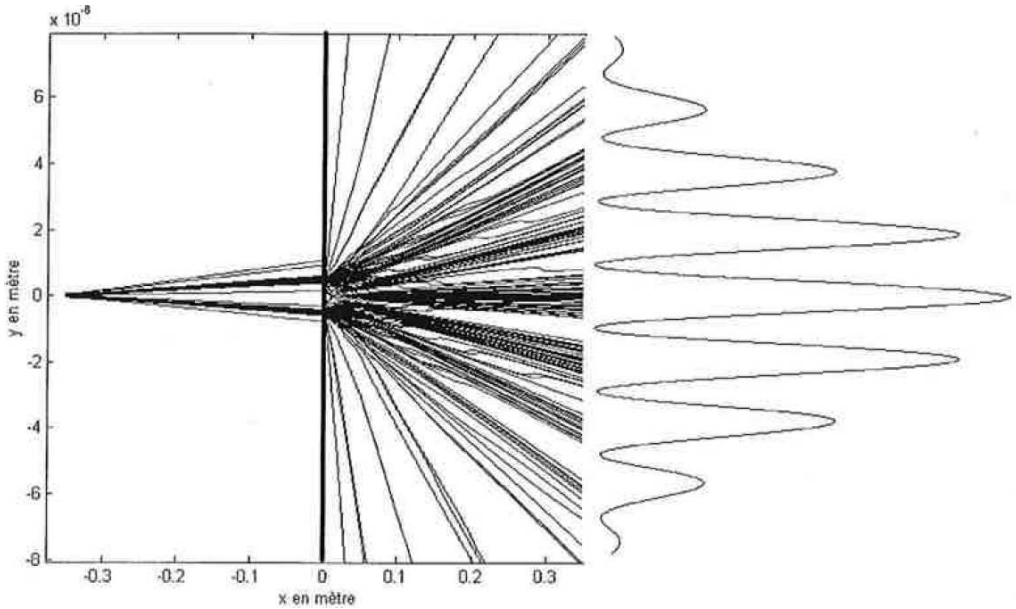

FIG. 31 – Trajectoires de 165 électrons passant par les deux fentes. On retrouve les franges d'interférences.

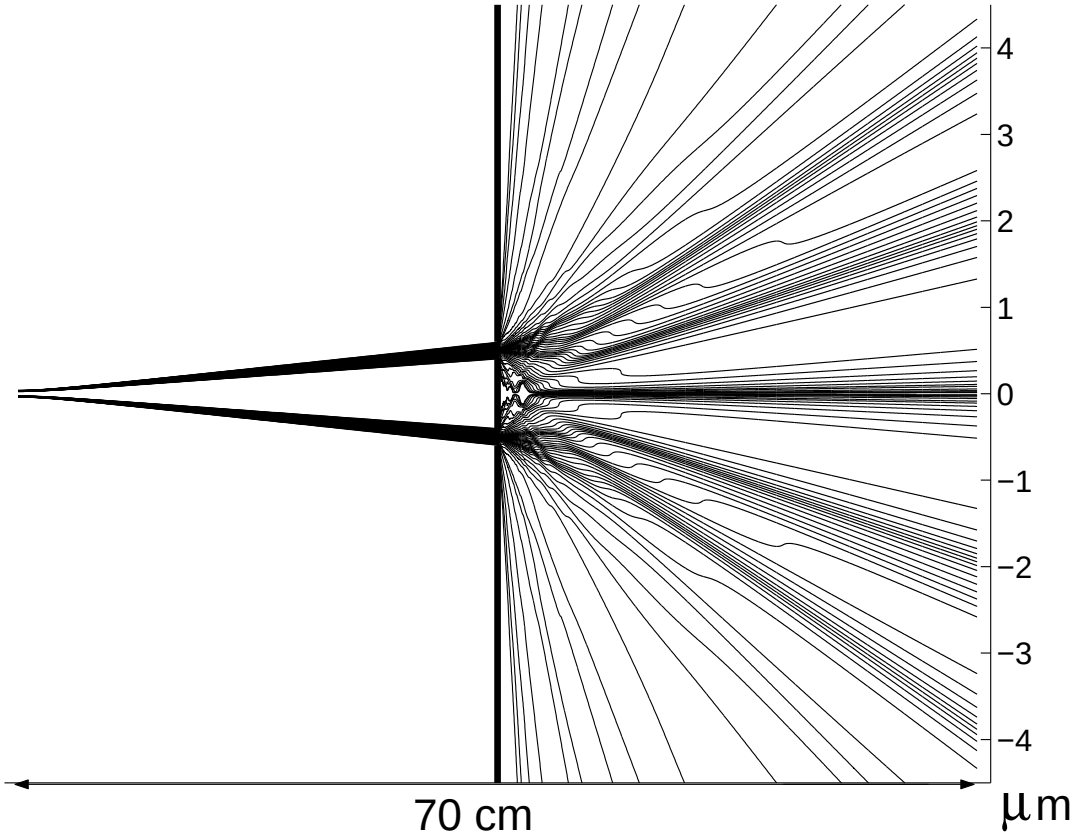

FIG. 32 – Trajectoires de 200 électrons passant par les deux fentes - image refaite en 2005.

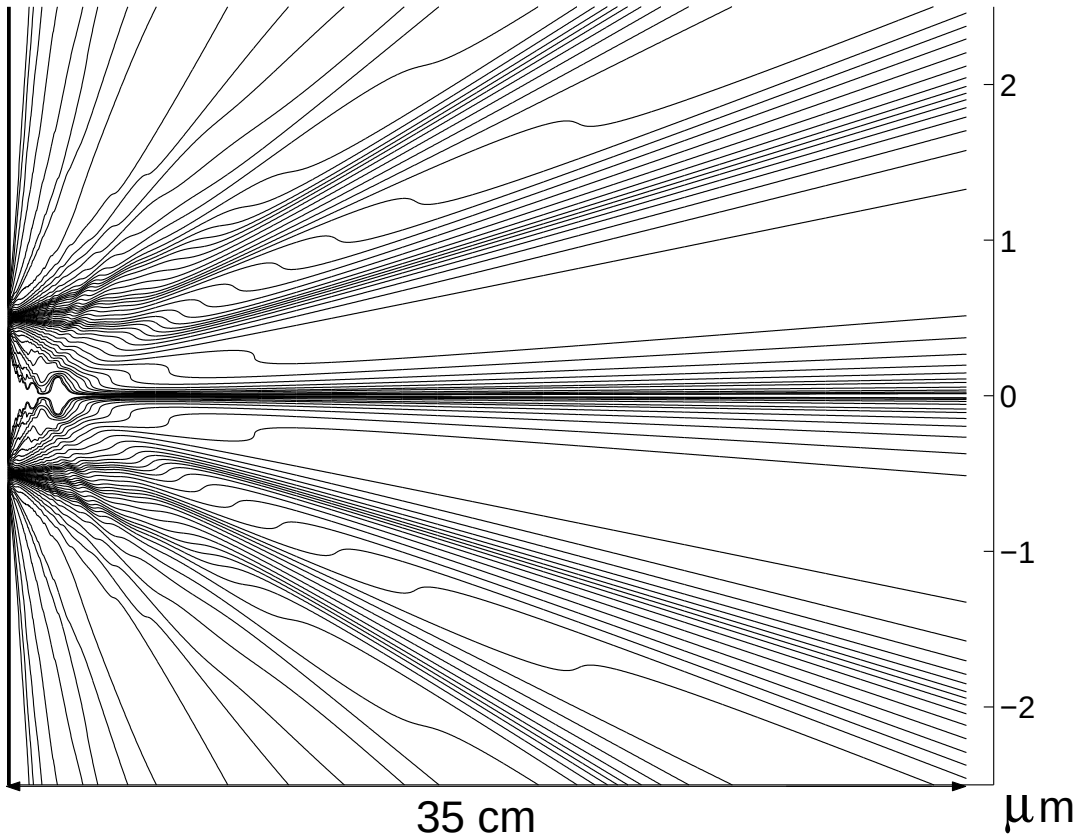

FIG. 33 – Zoom des 200 trajectoires d'électrons passant par les deux fentes - image refaite en 2005.

Lors de l'expérience réelle (réalisée par Jönsson [9]) on émet de la source les électrons un par un. Ils "traversent" les fentes et arrivent un par un sur l'écran d'arrêt(situé à 35 cm des fentes). On repère sur l'écran d'arrêt le point d'impact de chacun des électrons par ses coordonnées (y, z). Il est donc intéressant d'observer les impacts des électrons sur l'écran d'arrêt au fur et à mesure du déroulement de l'expérience. La figure 34 représente les impacts de N électrons à 35cm des fentes pour N=50, 100, 200, 1000 et 5000.

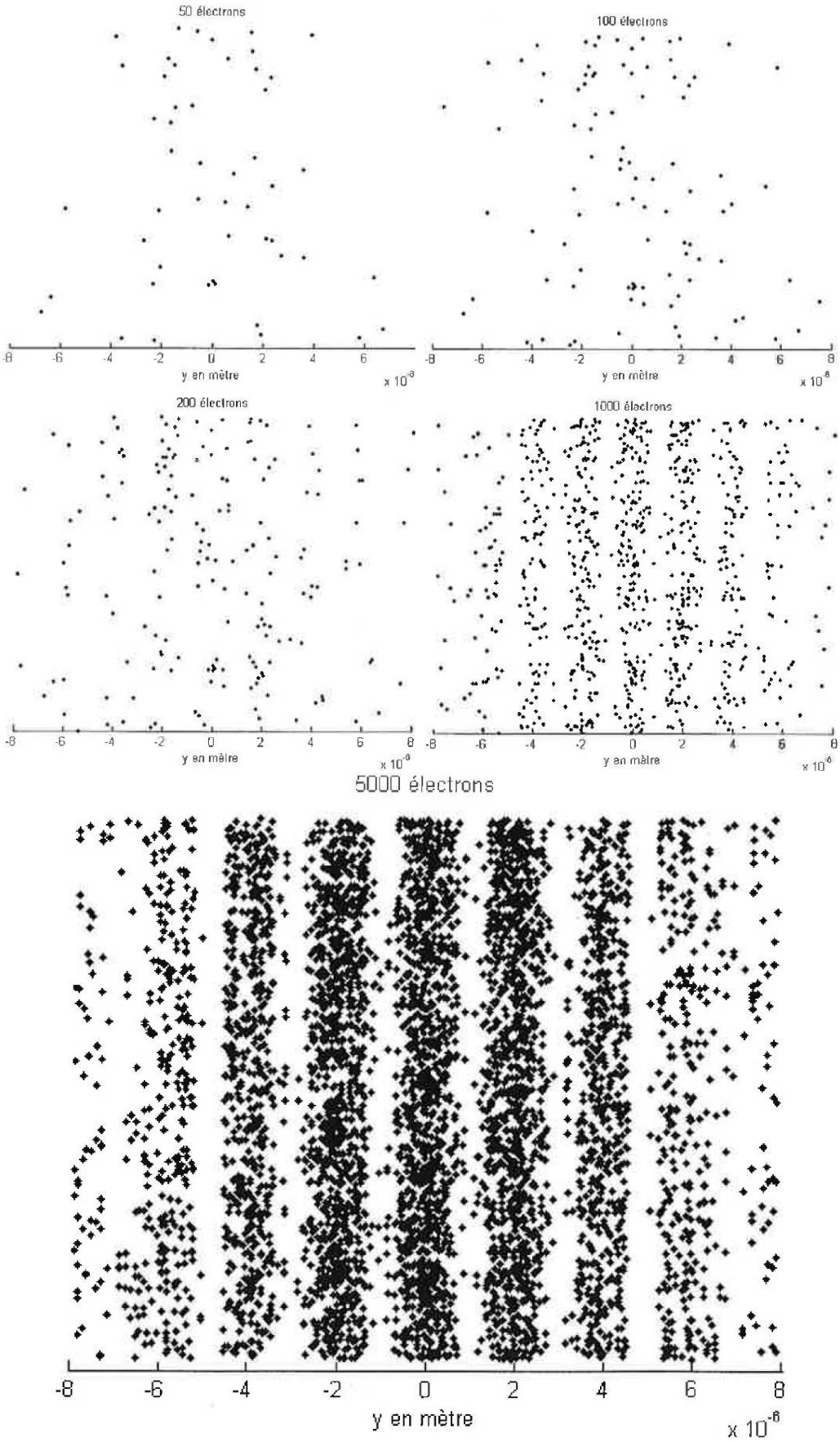

FIG. 34 – Impacts de N électrons sur l'écran d'arrêt (N=50, 100, 200, 1000 et 5000).

4.3 Comparaison des deux trajectoires

Nous avons vu dans le paragraphe 3.4 que les densités de probabilité pour les phénomènes de diffraction et d'interférences sont très semblables à la sortie des fentes (à moins d'un centimètre des fentes). Que deviennent ces similitudes au niveau des trajectoires ? Pour cela nous calculons la trajectoire d'un même électron (même coordonnées initiales au niveau du canon à électron) dans le cas d'une fente et de deux fentes.

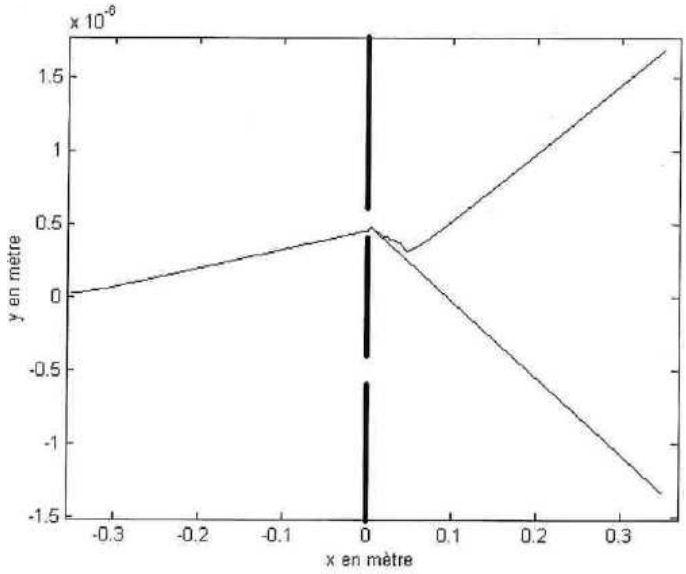

FIG. 35 – Comparaison de la trajectoire d'un même électron mais diffractée par une seule fente pour la trajectoire inférieure et diffractée par les deux fentes pour la trajectoire supérieure.

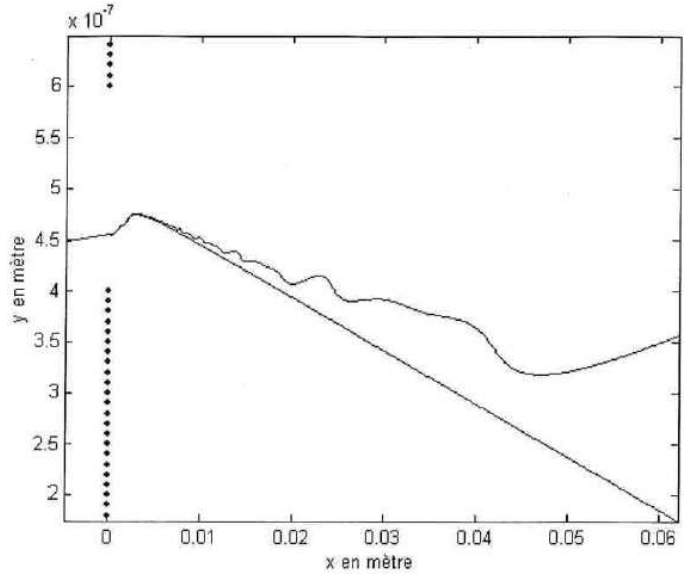

FIG. 36 – Zoom de la comparaison précédente.

On constate que, comme pour la densité de probabilité , les trajectoires de l'électron sont

proches jusqu'à un centimètre de la sortie de la fente. Les phénomènes propres à l'interférence n'interviennent donc qu'après ce premier centimètre.

5 Conclusion

Les simulations précédentes montrent que tout se passe comme si les électrons, dans le cas des fentes de Young, ont bien une trajectoire.

Pour relancer le débat de l'interprétation de la mécanique quantique, il est nécessaire de généraliser la simulation précédente aux autres expériences classiques de la mécanique quantique : effet tunnel, expérience de mesure du spin par Stern et Gerlach, expérience EPR, trajectoires de l'électron dans l'atome d'hydrogène...

Cette interprétation n'est pas en contradiction avec celle de Copenhague. Elle lui est complémentaire : l'interprétation statistique des résultats corpusculaires redonnent l'interprétation de Copenhague.

A Explicitation des calculs

Dans cette annexe, nous développons les calculs pour déterminer les densités de probabilité et les vitesses des électrons dans le cas des fentes de Young. Rappelons sur la figure 37 le schéma de l'expérience.

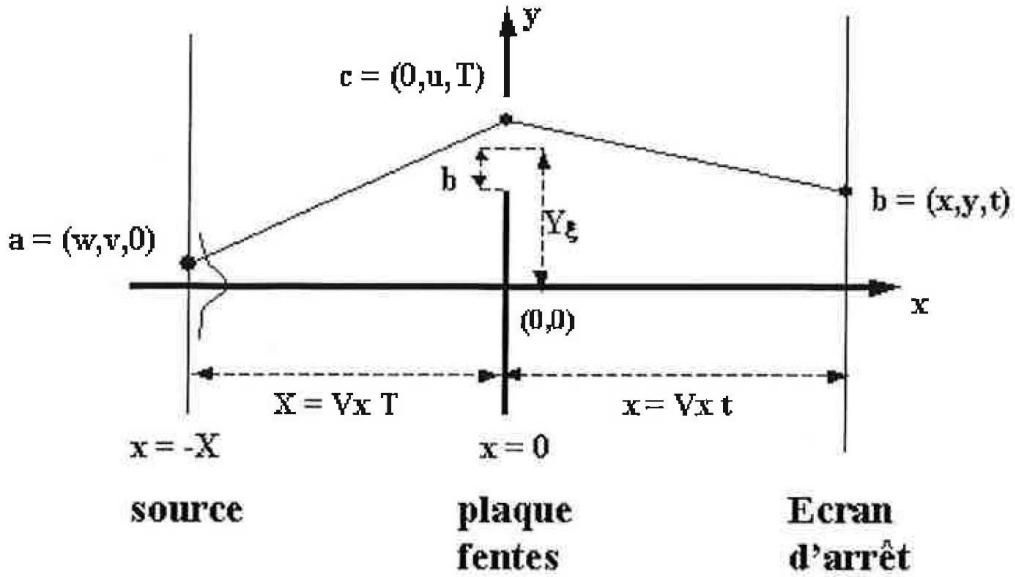

FIG. 37 – Schéma de l'expérience

A l'instant initial (émission des électrons), le paquet d'ondes est gaussien :

$$\psi_0(x,y) = \psi(x,y,0) = \quad (2\pi\sigma_x^2)^{-1/4} \exp(ik_x x) \exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}\right) \times (2\pi\sigma_y^2)^{-1/4} \exp(ik_y y) \exp\left(\frac{-(y-y_0)^2}{4\sigma_y^2}\right)$$

Supposons maintenant que $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x = mV_x/\hbar \\ k_y = 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 = -X \\ y_0 = 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = Y_0$ et que $\sigma_x \to 0$.

Alors $\lim_{\sigma_x \to 0} \left((2\pi\sigma_x^2)^{-1/4} \exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}\right)\right) = \delta_0(x-x_0) = \delta_{x_0}(x)$

avec $\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } x = x_0 \\ 0 & \text{pour } x \neq x_0 \end{cases}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_{x_0}(x)\,dx = f(x_0)$.

On a donc

$$\psi_0(x,y) = (2\pi Y_0^2)^{-1/4} \exp(ik_x x) \exp\left(\frac{-y^2}{4Y_0^2}\right) \delta_{-X}(x) \tag{7}$$

Calcul de la vitesse entre la source et les fentes. On a d'après l'équation 3 :

$$K(x,y,t\,;\,w,v,0) = \left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{im((x-w)^2+(y-v)^2)}{2\hbar t}\right)$$

Donc d'après l'équation 2 :

$$\psi(x,y,t) = \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y,t\,;\,w,v,0)\psi_0(w,v)\,dw\,dv$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & (2\pi Y_0^2)^{-1/4}\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\exp\left(imy^2/2\hbar t\right) \\
& \times\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left[(im/2\hbar t)(x-w)^2+ik_x w\right]\delta_{-X}(w)\right]\,dw \\
& \times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\left(im/2\hbar t-1/4Y_0^2\right)v^2+(-imy/\hbar t)v\right]\,dv.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left[(im/2\hbar t)(x-w)^2+ik_x w\right]\delta_{-X}(w)\right]\,dw=\exp\left[(im/2\hbar t)(x+X)^2-ik_x X\right] \tag{8}
$$

et puisque

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\alpha v^2+\beta v\right)dv=\sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\quad si\quad Re(\alpha)\leq 0 \tag{9}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\left(\frac{im}{2\hbar t}-\frac{1}{4Y_0^2}\right)v^2+\left(\frac{-imy}{\hbar t}\right)v\right]dv= \quad & \left(\frac{m}{2\pi\hbar t}(i-\frac{\hbar t}{2mY_0^2})\right)^{-1/2} \\
& \times\exp\left(-\frac{my^2}{2\hbar t}\frac{i+\hbar t/2mY_0^2}{1+(\hbar t/2mY_0^2)^{-1/2}}\right)
\end{aligned}
$$

avec $\alpha=\frac{m}{2\hbar t}\left(i-\frac{\hbar t}{2mY_0^2}\right)$ et $\beta=-\frac{imy}{\hbar t}$.

En posant $C_t=\frac{\hbar t}{2mY_0^2}$, on a

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y,t)= \quad & (2\pi Y_0^2)^{-1/4}\left(-1-i\frac{\hbar t}{2mY_0^2}\right)^{-1/2} \\
& \times\exp\left[\frac{im}{\hbar}\left(\frac{(x+X)^2}{2t}-V_xX+\frac{y^2}{2t}-\frac{y^2}{2t(1+C_t^2)}\right)-\frac{mC_ty^2}{2\hbar t(1+C_t^2)}\right]
\end{aligned} \tag{10}
$$

donc

$$
\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,t)=\psi(x,y,t)\left(\frac{im}{\hbar}\frac{x+X}{t}\right)
$$

d'où

$$
v_x(x,t)=\frac{x+X}{t}.
$$

Or $v_x=\frac{dx}{dt}$, donc $\frac{dx}{x+X}=\frac{dt}{t}$.
On en déduit $\forall t,\ x(t)=V_xt-X$.
La vitesse de la particule selon l'axe $(0x)$ est donc constante entre la source et la plaque.($v_x(x,t)=v_x(x,0)=V_x$). Donc $T=X/V_x$ est la durée pour qu'un électron parti de la source arrive à la plaque (aux fentes).

D'autre part

$$
\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,t)=\psi(x,y,t)\left[\frac{im}{\hbar}\left(\frac{y}{t}-\frac{y}{t(1+C_t^2)}\right)-\frac{myC_t}{\hbar t(1+C_t^2)}\right]
$$

d'où

$$
v_y(y,t)=y\frac{\hbar^2t}{4m^2Y_0^4}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\hbar t}{2mY_0^2}\right)^2\right)}.
$$

Calcul de la vitesses après les fentes. Après les fentes, le calcul de la fonction d'onde pour les coordonnées (x, y) se fait par la même méthode. Nous allons faire ce calcul pour qu'il soit valable quel que soit le nombre N de fentes.

Comme on peut le constater sur la figure 2, la trajectoire de $a(w, v, 0)$ à $b(x, y, t)$ peut être décomposée en passant par $c(0, u, T)$ où $u \subseteq U$, avec $U = \bigcup_{\xi=1}^{N}[Y_\xi - b\,,\, Y_\xi + b]$ (cf. équation 1).

$$K_0(x, y, t\,;\, w, v, 0) = \int_U K_1(x, y, t\,;\, 0, u, T)\, K_2(0, u, T\,;\, w, v, 0)\, du$$

Nous partons toujours d'un paquet d'onde gaussien de la forme (cf. 7) :

$$\psi_0(x, y) = (2\pi Y_0^2)^{-1/4} \exp(ik_x x) \exp\left(\frac{-y^2}{4Y_0^2}\right)\delta_{-X}(x)$$

donc d'après l'équation 2 :

$$\psi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_U K_1 K_2\, du\right)\psi_0(w, v)\, dw\, dv.$$

Posons

$$\psi(x, y, t) = \sum_{\xi=1}^{N} \psi_\xi(x, y, t) \tag{11}$$

avec

$$\psi_\xi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{Y_\xi - b}^{Y_\xi + b} K_1 K_2 \psi_0(w, v)\, dw\, du\, dv$$

$$K_1(x, y, t\,;\, 0, u, T) = \left(\frac{2\pi i\hbar(t-T)}{m}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{im(x^2 + (y-u)^2)}{2\hbar(t-T)}\right)$$

$$K_2(0, u, T\,;\, w, v, 0) = \left(\frac{2\pi i\hbar T}{m}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{im(w^2 + (u-v)^2)}{2\hbar T}\right)$$

En utilisant (9), on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left[(im/2\hbar T)w^2 + ik_x w\right]\delta_{-X}(w)\right]\, dw \quad &= \exp\left[(im/2\hbar T)X^2 - ik_x X\right] \\ &= \exp -(im/2\hbar T)V_x X\end{aligned}$$

car $V_x = X/T$ et $k_x = mV_x/\hbar$.
Alors

$$\begin{aligned}\psi_\xi(x, y) = \quad & -\left(\frac{im}{2\pi\hbar}\right)\frac{(2\pi Y_0^2)^{-1/4}}{\sqrt{T(t-T)}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{x^2}{(t-T)} + \frac{y^2}{(t-T)} - V_x X\right)\right) \\ & \times \int_{Y_\xi - b}^{Y_\xi + b}\left[\exp\left(\frac{im}{2\hbar(t-T)}(u^2 - 2yu)\right)\exp\left(\frac{im}{2\hbar T}u^2\right) I\right] du\end{aligned}$$

où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\left(\frac{im}{2\hbar T} - \frac{1}{4Y_0^2}\right)v^2 - \frac{imu}{\hbar T}v\right) dv.$$

En utilisant la formule $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\alpha x^2 + \beta x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}}\, exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$ si $Re(\alpha) \leq 0$
avec $\alpha = \frac{m}{2\hbar T}\left(i - \frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)$ et $\beta = -i\frac{mu}{\hbar T}$,
on obtient

$$I = \left(\frac{m}{2\pi\hbar T}\left(i - \frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{mu^2}{2\hbar T}\frac{1}{1 + \left(\frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)^2}\left(i + \frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)\right).$$

En ce référant à l'équation 11, on pose

$$\psi(x,y,t) = F(t)\,G(x,y,t)\,H(y,t) \quad avec \quad H(y,t) = \sum_{\xi=1}^{N} H_\xi(y,t) \tag{12}$$

Par conséquent : $\forall \xi,\ \psi_\xi(x,y,t) = F(t)\,G(x,y,t)\,H_\xi(y,t)$, avec

$$F(t) = -i(2\pi Y_0^2)^{-1/4}\left(\frac{m}{2\pi\hbar(t-T)}\right)^{1/2}\left(i - \frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)^{-1/2} \tag{13}$$

$$G(x,y,t) = \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{x^2}{t-T} + \frac{y^2}{t-T} - V_x X\right)\right) \tag{14}$$

$$H_\xi(y,t) = \int_{Y_\xi - b}^{Y_\xi + b} f(y,u)\,du \tag{15}$$

et

$$f(y,u) = \exp\left[(\alpha + i\beta_t)u^2 + i\gamma_{y,t}u\right] = f_1(y,u) + if_2(y,u)$$

$$f_1(y,u) = e^{(\alpha u^2)} \times \cos\left(\beta_t u^2 + \gamma_{y,t}u\right) \tag{16}$$

$$f_2(y,u) = e^{(\alpha u^2)} \times \sin\left(\beta_t u^2 + \gamma_{y,t}u\right) \tag{17}$$

$$\alpha = -\frac{1}{4Y_0^2\left(1 + \left(\frac{\hbar T}{2mY_0^2}\right)^2\right)}$$

$$\beta_t = \frac{m}{2\hbar}\left(\frac{1}{t-T} + \frac{1}{T\left(1 + \left(\frac{2mY_0^2}{\hbar T}\right)^2\right)}\right)$$

$$\gamma_{y,t} = -\frac{my}{\hbar(t-T)}.$$

Donc

$$\frac{\partial \psi_\xi}{\partial x}(x,y,t) = F(t)\,\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,t)\,H_\xi(y,t)$$

Or $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,t) = \frac{imx}{\hbar(t-T)}G(x,y,t)$
d'où $\frac{\partial \psi_\xi}{\partial x}(x,y,t) = \psi_\xi(x,y,t)\frac{imx}{\hbar(t-T)}$
donc $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y,t) = \psi(x,y,t)\frac{imx}{\hbar(t-T)}$
et par suite

$$v_x(x,t) = \frac{x}{t-T}.$$

Comme $v_x = \frac{dx}{dt}$, on a $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t-T}$.
On en déduit $\forall t,\ x(t) = V_x(t-T)$.
La vitesse de la particule selon l'axe $(0x)$ est donc constante et égale à V_x après les fentes.
$t = (x+X)/V_x$ est alors la durée que met un électron de la source à l'abscisse x.
D'autre part

$$\frac{\partial \psi_\xi}{\partial y}(x,y,t) = F(t)\left(\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,t)\,H_\xi(y,t) + G(x,y,t)\frac{\partial H_\xi}{\partial y}(y,t)\right)$$

Or $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,t) = \frac{imy}{\hbar(t-T)}G(x,y,t)$
et

$$\frac{\partial H_\xi}{\partial y}(y,t) = \int_{Y_\xi - b}^{Y_\xi + b} \frac{\partial f}{\partial y}(y,u)\,du$$

où $\frac{\partial f}{\partial y}(y,u) = iuf(y,u)\frac{\partial \gamma_{y,t}}{\partial y} = \frac{-im}{\hbar(t-T)}uf(y,u)$.
Donc $\frac{\partial H_\xi}{\partial y}(y,t) = \frac{-im}{\hbar(t-T)}\int_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} uf(y,u)\,du$.
Intégrons par partie : $\int_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b}(u\exp((\alpha+i\beta_t)u^2))(\exp(i\gamma u))\,du$
$avec \begin{cases} r' = u\exp((\alpha+i\beta_t)u^2) & r = \frac{1}{2(\alpha+i\beta_t)}\exp((\alpha+i\beta_t)u^2) \\ s = \exp(i\gamma_{y,t}u) & s' = i\gamma_{y,t}\exp(i\gamma_{y,t}u) \end{cases}$

$$\frac{\partial H_\xi}{\partial y}(y,t) = \frac{-im}{\hbar(t-T)}\frac{1}{2(\alpha+i\beta_t)}\left([f(u)]_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} - i\gamma_{y,t}H_\xi(y,t)\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial y}(y,t) &= \sum_{\xi=1}^{\xi=N}\frac{\partial H_\xi}{\partial y}(y,t) \\ &= \frac{-im}{\hbar(t-T)}\frac{1}{2(\alpha+i\beta_t)}\left(\sum_{\xi=1}^{\xi=N}[f(u)]_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} - i\gamma_{y,t}\sum_{\xi=1}^{\xi=N}H_\xi(y,t)\right) \\ &= \frac{-m(\beta_t+i\alpha)}{2\hbar(t-T)(\alpha^2+\beta_t^2)}H(y,t)\left(\frac{C(y,t)}{H(y,t)} - i\gamma_{y,t}\right)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}C(y,t) &= \sum_{\xi=1}^{\xi=N}[f(u)]_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} = \sum_{\xi=1}^{\xi=N}[f_1(u)]_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} + i\sum_{\xi=1}^{\xi=N}[f_2(u)]_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} \\ &= C_1(y,t) + iC_2(y,t).\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y,t) &= \sum_{\xi=1}^{\xi=N}\frac{\partial \psi_\xi}{\partial y}(x,y,t) \\ &= \psi(x,y,t)\left[\frac{imy}{\hbar(t-T)} + \frac{-m(\beta_t+i\alpha)}{2\hbar(t-T)(\alpha^2+\beta_t^2)}\left(\frac{C(y,t)}{H(y,t)} - i\gamma_{y,t}\right)\right]\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}H(y,t) &= \sum_{\xi=1}^{\xi=N}\int_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} f(y,u)\,dv = \sum_{\xi=1}^{\xi=N}\int_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} f_1(y,u)\,dv + i\sum_{\xi=1}^{\xi=N}\int_{Y_\xi-b}^{Y_\xi+b} f_2(y,u)\,dv \\ &= H_1(y,t) + iH_2(y,t).\end{aligned} \tag{18}$$

On a donc :

$$V_y = \frac{1}{t-T}\left[y + \frac{-1}{2(\alpha^2+\beta_t^2)}\left(\beta_t Im\left(\frac{C(y,t)}{H(y,t)}\right) + \alpha Re\left(\frac{C(y,t)}{H(y,t)}\right) - \beta_t\gamma_{y,t}\right)\right].$$

B Les paramétrages

Dans cette annexe, on va s'intéresser aux problèmes concernant les calculs numériques. La mise en œuvre d'équations mathématiques posent toujours des problèmes de paramétrisation. Dans notre cas, on souhaite calculer des coordonnées, via le calcul d'une vitesse ; il y a donc un premier paramétrage : celui du pas de temps.

Pour garder une bonne précision de calcul, ce pas de temps doit être petit si la vitesse varie beaucoup et il peut être plus grand si la vitesse varie peu. En quelque sorte, le pas de temps "idéal" pourrait être inversement proportionnel à l'accélération. Expérimentalement on constate que la vitesse varie considérablement aux sorties des fentes (par exemple, à 10^{-3} m après les fentes, elle varie de $\pm 10^4$ m/s). La vitesse devient de plus en plus stable lorsque l'on s'éloigne des fentes. On doit donc prendre un pas de temps très petit au début et l'augmenter au fur et à mesure que l'on s'éloigne des fentes. Si l'on suit cette méthode, que l'on calcule une approximation de l'accélération, et que l'on prend comme pas de temps l'inverse de celle-ci, on trouve alors un pas de temps de l'ordre 10^{-22} seconde à 10^{-5} mètre de la sortie des fentes, ce qui n'est pas réaliste puisque la vitesse de l'électron est seulement de 1.3×10^{-8} m/s (en effet, il faudrait alors environ 10^9 pas de temps pour que la particule parcourt 10^{-5} mètre, ce qui fait exploser le temps de calcul). J'ai donc décidé de fixer un pas de temps débutant à 10^{-17} seconde et augmentant peu à peu selon le tableau ci-dessous.

distance de la fente	pas de temps maximum
10^{-5} m	10^{-17}
4×10^{-5} m	10^{-16}
1.4×10^{-4} m	10^{-15}
5×10^{-4} m	10^{-14}
3×10^{-3} m	10^{-13}
2×10^{-2} m	10^{-12}

D'autre part, le calcul de la vitesse nécessite le calcul d'intégrales. Nous utilisons pour ces calculs la méthode des trapèzes. Il nous faut alors définir un nouveau paramètre : celui de la taille du *pas d'intégration*. Expérimentalement, on s'aperçoit que la fonction à intégrer varie énormément lorsque l'on est proche de la sortie des fentes (il faut au minimum 10^5 pas d'intégration (de 10^{-12} mètre) pour calculer l'intégrale à une distance de 10^{-5} mètre de la fente). Pour optimiser le temps de calcul de chaque intégrale, il serait intéressant de prendre comme taille du pas d'intégration environ un dixième de la période de la fonction considérée. Évidement la fonction n'est pas périodique, mais on peut s'intéresser à ses pseudo-périodes. Expérimentalement on détermine la pseudo-période la plus caractéristique.

Pour le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire pour l'intégration des fonctions f_1 et f_2 (cf. équations 16 et 17), la pseudo-période la plus caractéristique est : $T = \frac{\pi}{|\gamma_{(y,t)}|}$ où $\gamma_{(y,t)} = \frac{myV_x}{\hbar x}$.

On pose alors la fonction suivante :

$$h(x,y) = \frac{1}{10}\frac{\pi}{|\gamma_{(y,t)}|} = \frac{1}{10}\frac{\pi\hbar}{mV_x}\frac{x}{|y|}$$

et on définit la taille du pas d'intégration comme : $min(h(x,y), \frac{b}{100})$ où $\frac{b}{100}$ est définit comme la taille maximum du pas d'intégration (b étant la demi-largeur de la fente et la demi-longueur de l'intervalle d'intégration). En effectuant des tests expérimentaux, on s'aperçoit de la validité de ce choix (en effet, au début, j'ai tenté simplement par l'expérience de trouver des tailles de pas critiques).

Les différents paramétrages nous conduisent à ne pas pouvoir calculer (par manque de temps) la vitesse de la particule dans le premier 10^{-5} mètre, ce qui est équivalant à poser un premier pas de temps de 10^{-13} seconde : ce qui est dommageable puisque c'est bien à ces instants que la

vitesse est la plus importante. Après avoir franchi les premiers 10^{-5} mètre, on peut de nouveau prendre un pas de temps plus petit (par exemple 10^{-17} seconde).

Ce problème du premier pas de temps n'est pas dramatique puisque l'on s'aperçoit que la densité de probabilité à 10^{-5} mètre conserve une forme "quasi" rectangulaire, comme c'est le cas au niveau de la fente (cf. figures 5 et 15).

C Vérification du phénomène ondulatoire

La longueur d'onde associée aux électrons émis par le canon à électrons est donnée par :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar}{mv} = 5,595 \times 10^{-12} \quad m$$

car $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg ;
$\hbar = 1,055 \times 10^{-34}$ m^{2}kg/s ;
$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x = 1,3 \times 10^8$ m/s ;
Dans le cas où les deux fentes sont ouvertes, la probabilité de présence des électrons peut être calculée en faisant quelques approximations (approximation de Fraunhofer ou diffraction à l'infini). On obtient :

$$P_{12} = 4I_0 \left(\frac{sin(\pi d sin\theta/\lambda)}{\pi d sin\theta/\lambda} \right)^2 cos^2 \left(\frac{\pi D sin\theta}{\lambda} \right)$$

Ici on a : $d = 2 \times b = 2 \times 10^{-7}$ m
et : $D = 2 \times Y_1 = 10 \times 10^{-7}$ m.
$sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}$
avec : $L = 35 \times 10^{-2}$ m.
La figure 38 décrit l'expérience.

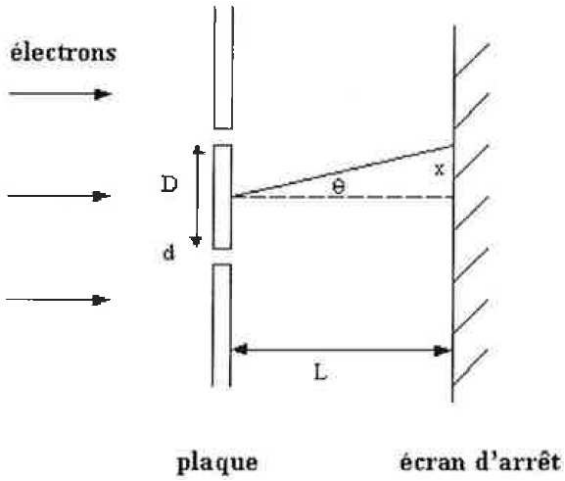

FIG. 38 – Schéma de l'expérience

On observe sur la figure 39 la densité de probabilité à 35 cm après la sortie des fentes. Elle est calculée de deux façons différentes : la figure de gauche représente la densité de probabilité calculée avec l'approximation décrite ci-dessus (approximation vraie si L est très grand, ce qui est le cas ici à 35 cm après les fentes) et la figure de droite représente toujours la densité de probabilité mais elle est calculée cette fois-ci directement par le calcul numérique de la fonction fonction d'onde (méthode exposée dans ce rapport).

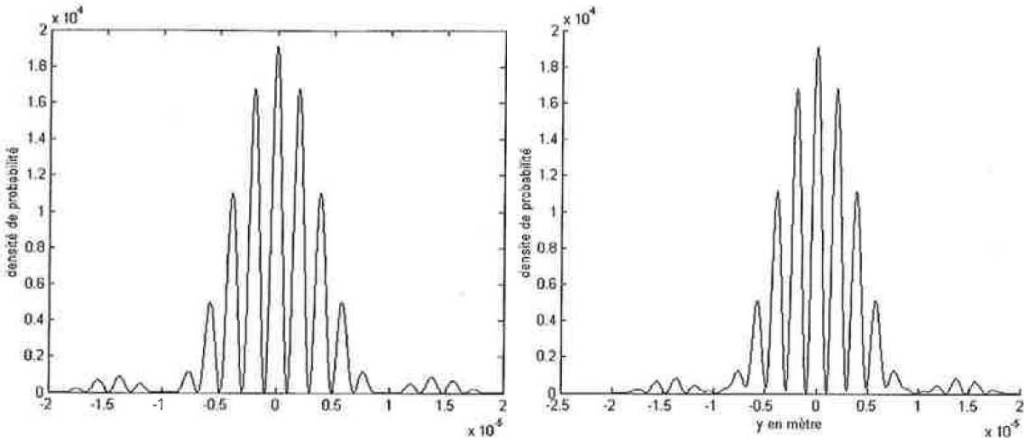

FIG. 39 – Représentation schématique des franges d'interférences (densité de probabilité de présence d'un électron) par l'approximation décrite plus haut pour la figure de gauche et pour la figure de droite en faisant le calcul numérique de la fonction d'onde.

On constate que les deux figures sont quasiment identiques. Les maximums et les minimums sont les même. On a pris pour l'approximation de Fraunhofen $I_0 = 1.92 \times 10^4$.

D Approximation des fentes gaussiennes

La seconde partie de la simulation que nous venons d'effectuer (celle après le passage des fentes), a déjà été réalisée par Philippidis et al. [8]. Ils avaient fait des approximations en considérant les fentes comme des fentes "gaussiennes". Leur approximation avait pour but de faciliter le calcul d'une intégrale.

Pour une fente centrée en $y = Y_\xi$ et de demi-largeur b, il nous faut calculer une intégrale de la forme : $\int_{Y_\xi - b}^{Y_\xi + b} ... \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[Y_\xi - b \, ; \, Y_\xi + b]}(u) \, ... \, du$.

L'approximation des fentes gaussiennes consiste à approximer $1_{[Y_\xi - b \, ; \, Y_\xi + b]}(u)$ par $\exp\left(-\frac{(u-Y_\xi)^2}{2b^2}\right)$.

Nous souhaitons, dans cette annexe, constater les répercutions de cette approximation sur les résultats. Lorsque l'on compare les trajectoires obtenues, dans le paragraphe 4.2 (sans cette approximation) avec celles qu'obtient Philippidis (avec cette approximation), on constate que les trajectoires de Philippidis sont beaucoup plus lisses (elles sont beaucoup moins perturber surtout dans les premiers centimètres qui suivent la sortie des fentes). L'impact sur l'écran de détection d'un même électron (même point de départ) par les deux méthodes donne des résultats différents.

Dans cette partie, nous allons alors étudier comment cette approximation se répercute dans l'évolution de la densité de probabilité .

Commançons d'abord par effectuer les calculs de la fonction d'onde en tenant compte de cette approximation. Reprenons l'équation 12 de l'annexe A

$$\psi(x,y,t) = F(t)\, G(x,y,t)\, H(y,t) \quad avec \quad H(y,t) = \sum_{\xi=1}^{N} \int_{Y_\xi - b}^{Y_\xi + b} f(y,u)\, du$$

En appliquant l'approximation décrite ci-dessous, on a :

$$\begin{aligned}
H(y,t) \quad &\simeq \sum_{\xi=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(u-Y_\xi)^2}{2b^2}\right) f(y,u)\, du \\
&\simeq \sum_{\xi=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2b^2} - \frac{Y_\xi^2}{2b^2} + \frac{uY_\xi}{b^2}\right) \exp\left[(\alpha + i\beta_t)u^2 + i\gamma_{y,t}u\right] du \\
&\simeq \sum_{\xi=1}^{N} \exp\left(-\frac{Y_\xi^2}{2b^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[(\alpha - \frac{1}{2b^2} + i\beta_t)u^2 + (\frac{Y_\xi}{b^2} + i\gamma_{y,t})u\right] du.
\end{aligned}$$

Posons $\alpha' = \alpha - \frac{1}{2b^2}$, $\zeta = \frac{Y_\xi}{b^2}$, $P = \alpha' + i\beta_t$ et $Q = \zeta + i\gamma_{y,t}$.
Donc par la formule 9 on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[(\alpha - \frac{1}{2b^2} + i\beta_t)u^2 + (\frac{Y_\xi}{b^2} + i\gamma_{y,t})u\right] du \quad &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(Pu^2 + Qu\right) du \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{-P}} \exp\left(-\frac{Q^2}{4P}\right)
\end{aligned}$$

car $Re(P) \leq 0$.
Par conséquant

$$H(y,t) = \sqrt{\frac{\pi}{-P}} \sum_{\xi=1}^{N} \exp\left(-\frac{Q^2\bar{P}}{4P\bar{P}} - \frac{Y_\xi^2}{2b^2}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
-\frac{Q^2\bar{P}}{4P\bar{P}} - \frac{Y_\xi^2}{2b^2} \quad &= \left(-\frac{Y_\xi^2}{2b^2} + \frac{(\gamma_{y,t}^2 - \zeta_{y,t^2-})\alpha' - 2\zeta\gamma\beta}{4(\alpha'^2 + \beta_t^2)}\right) + i\frac{2\zeta\gamma\alpha' - (\gamma_{y,t}^2 - \zeta_{y,t^2-})\beta}{4(\alpha'^2 + \beta_t^2)} \\
&= C_\xi + iD_\xi
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
H(y,t) &\simeq \sqrt{\frac{\pi}{-P}} \sum_{\xi=1}^{N} \exp\left(C_\xi + iD_\xi\right) \\
&\simeq \sqrt{\frac{\pi}{-P}} \left(\sum_{\xi=1}^{N} (\exp C_\xi)(\cos D_\xi) + i \sum_{\xi=1}^{N} (\exp C_\xi)(\sin D_\xi) \right) \\
&\simeq \sqrt{\frac{\pi}{-P}} (A + iB)
\end{aligned}$$

d'où : $|H(y,t)|^2 = \frac{\pi}{|P|}(A^2 + B^2)$. //Sachant que $|G(y,t)|^2 = 1$ et par l'équation 13, on déduit que

$$\begin{aligned}
|\psi(y,t)|^2 &= |F(t)|^2 |G(y,t)|^2 |H(y,t)|^2 \\
&= -i(2\pi Y_0^2)^{-1/4} \left(\frac{m}{2\pi\hbar(t-T)} \right)^{1/2} \left(i - \frac{\hbar T}{2mY_0^2} \right)^{-1/2} \frac{\pi}{|P|}(A^2 + B^2)
\end{aligned}$$

Observons maintenant les résultats obtenus. Tout d'abord, il n'y a pas de continuité de la densité de probabilité à travers les fentes, comme nous le montre la figure 40.

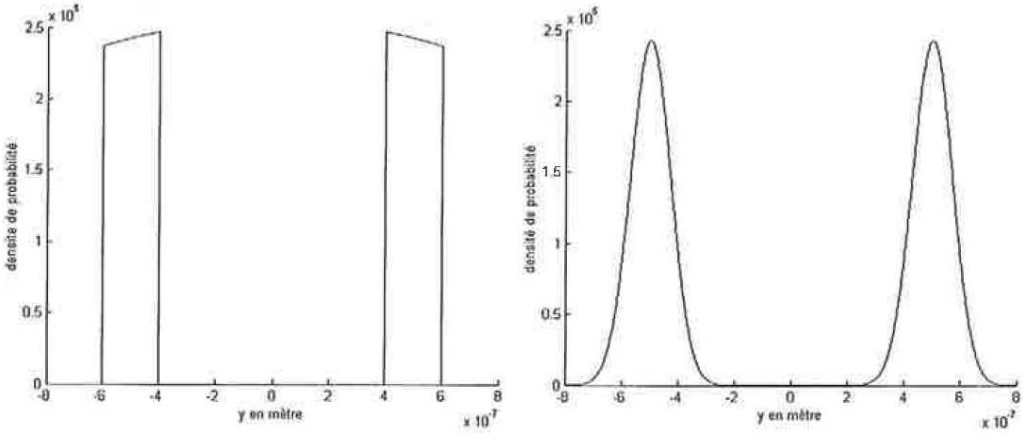

FIG. 40 – Densité de probabilité au niveau de la plaque. Pour la figure de gauche, les fentes sont classiques (pas d'approximation de la densité de probabilité) tandis que pour la figure de droite, les fentes sont considérées "gaussiennes" (il y a approximation)

On observe maintenant l'évolution de la densité de probabilité sur les 35 centimètres qui suivent la sortie des fentes.

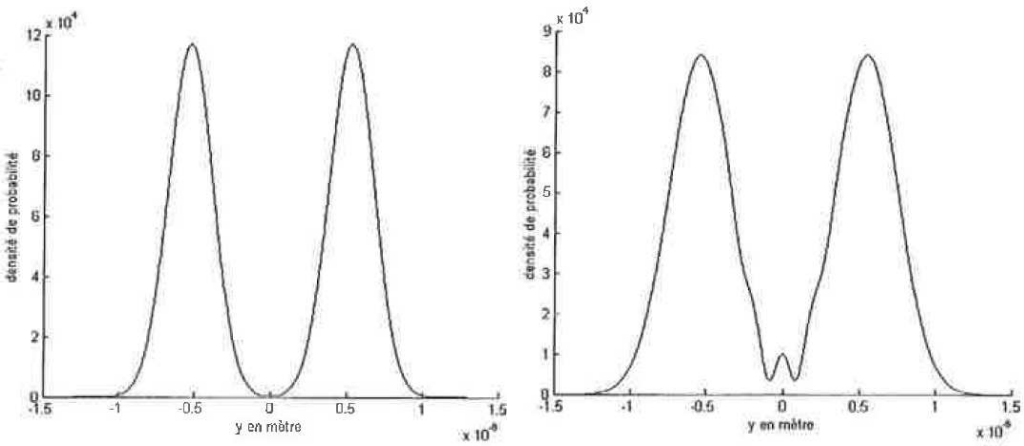

FIG. 41 – Densité de probabilité calculée avec les fentes "gaussiennes" à 2 cm (figure de gauche) et à 3 cm (figure de droite) de la sortie des fentes.

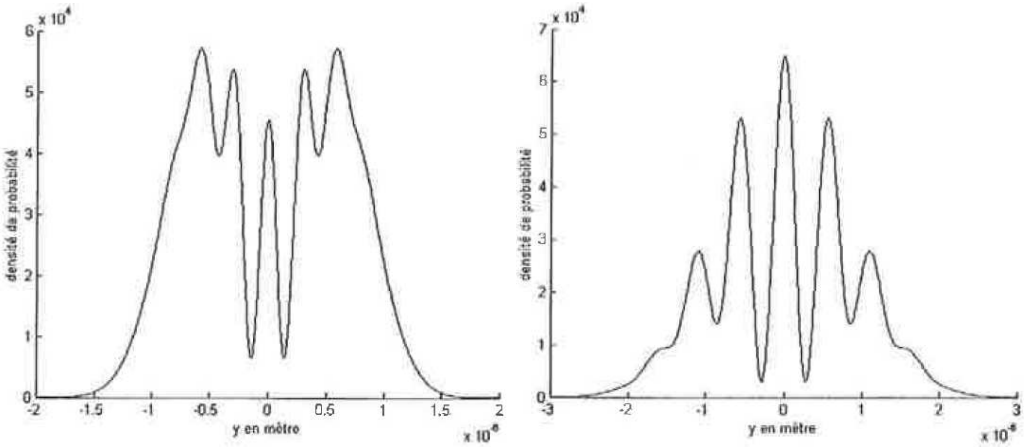

FIG. 42 – Densité de probabilité calculée avec les fentes "gaussiennes" respectivement à 5 cm (figure de gauche) et à 10 cm (figure de droite) de la sortie des fentes.

On note que jusqu'à 2 cm, il n'y a aucun signe d'interférence : les deux "ondes" gaussiennes se propagent en s'étalant. Elles entrent en contact seulement au bout de 2 cm et c'est en "s'unissant" que se forment les franges d'interférences (voir figures 41 et 42).

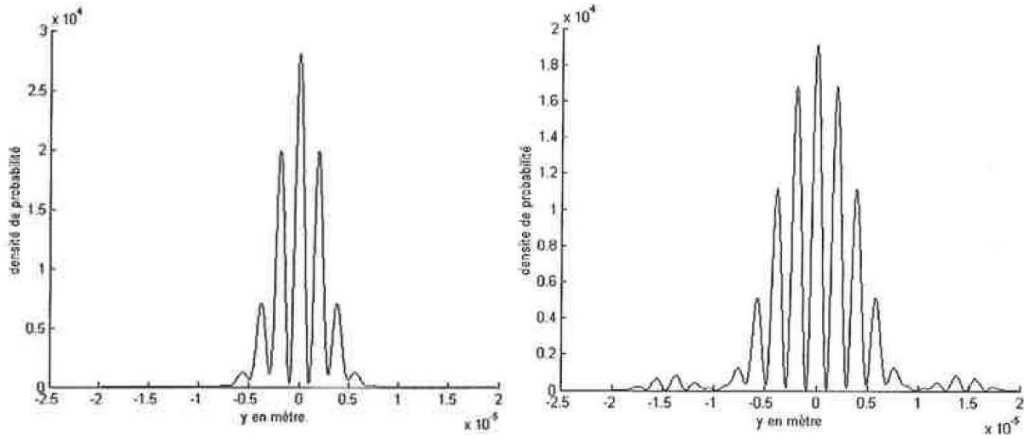

FIG. 43 – Densité de probabilité à 35 cm de la sortie des deux fentes avec approximation ("gaussiennes" des fentes) pour la figure de gauche et sans approximation pour la figure de droite.

Malgré l'approximation des fentes gaussiennes (voir figure 43 de gauche), il y a bien formation d'interférences mais celles-ci ne correspondent pas à la réalité. L'enveloppe de la courbe de la densité de probabilité à la forme d'une gaussienne pour le cas de l'approximation gaussienne des fentes tandis qu'elle a la forme de la "diffraction" si on ne fait pas cette approximation (cf. figure 43).

Pour mieux comprendre l'effet de cette approximation, on effectue également cette approximation pour le cas d'une seule fente. On obtient les résultats de la figure 44.

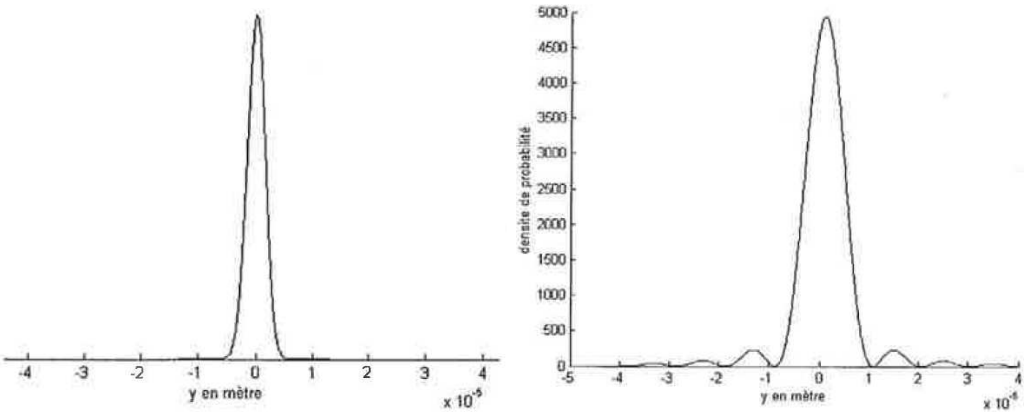

FIG. 44 – Densité de probabilité à 35 cm de la sortie d'une seule fente avec approximation ("gaussiennes" de la fente) pour la figure de gauche et sans approximation pour la figure de droite (phénomène de diffraction)

On constate qu'il n'y a pas de phénomène de diffraction si on fait l'approximation "gaussienne" de la fente (voir figure 44).

En ce qui concerne la représentation précédente, la figure de gauche est une gaussienne tandis que la figure de droite est un sinuscardinal (caractéristique de la diffraction). C'est la discontinuité de la fente qui créée les perturbations significatives de la diffraction.

E La programmation

Pour faire les calculs numériques présentés dans ce rapport, j'ai programmé en langage C les programmes suivants :

1. trajectoire.vv.c : Ce programme calcule les trajectoires (x, y) d'électrons partant de la source et arrivant sur l'écran.

   (a) Les différents paramètres de ce programme sont définis dans : "trajectoires.vv.h" et "boolean.vv.h". On peut redéfinir ces paramètres lors de l'exécution du programme.

   (b) Ce programme utilise des fonctions définies dans les fichiers : initialisation.vv.c, fonc.vv.c, champQuantique.vv.c, ensembleDeFonction.vv.c, particuleLibre.vv.c.

   (c) Les résultats de ce programme sortent dans un fichier que l'on a préalablement défini sur la ligne de commande. Le fichier de résultats est une liste de coordonnées de points (x, y).
   Exemple :
   $x(1) = 1.1e-5 \quad y(1) = 56e-3$
   $x(2) = 1.4e-5 \quad y(2) = 5e-3$
   ...
   $x(101) = 3e-5 \quad y(101) = 23e-4$
   Dans ce cas il y a 100 coordonnées calculées.

2. densiteProba3D.c : Ce programme calcule la densité de probabilité des électrons pour un ensemble de coordonnées (x, y) ; avec x balayant l'intervalle $[Xmin, Xmax]$ et y balayant l'intervalle $[Ymin, Ymax]$.

   (a) Les différents paramètres de ce programme sont définis dans : "parametresDensiteProba3D.vv.h" et "boolean.vv.h". On peut redéfinir ces paramètres lors de l'exécution du programme.

   (b) Les résultats de ce programme sortent dans un fichier, que l'on a préalablement défini sur la ligne d'exécution du programme. Les résultats sortent sous la forme d'une matrice correspondant aux valeurs de la densité de probabilité pour un ensemble des coordonnés (x, y).
   Exemple d'un fichier résultat : la début du fichier énonce les x (i.e. les distances à la fente) et les y pour lesquels on va caluler la densité de probabilité . La suite du fichier donnent les densité de probabilité sous forme d'une matrice : $ddp(i, j)$ est la densité de probabilité au point $(x(i), y(j))$.
   $x(1) = 1e-5 \quad x(2) = 2e-5 \quad ... \quad x(100) = 1e-4$
   $y(1) = 0 \quad y(2) = 1e-9 \quad ... \quad y(1001) = 1e-6$
   $ddp(1, 1) = 5.6e-3 \quad ddp(1, 2) = 4.3e-3 \quad ... \quad ddp(1, 1001) = 2.4e-4$
   $ddp(2, 1) = 5.3e-3 \quad ddp(2, 2) = 3.3e-3 \quad ... \quad ddp(2, 1001) = 5.4e-5$
   ... ...
   $ddp(100, 1) = 7.3e-3 \quad ddp(100, 2) = 6.3e-3 \quad ... \quad ddp(100, 1001) = 9.4e-4$
   Ici $Xmin = 1e-5$, $Xmax = 1e-4$, $Ymin = 0$ et $Ymax = 5.4e-5$.

   (c) Grâce à ce programme on peut tracer des courbes à 3 dimensions : la densité de probabilité en fonction de x et y .

Les fichiers de résultats sont ensuite lus par un petit programme de Matlab qui permet de visualiser les figures.

Références

[1] J. Bell - 1964 - Physics, 1, 195

[2] J. Bell - 1987 - Speakable and unspeakable in Quantum Mechanics - Cambridge University Press

[3] A. Aspect, P. Grangier et G.Roger - 1981 - Phys. Rev. Lett., 47, 460

[4] R. Feynman - 1963 - Lectures on Phycis, Addison-Wesley, Reading. Trad. française, Le cours de physique de Feynman - Tome III - Mécanique quantique - Interédition, Paris, 1979.

[5] L. de Broglie - Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire (Interprétation usuelle et interprétation causale) - Gauthier-Villars, Paris - 1951.

[6] D. Bohm - 1952 - Physical Review, vol.85, p.166-193

[7] M. Gondran - 2001 - Processus complexe stochastique non standard en mécanique - C. R. Acad. Sci. Paris, t.333, Série I, p.592-598.

[8] C. Philippidis, C. Dewdney, and B.J. Hiley - 1979 - Quantum interference and the quantum potentiel - Il nuovo cimento, vol.52 B, n.1, p.15-28

[9] Jönsson C. - 1961 - Zeitschr. Phys., 161, 454

[10] R. Feynman and Hibbs - 1965 - Quantum Mechanics and Integrals - McGraw-Hill, Inc., p.41-51

[11] E. Madelung - 1926 - Z. Phys. Vol.40, p.322