



HAL
open science

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace

Julien Bernard

► **To cite this version:**

Julien Bernard. Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace. Séminaire d'histoire et philosophie des sciences, CEPERC, Conférences sur la théorie de la relativité générale, A. de Saint-Ours et J. Bernard, May 2009, Aix-en-Provence, France. hal-00654934

HAL Id: hal-00654934

<https://hal.science/hal-00654934>

Submitted on 3 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace

Introduction	2
Le problème de l'espace	3
Une thématique générale.....	3
Cartographie de la notion d'espace chez Hermann Weyl	3
Nature ontologique et épistémologique du problème de l'espace	5
La dualité du proche et du lointain, Fern-geometrie et Nahe-geometrie	5
Présentation générale de la dualité chez Riemann-Weyl	5
Exemple de la sphère.....	7
Stratification de l'espace « en patchwork » de Weyl	8
Parenthèse historique :	
Qu'est-ce qui est propre à Hermann Weyl dans cette construction ?	10
La dualité du proche et du lointain comme moyen pour concilier l'idéalisme transcendantal avec le caractère dynamique de la métrique d'Einstein	12
La théorie de la relativité met en question l'idéalisme transcendantal.....	12
Les oppositions apparentes au sein de la position épistémologique d'Hermann Weyl.....	13
La dualité du proche et du lointain pour sortir de l'aporie	14
Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace	15
Caractère relatif de l'espace	15
Le caractère « monadique » de la notion de sujet Weylienne.....	16
Conception de l'Univers-bloc : idéalité du devenir	17
Le principe de continuité leibnizien : L'épistémologie de la physique rejoint l'épistémologie des mathématiques dans le programme de la Nahe-geometrie.....	17
Conclusion.....	20
La solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace.....	20
Les traits leibniziens.....	22
Après Hermann Weyl... ?	22

CEPERC, Aix-en-provence, 12 mai 2009

Julien Bernard,

ju_bernard@yahoo.fr

www.philo-bernard.fr

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Introduction

C'est la troisième année que je parle d'Hermann Weyl et du problème de l'espace qui est mon sujet de thèse. Je vais essayer autant que possible d'éviter les répétitions par rapport à ce dont j'ai déjà parlé les deux années précédentes. Ayant déjà beaucoup parlé des rapports particuliers qu'Hermann Weyl entretient avec la philosophie, et des différentes strates du concept d'espace qui interviennent dans sa formulation de ce qu'il appelle le, ou plutôt *les*, problème(s) de l'espace, on va plutôt se concentrer aujourd'hui sur la solution épistémologique qu'Hermann Weyl apporte au problème de l'espace, nous limitant à quelques rappels pour la partie « formulation du problème ». Cette analyse de la réponse par Hermann Weyl au problème de l'espace constitue en quelque sorte un plan « mature » de la thèse qui est pour ainsi dire en phase terminale. Par « plan mature », je veux dire que le résultat de ce travail de thèse n'a pas été simplement une réponse à une question qui avait été posée initialement, mais comme cela doit être souvent ou toujours le cas dans un travail de thèse, la question initiale a été déplacée et ce déplacement est un résultat sans doute aussi intéressant pour comprendre la pensée d'Hermann Weyl que la solution même au problème posé.

En insistant aujourd'hui sur le caractère leibnizien de la solution apportée par Hermann Weyl au problème de l'espace, je fais une petite entorse dans la présentation de sa position par rapport à ce qu'il y aura explicitement dans la thèse. Le titre de l'intervention pourrait faire croire que la position d'Hermann Weyl aurait été construite par un dialogue explicite avec la pensée du philosophe de Hanovre. En réalité, ce n'est pas de cela qu'il s'agit. Hermann Weyl a lu Leibniz et s'en est inspiré, mais dans une période de son activité intellectuelle postérieure à sa construction du problème de l'espace. La source d'inspiration principale d'Hermann Weyl en ce qui concerne la solution au problème de l'espace c'est le mathématicien allemand Bernard Riemann qui a travaillé comme lui à Göttingen, 50 ans plus tôt. Cependant, il se trouve que la lecture riemannienne qu'Hermann Weyl propose de la théorie de la relativité générale amène à des thèses ontologiques et épistémologiques qui font écho à des positions leibniziennes sur la nature de l'espace (du temps) et de la matière. C'est ce que nous allons présenter aujourd'hui.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Le problème de l'espace

Une thématique générale

L'expression « *le problème de l'espace* » est une expression qui se retrouve dans le titre (et bien sûr dans le contenu) de plusieurs articles ou conférences d'Hermann Weyl de la période s'étendant de 1917 à 1926¹. Mais c'est surtout le nom d'une thématique de recherche qui est la sienne dans toute la durée de cette période et qui est en particulier le cœur d'*Espace-Temps-Matière*, sa principale monographie sur la théorie de la relativité générale et ses fondements mathématiques, physiques et philosophiques. Nous disons « thématique de recherche » et non pas « problème » ou « question » car il n'y a pas une seule question sous-jacente à ce nom de « problème de l'espace » mais plutôt une pluralité de questions qui ont en commun de concerner l'articulation entre les différents aspects de la notion d'espace.

Cartographie de la notion d'espace chez Hermann Weyl

Qu'entend-on ici par « aspects » de la notion d'espace ?

La notion d'espace telle qu'on la trouve dans les écrits d'Hermann Weyl peut être cartographiée en régions définies à partir de deux axes. En fait, il faudrait mieux parler d'« aspects » que de régions, puisque ce ne sont pas des composantes de la notion d'espace qui sont séparées mais bien divers aspects interconnectés par participant à la détermination des relations spatiales.

Sur un axe, on trouve les trois grandes sphères dans lesquelles la notion d'espace prend sens : la sphère mathématique, la sphère physique et la sphère phénoménale. Et sur le deuxième axe, on trouve différents strates de relations qui composent la notion d'espace. La strate topologique concerne les relations de voisinages entre les différents secteurs d'espace, la strate affine ajoute aux relations de voisinage la notion de direction. La strate conforme ajoute la comparaison des directions entre elles (la notion d'angle). Enfin, la strate métrique ajoute

¹ Les 5 éditions d'*Espace-temps-matière* s'étendent de 1918 à 1923. Dans cette période on trouve les articles suivants qui sont concernés directement par le problème de l'espace, ou par sa solution qui passe par l'élaboration de la géométrie infinitésimale. 1918 : *Gravitation und Elektrizität*, 1918 : *Reine Infinitesimalgeometrie*, 1920 : *Elektrizität und Gravitation*, 1921 : *Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie*, 1921 : *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung*, 1921 : *Feld und Materie*, 1921 : *Electricity and Gravitation*, 1921 : *Das Raumproblems*, 1922 : *Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Massbestimmung*, 1922 : *Die Relativitätstheorie auf der Naturforscherversammlung in Bad Nauheim*, 1923 : *Mathematische Analyse des Raumproblems*.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

finalement la notion de mesure, ou de longueur. Contrairement à ce qui se passait sur le premier axe, nous parlons ici de « strates » pour indiquer que les différents niveaux y sont cumulatifs au sens où chaque strate s'appuie sur, englobe les strates précédentes. La strate métrique suppose la strate conforme qui suppose à son tour la strate affine qui suppose à son tour la strate topologique.

	Sphère mathématique		Sphère physique	Sphère phénoménale
	Proche	Lointain		
Strate topologique	Topologie de \mathbb{R}^4	Variété 4-dimensionnelle	Topologie du cosmos?	?
Strate affine	Espace vectoriel \mathbb{R}^4	Connexion affine : Γ_{jk}^i	Lignes droites (trajectoires possibles des corps et de la lumière)	?
Strate conforme	Classe d'équivalence de formes quadratiques	« Connexion conforme » : On dispose d'un champ de formes quadratiques g_{ij} (définies à un facteur positif λ près, c'est-à-dire à une « homothétie » près)	Trajets des « rayons lumineux ».	?
Strate métrique	Forme quadratique (Pythagore)	« Connexion métrique » (sans torsion). Alors, les Γ_{jk}^i dérivent de champs : g_{ij} et φ . Non seulement les g_{ij} associés aux Γ_{jk}^i nous donnent comment les directions liées à deux points voisins se connectent entre elles, mais les φ associés aux Γ_{jk}^i nous donnent comment les longueurs liées aux deux points sont reliées entre elles.	Trajets des corps massifs (dans le champ gravitationnel si la métrique est intégrable, dans le champ gravitationnel+électromagnétique dans le cas général)	?

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Nature ontologique et épistémologique du problème de l'espace

Le « problème de l'espace » est donc le titre d'une thématique scientifique et philosophique de recherche qui consiste à étudier les articulations entre ces différents aspects de la notion d'espace, et à expliquer par là la nature et la légitimité d'une science de l'espace. La thématique du problème de l'espace comporte donc une dimension métaphysique puisqu'étudier les rapports entre ces différentes régions de la notion d'espace revient à s'interroger sur la nature de l'espace (est-il de nature substantielle ou relationnelle ? est-il un être mathématique ou un objet physique ?, etc...) Mais le problème a également une dimension épistémologique puisqu'étudier les rapports entre les mathématiques de l'espace, la physique de l'espace et la phénoménologie de l'espace c'est comprendre pourquoi (au sens kantien des conditions de possibilités) une science de l'espace est possible. **(Texte 2)**

Ce que nous allons voir aujourd'hui c'est donc que les solutions qu'apportent Hermann Weyl dans *Espace-temps-matière* à ces problèmes ontologiques et épistémologiques, regroupés sous le terme « le problème de l'espace », tirent leur origine d'une lecture riemannienne de la théorie de la relativité générale, et font écho à certaines conceptions leibniziennes concernant l'espace, le temps, et la matière.

La dualité du proche et du lointain, Fern-geometrie et Nahe-geometrie

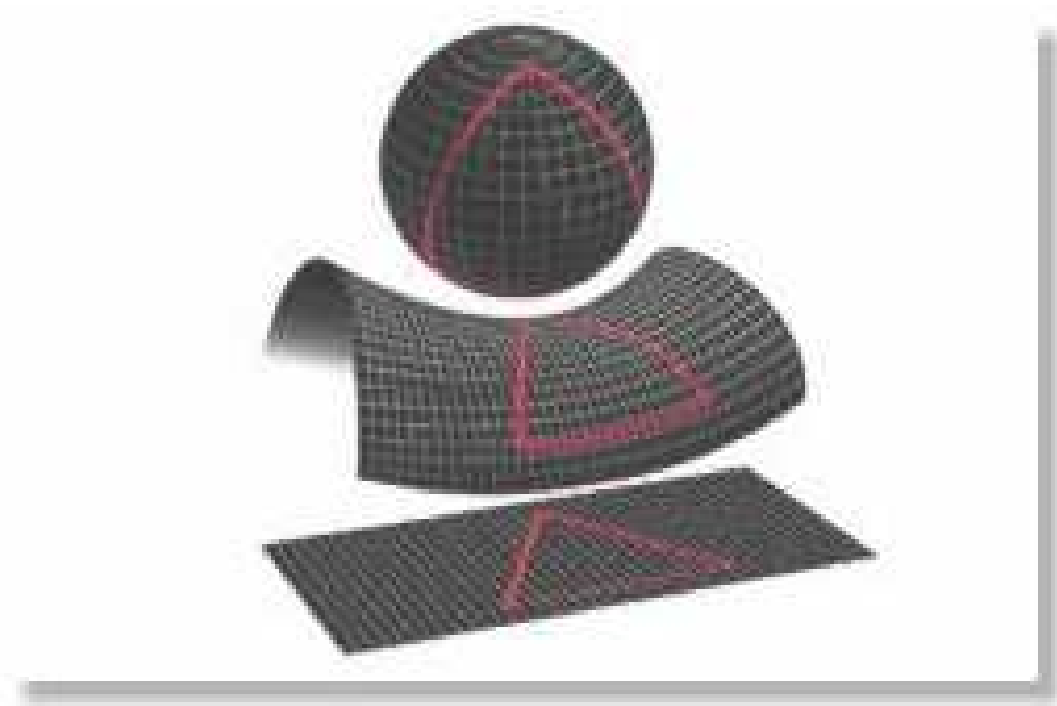
Présentation générale de la dualité chez Riemann-Weyl

Mais, avant de pouvoir exposer la position philosophique d'Hermann Weyl concernant l'espace, nous devons d'abord développer un peu ce que nous appelons la dualité du proche et du lointain qui constitue le trait majeur caractérisant l'approche géométrique de Riemann, trait qu'Hermann Weyl a voulu parfaire dans sa propre approche. Cette partie sera un peu technique mais elle est un préalable indispensable à la compréhension des thèses philosophiques.

Une fois en tête la cartographie de la notion d'espace que nous avons présentée, on doit observer une particularité de la réflexion d'Hermann Weyl concernant le problème de l'espace. Il s'agit de l'insistance sur l'articulation, au sein des différentes strates de la notion d'espace, entre deux niveaux bien distingués : le niveau du proche et le niveau du lointain. Les termes allemands sont « Nahe » (le proche) et « Fern » (le lointain). Ce sont les mêmes termes qui sont utilisés en physique pour différencier une « action par contact » d'une action à distance. On verra en fait que la dualité du proche et du lointain traverse les sphères mathématique et physique.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Ainsi, Hermann Weyl oppose une géométrie du lointain « Fern-geometrie » comme celle d'Euclide à une « Nahe-geometrie » comme celle de Riemann ou celle qu'il développe lui-même. Dans une « Nahe-geometrie », ce qu'on pourrait traduire par une « géométrie de proximité », chaque strate de la notion d'espace porte la trace de cette dualité du proche et du lointain. Elle comporte alors un premier niveau constitué des relations spatiales de proximités, définies uniquement relativement à *un point* de l'espace et à son voisinage, et un deuxième niveau constitué des relations spatiales sur le lointain. Ce second niveau n'est bien sûr pas complètement séparé du premier, mais il consiste plutôt dans le fait que les structures spatiales de proximité associées à chaque point sont pour ainsi dire « cousues » les unes avec les autres par une structure mathématique. Les différentes structures spatiales de proximité peuvent ainsi être comparées ou « transportées » d'un point à un autre. L'espace d'Hermann Weyl, dans ses strates affine, conforme ou métrique prend donc la forme d'une sorte de *patchwork* dont toutes les parties (les structures de proximité) peuvent être cousues les unes aux autres selon une grande variété de possibilités.

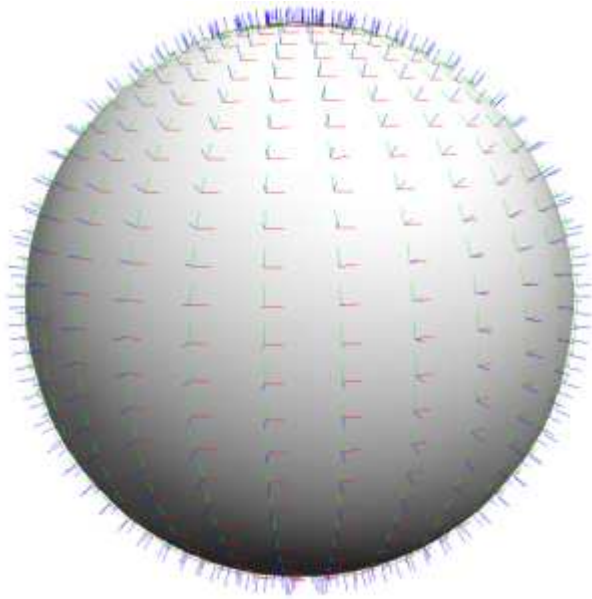


Exemples d'espaces dans le lointain reconstruits en cousant ensemble des espaces de proximité

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Exemple de la sphère

Pour bien saisir la différence entre une géométrie du lointain (Fern-geometrie) et une (Nahe-geometrie), prenons l'exemple de la variété métrique constituée par une sphère plongée dans l'espace tridimensionnel usuel.



Dans la géométrie euclidienne, il est toujours possible de comparer entre eux deux vecteurs définis en des points P et P' aussi distants que voulu. A vrai dire, la définition même de la structure vectorielle de l'espace euclidien ne fait pas intervenir les points en lesquels les vecteurs sont considérés.

Considérons maintenant la métrique induite sur notre sphère par la structure métrique de l'espace euclidien ambiant dans lequel elle est placée. On obtient un exemple de géométrie riemannienne, la sphère, sur laquelle on peut définir la notion de transport d'un vecteur. En chaque point de la sphère, on peut considérer un espace vectoriel tangent. Cependant, en deux points différents de la sphère, les espaces tangents diffèrent. On ne peut donc pas directement comparer un vecteur défini au point P à un vecteur défini au point P' . Il faut dans un premier temps établir une correspondance entre les deux structures vectorielles associées à P et P' , c'est-à-dire un isomorphisme linéaire entre l'espace vectoriel en P et l'espace vectoriel en P' . Pour cela, on considère un chemin géodésique reliant P à P' (c'est-à-dire ici une portion de grand cercle). Et on considère qu'un vecteur de l'espace vectoriel en P peut être petit à petit déplacé jusqu'en P' en conservant continuellement le même angle par rapport à la trajectoire parcourue. La comparaison à distance est donc toujours possible. Mais, la différence avec le cas

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

euclidien c'est qu'ici la correspondance entre les deux structures vectorielles en P et P' dépend du chemin choisi. Si on va de P à P' par un autre chemin (par exemple : réunion de deux portions de grand cercle), la correspondance change. Ainsi si on part d'un vecteur \vec{v} défini en P, il n'y aura pas *un seul* vecteur correspondant de \vec{v} au point P' mais un correspondant de \vec{v} pour chaque trajectoire envisageable pour faire se rejoindre P et P'. Ce n'est que dans le voisinage infiniment proche de P que le transport des vecteurs est univoque. De P à un point P' qui est *infiniment proche*, les espaces tangents n'ont qu'une différence d'orientation infinitésimale. On transfère donc la structure vectorielle en P vers P' par un changement d'orientation infinitésimal. Le transfert sur une distance finie s'obtient alors par intégration d'une infinité de petits changements d'orientation infinitésimaux.

C'est en ce sens que la géométrie riemannienne de la variété sphérique est une géométrie de proximité. Cela ne signifie pas qu'il s'agit d'une géométrie qui se contente de parler de relations spatiales de proximité mais qu'il s'agit d'une géométrie qui ne se permet de parler des relations spatiales sur le lointain qu'après les avoir construites progressivement à partir des relations de proximité en intégrant une infinité de petits changements infinitésimaux qui traduisent le passage d'un point de l'espace à un autre.

Nous allons voir maintenant que cette reconstruction des relations géométriques dans le lointain à partir des relations spatiales de proximité joue dans la géométrie d'Hermann Weyl à *l'intérieur de chaque strate de la notion d'espace*. Détaillons donc un peu comment la structure en patchwork de l'espace de Weyl est stratifiée.

Stratification de l'espace « en patchwork » de Weyl

Dans le cadre de la géométrie de proximité développée par Hermann Weyl pour la théorie de la relativité générale, la structure affine de proximité de l'espace-temps est donnée par l'idée d'un espace vectoriel de dimension 4. Si on se restreint au voisinage infiniment petit d'un point de l'espace-temps, c'est donc cette structure d'espace vectoriel de dimension 4, qui nous donne la notion de direction. A présent, pour avoir une notion de direction *dans le lointain*, les différents espaces tangents associés à chaque point doivent être connectés entre eux. Chaque façon dont on peut connecter entre eux des espaces vectoriels tangents correspond à la donnée d'une *connexion affine*. C'est un objet mathématique de géométrie différentielle qui, une fois donné un système de coordonnées, s'exprime par 4*4*4 coefficients Γ^i_{jk} qui varient d'un point à un autre. Ce sont donc ces 64 champs numériques qui forment pour ainsi dire les coutures du patchwork affine. Une fois le patchwork affine constitué, nous disposons alors d'un moyen de déplacer un vecteur depuis un point de l'espace vers à un autre

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

infiniment proche. Le déplacement sur une distance finie se fait alors en intégrant les déplacements infinitésimaux le long de la trajectoire, et est dépendant de la trajectoire.

Passons à la structure conforme de proximité de l'espace-temps. Elle est donnée par une classe d'équivalence de formes quadratiques localisées au point en question. Une forme quadratique est un objet mathématique qui nous donne sous forme numérique les produits scalaires (donc indirectement tous les angles) que font entre elles toutes les directions de l'espace les unes par rapport aux autres. Tant qu'on est dans la strate conforme, on ne s'intéresse qu'aux rapports des produits scalaires pour des couples de directions données et non pas à leur valeur absolue. Ainsi, deux formes quadratiques obtenues l'une à partir de l'autre par la multiplication par un nombre réel positif $\lambda > 0$ sont considérées comme équivalentes. C'est pour cela qu'on obtient une notion d'angle mais non pas encore de mesure. On montre alors que, en vertu du fait que le nombre de dimensions de l'espace-temps est donné (4), et que la dimension temporelle doit être distinguée par son signe des dimensions spatiales comme dans la théorie de la relativité restreinte ou la géométrie de Minkowski, alors il n'y a qu'une seule structure conforme de proximité, celle qui doit s'exprimer comme la classe d'équivalence

$$\left\{ \begin{array}{ccc|c} -\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{array} \right| \lambda \geq 0 \right\}. \text{ A présent, pour avoir une structure conforme dans le lointain, les}$$

différents espaces conformes de proximités associés à chaque point doivent être connectés entre eux. C'est-à-dire qu'une fois qu'on s'est donné un système de coordonnées, et une *jauge*, c'est-à-dire qu'on se donne le facteur de proportionnalité λ variant de point en point, alors nous devons être capable d'écrire les $4 \times 4 = 16$ coefficients g_{ij} de la (quasi-)forme quadratique² donnant, les angles comme une fonction de la position. Ces 16 champs numériques g_{ij} sont donc les « coutures » de notre patchwork conforme. Les 64 coefficients Γ^i_{jk} de la connexion affine peuvent alors être dérivés des 16 coefficients g_{ij} de la forme quadratique.

Enfin, nous en venons à la dernière strate qui donne la notion de longueur. La structure métrique de proximité de l'espace-temps est obtenue quand, au lieu de considérer *une classe* de formes quadratiques, au facteur de proportionnalité λ près, on considère une forme quadratique unique extraite d'une de ces classes. De même qu'il n'y avait qu'une seule structure affine de proximité et qu'une seule structure conforme de proximité, il n'y a qu'une

seule structure métrique de proximité qui peut s'exprimer par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. C'est

² « quasi » à cause du facteur arbitraire λ

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

ce qu'Hermann Weyl exprime en disant que la nature métrique de l'espace est pythagoricienne, la mise sous forme diagonale de la forme quadratique revenant à exprimer le carré de la distance comme une somme des carrés des projections sur les axes coordonnés (infinitésimaux) comme dans la formule de Pythagore bien connue. A présent, pour avoir une notion de mesure *dans le lointain*, les différents espaces métriques pythagoriciens de proximités associés à chaque point doivent être connectés entre eux. C'est-à-dire qu'une fois qu'on s'est donné un système de coordonnées, et une *jauge*, alors nous devons être capables d'écrire non seulement la forme quadratique g_{ij} , mais également une forme différentielle φ_i en chaque point qui établit la couture métrique de ce point aux points voisins. Cette forme différentielle donne un sens à l'idée de conserver la mesure d'un vecteur qu'on déplace d'un point P à son voisin P'. La notion de conservation de la longueur d'un vecteur déplacé sur une distance finie est alors obtenue par intégration de déplacements infinitésimaux, comme on avait vu pour la conservation de la direction au sein de la strate affine. La comparaison à distance finie peut alors être dépendante du trajet parcouru.

Parenthèse historique :

Qu'est-ce qui est propre à Hermann Weyl dans cette construction ?

Nous terminons cette esquisse de la dualité géométrique du proche et du lointain en précisant quels sont les apports propres à Hermann Weyl dans cette construction. L'idée même d'une géométrie construite analytiquement par la donnée de champs de fonctions exprimant la structure spatiale en chaque point est bien plus ancienne que la théorie de la relativité. La géométrie « analytique », comme on l'appelle, a pris une première forme achevée dans les travaux des mathématiciens de Göttingen C.F. Gauss et B. Riemann. Quand A. Einstein construit la théorie de la relativité générale, il hérite directement, par l'intermédiaire de ses amis mathématiciens, de la géométrie analytique de l'époque qui était directement dérivée des travaux de B. Riemann. Dans cette géométrie, les strates affines, conformes et métriques n'étaient pas encore bien distinguées. Cette première géométrie analytique se construit directement au niveau de la strate métrique. Plus précisément, on se donne directement un champ de formes quadratiques différentielles g_{ij} dont les coefficients reçoivent directement un sens métrique, c'est-à-dire sans l'intermédiaire d'une jauge λ . Dans le cas riemannien, le champ g_{ij} nous donne alors indistinctement la couture affine de l'espace, c'est-à-dire l'orientation des différents espaces tangents, et la comparaison des mesures à distance. C'est exactement dans ce cadre riemannien qu'on s'est placé tout à l'heure avec notre exemple de la sphère. Sur le plan de la dualité du proche et du lointain, la géométrie analytique de Riemann est ainsi pour Hermann Weyl bâtarde. En effet, sur le plan des *directions*, elle procède bien du proche au lointain par une forme de « couture » des espaces infinitésimaux, mais, sur le plan de la *mesure (longueur)*, elle suppose d'emblée la possibilité de la comparaison des longueurs uniformément sur tout l'espace. C'est pour ainsi dire une impureté de la géométrie riemannienne, du point de

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

vue de la dualité proche/lointain. Cette impureté est due à ce que la géométrie analytique se restreignait au départ (avec Gauss) au cas des variétés dont la métrique est induite par un espace euclidien dans lequel elles sont plongées. C'était toujours le cas de notre sphère tout à l'heure.

Les apports d'Hermann Weyl peuvent alors être résumés ainsi : les deux premières éditions d'*Espace-temps-matière* en restaient grosso modo à la présentation d'Einstein, fidèle à B. Riemann. Hermann Weyl y faisait déjà bien la distinction entre les strates affine, conforme, et métrique mais l'articulation entre le proche et le lointain ne jouait que pour les *directions* dans la lignée de Riemann. A partir de la troisième édition, Hermann Weyl introduit la notion de connexion affine récemment introduite par les mathématiciens italiens Levi-Civita et Ricci. Ainsi, la dualité du proche et du lointain est aussi développée pour la strate affine. Cela ne change pas la théorie d'Einstein proprement dite puisque la strate affine est subordonnée à la strate conforme. Mais cela contribue à une meilleure distinction au sein du contenu de la théorie. Hermann Weyl montre comment, à l'articulation entre les différentes strates mathématiques, correspond la relation entre divers niveaux de phénomènes physiques. La strate affine nous donne indistinctement les lignes droites de l'espace-temps c'est-à-dire les lignes sur lesquelles vont pouvoir se déplacer la lumière et les corps en chute libre. La strate conforme détermine les trajets lumineux. Enfin la strate métrique donne les trajets des corps massifs. Mais ce n'est qu'à partir de la 4^{ème} édition d'*Espace-temps-matière* qu'Hermann Weyl élargit véritablement le point de vue d'Einstein. Il y introduit sa géométrie infinitésimale, c'est-à-dire qu'il épure la géométrie de Riemann du dernier reste de détermination immédiate des relations à distance. C'est donc Hermann Weyl qui introduit l'idée d'une connexion métrique φ , finissant d'étendre à l'ensemble des strates de la notion mathématique d'espace, la dualité du proche et du lointain. L'espace de Riemann ne devient qu'un cas particulier d'espace de Weyl, le cas particulier où la métrique est intégrable, c'est-à-dire où la couture métrique se fait de telle sorte que la mesure d'un vecteur transporté d'un point à un autre ne dépende pas du chemin parcouru.

Cet élargissement du cadre *mathématique* analytique rend également possible une généralisation de la théorie *physique* d'Einstein. Weyl fournit ainsi en 1918 la première tentative de poursuivre jusqu'au bout l'entreprise commencée par Einstein de réduire les interactions physiques à des modifications de la structure chrono-géométrique. ?? réfléchir à l'ordre dans lequel on parle. Chez Einstein c'est la matière qui détermine les structures géom pas le reste.

C'est ce qu'on appelle la théorie unitaire d'Hermann Weyl. Il s'agit de fusionner complètement géométrie et physique. La tentative d'Hermann Weyl a cependant échoué, nous

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

y reviendrons. Concentrons-nous maintenant sur des problèmes plus proprement épistémologiques et ontologiques.

La dualité du proche et du lointain comme moyen pour concilier l'idéalisme transcendantal avec le caractère dynamique de la métrique d'Einstein

La théorie de la relativité met en question l'idéalisme transcendantal

Laissons donc de côté cette histoire de la géométrie infinitésimale, et entrons dans les enjeux épistémologiques et ontologiques qui ont guidés Hermann Weyl dans l'établissement de cette nouvelle géométrie. Si Hermann Weyl, comme de nombreux penseurs de la science, se penche sur le problème de l'espace entre 1915 et 1927 c'est notamment parce que la solution traditionnelle la plus courante à ce problème, l'idéalisme transcendantal hérité d'Emmanuel Kant, semblait mis à mal par l'établissement de la théorie de la relativité générale. Emmanuel Kant voulait expliquer conjointement le caractère nécessaire et efficace de la géométrie, *nécessaire* car la géométrie est une science mathématique, et *efficace* car elle permet de faire de la physique, d'effectuer des mesures concrètes. On sait que Kant montrait qu'on ne peut expliquer conjointement ces deux traits de la notion d'espace qu'en donnant à l'espace le statut non pas d'une entité physique contenant les autres entités physiques mais une forme *a priori* de la sensibilité que la raison impose à la réalité pour pouvoir la comprendre. (??le coté nécessaire et efficace de la géométrie serait pas le plus important par rapport aux antinomies. Comment sauver la physique de Newton du dogmatisme et des antinomies qui y sont liées. J'écrase un peu la différence entre le synthétique a priori physique et mathématique. Voir Vuillemin)

Maintenant, la découverte fondamentale d'Einstein dans la théorie de la relativité générale consiste, convient Hermann Weyl, dans le fait que les structures de l'espace (affine, conforme, ou métrique) ne sont pas fixées une fois pour toute indépendamment du contenu de l'espace, mais c'est le contenu même de l'espace, la matière, qui détermine sa forme. C'est le cœur même de la théorie (**Texte 3**).

Au vu de cette découverte d'Einstein, la différence de nature entre contenant et contenu spatial semble s'estomper si bien que la solution qui consiste à faire de l'espace un cadre mathématique imposé par l'esprit au réel pour l'appréhender semble à première vue exclue. Si l'espace est déformé par la présence d'un corps (idée qui a été vérifiée observationnellement par l'observation de la déflexion des rayons lumineux au voisinage du Soleil) c'est qu'il est lui-même de nature physique et que sa structure ne peut être connue que de façon empirique. Ainsi, en

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

insistant sur le caractère dynamique de la métrique dans la théorie de la relativité générale, Hermann Weyl ne semble-t-il pas faire de l'espace un objet physique existant indépendamment de nous et dont nos observations ne font que révéler la structure ?

Les oppositions apparentes au sein de la position épistémologique d'Hermann Weyl

Au début de ce travail de thèse, j'avais supposé que c'était le cas. J'avais supposé que cette insistance d'Hermann Weyl sur le caractère dynamique (et donc physique) de la métrique était un signe d'une forme de réalisme empirique à l'égard de l'espace et dont je cherchais à comprendre comment il pouvait se concilier avec la position explicitement idéaliste qu'il adopte en arithmétique³. Ma problématique initiale visait à élucider cette position épistémologique originale d'Hermann Weyl qui conciliait un idéalisme mathématique des nombres et de l'analyse, avec un réalisme physique de l'espace. Cette façon de s'interroger à propos de la pensée d'Hermann Weyl s'est avérée en fait partielle. En effet, ce n'est pas seulement entre, d'une part, le domaine des nombres et de l'analyse et, d'autre part, le domaine de l'espace qu'on trouve une opposition dans la prise de position épistémologique d'Hermann Weyl. *Au sein même de la géométrie*, Hermann Weyl semble tenir un double discours. Dans *Espace-temps-matière*, il oscille en permanence entre un discours où il insiste sur le fait que la métrique spatiale est un être physique dynamique, en interaction avec la matière, et par conséquent hétérogène, c'est-à-dire de structure changeante de point en point, et un discours qui fait de l'espace un être mathématique répondant à des exigences de la raison, dont la principale est l'homogénéité, condition de possibilité de l'intersubjectivité géométrique.

Si bien que, finalement, l'énigme à résoudre pour évaluer l'apport d'Hermann Weyl à l'ontologie et l'épistémologie de l'espace ne consiste pas à concilier un Hermann Weyl théoricien des nombres idéaliste, et un Hermann Weyl géomètre réaliste. Il s'agit de comprendre comment à propos d'un seul et même domaine du savoir, la géométrie comme science de l'espace, Hermann Weyl peut à la fois adopter la posture idéaliste et la définition de l'espace comme forme homogène (**Texte 4**), et affirmer de façon tout aussi insistante que la théorie de la relativité générale a établi définitivement que la métrique est hétérogène, dynamique et en interaction avec son contenu physique.

³ Notamment dans *Le Continu*, mais surtout pendant sa période d'adhésion à l'intuitionnisme de Brouwer.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

La dualité du proche et du lointain pour sortir de l'aporie

Le cœur du programme épistémologique d'Hermann Weyl concernant l'espace consiste en fait à dépasser cette opposition entre sa posture idéaliste, sans doute héritée de son intérêt sérieux pour l'idéalisme allemand, et la dynamisation de la métrique par Einstein. **Cette tension est précisément résolue au sein de l'épistémologie d'Hermann Weyl par le biais de la dualité du proche et du lointain.** Cela aboutit à une façon d'interpréter la théorie de la relativité générale d'Einstein comme un achèvement du programme de Riemann : l'établissement d'une géométrie analytique infinitésimale qui procède du proche vers le lointain.

En quoi la dualité du proche et du lointain nous sort-elle de l'embarras ? C'est que l'espace comme forme homogène, déterminée par de simples exigences *a priori*, n'est pour Hermann Weyl qu'un espace de proximité. Selon le point de vue d'Hermann Weyl, Emmanuel Kant avait compris que les caractères simultanément nécessaire et efficace de la géométrie ne pouvaient être compris que dans une théorie épistémologique qui faisait de l'espace une forme *a priori*. Mais il s'était trompé quant à la portée légitime de cette forme. Pour Emmanuel Kant, du moins tel qu'il était compris communément à cette époque en Allemagne, mais encore souvent aujourd'hui, l'espace comme forme de la sensibilité impose une structure unique, celle de l'espace euclidien, qui s'étend sur l'étendue entière depuis le voisinage de l'Ego (sujet empirique) jusqu'aux confins du cosmos. (?? Reformuler pour éviter de rapprocher Kant et vision cosmologique) Pour Hermann Weyl, le sujet est toujours pensé sur le modèle d'un observateur ponctuel, dans certains textes comme un œil-ponctuel. Ainsi, tout ce que l'espace comme forme dépendante du sujet impose, c'est la structure des relations spatiales de proximité. L'homogénéité de l'espace qui est sa propriété définitoire pour Hermann Weyl, et qu'il qualifie d'exigence de la raison, n'est rien d'autre que la traduction mathématique du fait que chaque point de vue sur le monde doit être *localement* équivalent puisque, au niveau local (de proximité), l'espace mathématique est le reflet de la forme de notre rapport immédiat au monde. (??ds un manuscrit de Gödel sur Carnap, il y a une remarque de Gödel contre un point de vue de Brouwer. Pour Brouwer l'explication mathématique, n'en postulant l'identité de la conscience du sujet, n'est pas entièrement logique mais est aussi psychologique. D'où l'unicité des structures de proximité de l'espace dans ses diverses strates. Déterminer cette structure de proximité unique est ce qu'Hermann Weyl appelle « déterminer la *nature* de l'espace ». Cela se fait par la détermination du groupe des rotations infinitésimales, et c'est l'objet de ce qu'il appelle le « problème mathématique de l'espace », problème hérité de Helmholtz, Klein et Lie.

Maintenant, parce que le sujet est de nature ponctuelle, la forme de son rapport au monde n'impose pas de structure spatiale sur le lointain. Tout ce qui est imposé, pour qu'il y ait une communication possible entre les points de vue, et donc une intersubjectivité en

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

géométrie, c'est d'une part, nous l'avons vu, une indifférence des points de vue qui s'exprime par l'homogénéité de l'espace, i.e. une identité de structure entre les relations spatiales de proximité associées à chaque point-sujet-observateur. C'est l'égalité *de principe* de tous les morceaux de tissu qui constituent notre patchwork spatial. Et d'autre part, on dispose d'un *principe de continuité* qui contraint la façon dont on coud entre eux nos espaces de proximité. Nous devons pouvoir passer « continument » d'une structure à l'autre. C'est-à-dire que, non seulement, les structures spatiales de proximité prises individuellement sont indiscernables, mais elles doivent être connectées de façon à ce que les orientations respectives des espaces de proximités en P et en P' doivent tendre à être identique quand P' se rapproche de P . Ici nous employons le terme « orientation » en un sens volontairement général. Car ce n'est pas que la seule strate conforme qui est en jeu mais toutes les strates de la notion d'espace.

Pour donner un exemple, sur le plan affine, les relations spatiales dérivent partout infinitésimalement de la même structure donnée par l'idée d'un espace vectoriel 4-dimensionnel. Mais on doit, de plus, recoudre ensemble ces structures spatiales identiques de manière à ce que leurs orientations mutuelles ne soient modifiées qu'infinitésimalement quand on passe d'un point à son prochain. Ici, cela signifiera que si on transporte un vecteur infinitésimal δx d'un point $P(x)$ à un point $P'(x+dx)$, ce vecteur aura pour but le même point que le vecteur dx déplacé de P à $P''(x+\delta x)$ (figure du parallélogramme)

Finalement, on voit donc que ce sont chez Hermann Weyl des considérations épistémologiques de nature idéaliste, ce qu'on pourrait appeler un idéalisme transcendantal infinitésimal (de proximité), qui justifie à la fois la forme unique de tous les espaces infinitésimaux stratifiés associés à chaque point-sujet, mais aussi la forme la plus générale selon laquelle on doit penser le raccord, la couture de ses espaces infinitésimaux pour construire la géométrie la plus générale possible qui respecte la dualité du proche et du lointain.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace

Caractère relatif de l'espace

La solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace que nous avons esquissée a déjà fait transparaître deux thèmes leibniziens. Un premier thème est associé non pas spécifiquement à Hermann Weyl mais à la théorie de la relativité elle-même et à son auteur. Il s'agit du caractère relatif (par opposition à « absolu ») de l'espace. C'est un thème récurrent dans la littérature, nous nous contentons donc juste ici de l'évoquer, d'autant plus que c'est un

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

thème plus Einsteinien que Weylien. Il consiste dans le fait que la théorie de la relativité, en faisant dépendre la structure métrique de l'espace de son contenu, rend caduque l'idée newtonienne d'un espace absolu, i.e. cadre indépendant dans lequel les événements physiques viennent ensuite prendre place sans le modifier. La théorie de la relativité, de ce point de vue, rend justice à la position leibnizienne d'un espace ordre des co-existants contre le point de vue de Newton défendu par Clarke.

?? Voire les choses dans une opposition Leibniz/newton c'est moderne. Einstein lui-même ne voyait pas les choses en ce sens là. Remarque de Merleau-Ponty sur opposition Clarke-Leibniz, reconnu par Belaval. Dans le passage question l'espace est-il newtonien ou leibnizien à la question. ??

Le caractère « monadique » de la notion de sujet Weylien

Mais nous avons aussi aperçu un autre thème leibnizien spécifique au point de vue Weylien sur la relativité. Nous faisons allusion à la notion de sujet qui intervient dans son analyse épistémologique pour justifier la dualité du proche et du lointain. Au vu de ce que nous avons développé plus haut, nous sommes d'accord pour ranger avec Thomas Ryckmann, Hermann Weyl dans la catégorie des interprètes idéalistes de la théorie de la relativité générale. Il y a bien en effet dans ses écrits sur la géométrie une insistance sur certains principes *a priori* qui guident la construction mathématique de l'espace et rendent seuls possibles l'élaboration de cette science. Cependant, la notion de sujet sous-jacente aux analyses épistémologiques de Weyl concernant l'espace, a des traits qui la rapproche plus de la monade leibnizienne que du sujet transcendantal kantien. En effet, ce qui justifie la dualité du proche et du lointain, c'est le caractère essentiel du sujet d'être un point de vue ponctuel sur le monde. Ainsi, les différents systèmes de coordonnées qui servent à exprimer les différentes strates de la structure spatiale sont pour Hermann Weyl ce qu'il appelle des « restes inévitable de l'Ego » qui tente de s'abolir lui-même dans sa tentative de construction d'une objectivité géométrique. Le système de coordonnées est inévitable dans la mesure où nous ne sommes que des points de vue ponctuels sur le monde. L'objectivité est conquise par le sujet en extériorisant l'individualité de son point de vue sur le monde et en la neutralisant par un mouvement d'abstraction. La possibilité de communication entre les points de vue est présupposée pour rendre possible la géométrie, et elle consiste à la fois dans la nature tensorielle des structures spatiales, et dans la « continuité » des connexions entre les différents espaces de proximité. Il n'est pas cependant pas clair si cette nature tensorielle des entités géométrico-physique et la continuité des connexions spatiales joue plutôt le rôle de l'harmonie préétablie leibnizienne, ou celui des conditions de possibilité kantienne.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Conception de l'Univers-bloc : idéalité du devenir

Il faudrait en fait distinguer dans la notion de système de coordonnées, marque du sujet dans l'élaboration du savoir géométrique, deux aspects. Un système de coordonnées c'est à la fois le choix de point-événement comme origine (on parle d'événement car, puisqu'on est dans l'espace-temps, le choix d'une origine c'est indistinctement le choix d'une localisation dans l'espace et dans le temps), et le choix de la façon dont on va coordonner l'ensemble des points-événements de notre espace-temps. La subjectivité du système de coordonnées a donc deux significations. Elle signifie d'abord une indifférence à l'égard du point-origine qui établit simultanément la distinction entre l'ici et l'ailleurs, et entre passé, présent et futur. Ainsi, en considérant comme subjective cette origine des coordonnées, Hermann Weyl défend une position philosophique sur la nature de l'espace-temps qu'on qualifie aujourd'hui de conception de l'univers-bloc. L'espace-temps pris dans sa globalité a bien une réalité objective, mais le présent est purement subjectif, tout comme l'est évidemment l'ici. Le présent n'est que la marque du sujet observateur qui appréhende la réalité par elle-même a spatiale et atemporelle. Il faudrait en fait plutôt dire la réalité sans présent et sans ici. C'est encore une autre position qu'Hermann Weyl partage non seulement A. Einstein, mais aussi avec Leibniz.

Si on s'intéresse plutôt au second aspect de la notion de système de coordonnées, c'est-à-dire à l'ensemble des manières que l'on a de coordonner l'espace-temps, c'est-à-dire d'attribuer à chacun de ces points une étiquette numérique pour l'identifier et avoir une prise sur lui pour le discours géométrique, alors on retombe sur l'idée déjà évoquée selon laquelle le chemin qui conduit de la subjectivité du point de vue à l'intersubjectivité géométrique est permise par la nature tensorielle (ou, pour généraliser le point de vue d'Hermann Weyl, la nature « géométrique » au sens de James Anderson) des entités géométriques.

Le principe de continuité leibnizien : L'épistémologie de la physique rejoint l'épistémologie des mathématiques dans le programme de la Nahe-geometrie

Nous sommes parti de l'idée que la dualité du proche servait à concilier dans l'épistémologie d'Hermann Weyl l'intersubjectivité géométrique fondée sur une position idéaliste, et la prise en compte de la nouvelle nature dynamique de la métrique d'Einstein. Pour l'instant, nous nous sommes penchés sur le premier aspect. On va maintenant traiter le second et y voir que les thèmes leibniziens y sont tout aussi présents. L'appareil mathématique de la géométrie infinitésimale développé de Riemann à Weyl a comme spécificité évidente, par rapport aux géométries du lointain d'Euclide, Lobatchevsky ou Minkowski, qu'on y définit non pas *une structure géométrique* mais une famille de structures géométriques, indexée par les valeurs que peuvent prendre les entités géométriques définitoires des structures spatiales

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

(tenseur métrique, connexions affines, etc.) Les mathématiques de la géométrie infinitésimale, fondées autant que possible chez Hermann Weyl par des réflexions *a priori* de l'ordre d'un idéalisme transcendantal de proximité, ne fournissent donc qu'un espace partiellement informe, un mollusque comme disait A. Einstein.

Ce manque de détermination intrinsèque à l'espace de la géométrie infinitésimale n'est pas le signe d'une imperfection du type de position épistémologique que nous avons appelé « idéalisme transcendantal de proximité ». Selon Weyl, la conception infinitésimale de la géométrie, la seule fondée pour des raisons *a priori*, fait signe d'elle-même vers une détermination par la matière des structures spatiales à distance (et à distance seulement). C'est ainsi qu'un demi-siècle avant, Riemann était déjà conséquent de ce point de vue avec l'esprit de la géométrie infinitésimale, et c'est pourquoi il a été, pour reprendre le langage d'Hermann Weyl, le prophète ayant annoncé A. Einstein et sa théorie. **(Texte 5)**

La géométrie infinitésimale renvoie donc d'elle-même à une détermination physique des structures spatiales à distance. Pour expliquer cela, Hermann Weyl précise la zoologie de l'espace qu'avait proposée Einstein. L'espace est certes un mollusque mais plus précisément un escargot. Car c'est la matière qui détermine au fur et à mesure qu'elle se meut la structure de l'espace qui la contient, tout comme l'escargot porte avec lui la coquille qui le contient. C'est la matière qui détermine la couture du patchwork spatial comme un escargot forme de lui même la coquille à l'intérieur duquel il vit. **(Texte 6)** C'est là que, peut-être, se joue la séparation entre Leibniz d'un côté et Riemann/Einstein/Weyl de l'autre. On aurait besoin ici de l'avis d'un connaisseur des écrits géométriques de Leibniz. Selon Riemann, (et de ce point de vue, Einstein et Weyl seront ces continuateurs), si on veut être cohérents jusqu'au bout, on ne peut défendre l'idée d'un espace *relatif*, issu d'une interaction de la matière, que si on remet en cause la géométrie euclidienne, du moins à distance. Car, en tant que Fern-geometrie, en tant que géométrie du lointain, la rigidité de la géométrie euclidienne est inapte à rendre compte d'un tel espace relatif. En effet, en tant qu'issus de l'interaction avec la matière, la structure spatiale doit nécessairement être dynamique. La conception infinitésimale de l'espace doit donc conduire naturellement à une remise en cause d'Euclide. Leibniz l'avait-il vu ? Si sur ce point, Riemann et Weyl se détachent de Leibniz (et encore une fois, je laisse la question ouverte), ils le rejoignent cependant sur un point central : c'est que l'expression des structures spatiales par un champ dynamique est le moyen d'expression le plus abouti de ce que Leibniz appelait le « principe de continuité » qui veut que la nature ne fasse pas de saut. La liberté de toutes les formes que peut prendre l'espace-temps est circonscrite par la nécessité d'exprimer la continuité physique des interactions, continuité qui s'exprime au niveau géométrique par les différentes contraintes de « raccord » des structures géométriques de proximité. La notion de champ qui a commencé à porter ses fruits avec (Faraday-)Maxwell en électromagnétisme, et

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

continue avec Einstein dans le domaine de la gravitation est le corrélat physique naturel de la géométrie infinitésimale en tant que cette dernière exprime l'idée contenue dans le principe de continuité, principe de continuité qu'il faut entendre spatio-temporellement, au vu du principe de l'existence d'une vitesse finie maximale d'interaction.

Dans le paragraphe §9 d'*Espace-temps-matière*, Hermann Weyl montre comment la philosophie de la géométrie infinitésimale conduit naturellement à une ontologie des champs. Dans le cas d'un champ électrostatique, c'est-à-dire d'un champ électrique produit par des charges au repos, il remarque que la formulation de Maxwell de l'électromagnétique en terme de champ permet de réécrire les équations de Coulomb (qui exprime les interactions électriques en terme d'une force à distance en $1/r^2$ à la Newton) sous forme des fameuses équations de Maxwell qui ont la particularité de ne s'exprimer qu'en terme d'opérateurs différentiels, donc en terme d'une structure de proximité. Hermann Weyl, cohérent avec l'esprit de la géométrie infinitésimale, indique que c'est à ces lois physiques de proximité qu'il faut donner un poids ontologique, et non pas aux lois à distance de Coulomb. **(Texte 7)**

Le choix de favoriser les équations de Maxwell sur celles de Coulomb dans le seul cas de l'électrostatique pourrait être trompeur. Car dans ce cas, précisément, les équations locales (de proximité) et les équations à distances sont rigoureusement équivalentes du point de vue mathématique, un peu à la façon dont certaines lois physiques classiques (i.e. sans prise en compte de la vitesse finie des interactions) peuvent indifféremment s'exprimer sous une forme locale ou sous une forme intégrale (comme dans le fameux principe de Maupertuis) Ici, ce n'est pas que de cela qu'il s'agit. Car dans le passage de l'électrostatique à l'électromagnétique, les lois de Coulomb perdent leur signification. La formulation infinitésimale n'est plus seulement une alternative entre deux formulations mathématiquement équivalentes des phénomènes physiques, elle est la seule ! On voit donc ici que la prise de position mathématique d'Hermann Weyl en faveur d'une forme de géométrie infinitésimale appuyée par quelques considérations *a priori* qui l'apparente à l'idéalisme transcendantal, devient *a posteriori* le seul instrument naturel pour exprimer une nature physique continue, une physique des interactions « par contact », dont le caractère dynamique ne se laisse exprimer que sous forme de champs. Avec Einstein et la découverte de la forme exacte du couplage entre la matière et la structure métrique de l'espace, c'est la métrique elle-même qui devient un champ, en adéquation avec le principe de continuité et le caractère relatif de l'espace. La lecture riemannienne de la théorie de la relativité générale que propose Hermann Weyl concilie ainsi les principes *a priori* inhérents à la géométrie infinitésimale avec l'expression du caractère à la fois continu et dynamique des interactions physiques qui s'étend avec Einstein jusqu'à la sphère de la structure (métrique) de l'espace.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Conclusion

La solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace

Pour conclure, nous avons exposé l'analyse épistémologique d'Hermann Weyl concernant la nature de l'espace et de la géométrie, analyse construite comme une réflexion sur la récente théorie de la relativité générale. Au premier abord, on peut être dérouté par l'apparent écart qu'il semble y avoir entre, d'une part, la posture idéaliste d'Hermann Weyl qui adopte la définition idéaliste de l'espace comme forme, et donne des critères *a priori* pour contraindre la forme mathématique de l'espace, et d'autre part l'insistance qui est la sienne sur le fait que le cœur de la nouvelle théorie d'Einstein est la découverte du caractère dynamique de la métrique, en interaction avec la matière, c'est-à-dire le point même qui avait le plus profondément ébranlé l'Esthétique transcendantale.

Une lecture attentive révèle en fait que cette opposition apparente n'est pas le fruit d'un éclectisme bancal mais bien d'une analyse épistémologique authentique et audacieuse qui nous autorise (avec Thomas Ryckman) à classer la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl parmi les tentatives qualifiées en un sens large « d'idéalisme transcendantaux ». Ce classement n'a certes guère de valeur par lui-même. L'important est de comprendre la façon dont Hermann Weyl arrive à concilier les deux traits conflictuels que nous avons présentés. On pourrait résumer la problématique par cette simple question : Comment Hermann Weyl entend-il concilier Kant et Faraday, un idéalisme transcendantal de l'espace avec une nature des relations métriques semblable à celles du champ électromagnétique fluctuant de Faraday ?

Il s'avère que c'est la distinction entre deux niveaux, celui de la proximité et celui du lointain, au sein des différentes strates de la notion d'espace, qui permet à Hermann Weyl d'accomplir cette conciliation heureuse. S'il conserve la définition de l'espace comme forme des apparences, c'est qu'il est persuadé que l'espace lui-même n'est pas connu par expérience mais est une forme mathématique imposée à la réalité empirique pour pouvoir la connaître. Mais cette forme n'a de sens et de légitimité que dans la sphère de la proximité car le sujet n'a pas d'accès à l'intégralité de l'étendue cosmique mais uniquement à son voisinage immédiat. Le sujet est conçu comme un observateur ponctuel dont seul le rapport à l'espace environnant est déterminé par l'espace comme forme. Les sujets-ponctuels étant tous de même nature, l'espace dans sa globalité doit être homogène au sens où il doit être constitué d'espaces infinitésimaux, d'espaces de proximité absolument identiques, cousus entre eux pour former progressivement l'espace à distance comme un immense patchwork.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

D'autre part, les différents points de vue individués qui sont introduits par les différents sujets ponctuels doivent être abstraits pour attendre à l'objectivité géométrique. On en déduit immédiatement la nature tensorielle des entités géométriques ainsi que la pure subjectivité de la distinction entre le présent et les autres formes de la temporalité, imposant une vision de l'univers-bloc.

Pour terminer de résoudre le problème de l'espace, Hermann Weyl doit déterminer quelle est la structure unique de proximité qui caractérise ce qu'il appelle la *nature* de l'espace, et comment doivent être cousues entre elles les différentes parties identiques qui composent l'espace. Par différents arguments, mélange inextricable de réquisits *a priori* et de considérations basées sur notre connaissance de l'espace environnant, Weyl montre que la nature de l'espace est pythagoricienne c'est-à-dire donnée par une forme quadratique. Sur le plan de la connexion des espaces de proximité entre eux, Hermann Weyl montre que nous ne saurions imposer légitimement *a priori* une structure rigide qui s'étend à distance au-delà de la sphère légitime du sujet-ponctuel. La raison n'impose qu'un principe de continuité, héritier des philosophies du XVIIIème et en particulier de Leibniz, et qui est en même temps l'expression naturelle de la physique des actions par contact qui s'est imposée de Faraday à Einstein. L'orientation respective des espaces de proximités ne doit changer que continûment, exigence qui prend la forme mathématique d'une connexion affine Γ_{jk}^i associée à un champ de classe de formes quadratiques g_{ij} et à un champ de formes linéaires ϕ_i qui assurent respectivement les coutures affine, conforme et métrique entre les espaces de proximité. Hermann Weyl, s'appuyant ainsi sur une sorte d'« idéalisme transcendantal de proximité » parfait donc l'esprit de la géométrie infinitésimale de Riemann.

Mais, on comprend toute l'ambition du projet épistémologique d'Hermann Weyl lorsqu'on voit que, tout en s'appuyant sur des critères imposés par la raison, et une recherche d'unité et d'harmonie mathématique, la géométrie infinitésimale qu'Hermann Weyl prétend rendre compte au mieux du principe de continuité qui décrit l'évolution continue et à vitesse finie de toutes les interactions physiques. Ici l'épistémologie des mathématiques et l'épistémologie de la physique se rejoignent. La géométrie infinitésimale n'impose pas une forme métrique mais uniquement la forme générale de toute une famille de formes entre lesquelles seule l'expérience peut choisir, puisque c'est à la matière et ses interactions qu'il revient en dernier lieu de déterminer les relations métriques. La métrique n'est pas intrinsèque à l'espace en soi, comme forme des apparences. Elle appartient à l'espace *dans ses relations* à la matière, et elle ne peut être déterminée *a priori* car elle déborde la sphère de proximité du sujet.

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

Les traits leibniziens

On voit alors resurgir dans la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl, par le biais de B. Riemann, un certains nombres de traits leibniziens. D'abord, la notion de sujet au cœur de cette philosophie a des airs de monade. Le sujet, point d'origine du système de coordonnées, est conçu sur le mode d'un point de vue ponctuel sur le monde et qui n'a accès à l'intégralité du monde que par le jeu de l'intégration des interactions infinitésimales « par contact ». La supposition de la nature tensorielle des entités géométriques revient à l'assomption d'une harmonie entre les différents points de vue, expression de l'objectivité géométrique. Ensuite, l'indétermination *a priori* de la structure métrique à distance permet à la matière de jouer son rôle de principe de détermination de la structure spatiale, rendant raison de la nature relationnelle ou relative de l'espace qui était le principal motif d'Albert Einstein et qui tranche le débat au profit de Leibniz contre Clarke. Mais ce point bien connu n'est pas le centre d'intérêt d'Hermann Weyl. Ce dernier préfère insister sur le caractère dynamique de la métrique qui découle de ce couplage entre la matière et l'espace. La géométrie infinitésimale est le pendant mathématique naturel d'une physique des champs, héritière du principe de continuité cher à Leibniz. La position épistémologique d'Hermann Weyl a donc l'ambition non seulement de rendre compte de la forme mathématique la plus générale que doit prendre l'espace, mais également de participer au mouvement de fusion du géométrique avec le physique, la notion de champ étant tout à la fois une notion physique et dynamique et porteuse d'une spatialité.

Ce cadre épistémologique apparaît donc comme une référence pour penser simultanément les mathématiques et la physique du continu dans une vision unifiée. Ce fut le cadre de la tentative de Weyl lui-même d'unifier gravitation et électromagnétisme en une structure géométrique unique. Mais, il semble probable, cela reste à vérifier, que ce cadre de pensée serait plus généralement efficace pour rendre compte des autres approches continuistes, visant à faire se rejoindre géométrie et physique, comme celle de Kaluza-Klein, ou l'approche d'Elie Cartan.

Après Hermann Weyl... ?

Avançons maintenant quelques pistes sur la place qu'a pu jouée la posture d'Hermann Weyl à propos de la l'épistémologie et de l'ontologie de l'espace dans la suite du vingtième siècle, et la place qu'il peut encore jouer de nos jours. Il faut d'abord savoir que la tentative d'Hermann Weyl de concilier en une structure géométrique unique électromagnétisme et gravitation, s'est soldée par un échec. Ce ne sont pas les critiques d'Einstein qui ont convaincu Hermann Weyl de son erreur, il les trouvait bien insuffisantes, mais (d'autres critiques émanant de W. Pauli, et surtout) plutôt l'établissement de la mécanique quantique qui a remis en cause la pertinence même d'une compréhension de la nature intime de la matière en la réduisant

Les thèmes leibniziens de la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, CEPERC 12 mai 2009

entièrement à la notion continue de champs. Cependant, si cette application de la géométrie infinitésimale à l'unification physique s'est avérée un échec, en revanche l'intuition d'Hermann Weyl concernant le fait qu'il s'agissait d'une structure mathématique naturelle en attente d'une interprétation physique a été confirmée de façon éclatante quelques années plus tard, au sein même de la mécanique quantique, on découvre que la géométrie infinitésimale d'Hermann Weyl avec une connexion métrique non-intégrable intervenait naturellement dans la théorie des équations d'ondes en mécanique quantique.

Outre cette structure de connexion métrique, on peut trouver de nombreux traits ponctuels propre à la position d'Hermann Weyl sur l'espace qui se sont avérés fructueux depuis la période d'*Espace-temps-matière* jusqu'à nos jours : le caractère subjectif purement arbitraire (??en partie contradictoire subjectif et arbitraire) du système de coordonnées dans toute formulation covariante de la physique, l'importance de la caractérisation du géométrique par la caractérisation des groupes de transformation et des groupes de symétries (même si nous n'en avons pas parlé aujourd'hui), ou encore l'importance d'une distinction nette en mathématiques des différentes strates de relations géométriques (affine, conforme, métrique) pour mieux cerner leurs correspondant physique. Mais au-delà de ces intuitions ponctuelles d'Hermann Weyl dont l'histoire de la physique et des mathématiques ont montré la fertilité, on doit souligner la cohérence d'ensemble de la vision épistémologique qu'il atteint en 1923 à l'apogée de sa réflexion sur une vision géométrique du continu pour penser conjointement la philosophie des mathématiques et la philosophie de la physique. Cette vision nous enseigne comment penser ensemble la continuité des interactions physiques, le caractère dynamique des structures spatiales en interaction avec la matière, et le caractère cependant nécessaire du cadre géométrique qui répond à certaines exigences *a priori* de la raison. L'espace est cette notion où l'on voit se rejoindre chez Hermann Weyl les exigences mathématiques d'harmonie, de généralité, l'intersubjectivité des points de vue, et les exigences physiques : la continuité et le refus d'une entité absolue « espace physique », avec son corrélat : la détermination hétérogène de la métrique par les masses en mouvement.

Bref, en fournissant une épistémologie de l'espace fondée sur la notion de géométrie infinitésimale déterminée *a priori* uniquement dans la sphère de la proximité, Hermann Weyl n'a pas complètement trahi l'esprit idéaliste dont il avait fait preuve en arithmétique. Il a bien plutôt œuvré à l'expression d'une forme affaiblie mais mature d'idéalisme transcendantal, compatible avec la physique moderne des champs, cette physique du « continu » au sens du principe de continuité leibnizien. **(Texte 8)**