



**HAL**  
open science

## Morphologie et croissance des réseaux techniques urbains : Approche par les fractals

Serge Michel Jacques Thibault

► **To cite this version:**

Serge Michel Jacques Thibault. Morphologie et croissance des réseaux techniques urbains : Approche par les fractals. Flux - Cahiers scientifiques internationaux Réseaux et territoires, 1995, n°19, pp.17-30. hal-00654987

**HAL Id: hal-00654987**

**<https://hal.science/hal-00654987>**

Submitted on 18 Jan 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **MORPHOLOGIE ET CROISSANCE DES RESEAUX TECHNIQUES URBAINS: Approche par les fractals**

**Serge Thibault - Mai 1994**

### Résumé

L'application de la géométrie fractale à la modélisation de quelques aspects des réseaux techniques urbains s'est développée depuis moins d'une dizaine d'années. Cette théorie permet de rendre compte de l'apparente complexité du développement spatial de certains réseaux tels que les réseaux de voiries, les réseaux de tout à l'égout, les réseaux de transport etc. En ce qui concerne l'aspect morphologique de ces réseaux, la quantification de leur forme diffère selon qu'ils sont perçus comme étant des réseaux d'échange ou comme étant des réseaux d'évacuation et de distribution. On a soit une dimension de contenu soit une dimension de localisation.

La dimension fractale illustrant également un processus allométrique de création d'une forme complexe, nous sommes invités à faire le rapprochement entre cette théorie et la question de la croissance spatiale des réseaux techniques urbains. Cela ne veut pas nécessairement dire qu'il faille imputer à cette théorie la thèse d'un développement strictement endogène. Ce sont au minimum deux processus conjoints qu'il convient d'envisager. Le premier est relatif aux principes qui déterminent l'organisation d'une structure de base ou primaire sur laquelle se développe un second processus pouvant s'apparenter à la mise en oeuvre d'un principe de ramification plus ou moins aléatoire. Peut-on parler d'effet réseau à propos du développement spatial?

L'ouvrage de Benoît Mandelbrot paru en 1975 et intitulé "Les objets fractals, formes, hasard et dimension", ne pouvait pas passer inaperçu aux yeux des chercheurs de différents horizons, chercheurs en ingénierie urbaine, géographie, urbanisme ... et dont l'activité portait sur la description quantitative, l'explication voire la prévision de quelques phénomènes ayant pour support la ville, son bâti, ses infrastructures, la répartition spatiale des populations, des activités etc.

Ce retour de la géométrie dans la recherche urbaine quantitative n'a pas été provoqué par l'usage de la procédure de l'analogie, si fréquente dans la pratique scientifique. En effet tout un ensemble d'illustrations proposées par l'auteur de cette théorie provenait de domaines plus ou moins proches de l'urbain. Nous en retiendrons les quelques exemples qui suivent: la modélisation de la morphologie d'un réseau de drainage (fluvial) presque partout séparé (Mandelbrot, 1975, p.123-125), l'effet de rognures en forme de bande représentant un plan de ville aux rues aléatoires (idem, p.64-69), la modélisation de quelques phénomènes de distributions aléatoires suggérant une possible application à la modélisation de phénomènes urbains caractérisés par une distribution spatiale de densités.

Si la géométrie fractale, vingt années plus tard, reste d'un usage peu fréquent dans le domaine des sciences quantitatives de la ville, alors que d'autres champs tels que la physique des solides, la physique des liquides, l'imagerie de synthèse, les mathématiques appliquées en ont fait et en font un usage notoirement plus conséquent, il convient malgré tout de s'interroger sur la portée réelle de cette géométrie et ce au delà de son aspect descriptif afin de cerner les avancées cognitives obtenues.

Notre propos n'est pas d'esquisser une critique générale de la portée de cette théorie pour les quelques domaines des sciences de la ville où elle est utilisée. Nous le restreindrons au domaine plus particulier des réseaux techniques où depuis peu d'années cette théorie a fait l'objet de quelques applications.

Cette critique devrait conduire à préciser l'intérêt de cette branche des mathématiques pour la recherche urbaine quantitative alors que quelques écrits plus ou moins récents font état de considérations qui certes pertinentes, proposent quelques extensions conceptuelles plus ou moins fondées. Quoiqu'il en soit, c'est l'ensemble des questions posées par l'usage de cette théorie qu'il convient de formuler, cet usage reflétant quelques uns des aspects théoriques actuels de la connaissance des réseaux techniques urbains, quelques aspects de la connaissance des relations qui unissent réseaux et milieu urbain, tels que le problème de la co-organisation entre réseau et ville souvent décliné en terme d'effet, de structuration etc.<sup>(1)</sup>

---

<sup>(1)</sup> En ce qui concerne le thème des effets réseaux souvent abordés par la notion d'effets structurants à propos de la relation des réseaux au milieu urbain environnant, nous invitons le lecteur à lire le texte de J.M. Offner intitulé "les effets structurants du transport urbain: mythe politique, mystification scientifique" (L'espace géographique n°3, 1993, p.233-242) qui démystifie le thème et en dessine les multiples contours sociaux.

## GEOMETRIE ET ANALYSE URBAINE

A la suite des quelques exemples proposés par Benoît Mandelbrot, l'emploi de la théorie de la dimension fractale est certaine depuis les années 1980-1985, la dizaine d'années écoulées depuis la date d'édition du premier ouvrage sur cette théorie étant peut-être caractéristique d'un phénomène de diffusion et d'assimilation des idées parmi la communauté scientifique. En ce qui concerne les sciences de la ville, ce retour de la géométrie, puisque c'est de cela qu'il s'agit sur le plan des mathématiques, illustre un certain renouveau des idées galiléennes et cartésiennes concernant cette science (M. Blay, 1993) <sup>(2)</sup>. En effet cette théorie a été élaborée afin de pouvoir comprendre la forme et la structure de configurations qui présentent une organisation spatio-temporelle en apparence compliquée voire complexe, chaotique.

La modélisation de l'espace urbain en tant que tel par quelques approches issues de la géométrie avait d'une certaine façon disparu, si tant est qu'elle existât, au profit des sciences de l'analyse. De ce fait, les termes du discours sur les formes géométriques de l'espace urbain relèvent d'une rare indigence. Ils font appel aux figures emblématiques de la géométrie euclidienne et qui sont des figures d'ordre, le cercle avec la notion dérivée de centre périphérie, la ligne, notion utilisée à propos des réseaux, etc.

La prégnance actuelle de la théorie des systèmes, de la théorie des graphes, de la modélisation de quelques phénomènes urbains par la recherche d'opérateurs algébriques adéquates, est caractéristique du poids des sciences de l'analyse mathématique dans la recherche urbaine et ce au détriment de la géométrie.

Rappelons que par le biais de la théorie des systèmes, la ville est définie comme étant une organisation plus ou moins complexe et plus ou moins a-spatialisée de parties, formant un tout et dont les états et les dynamiques peuvent être formulés à partir de quelques systèmes différentiels (Lung, 1987, Pumain, Sanders, Saint Julien, 1989)<sup>(3)</sup>.

La dimension spatiale de la ville n'est présente que par l'usage de la distance reliant deux parties du système urbain et si cette grandeur est l'une des variables caractéristiques de l'état et de l'évolution du rapport entre les parties. Ce n'est pas

---

<sup>(2)</sup> Il est frappant de remarquer l'absence de la géométrie dans les sciences quantitatives de la ville voire tout un pan des sciences sociales et humaines, plus préoccupées par le fonctionnement, les structures autres que spatiales de quelques systèmes urbains, que par les formes sur et avec lesquelles s'organisent ces structures et fonctionnements. A contrario, il convient bien évidemment de souligner la présence de la représentation de la forme dans les sciences et pratiques ayant pour objet la production de la ville (architecture, ingénierie, urbanisme etc.)

<sup>(3)</sup> Cette voie fort importante de la recherche urbaine quantitative et principalement développée par la géographie et l'économie urbaine a engrangée dans son évolution théorique tout les développements des sciences de la complexité. C'est ainsi que la systémique urbaine est passée en très peu d'années de modèles "simples" (modèles de type logistique par exemple, réseau de processeurs du modèle de Forrester) à l'utilisation de la théorie des systèmes dissipatifs de Prigogine, à l'utilisation de la théorie des catastrophes de R. Thom.

la forme urbaine en tant qu'objet de la dynamique urbaine qui fait lieu de représentation mais quelques grandeurs algébriques simples plus ou moins représentatives de la géographie urbaine.<sup>(4)</sup>

Lorsque la référence à l'espace est plus marquée, celui-ci est défini à l'aide de la géométrie euclidienne. Il en est ainsi des modèles de distribution spatiale qui tout en étant des modèles algébriques, sont basés sur des distributions de type circulaire à partir d'un centre. Les modèles représentant la distribution spatiale des densités de populations ( $p(r)$ ) comme le modèle de Clark's (Batty, 1992),  $p(r)=K*e^{(-a*r)}$ , sont caractéristiques de ce fait.

La théorie des graphes, lorsqu'elle est utilisée pour représenter quelques phénomènes d'essence spatiale, n'échappe pas à la prédominance de l'analyse sur la géométrie. Tout en étant basée sur la représentation d'un réseau de relations entre parties, elle débouche d'un point de vue opératoire sur le calcul matriciel sans aborder quelques questions concernant la définition de l'espace sur lequel se déploient les relations entre parties autre que la valuation de ces relations (5).

Par rapport à cette prédominance des sciences de l'analyse, l'emploi de la théorie de la dimension fractale en recherche urbaine traduit une ouverture et un retour certain du spatial en tant qu'objet dont la structure et les propriétés ne sont pas nécessairement définissables à partir de la seule géométrie euclidienne. C'est également une invitation à considérer le rôle que peut jouer l'espace dans l'organisation de la ville.

Ce retour de la géométrie fut concomitant d'un renouvellement de l'imagerie urbaine introduit par l'usage de l'informatique en tant qu'outil de mémorisation et de traitement d'informations. L'apparition des systèmes d'information géographique et des systèmes apparentés n'est pas neutre par rapport à l'émergence de la figure et de la forme en tant qu'objets de connaissance et outils de l'action. Ce ne fut peut être pas tant l'image en tant que telle qui fut le support de la novation que l'accès immédiat à tout un ensemble d'informations caractéristiques de l'espace urbain. La création des bases de données a autorisé le développement de l'analyse spatiale qui débouchera en particulier sur l'usage de la théorie de la dimension fractale.

Le relatif succès de cette théorie en recherche urbaine est probablement due à plusieurs facteurs. Il y a bien sûr les tentatives toujours renouvelées et quelques soit les domaines concernés, de tester la portée scientifique d'un nouveau

---

<sup>(4)</sup> La référence au modèle gravitaire newtonien pour construire tout un ensemble de modèles traduisant les relations entre deux parties de l'urbain est une illustration évidente du poids de l'approche algébrique-analytique dans la recherche urbaine; l'espace est abordé à partir des figures du plan, du cercle, chaque point pouvant être atteint à partir de n'importe quel point.

<sup>(5)</sup> Cependant, il convient de souligner l'importance de cette branche des mathématiques pour la recherche urbaine et l'élaboration d'outils informatiques d'aide à la décision qui se développent pour l'analyse et la conception de quelques réseaux techniques urbains tels que les réseaux de transport. G. Dupuy a posé les principes de l'emploi de cette théorie (Dupuy, 1987 et 1991) également utilisée par tout un ensemble de chercheurs tel que P. Mathis à propos de la modélisation de la structuration de l'espace par les réseaux de transport interurbain selon une visée multimodale (Mathis,1993).

paradigme. Cela permet pendant un certain temps le développement de l'innovation scientifique. Il y a surtout la réémergence de l'image et plus particulièrement de la forme qui de simple support (illustratif) est devenue l'objet d'un développement de la connaissance scientifique.

Le dernier facteur que nous aborderons en ce texte est la relative simplicité de l'outillage mathématique ayant servi à la constitution de la théorie.<sup>(1)</sup>

Ce sont quelques lois simples telles que la distribution hyperbolique, les probabilités, quelques principes géométriques suffisamment connus tels que le principe d'homothétie qui sont mis en oeuvre. En outre, cette théorie qui innove en matière de géométrie et qui fait partie du champ des sciences du désordre et de la complexité, permet la réinterprétation, la relecture de quelques uns des modèles déjà utilisés en recherche urbaine et issus de l'analyse différentielle tels que les modèles allométriques ou modèles de type "puissance" <sup>(7)</sup>

## FRACTALS ET RECHERCHE URBAINE

Avant d'aborder le cas des réseaux techniques urbains, nous rappellerons mais sans caractère d'exhaustivité que la théorie de la dimension fractale a été principalement utilisée à ce jour dans trois domaines.

Le premier que nous citerons concerne l'évolution spatiale de quelques grandeurs quantifiées par leur densité.

Par exemple et ce depuis le début des années 1950, la distribution spatiale de la population est modélisée à partir d'un modèle exponentiel, comme l'a proposé Clark's, et de la forme  $p(r)=k*\exp(-a*r)$  avec  $p(r)$  densité à une distance  $r$  du centre considéré,  $k$  et  $a$  étant deux coefficients (Batty, Sim, 1992).

Pour Gangnet (Gangnet, 1978), ce modèle correspond à la résolution d'un problème économique caractérisé par la continuité des variables et l'usage d'une fonction coût, le coût de localisation étant proportionnel à la distance du site par rapport au centre considéré.

Au cours des années 1960, Smeed cité par Batty (Batty, Sim, 1992) propose pour modéliser le même phénomène, le modèle "puissance" (conférer note sept). Le rapprochement avec la théorie de la dimension fractale conduit à formuler le modèle comme suit;  $p(r)=g*r^{(D-2)}$  avec  $D$  dimension fractale de l'espace de

---

<sup>(1)</sup> Depuis la parution de l'ouvrage de Benoît Mandelbrot en 1975, cette théorie de la dimension fractale a fait l'objet de nombreux développements mathématiques qui s'éloignent de la relative simplicité que présentait initialement cette théorie. L'émergence de la notion de dérivée non entière en est une illustration. On pourra par exemple se reporter à l'ouvrage récent de A. Le Méhauté (Le Méhauté, 1990) qui présente les développements de cette géométrie.

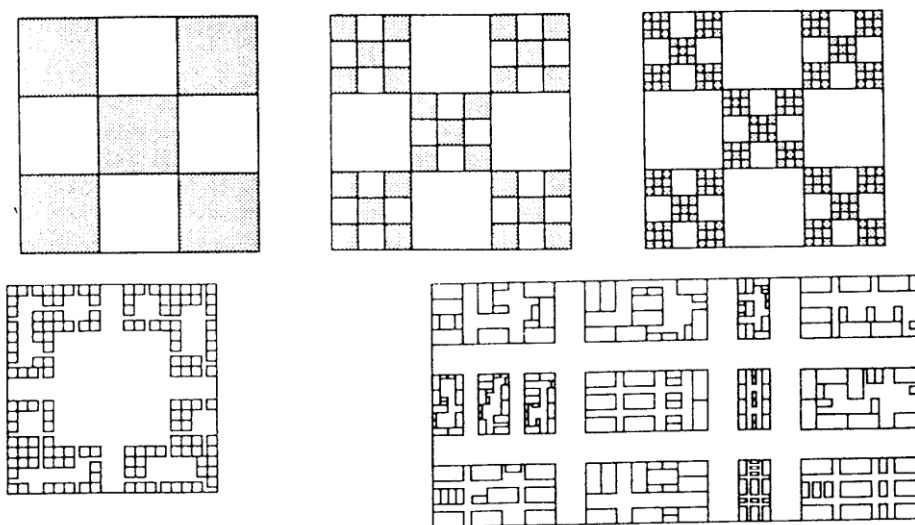
<sup>(7)</sup> Nous pensons en particulier aux modèles de densités urbaine de la forme  $p(r)=k*r^{(-a)}$ ,  $p$  étant une densité,  $r$  une distance et  $a$  un exposant. Ce type de modèle correspond pour Bertalanffy aux configurations qui s'élaborent à partir du principe de compétition entre parties; "l'équation allométrique s'applique à un large ensemble de données morphologiques, biologiques, physiologiques et phylogénétiques. Elle signifie qu'une certaine caractéristique  $Q1$  peut s'exprimer comme une fonction puissance d'une autre caractéristique  $Q2$ ." (L.V. Bertalanffy, 1973, p.62)

localisation. Les auteurs de ce rapprochement n'hésitent pas à évoquer l'émergence d'une nouvelle physique sociale, la ville étant une forme fractale et non plus un plan euclidien de dimension deux (in Batty et Sim, 1992, p.1054).

Si le modèle de Clark's est avant tout un modèle descriptif d'un phénomène de localisation, il devient le résultat d'un modèle explicatif lorsqu'il est entendu comme solution d'un problème économique.

En ce qui concerne le modèle "puissance", on peut considérer que l'apport de la géométrie fractale est d'ordre explicatif si l'on considère que la distribution observée est le résultat d'un processus d'agglomération que l'on peut simuler à l'aide d'un processus plus ou moins simple de diffusion limitée.

Le second domaine que nous évoquerons concerne la représentation de la forme de l'espace bâti. P. Frankhauser à partir de l'exemple du tapis de Sierpinski, extension en deux dimensions de l'ensemble triadique de Cantor (Mandelbrot, 1975 et Favard, 1950), construit un processus de croissance fractale donnant des résultats qui s'apparentent fort aux formes observées de quelques tissus urbains.



*Fig. 1 Tapis de Sierpinski et tissus urbains obtenus par simulation (Frankhauser, 1991)*

Là encore, le passage du descriptif à l'explicatif est obtenu par l'usage et la mise en oeuvre du modèle de diffusion limitée pour simuler tant la forme que la croissance du tissu urbain, ce modèle de diffusion étant complété à cette occasion par un modèle probabiliste de transition permettant de gérer le passage d'un site d'un état de non occupation à un état d'occupation (Frankhauser, 1991).

Le dernier domaine que nous évoquerons concerne les réseaux techniques urbains. Ce sont principalement les réseaux d'assainissement, les réseaux de voiries, et les réseaux de transport qui ont fait l'objet d'une modélisation de leur morphologie à l'aide de la géométrie fractale (Thibault, 1987-1991, Thibault et Marchand, 1987, Frankhauser, 1990-1992-1994, Benguigui et Daoud, 1991).

Cette géométrie de la dimension non entière s'est révélée un puissant outil conceptuel pour représenter en tant que forme globale ce qui n'est qu'un

agencement de lignes et de courbes de dimension un chacune, selon la théorie euclidienne.

S'il ne faut pas mésestimer l'ampleur de ce saut conceptuel, il convient de mieux cerner l'apport de cette théorie au delà de la question de la description.

## **FRACTALS ET MORPHOLOGIE DES RESEAUX TECHNIQUES URBAINS**

*"...la dimension non entière, élément clé de la géométrie fractale, est directement associée à la manière que nous avons d'évaluer notre espace, d'en mesurer les contours et d'en "peser" le contenu". (Le Méhauté, 1990 p.23)*

Selon les principes de la géométrie euclidienne, toute forme a une dimension entière, celle de la figure (point, ligne, plan,...) qui lui est en correspondance biunivoque et bicontinue (Favard, 1950).

La dimension euclidienne est donc un invariant, caractéristique d'une classe de formes.

Un réseau tel qu'un réseau de voiries, d'assainissement, de gaz etc., ne peut pas être dimensionné en tant que forme globale à partir de l'approche euclidienne si ce n'est pour affirmer qu'un réseau est une organisation plus ou moins compliquée de lignes de dimension unitaire chacune, ou pour dire qu'une telle forme se déploie dans un espace support de dimension deux ou trois.

Il n'est donc pas étonnant que le réseau fut, jusqu'à l'émergence de la géométrie fractale, défini comme étant un système de relations (modélisable par la théorie des graphes) sans exister en tant que forme géométrique entière.

La géométrie fractale permet de caractériser n'importe quelle forme, non plus par une démarche de type analogique, mais par une mesure propre du contenu, du contour, caractéristique de la forme étudiée.

L'application des fractals à la modélisation d'un réseau technique urbain porte d'abord sur la définition géométrique de sa morphologie, entendue comme étant la forme qui résulte de la mise en relation par tout un ensemble de lignes d'un ensemble de nœuds.



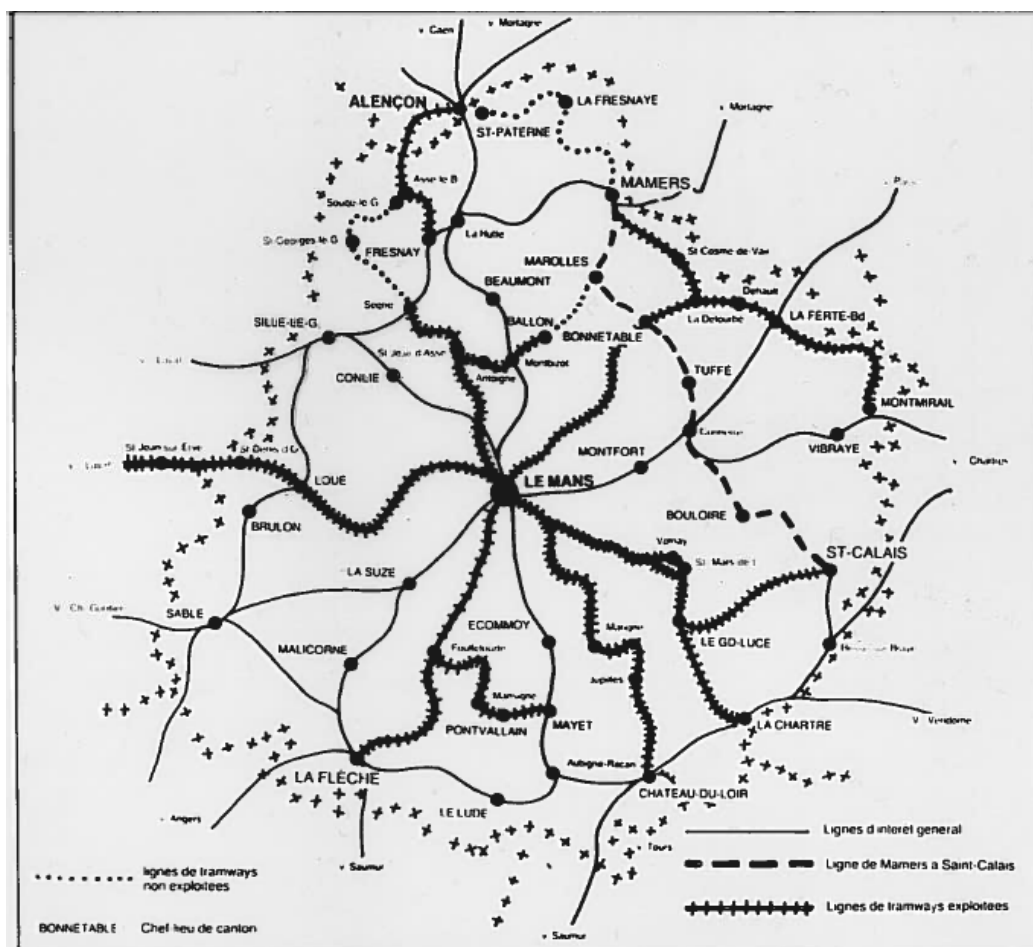
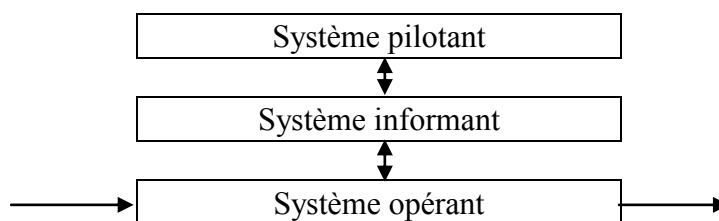


Fig. 2 réseau d'intérêt local (Sarthe 19<sup>ème</sup> siècle)

Cette mise en relation d'un ensemble de nœuds par un ensemble de lignes forme un espace qui peut être dimensionné à partir de son extension spatiale ou spatio-temporelle; c'est la composante infrastructurelle du réseau qui fait l'objet d'une mesure et d'une modélisation géométrique.

Ainsi un réseau de voiries est représenté par son organisation spatiale de rues, de routes, etc. Un réseau de gaz ou d'assainissement est une organisation de canalisations. Un réseau de transport est identifié à son réseau support sur lequel circulent les flux.

Ce travail de modélisation géométrique conduit à simplifier ou plus exactement à réaliser une coupure parmi l'ensemble des parties constitutives d'un réseau. En effet si l'on emprunte l'approche développée par J.L. Le Moigne à propos de la modélisation des systèmes complexes (Le Moigne, 1990) un réseau technique est constitué de trois sous-systèmes. L'infrastructure du réseau est le système opérant le transfert d'un flux par stockage, transformation et déplacement. Les modalités de ce transfert dépendent de la configuration de l'infrastructure et de l'état d'un ensemble de mécanismes de commande (vannes par exemple) qui peuvent être gouvernés par un système de pilotage via un système d'information qui construit et transmet des informations entre le système de commande et de décision et le système opérant.



*Fig. 3 Architecture du système P.I.O.*

Ce type de système permet de gérer au mieux l'organisation et le fonctionnement de l'infrastructure d'un réseau. Il correspond à l'architecture des systèmes de gestion en temps réel qui se sont beaucoup développés ces dernières années dans le domaine de l'ingénierie urbaine. Pour mémoire, citons les deux exemples classiques suivants:

\* l'infrastructure routière urbaine est le support d'un ensemble de réseaux de transport. L'écoulement des flux est régulé par un système de "vannes" (feux tricolores préprogrammés par exemple) et la structure de ces réseaux peut être organisée en temps réel en fonction des flux qui y transitent.

\* la tendance à la régulation automatisée du fonctionnement des réseaux de tout à l'égout se développe dans les grandes agglomérations par la mise en place de systèmes de pilotage et de systèmes informants qui agissent sur quelques composants techniques de l'infrastructure tels que les vannes, les déversoirs etc.

La seule modélisation de la morphologie du réseau support correspond donc à une modélisation d'un sous-ensemble du réseau comme nous venons de le définir.

Elle peut répondre à quelques finalités spécifiques basées sur la représentation de la morphologie du réseau. L'aspect fonctionnel du réseau support peut être plus ou moins pris en compte en utilisant une unité de mesure qui caractérise les aspects dynamiques de ce réseau en tant que processeur de flux.

Ainsi la morphologie d'un réseau de voiries, d'un réseau de tout à l'égout ou d'un réseau de circulation d'informations sera définie de façon différente si l'on utilise une unité de mesure caractéristique de l'emprise spatiale et si l'on utilise une unité de mesure qui caractérise quelques aspects du transfert de flux qui a lieu dans le réseau <sup>(2)</sup>.

L'approche géométrique abordant le seul aspect infrastructurel, son usage conduit à définir initialement l'unité de mesure correspondant à la caractéristique du réseau support que l'on veut quantifier. S'intéresse-t-on uniquement à la dimension

<sup>(2)</sup> En ce qui concerne le réseau téléphonique, la différence est frappante entre une description basée sur l'espace et une description basée sur le temps. En effet, en négligeant les temps d'accès au réseau, la vitesse de transfert de l'information est telle que la distance séparant deux nœuds de communication est quasi nulle. A partir de ce seul aspect fonctionnel, ce réseau se résorbe en un espace point de dimension nulle, illustrant l'impression de proximité immédiate donnée par l'usage de ce type de réseaux techniques.

spatiale de l'infrastructure ou s'intéresse-t-on à l'aspect spatio-temporel illustrant le couplage entre la dimension spatiale de l'infrastructure et la dimension temporelle des phénomènes dynamiques qui s'y déploient ?

Il n'y a pas de réponses hors du champ de finalités de la modélisation <sup>(3)</sup>.

En ce qui concerne les réseaux techniques urbains, la définition de leur morphologie par la géométrie fractale n'est pas unique. Il existe deux grandes voies pour la définir. Ces voies se rapportent à l'existence de deux types de réseaux, les réseaux de distribution ou d'évacuation et les réseaux d'échange. Ces voies illustrent également deux façons de voir un même réseau.

### **Morphologie des réseaux de distribution ou d'évacuation.**

Ces réseaux sont structurés par la prédominance d'un ou plusieurs nœuds, nœuds "source" ou "puits" sur l'ensemble des autres nœuds du réseau. Le nœud "source" est le nœud émetteur du flux distribué aux nœuds du réseau. Il en est ainsi pour les réseaux techniques de distribution tels que les réseaux eau, gaz, électricité etc. Le nœud "puits" est le nœud récepteur des flux émis par l'ensemble des nœuds d'un réseau. Il en est ainsi pour les réseaux de collecte tels que les réseaux de drainage, d'évacuation de déchets etc.

Cette prédominance d'un nœud sur l'ensemble des nœuds conduit à définir la morphologie d'un réseau à partir du ou des nœuds "source" ou "puits" qui sont de ce fait centraux.

La technique de dimensionnement de ce type de réseau revient à vérifier si numériquement son développement spatial à partir du nœud central est suffisamment bien approximé par une loi de type "puissance" et de la forme:

$$C(u) = a \cdot u^D$$

avec  $u$  "longueur" du rayon de la boule centrée sur le nœud "source" ou "puits" et  $C(u)$ , contenu, défini avec la même unité que  $u$ , du réseau présent dans la boule. Si  $u$  est une mesure spatiale de longueur,  $C(u)$  est la longueur totale du réseau contenu dans la boule de rayon  $u$  (Thibault, 1991).  $D$  est alors la dimension (non entière en règle générale) du réseau considéré.

Cette relation entre contenu et contenant est allométrique pour les réseaux qui résultent de la mise en oeuvre du principe d'homothétie <sup>(4)</sup>. L'exposant est alors voisin de la dimension d'homothétie  $D$ , caractéristique du processus de génération du réseau. La relation suivante illustre le rapport entre contenu et contenant:

---

<sup>(3)</sup> Cette question n'est pas propre à la seule géométrie fractale. C'est une question générale et préalable à tout problème basée sur la description géométrique d'un réseau. Elle est abordée en théorie des graphes par le problème de la valuation des arcs reliant les nœuds d'un réseau.

<sup>4</sup> Le principe d'homothétie consiste à remplacer à chaque étape de génération d'un réseau tout les segments par une même figure. Pour ce faire, tout segment est transformé en un réseau de  $N$  segments, chacun d'eux étant d'une longueur égale à  $r$  fois celle du segment remplacé; ce dernier peut éventuellement faire partie du réseau créé. La dimension d'homothétie est définie par le rapport entre nombre de parties créées et coefficient de réduction,  $D = \ln(N) / \ln(1/r)$ .

$$L(R) = a \cdot l(1-D) \cdot R^D$$

avec L longueur du réseau contenu dans une boule de rayon R centrée sur le nœud origine, l longueur moyenne des tronçons du réseau, D dimension d'homothétie et a coefficient s'apparentant au nombre de réseaux de dimension D se joignant au nœud origine (Thibault, 1987 et 1991).

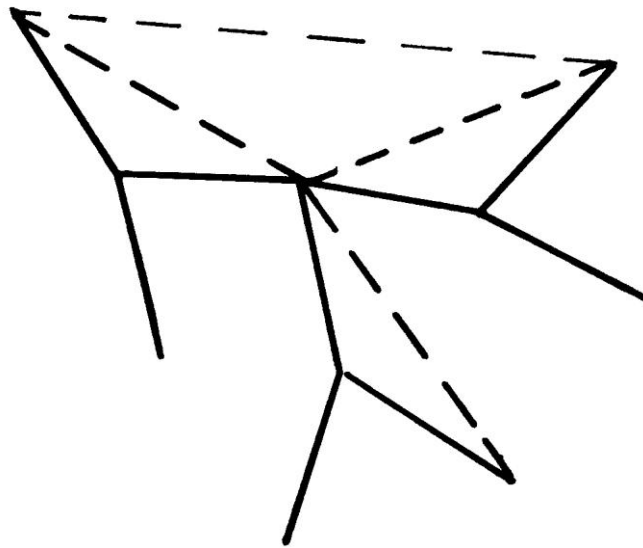


Fig.4: réseau obtenu à la seconde itération par un principe d'homothétie;  $D=1.84$

Ce modèle reliant contenu et contenant est un modèle de localisation spatiale par un réseau d'un ensemble de nœuds à partir d'un nœud central. Il est du même type que le modèle de Smeed représentant l'évolution de la densité de la population à partir d'un centre ville (Batty, 1992 et conférer note sept). La dimension qui caractérise ces types de distribution est une dimension de localisation.



Fig. 5 Cas du réseau d'assainissement de la commune de Décines (région lyonnaise);  $L(R) = n \cdot l(1-D) \cdot R^D$ .  $D=1.58$ .

## Morphologie des réseaux d'échange

A la différence des réseaux précédents, le flux circule en général dans les deux sens sur chacune des lignes du réseau. En termes de fonctionnement, chaque nœud est à la fois émetteur et récepteur de flux. Il en est ainsi pour les réseaux de voiries et les réseaux de transport de biens et d'individus. Cela ne veut pas dire que ces réseaux ne sont pas hiérarchisés au sens de la théorie des graphes, et qu'en termes d'accessibilité par exemple, certains nœuds ne soient pas plus centraux que d'autres. Ce type de caractérisation topologique ne résulte pas de l'usage de la théorie de la géométrie fractale. Il est cependant possible de représenter par un modèle de localisation spatiale de type allométrique, comme nous l'avons défini précédemment, la distribution des nœuds d'un réseau d'échange à partir d'un nœud particulier dont le caractère de centralité serait le résultat de considérations complémentaires. Ainsi la morphologie d'un réseau de voiries ou de transport en commun peut être caractérisé par une dimension non entière, définie par la relation entre contenu et rayon à partir d'un centre retenu comme tel;  $C(u)=a*u^D$ .



Fig. 6 : distribution des routes principales arrivant au centre du Mans y compris la rocade:  $L(R) = 7 * R^{1.30}$  avec  $L$  longueur totale du réseau contenu dans un cercle de rayon  $R$  et en ne tenant compte que des sorties principales et la rocade.

En dehors de cette application particulière de la géométrie fractale, la dimension d'un réseau d'échange est définie à partir d'un principe de recouvrement ou de pavage. Le principe consiste à inclure le réseau considéré dans une surface initiale le contenant en totalité, puis à effectuer une suite de partitions de cette surface en surfaces élémentaires de plus en plus petites et à compter par exemple pour chaque éléments de la suite, les surfaces élémentaires atteintes par le réseau considéré. On obtient alors une suite de couple  $(N(u),u)$  avec  $u$  grandeur caractéristique des surfaces élémentaires et  $N(u)$  nombre de ces surfaces atteintes par le réseau.

Nous dirons alors que le réseau est une figure fractale si la relation  $(N(u),u)$  est correctement approximée numériquement par un modèle de type puissance soit:

$$N(u)=a*u^D$$

avec  $D$  dimension de contenu.

Généralement la grandeur  $u$  est définie comme étant l'inverse du taux de réduction entre la surface initiale et l'élément surfacique de chaque étape de la suite mise en oeuvre. En utilisant ce type de grandeur, seule la distribution spatiale du réseau est prise en compte, et non pas quelques aspects liés à la dynamique des flux qui y circulent.

Lorsque l'on met en oeuvre ce type de mesure pour caractériser la morphologie spatiale d'un réseau d'échange, la suite des taux de réduction est bornée par une valeur minimum correspondant à la plus petite surface que l'on peut raisonnablement prendre en compte.

Cette technique de mesure, relativement simple à mettre en oeuvre, peut à l'usage présenter quelques défauts. En effet, la suite des valeurs ( $u$ ) est une suite discrète et non pas continue. La suite  $N(u)$  peut présenter des sauts numériques conduisant à des erreurs d'approximation trop élevées. Pour palier à ce défaut, on préconise une technique de mesure basée sur le calcul de la surface minimum qui recouvre le réseau, obtenue par des bandes dont les largeurs successivement peuvent être pratiquement continues (Le Méhauté, 1991).

Cette technique n'a pas été mise en oeuvre pour les quelques exemples qui suivent, Les couples  $(N(u),u)$  étant correctement approximés par un modèle allométrique, avec  $u$  inverse du taux de réduction.

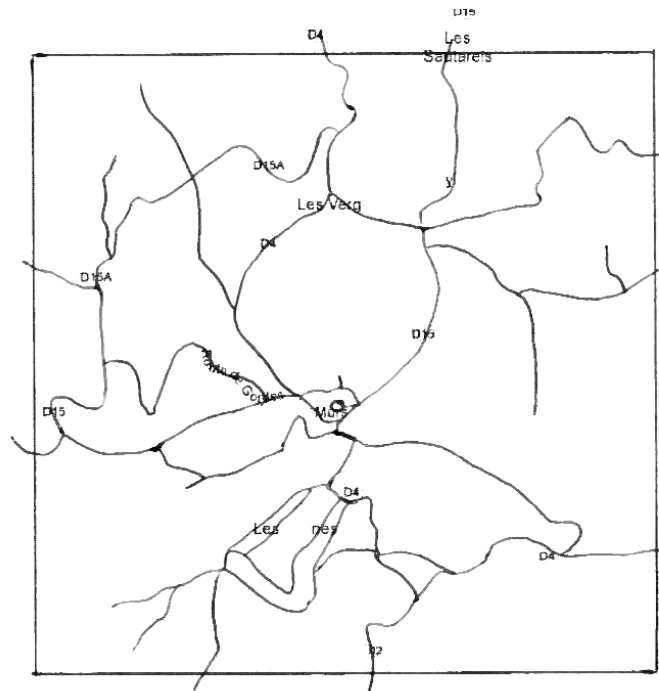


Fig. 7 réseau de voiries autour de la commune de Murs dans le Vaucluse; 300 habitants.  $N(r)=1.38*(1/r)^{1.58}$  avec  $r$  variant de 1 à  $1/48$ .



Fig.8 Réseau de voiries de la commune de Montlouis (Indre et Loire), 8300 habitants.  $N(r)=1.15*(1/r)^{1.8}$  pour  $r$  variant de 1 à  $1/24$ .

Dans le cas particulier des réseaux qui résultent de la mise en oeuvre du principe d'homothétie présenté précédemment, la dimension de contenu correspond encore

à la dimension d'homothétie si la mesure du contenu consiste à dénombrer à chaque étape du processus de construction, le nombre de segments obtenus avec un taux de réduction  $r$  (cf. note 10).

Que le réseau soit d'échange, de distribution ou d'évacuation, ou qu'il soit abordé comme tel, le dimensionnement de sa morphologie ne peut être raisonnablement réalisé que si sa densité n'est pas trop grande. En effet si l'on considère la totalité d'un réseau de voiries, d'un réseau de tout à l'égout, de gaz etc., d'une grande agglomération urbaine, l'application des méthodes de mesure que nous venons d'évoquer conduirait nécessairement à une dimension égale à deux. Comme cela est vrai quelque soit l'agglomération considérée, une telle approche est peu significative.

En fait, comme pour toute activité de description et d'observation, il convient de définir au préalable le niveau pertinent d'organisation du réseau qui convient à l'observation que l'on veut mener.

En ce qui concerne les réseaux pré-cités (et si la visée est comparative par exemple), il convient de choisir parmi la totalité du réseau le sous-ensemble pertinent au regard de l'observation. Ce n'est pas en règle générale la géométrie fractale qui permet de choisir le niveau d'organisation pertinent sauf dans le cas bien improbable où la structure du réseau serait le résultat de la mise en oeuvre d'un principe homothétique qui hiérarchise les tronçons du réseau.





*fig.9: réseau de voiries de la ville de Munich (source Agence d'Urbanisme de la Communauté Urbaine de Lyon)*

En résumé, le dimensionnement d'un réseau technique urbain au sens de la géométrie fractale nécessite de répondre initialement aux trois questions suivantes:

- \* quel niveau d'organisation du réseau veut-on modéliser ?
- \* quel est le type du réseau ou sous quel angle veut on le voir (échange, distribution et évacuation) ?
- \* quelle est l'unité de mesure pertinente au regard de la finalité de la modélisation ?

## **FRACTALS ET CROISSANCE DES RESEAUX TECHNIQUES**

Certains ont avancé que l'application de la géométrie fractale à la modélisation de quelques aspects des réseaux techniques urbains conduisait à soutenir la thèse

d'une croissance endogène de leur organisation. Cette propriété traduit la tendance qu'aurait un réseau technique urbain à proliférer spatialement <sup>(5)</sup>. Si cette lecture des travaux effectués à partir de la géométrie fractale (Offner,1993) n'est pas dénuée de fondements, il convient cependant d'en atténuer le contour et de préciser l'apport des fractales à la question de la compréhension du développement des réseaux sachant que la géométrie ne peut raisonnablement aborder que des questions d'ordre spatial. Il convient donc de ne pas mélanger ce niveau d'organisation avec d'autres niveaux tels que ceux qui sont décrits à partir d'une approche qui s'apparente à une génétique des organisations et utilisant en particulier des schémas basés sur le cycle naissance, vie et mort. La thèse du développement endogène étant défendue à partir de considérations spatiales, elle n'est pas nécessairement contradictoire si tant est qu'elle présente quelques aspects pertinents, avec d'autres thèses, telles que celle basée sur la notion de cycle de vie, puisqu'en toute logique se sont deux niveaux distincts de description. C'est le problème de la contradiction entre ces deux niveaux particuliers qu'il conviendrait d'aborder afin de réfuter totalement ou partiellement les thèses en présence.

Le domaine de la croissance spatiale des réseaux techniques urbains n'a jusqu'à ce jour pas été beaucoup développé si ce n'est par le truchement de la question de la croissance de l'espace urbain qui contient tout ou partie des réseaux techniques urbains.

En terme macro-spatiale, il nous semble que le traitement de cette question de la croissance de l'espace urbain repose en grande partie par l'usage de deux approches qui font figure de métaphores (Il conviendrait d'affiner cette proposition par quelques recherches complémentaires).

La première est d'ordre biologique. La ville est perçue comme s'apparentant à un système "vivant" ouvert sur son environnement. La croissance de l'espace est abordée à partir de l'emploi des quelques images fortes et clairement significatives que sont les notions de tissu, texture, pour caractériser le contenu du "corps" urbain, la notion de greffe pour caractériser un développement ex nihilo par exemple, la ville ayant la capacité tout biologique de phagocyter son environnement immédiat.

A partir de cette image biologique, les réseaux techniques urbains ne sont pas dissociés en tant qu'effecteur de la croissance, du reste de la ville. Ce sont des vaisseaux et artères qui irriguent le "corps" social de la ville.

La seconde est issue des sciences de l'ingénierie et emprunte plus largement les voies de l'approche mécaniste. L'espace urbain est un objet qui présente nécessairement une structure qui façonne et maintient l'objet. Les réseaux

---

<sup>5</sup> Endogène: "qui est produit par quelque chose en dehors de tout apport extérieur" (Petit Larousse-1993). Les réseaux n'ayant pas la capacité de se développer tout seul, vouloir user de cette qualification et de son contraire nécessite en toute rigueur de formaliser au préalable un système de production des réseaux. La qualité retenue sera l'une des caractéristiques du système de production retenu sachant qu'en considérant un système englobant, il peut y avoir inversion de la qualité. Quoiqu'il en soit, l'usage courant de ce qualificatif traduit un phénomène de croissance qui semble se développer inexorablement.

techniques tels que les réseaux de déplacement, réseaux de voiries etc., peuvent être appelés à jouer pour cette approche le rôle de structure. Et c'est probablement en référence à cette métaphore mécanique qu'est posé le problème des effets structurants engendrés par les réseaux, le développement de la ville étant lui même conçu à partir de la définition d'une structure réticulaire sur laquelle seront articulés les différents composants de l'objet ville.

Les approches qui empruntent des chemins issus de la biologie et de la mécanique n'ont pas pour finalité stricte la modélisation de la croissance spatiale des réseaux techniques urbains. Elles peuvent cependant concourir à articuler croissance du milieu et croissance des réseaux.

La modélisation de quelques aspects des réseaux techniques par la géométrie fractale nous incite à aborder les questions de l'apport de cette géométrie à la modélisation de la croissance des réseaux techniques urbains. Cette question est d'autant plus pertinente que cette géométrie, tout en ayant pour objet la mesure du contenu de formes en apparence complexes, utilise la notion de dimension qui caractérise certes le résultat d'un processus de mesure mais également peut caractériser un processus de génération de forme. Et c'est à ce titre que se pose la question de l'apport de cette géométrie à la compréhension des processus de croissance de réseaux.

La dimension d'homothétie que nous avons déjà présentée (Cf. note 10) en est l'illustration la plus simple. Les travaux de P. Frankhauser sur la question de la forme de quelques tissus urbains reconstruits artificiellement à partir de processus voisins de celui générant le tapis de Sierpinski en est une autre illustration (Frankhauser, 1991).

C'est bien la question des processus de création de formes complexes qui est au cœur de la géométrie fractale. Cependant en ce qui concerne les réseaux techniques urbains, il ne faut pas en conclure hâtivement que ces objets se développent spatialement de façon endogène, qualité que nous définirons comme étant la répétition plus ou moins stricte d'un même processus, paramétré par quelques variables internes au territoire réseau considéré.

Pour appuyer ce propos, reconsidérons deux processus classiques utilisés par la géométrie fractale et qui illustrent la genèse d'une forme complexe.

Le premier, basé sur le principe de l'homothétie, est un processus répétitif et d'ordre. Pour le mettre en oeuvre, deux données premières sont nécessaires; d'abord une forme initiale (un point, une ligne etc) à partir de laquelle sera construit un réseau avec le couple  $(N,r)$ ,  $N$  étant le nombre de segments ou parties remplaçant un segment ou partie initial selon un taux de réduction  $r$  (Cf. note 10). La dynamique mise en oeuvre pour générer un réseau est certes un processus de type endogène mais qui se développe sur une structure initiale donnée.

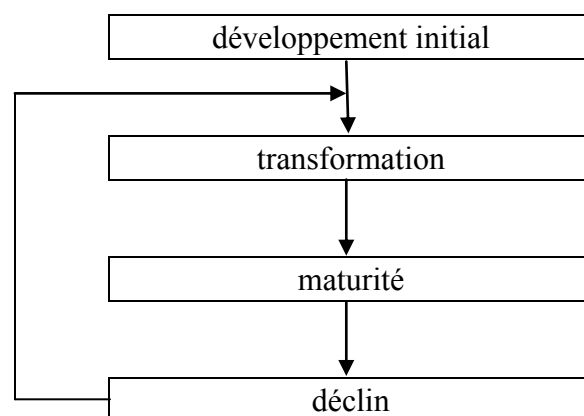
Il en est de même avec le processus de diffusion limitée qui illustre la création d'un certain ordre à partir d'un processus aléatoire. Le modèle de base consiste à déplacer un segment ou module selon un cheminement de type brownien, le mouvement du segment ou module s'arrêtant lorsqu'il sort de l'espace considéré ou lorsqu'il atteint la forme déjà constituée.



de ramification par homothétie (statistique) ou par diffusion limitée (cf. figure n°7).

A partir de cette simple analogie, le développement spatiale d'un réseau technique urbain est au moins le résultat du couplage présenté, les deux processeurs étant à la fois liés et indépendants. En effet, l'évolution de la structure de base peut être le résultat de considérations propres au réseau qui s'est déployé à partir et autour de cette structure première, telles que l'amélioration des accessibilités au sein de la ville en ce qui concerne les réseaux de déplacement (facteur interne) et pour ces même réseaux, l'amélioration des relations avec l'environnement de la ville (facteur externe).

Cette évolution de la structure de base est l'une des illustrations possibles du contenu de la flèche retour de l'un des modèles proposés par J. M. Offner concernant la transformation des réseaux.



*Fig. 11 modèle de développement d'un réseau technique  
(d'après Offner, 1993)*

Seul le second processeur serait caractéristique de la thèse du développement endogène des réseaux. Quoiqu'il en soit, on ne peut pas réduire l'apport de la géométrie fractale en ce qui concerne le thème de la croissance des réseaux, à l'énoncé de ce second processeur qui n'est que l'une des composantes d'un système plus large, les qualités d'endogénéité et d'exogénéité étant par ailleurs plus difficiles à définir qu'il n'y paraît. C'est avant tout un problème de définition de niveaux d'organisation, de niveaux d'action et de décision au sein des systèmes de production des réseaux techniques urbains.

## CONCLUSION

La morphologie de quelques réseaux techniques urbains comme les réseaux d'assainissement, les réseaux de voiries, les réseaux de gaz etc., peut être modélisée à partir de la géométrie fractale en calculant soit une dimension de

localisation soit une dimension de contenu. Cette approche favorise la prise en compte des aspects spatiaux tels que la distribution à partir d'un nœud particulier de l'ensemble des nœuds organisés en réseau ou la configuration de l'espace engendré par un réseau.

En matière de croissance, la théorie de la dimension fractale n'est pas une théorie géométrique qui ne s'appliquerait que sur des formes résultant d'un développement endogène entendu comme étant la répétition plus ou moins stricte d'un même processus. Cependant et ce à partir d'une structure première que nous avons qualifiée de base, il y a généralement un processus de développement des ramifications qui, tout en étant à chaque fois dépendant des conditions locales (vitesse d'accroissement de l'agglomération urbaine, conditions topographiques, coût du foncier, géographie humaine, concurrence entre réseaux eux-mêmes, etc., etc.), produit un réseau singulier mais dont la morphologie n'est jamais très éloignée de celle d'un autre réseau du même type. C'est à partir de ce voisinage, tout relatif, entre formes et ce dans une période particulière de l'histoire urbaine marquée par une forte croissance spatiale des villes que certains ont pu avancer en terme d'image et au titre de l'analogie la notion de développement endogène des réseaux qui trouve en la géométrie fractale quelques modèles de simulation.

En ce qui concerne ce thème du développement des réseaux il conviendrait également d'aborder les conséquences induites par la complexité des systèmes de décision qui peut conduire à la reproduction de modèles existants au détriment de solutions totalement singulières si tant est que cela fut possible; nous avons évoquerons le cas tout à fait remarquable du modèle de la rocade, au combien prégnant actuellement dans le cadre des politiques de voiries urbaines françaises, *certaines pouvant alors y voir quelques déterminismes qui alimenteraient la thèse "toute improbable ?" du développement endogène des réseaux.*

## Bibliographie

**Batty M., Kim S. K.-** Form follows function: reformulating urban population density functions- *Urban studies*, University of Glasgow, Vol. 29, Number 7, October 1992,p. 1043-1070.

**Benguigui L., Daoud M.-** Is the suburban railway system a fractal?- *Geographical Analysis*, 23-4, 1991.

**Bertalanffy L.V.-***Théorie générale des systèmes-* Paris, Dunod, 1973, 296p.

**Dupuy G.-** *L'urbanisme des réseaux, théories et méthodes-* Paris, Armand Colin, 1991, 198p.

**Favard J.-** *Espace et dimension-* Paris, Albin Michel, 1950, 302p.

**Frankhauser P.-** Aspects fractals des structures urbaines, *L'espace géographique*, Doin éditeurs, Vélizy, n°1, 1991, p.45-67

**Frankhauser P.-** *La fractalité des structures urbaines*, Paris, Antropos, Collection Villes, 1994

**Gangnet M.-** *Modèles d'interaction spatiales et tableaux de contingence*, Thèse de troisième cycle, Lyon, Université C. Bernard, 1978, 141p.

**Le Méhauté A.-** *Les géométries fractales*, Paris, Hermès, 1990, 198p.

**Le Moigne J. L.-** *La modélisation des systèmes complexes-* Paris, Dunod, 1990, 178p.,(Collection Afcet systèmes).

- Mandelbrot b.-** *Les objets fractals, formes hasard et dimension-* Paris, Flammarion, 1975, 190p.
- Mathis P.-** *Transport multimodale terrestre des personnes en Europe: approche prospective*, Rapport DATAR 1994, 150p. et 60 cartes.
- Offner J. M.-** Le développement des réseaux techniques, *Revue Flux*, G.D.R. 903 "Réseaux"-C.N.R.S., Paris, n°13/14, Juillet-Décembre 1993, p.11-18
- Offner J.M.-** Les "Effets structurants" du transport: mythe politique, mystification scientifique, *L'espace géographique*, Doin éditeurs, Vélizy, n°3, 1993, p.233-242
- Pumain d, Sanders L., Saint Julien T.-** *Villes et auto-organisation-* Paris, Economica, 1989, 191p.
- Sfez L.-** *Critique de la décision-* Presses de la Fondation nationale des sciences politiques, Paris, 5ième édition, 1992, 300p.
- Thibault S. Marchand A.-** *Réseaux et topologie-* Lyon, 1987, Laboratoire Méthodes I.N.S.A. Lyon, 15p.
- Thibault S.-** Fractals et structure des réseaux urbains d'assainissement eaux pluviales, *Revue Flux*, G.D.R. 903 "Réseaux"-C.N.R.S., Paris, n°4, Avril-Juin 1991, p.5-14
- Thibault S.-** *Modélisation morpho-fonctionnelle des réseaux d'assainissement à l'aide du concept de dimension fractale-* Thèse d'Etat, I.N.S.A. de Lyon, 1987, 303p.