



HAL
open science

L'idéalisme transcendantal d'Hermann Weyl face à l'histoire de la géométrie

Julien Bernard

► **To cite this version:**

Julien Bernard. L'idéalisme transcendantal d'Hermann Weyl face à l'histoire de la géométrie. L'idéalisme transcendantal d'Hermann Weyl face à l'histoire de la géométrie, Oct 2011, Grenoble, France. hal-00654927

HAL Id: hal-00654927

<https://hal.science/hal-00654927>

Submitted on 23 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'IDEALISME TRANSCENDANTAL D'HERMANN WEYL FACE A L'HISTOIRE DE LA GEOMETRIE

Julien Bernard (CNRS-CEPERC, Aix-en-Provence),

www.philo-bernard.fr,

Colloque « Tendances actuelles en histoire des mathématiques », 20-21 octobre 2011.

Document de travail

Introduction

Je vais aborder aujourd'hui la question des rapports entre l'histoire de la géométrie et la philosophie. Et je vais aborder cette question dans un contexte philosophique particulier où elle revêt toute son importance : celui de l'*idéisme transcendantal de l'espace*.

La question centrale qui nous occupera sera la suivante :

En quoi est-ce que l'historicité de la géométrie, telle qu'elle s'est révélée à nous au XIXe et au début du XXe siècle, remet en question la thèse philosophique de l'idéalisme transcendantal de l'espace ?

Nous voulons diriger notre exposé vers la position particulière d'Hermann Weyl, dans les années 1917-1923, dans ce débat philosophique. Cet auteur est central à plusieurs points de vue pour poser cette question. En effet, il se trouve en quelque sorte *doublement* impliqué par cette question. D'une part, parce qu'il adopte lui-même une position philosophique sur l'espace qui s'apparente à l'idéalisme transcendantal. Et d'autre part, parce qu'il fait partie de l'histoire de la géométrie, et ceci à double titre. Non seulement, parce qu'il a lui-même participé à l'évolution historique de cette discipline, en ayant proposé une nouvelle fondation de la géométrie différentielle, mais encore parce qu'il fait lui-même, à l'occasion, œuvre d'historien de cette discipline. Il est donc, pour ainsi dire, partie prenante des deux côtés de la tension entre idéalisme transcendantal et histoire de la géométrie.

L'esthétique transcendantale, une tentative de fonder la géométrie sur des bases anhistoriques?

L'*Esthétique transcendantale* de Kant est la première partie de la *Critique de la Raison pure*. Kant y soutient que l'espace est la forme *a priori* de la sensibilité lorsqu'on considère celle-ci dans son rapport à tout objet *extérieur* possible¹.

Selon Kant, la sensibilité, faculté de la raison, peut être utilisée légitimement en dehors de tout rapport à l'expérience ; c'est ce qu'il appelle son *usage transcendantal*. C'est pour Kant le seul

¹ Par opposition au temps qui est la forme *a priori* de la sensibilité dans son rapport à tout objet possible, indifféremment interne ou externe.

moyen d'expliquer le fait que la géométrie existe comme une discipline formée de jugements apodictiques, c'est-à-dire nécessaires et universels. Puisqu'ils sont apodictiques, les jugements de la géométrie ne peuvent dériver de l'expérience. D'autre part, ils ne peuvent non plus être de simples jugements analytiques, c'est-à-dire des jugements sans contenu de connaissance, réductibles à une simple explicitation logique. Ils ne peuvent donc finalement qu'être ce que Kant appelle des *jugements synthétiques a priori*, à la fois porteurs d'une véritable connaissance, sans pour autant que cet apport de connaissance soit de nature expérimentale. Seul l'usage transcendantal de l'espace, comme forme *a priori* de notre sensibilité, peut donc chez Kant expliquer l'énigme épistémologique de l'existence de la géométrie avec son caractère, prétendument ou non, apodictique. L'ensemble de ces thèses kantienne est appelée « l'*idéalisme transcendantal de l'espace* ».

L'interprétation orthodoxe de l'Esthétique transcendantale et l'ahistoricité de la géométrie

Ce qui nous intéresse aujourd'hui dans cette théorie, c'est la façon dont on peut facilement l'interpréter comme une négation de la possibilité même d'une histoire de la géométrie. C'est ce qu'on appellera la « lecture orthodoxe » de l'Esthétique transcendantale. Selon cette lecture orthodoxe, puisque la géométrie est fondée selon Kant sur des intuitions pures, alors les axiomes de la géométrie d'Euclide (seuls connus à l'époque de Kant) doivent être donnés eux-mêmes par de telles intuitions, et s'imposer à nous de tout temps comme seuls fondements possibles.

Il semble donc à première vue que la géométrie ne puisse avoir d'histoire quand on suit une perspective kantienne. Plus précisément, il y a une histoire des théorèmes et une histoire des constructions mathématiques, mais non pas une histoire des axiomes. La géométrie devrait se dérouler historiquement comme une suite de théorèmes et de constructions de notions à partir d'axiomes qui, eux, seraient pour ainsi dire ahistoriques, donnés une fois pour toute à la naissance de cette discipline.

Dans ce qui suit, on utilisera toujours le terme « histoire de la géométrie » dans ce sens précis, c'est-à-dire pour dire en fait « histoire des principes de la géométrie ».

Nous voulons insister sur le fait que la tension existant entre l'histoire de la géométrie et l'idéalisme est propre à ce courant de pensée philosophique. En effet, en première approximation, on peut réduire les positionnements philosophiques quant à la nature de l'espace à trois positions : le réalisme empirique, le conventionnalisme, et l'idéalisme transcendantal. On va montrer que seul ce dernier courant reçoit l'historicité de la géométrie comme un problème.

Pour le réaliste, l'espace est un objet physique sur lequel on mène une enquête empirique, et la géométrie se construit alors comme une théorie physique qui évolue au fur et à mesure que notre compréhension des propriétés de cet objet avance. L'historicité de la géométrie ne pose pas de problème.

Pour le conventionnaliste, et nous pensons ici avant tout à Henri Poincaré, il y a différents systèmes géométriques tous aussi cohérents, et sans qu'il y en ait un qui s'impose nécessairement comme unique façon d'appréhender la réalité empirique. On comprend alors

qu'il puisse y avoir une histoire de la géométrie pour un conventionnaliste, pourvu qu'on entende simplement par là une histoire de la découverte des diverses façons possibles par lesquelles nous pouvons décider par convention d'appréhender la réalité empirique. Cette histoire ne serait pas nécessairement orientée, mais elle ne poserait pas problème.

Admettons donc que l'historicité de la géométrie n'est un problème en tant que tel que pour l'idéaliste.

L'historicité de la géométrie, (re?)-révélée par deux révolutions majeures

Cependant, comme il est bien connu, l'évolution de la géométrie au XIXe et au XXe siècle a démenti cette idée d'une anhistoricité des principes de la géométrie. Deux révolutions majeures ont imposé le *fait* de l'historicité des principes.

1) La première révolution

La première révolution, que je ne vais qu'évoquer brièvement, est la découverte de la possibilité *logique* d'une pluralité de géométries.

On peut distinguer trois directions selon lesquelles on peut étendre la pluralité des géométries possibles qui ont fini d'émerger au cours du XIXe.

a) Première direction : On sait qu'on peut stratifier la géométrie en couches de structures qui diffèrent par les éléments qu'on choisit de considérer comme fondamentaux, et qu'on choisit de laisser invariants. Suivant que ces éléments sont des voisinages, des droites, des vecteurs, des angles ou des mesures de longueur, on obtiendra successivement les géométries :

Topologique, Projective, Affine, Conforme ou Métrique.

Pour parler des différents niveaux existant selon cette première direction, je parle de « strates » pour signifier que ces niveaux s'organisent sous formes de couches qui se superposent les unes sur les autres².

b) Deuxième direction : A l'intérieur de la seule strate métrique, on peut constituer logiquement une pluralité de systèmes géométriques tous aussi cohérents les uns que les autres. Ici, c'est clairement le XIXe siècle, notamment par les travaux de Gauss, Lobatchevski et Bolyai, qu'on associe à la découverte des géométries non-euclidiennes, au sens des géométries qui nient le cinquième postulat d'Euclide. Avec les géométries non-euclidiennes,

² Cette première direction pour penser la pluralité des géométries est peu pertinente par rapport à la problématique kantienne. D'abord, parce qu'à l'époque de Kant, le processus historique de la découverte de ses strates était déjà bien avancé. Kant devait en être conscient et cette stratification ne doit pas poser de problème pour sa position philosophique. De fait, dans la mesure où il y a une strate plus riche que les autres, la strate métrique, qui contient à elle-seule l'ensemble des structures. On peut donc facilement retrouver une unité derrière cette pluralité.

cette liberté de choix dans les axiomes est manifestée au niveau de la strate métrique. Mais, on pourrait l'étendre aux autres strates.

c) Troisième direction : Elle tient à l'épanouissement de la géométrie différentielle, notamment grâce aux travaux de Gauss, Riemann et de leurs successeurs. Cela a révélé une richesse inépuisable de géométries, richesse qui n'est plus due à la simple possibilité de nier de multiples façons le 5^{ème} postulat d'Euclide, mais à une conception radicalement nouvelle de la géométrie. En effet, on accorde à l'espace lui-même la même liberté de courbure variable en chacun de ses points, qu'on avait accordé jusque là aux seules *surfaces* que l'on plongeait dans l'espace euclidien. La notion même de géométrie est radicalement modifiée. Cela est perceptible dans le fait qu'elle cesse d'être entièrement axiomatisable, et que seule la science physique semble alors en mesure de remplir le vide conceptuel laissé par cette impossibilité de d'axiomatisation totale.

Ainsi, le dix-neuvième siècle démontre, par leur construction même, l'existence d'une pluralité infinie de géométries logiquement concevables.

2) La deuxième révolution

La seconde grande révolution dans l'histoire de la géométrie ce sont les théories de la relativité d'Einstein.

Avec ces théories, pour la première fois, la géométrie euclidienne est remise en question, non plus seulement en tant qu'on lui trouve des substituts logiquement possibles, mais en tant qu'elle cesse d'être le système géométrique légitime pour parler de l'espace tel qu'on le trouve dans la physique. La chrono-géométrie de Minkowski, qui s'impose en relativité restreinte, n'est pas de nature euclidienne mais pseudo-euclidienne. Cependant, le pas conceptuel le plus important est franchi en relativité générale. En effet, les structures métriques cessent d'y être entièrement descriptibles par une axiomatique. Elles nécessitent la géométrie différentielle des espaces courbes pour en rendre raison, et donc l'intrusion de la physique dans la géométrie pour caractériser la valeur effective que va prendre la courbure en chaque point de l'espace, en fonction du contenu matériel qui s'y trouve.

C'est ici que l'idéalisme transcendantal de l'espace, tel que le comprend l'interprétation orthodoxe, est le plus vigoureusement mis en question. D'une part, le caractère anhistorique des principes de la géométrie est nié par la révolution même qu'Einstein a opéré à la base de la géométrie. D'autre part, avec la nécessité d'adopter *comme fondement de la notion d'espace*³,

³ J'insiste ici encore une fois sur le fait que ce qui pose problème ce n'est pas de pratiquer la géométrie différentielle. Si on fait de la géométrie différentielle pour faire de la géodésie à la surface d'un corps comme la surface terrestre, cela ne pose pas de problème conceptuel. Le saut problématique consiste à poser que la géométrie différentielle est le fondement non pas de la mesure des objets plongés dans l'espace, mais est la vérité de la structure de l'espace lui-même.

une géométrie différentielle, c'est la prétention de pouvoir circonscrire *a priori* la structure complète des relations métriques possibles dans l'espace qui est remise en cause.

Devenir de l'idéalisme transcendantal de l'espace à l'époque post-relativiste

Un fait qui peut sembler étonnant au vu de cette aventure intellectuelle est que, malgré l'obsolescence de la lecture orthodoxe de l'Esthétique transcendantale, la position idéaliste en philosophie à propos de l'espace a su s'adapter et survivre à ces bouleversements. Les acteurs de ce renouveau de l'idéalisme sont d'abord les philosophes néokantiens de l'école de Marbourg, mais aussi certains scientifiques comme Hermann Weyl ou Sir Arthur Eddington, qui ont adopté un point de vue idéaliste au sein même de leur travail scientifique.

Les deux réaménagements de la notion d'apriorité

Les révolutions dans l'histoire de la géométrie ont obligé le courant philosophique idéaliste à réaménager la notion d'apriorité relative à l'espace, selon deux perspectives différentes.

Le problème de la portée de l'apriorité

D'abord, il va s'agir de réaménager la *portée* de la notion d'a priori au sein du concept d'espace. La lecture orthodoxe de l'Esthétique transcendantale suppose que tout le contenu de la géométrie euclidienne (la structure des relations métriques, la dimension 3, etc.) était soutenu par des jugements synthétiques *a priori*.

La relativité générale oblige à restreindre cette portée de l'apriorité puisque, nous l'avons vu, l'intégralité de la structure des relations métriques possibles dans l'espace ne peut être fixée a priori. Selon Einstein, par exemple, on ne peut prétendre que l'ensemble des relations métriques possibles au sein du système solaire soit déterminable *a priori* puisque cet ensemble de relations possibles dépend de caractéristiques physiques contingentes des corps du système solaires, à savoir la répartition de leurs masses-impulsions. Ainsi, si on donne au terme « géométrie » un sens large, englobant le corps de toutes les connaissances qui conduisent à une caractérisation des relations métriques possibles dans l'espace, alors on ne peut plus soutenir que l'ensemble de la géométrie post-relativiste ait un statut a priori.

Le problème de la teneur de l'apriorité

Il y a une deuxième perspective selon laquelle la notion d'apriorité a du se renouveler. Il s'agit de savoir si les éléments *a priori* de la géométrie post-relativiste ont le même statut épistémologique qu'avait la géométrie euclidienne pour l'interprétation orthodoxe de l'Esthétique transcendantale. Sont-ce toujours des éléments issus d'un usage transcendantal de la sensibilité ? Sont-ils plutôt relatifs à une autre faculté *a priori* de la raison ? Ces éléments *a priori* sont-ils appréhendés par une intuition qui nous les impose immédiatement avec évidence ? Passent-ils au contraire par la médiation d'une analyse conceptuelle qui demande le temps nécessaire à toute connaissance discursive pour se déployer ?

Voyons maintenant comment Weyl répond à ce double problème de la portée et de la teneur de l'apriorité au sein de la connaissance géométrique post-relativiste.

Portée de l'apriorité dans la pensée géométrique de Weyl

La question de la portée de l'apriorité en géométrie est explicitement posée par Weyl. Il crée même un vocabulaire pour formuler cette question. En effet, Weyl veut faire la différence entre les valeurs contingentes des coefficients de la métrique en relativité générale, et la forme générale de la métrique, c'est-à-dire le fait qu'elle soit une forme quadratique, qui est quelque chose de posé a priori. C'est pourquoi il appelle cette forme générale de la métrique : la *Nature de la métrique* (Natur der Metrik) ou parfois la Nature de l'espace (Natur des Raumes). L'idéalisme de Weyl à l'égard de cette nature de l'espace, est sans équivoque. Elle est reliée, dit-il, à l'espace comme forme de notre intuition, ou comme une forme des apparences.

Le problème de la portée de l'apriorité en géométrie, prend donc chez Weyl la forme de la question :

Qu'est-ce qui, au sein des relations spatiales, est déterminé par la nature même de l'espace ?

Sa réponse est claire : la nature de l'espace détermine le champ des relations spatiales *infinitésimales*⁴ ainsi que le mode de connexion qui lie un espace infinitésimal à ses voisins.

Autrement dit, ce qui doit être déterminé *a priori* dans la géométrie, ce sont les structures locales de l'espace. En revanche, le domaine des relations spatiales à distance finie est laissé indéterminé par la nature même de l'espace. Il sort du domaine légitime de la raison pure. Conformément à la tradition ouverte par Riemann, c'est la *physique* qui, chez Weyl, va régner sur ce domaine de la géométrie, libéré de l'emprise de la raison.

Cette conception de la géométrie est appelée par Weyl « Nahegeometrie » qu'on peut traduire par « géométrie de contact ». Il se repose ici sur la terminologie physique qui oppose une « physique par contact », la physique des champs, à une physique à distance, celle de Newton. Il ne faut pas interpréter « géométrie de contact » au sens où il n'y aurait aucune structure spatiale à distance finie, mais au sens où seules les notions métriques infinitésimales sont une donnée primitive de la notion d'espace, tandis que les notions métriques à distance sont dérivées par intégration mathématique des structures infinitésimales. Cette intégration doit tenir compte de la façon dont ces espaces infinitésimaux sont connectés les uns aux autres pour former l'espace entier. Le mode de connexion, imposé lui aussi par la nature de l'espace, intervient pour établir le mode général par lequel les structures métriques locales vont pouvoir

⁴ En fait, il y a des indices dans les différentes éditions d' *Espace-Temps-Matière* d'une évolution de la pensée de Weyl quant à la portée de l'espace comme forme a priori de notre intuition. Il semble qu'en premier lieu, il ait cru que la seule chose qui était fixée a priori était la topologie de l'espace-temps. C'est pourquoi, dans certains textes précoces d' *Espace-Temps-Matière*, il identifie l'espace (en ce sens là) avec la notion de variété à 3 dimension (où 4 si on comprend le temps) toute nue, c'est-à-dire sans structure métrique. Cela le conduit donc en quelque sorte à soutenir la thèse que la métrique n'est pas une propriété de l'espace en lui-même, mais seulement dans son rapport à la matière. Selon ensuite, il se serait rendu compte qu'outre l'aspect topologique, la structure métrique locale était un invariant de la théorie. Il défendra alors que la forme a priori de notre intuition impose la nature de l'espace, qui comprend la forme des structures métriques infinitésimales. Cf. nos travaux à ce sujet : ??thèse ??article sur le trou, et ?? texte de CLMPS.

se transporter infinitésimalement d'un point vers un point voisin. C'est les fondements de la notion mathématique de connexion. Le transport des structures spatiales sur une distance finie suppose la connaissance des coefficients de la connexion qui, comme pour les coefficients de la métrique, sont variables d'un point à un autre selon une loi qui dépend, selon la physique d'Einstein, du contenu matériel de l'espace.

Les innovations mathématiques liées à l'idée de Nahegeometrie

En effet, Weyl remarque que la notion de mesure chez Riemann ne respecte pas complètement le schéma de la Nahegeometrie. De ce point de vue, il y a des « impuretés » dans la notion d'espace de Riemann. Pour bien comprendre où se situe cette impureté, il faut se rappeler de la structure stratifiée de la géométrie en couches : topologique, projective, affine, conforme, métrique.

Ce que va dénoncer Weyl c'est que la notion de direction, c'est-à-dire la strate affine de la géométrie, est bien structurée chez Riemann selon le schéma épistémologique de la Nahegeometrie. En revanche, la notion de mesure de la longueur, c'est-à-dire la strate métrique à proprement parlé ne respecte pas ce schéma.

En effet, la structure d'un espace de Riemann permet de donner un sens au transport d'un vecteur le long d'un chemin. C'est ce qu'on montrera les continuateurs de ses travaux que sont Christoffel, Ricci et Levi-Civita. Et, sur le plan de la direction, le schéma de la Nahegeometrie est bien respecté. La comparaison de la direction de deux vecteurs pointés en deux lieux différents de l'espace n'a pas de sens. Seule la comparaison entre les directions de deux vecteurs infiniment proches est directement douée de sens. Et la comparaison à distance s'effectue bien par intégration de comparaisons infinitésimales le long d'un chemin. Cette comparaison est dépendante du chemin. Par contre, la notion de longueur, toujours chez Riemann, prend immédiatement sens à distance, et ceci par une hypothèse explicite de Riemann. Ici, le schéma de la Nahegeometrie est violé. Selon Weyl, il va donc falloir réviser les fondements de la géométrie différentielle pour les épurer de ces éléments de « géométrie à distance » et parvenir à ce que Weyl appelle une *géométrie infinitésimale pure*.

Il parvient dès 1918 à achever cette refondation de la géométrie selon le schéma de la Nahegeometrie. Le rôle de Weyl dans cet achèvement est de deux ordres.

1) Premièrement, il va faire subir une mutation conceptuelle à la notion de connexion de Levi-Civita pour en faire une notion parfaitement interne à la strate affine de la géométrie, indépendante de toute considération métrique. On pourra alors l'appeler proprement une *connexion affine*.

Pour comprendre cela, il faut donner quelques éléments historiques. C'est dans les travaux de Christoffel qu'apparaissent pour la première fois ce qu'on appelle encore de nos jours les « symboles de Christoffel ». Ils sont définis en coordonnées par une formule qui, au changement de notation près, n'a pas changé :

$$\left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\}^k = \sum_{\alpha} -\frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

Mais ce ne sont chez Christoffel, que des intermédiaires de calculs, apparus pour répondre à un problème qui n'est pas directement lié à l'idée du transport de structures dans l'espace. Ce sont les travaux de Ricci et de Levi-Civita qui consacrent l'utilisation de ces symboles pour définir la notion du transport parallèle de vecteurs dans un espace de Riemann. L'usage a changé par rapport à Christoffel, mais la définition de la connexion de Ricci-Levi-Civita est la même, par la formule ci-dessus. On se trouve donc avec une entité qui, du point de vue de la stratification de la géométrie, a un statut qui n'est pas bien défini. En effet, la notion est définie par le biais de la forme quadratique $g_{\mu\nu}$. Sa définition repose donc sur la donnée de la strate métrique. En revanche, du point de vue de sa signification, elle est essentiellement un objet affine puisque, comme l'a montré Weyl, elle agit en fait seulement sur la *direction* des vecteurs et non pas sur leurs longueurs.

Le premier apport de Weyl est donc de donner une nouvelle définition de la connexion qui est indépendante de la strate métrique, et repose uniquement sur les propriétés formelles qu'elle doit satisfaire pour jouer son rôle d'indication de la façon dont les directions peuvent se prolonger d'un point de l'espace à un point voisin.

2) Le deuxième apport de Weyl concerne les strates conformes et métriques de la géométrie. Il commence par débarrasser la forme quadratique riemannienne, le $g_{\mu\nu}$, de l'hypothèse selon laquelle elle nous donnerait directement la possibilité de comparer les longueurs de deux vecteurs à distance. Pour se faire, il ne considère plus qu'il y a une forme quadratique $g_{\mu\nu(P)}$ rattachée à chaque point P de l'espace, mais une famille $[g_{\mu\nu}]_{(P)}$ de formes quadratiques qui sont reliées les unes aux autres par la multiplication par un scalaire λ arbitraire. Le $g_{\mu\nu}$, dans un espace de Weyl, ne donne donc plus d'information sur la mesure absolue d'un vecteur, indépendamment de sa position, mais uniquement sur les rapports entre les mesures de vecteurs pris en un même point. Le $g_{\mu\nu}$ est devenue essentiellement un objet qui nous renseigne sur la strate conforme de la géométrie.

Enfin, Weyl montre alors que, pour compléter la strate métrique selon le schéma de la Nahegeometrie, il faut faire intervenir un nouvel objet mathématique, qu'il appelle la *connexion métrique*, c'est en fait une forme différentielle qui est au transport des longueurs, ce que la connexion affine est au transport des directions. Il montre que ces deux types de connexions s'harmonisent naturellement. Si bien, qu'Hermann considère qu'il est parvenu à une géométrie infinitésimale pure, c'est-à-dire une géométrie qui est parfaitement conçue, dans chacune de ses strates, selon le programme de la Nahegeometrie, de la géométrie de contact.

(cf. tableau)

Le Sujet-Ponctuel : justification de la portée de l'apriorité

Pour justifier la réponse de Weyl quant à la portée de l'apriorité, il faut donner quelques éléments de son analyse de la notion de sujet.

Pour Weyl, toutes les mesures qui fondent la géométrie et la science physique, sont effectuées en premier lieu par un sujet individuel qui est situé en un emplacement ponctuel du monde.

C'est pourquoi Weyl représente souvent le sujet qui intervient en physique, comme un œil ponctuel essayant de se forger une image du monde à partir des rayons lumineux qu'il reçoit.

Pour atteindre l'objectivité des mesures, y compris des mesures purement géométriques, il faut arriver à éliminer, dans le phénomène de la mesure, ce qui ne provient que de contingences dues à la limitation des capacités perceptives du sujet, et à la singularité de son positionnement dans le monde.

Pour ce qui est des limitations dues à la nature limitée de notre perception, la géométrie arrive à s'en abstraire totalement. Ainsi, le continu mathématique, constitué de points rigoureusement isolés, vient-il remplacer continu intuitif de la perception où les continua forment des totalités aux contours flous, non décomposables en points.

Par contre, pour ce qui est de la singularité du positionnement de l'observateur, la géométrie et la physique ne peuvent l'éliminer purement et simplement. Le système de coordonnées, dit Weyl, subsiste comme un résidu de cette tentative d'élimination de l'égo. (texte ??)

Ainsi, l'origine du système de coordonnées représente au niveau mathématique la contingence irréductible du point de vue singulier qu'occupe le sujet dans le monde qu'il décrit. C'est une donnée immédiate, impossible à circonscrire totalement par une description conceptuelle. Le conceptuel c'est l'ensemble des descriptions qu'on peut construire logiquement, à partir des notions primitives de la géométrie (par exemple : les notions de point, de droite et d'incidence). Mais, pour servir à la description du monde, ce schéma conceptuel doit s'ancrer sur un donné intuitif. En effet, la structure conceptuelle de l'espace étant homogène, aucun point ne peut être individué par une description conceptuelle. Il faut alors avoir recours à un donné intuitif minimal qui suffise à individuer chaque point du cadre conceptuel, pour ensuite pouvoir l'ancrer dans la réalité effective.

Et ce donné minimal c'est le système de coordonnées. Celui-ci ne se décrit donc pas. Il se montre. Au niveau purement mathématique, cette monstration n'est qu'un geste, presque vide de sens, en attente de recevoir un contenu physique. La monstration du système de coordonnées se réduit à la dénomination qu'on lui donne sur le papier, ou au geste du tracé d'un repère sur un tableau. Mais ce geste prend tout son sens sitôt qu'on ne se trouve plus en mathématique pure, mais dans l'application de la géométrie à la saisie effective des relations spatiales du monde physique. Car, alors, on ne peut ancrer le cadre conceptuel de la géométrie dans la réalité qu'à partir du point de vue individuel donné par ce système de coordonnées.

Pourtant, la géométrie parvient à une forme d'intersubjectivité, par le fait qu'on sait caractériser conceptuellement la façon dont notre description de l'espace va se transformer dans le passage d'un système de coordonnées à un autre. A défaut de pouvoir ignorer purement et simplement le système de coordonnées, on s'en abstrait par la connaissance des transformations qui, en liant un système de coordonnées à un autre, opère sur les objets géométriques. Weyl nous donne les moyens conceptuels de penser la calcul tensoriel et, on pourrait le montrer, en lien avec ses idées concernant les fondements des mathématiques pures.

Enfin, dès que l'enjeu est la construction par le sujet de la notion d'espace, on ne peut faire abstraction du fait qu'il est un être incarné qui n'a d'accès à la réalité extérieure que par l'intermédiaire de ses sens et donc de son corps qui participe de la nature physique. Dans un monde physique où toute interaction est essentiellement localisée et ne se fait que « de proche en proche », le sujet n'a accès qu'à son environnement immédiatement par l'entremise de son corps. Si donc, conformément à la tradition idéaliste, la raison est une faculté capable d'imposer *a priori* la forme de notre rapport au monde, cela ne peut pour Weyl être légitime que dans la sphère des relations de proximité, la seule auquel le sujet soit rattaché immédiatement de par son incarnation dans un corps essentiellement localisé.

C'est le point capital sur lequel Weyl souhaite se démarquer de la philosophie de Kant. Celle-ci prétend que la structure de l'espace euclidien puisse être imposé par la forme de notre intuition, à toute l'étendue du monde, comme dans la physique de Newton. En prétendant cela, Kant a commis le type d'erreur qu'il reproche habituellement à ses opposants. Il a laissé la Raison légiférer hors du domaine où il était légitime de le faire, c'est-à-dire, selon Weyl, dans le domaine de l'infinitésimal, seul domaine auquel le sujet est un accès intuitif par l'entremise de son corps. En aucun cas la raison ne peut légitimement étendre de façon rigide, la structure localement (pseudo-)euclidienne de l'espace, à toute l'étendue du cosmos éloignée du Sujet-Observateur.

Teneur de l'apriorité dans la pensée géométrique de Weyl

La question de savoir le statut exact que donne Weyl aux éléments a priori de la connaissance géométrique beaucoup plus difficile à saisir. En effet, contrairement aux textes abondants où Weyl traite de la portée de l'apriorité, il n'y a pas de texte où il thématise en détail sa teneur. Ici, le travail de l'historien de la philosophie est plus difficile. Il s'agit de réunir quelques indices épars, et surtout de partir de la fonction que jouent chez Weyl les éléments a priori au sein de sa construction des fondements de la géométrie.

Le problème de l'espace : naissance chez Riemann

Chez Weyl, la nature de l'espace est une conquête conceptuelle. Elle est le fruit d'un travail de fondement que Weyl nomme l'analyse mathématique du problème de l'espace et duquel il vient à bout pour l'essentiel autour de l'année 1921.

Ce que Weyl appelle « problème mathématique de l'espace » consiste à trouver des critères a priori pour justifier la nature de la métrique, c'est-à-dire le fait qu'on prenne une forme quadratique différentielle définie positive (dans le cas de l'espace) ou de signature $(-+++)$ (dans le cas de l'espace-temps). C'est un problème qui a déjà une tradition, à l'époque de Weyl, ayant été posé pour la première fois par Riemann, et repris d'une autre manière par Hermann von Helmholtz et Sophus Lie. Notre analyse de la teneur de l'apriorité chez Weyl consistera à replacer son travail sur le problème de l'espace par rapport à ceux de Riemann et Helmholtz.

Dans son texte d'habilitation, *Sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie*, Riemann développe la notion d'une variété différentiable. S'appuyant sur la représentation numérique des fonctions définies sur ces variétés, il s'interroge alors sur l'étendue a priori de toutes les

fonctions numériques concevables qui peuvent servir à définir une notion de mesure sur une telle variété, où par « mesure » il faut entendre la mesure d'un élément linéaire infiniment petit « $ds(x, dx)$ ».

Dans son texte, Riemann pose essentiellement deux hypothèses qui peuvent être interprétées comme des réquisits de compatibilité entre la structure différentiable de la variété et la métrique qu'on veut définir dessus. Riemann pose en effet :

- 1) Que la distance entre deux points doit rester stationnaire quand on déplace les deux points d'une quantité infinitésimale. En particulier, « La mesure de l'élément linéaire pourra être une fonction homogène quelconque du premier degré des quantités dx^i qui restera invariable lorsqu'on changera le signe de toutes les quantités dx^i »
- 2) Que les « sphères » dans notre variété métrique, c'est-à-dire l'ensemble des points à une distance fixée (suffisamment petite) d'un point pris comme centre, doivent former des hypersurfaces, c'est-à-dire des sous-variétés de dimension $n-1$ (si n est la dimension de la variété)

Ces deux hypothèses (dont seule la première est explicitée comme telle) permettent à Riemann de montrer que l'expression générale la plus simple pour la métrique est d'être la racine carrée d'une forme quadratique différentielle. Ainsi, se trouve fondée l'hypothèse de base des espaces de Riemann selon laquelle la métrique s'écrit :

$$ds(x, dx) = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$$

Riemann s'en tient à ces quelques éléments. La principale difficulté apparente, se sa solution au problème de l'espace, tient au fait que son analyse n'exclut pas totalement d'autres formes mathématiques possibles pour la métrique. Cette forme n'est que la forme « la plus simple ». En particulier, la solution riemannienne au problème de l'espace n'exclut pas que la métrique puisse être la racine quatrième d'une forme d'ordre 4, c'est-à-dire quelque chose comme cela

$$ds(x, dx) = \sqrt[4]{g_{abcd}(x) dx^a dx^b dx^c dx^d},$$

voire d'autres formes encore plus complexes.

Ce qui nous importe c'est de bien remarquer que les hypothèses que Riemann pour justifier la nature de la métrique, à savoir le caractère différentiable de l'espace et les hypothèses de compatibilité de la structure différentiable avec la notion de mesure, ne sont en aucun cas des hypothèses testables expérimentalement. Elles ont bien le statut d'hypothèses a priori qui sont des conditions a priori de toute mesure possible. Chez Riemann, comme chez Weyl par la suite, il y a déjà cette rupture épistémologique entre une *nature* de la métrique, qui est fondée a priori, et les coefficients de la métrique, dont la détermination fonctionnelle va dépendre de l'expérience. La rupture épistémologique est la même. Weyl ne fera que systématiser l'idée que cette fracture suit la ligne de démarcation entre l'infinitésimal, et le finiment éloigné, et il apportera en plus l'idée d'aller chercher dans la nature du sujet incarné dans le monde la justification de cette fracture.

Le problème de l'espace chez Helmholtz

Après Riemann, le problème de l'espace sera repris d'une nouvelle façon par Helmholtz sous un nouvel angle qui va en changer la solution. Helmholtz part aussi du fait que l'espace a des propriétés topologico-différentielles qui en font une variété (**Axiome 1**). Les points de l'espace sont donc coordonnés par des points. Puis, comme Riemann, il pose l'existence d'une fonction numérique entre les coordonnées des points qui va exprimer leur distance. Mais, contrairement à Riemann, il considère des distances finies, et non pas la mesure d'éléments infinitésimaux.

Il pose alors

Axiome 2 : L'existence des corps rigides mobiles.

Pour Helmholtz une telle supposition est nécessaire pour donner sens à l'idée même de mesure, celle-ci ne pouvant être effectuée selon lui sans cette supposition que les corps, en particulier ceux qui vont servir de référence à la mesure, par exemple les règles, peuvent se déplacer n'importe où dans l'espace sans modifier leurs relations métriques internes.

Axiome 3 : La mobilité des corps rigides est complètement libre.

Cela signifie, par exemple, qu'une fois fixé un point d'un corps rigide, je peux encore déplacer un deuxième point du corps vers n'importe quel point situé à la bonne distance du point que j'ai déjà fixé. Autrement dit, non seulement je peux translater n'importe où mes corps rigides, mais je peux librement les orienter dans l'espace.

Axiome 4 : L'axiome de non-monodromie. Qui dit, grosso modo, qu'après avoir fait tourner un corps rigide sur lui-même d'un tour complet, il se superpose avec son ancienne position.

Helmholtz traite ces axiomes en termes d'une combinatoire faisant intervenir le nombre de dimensions du groupe des déplacements (translations et rotation) de ces corps rigide. C'est donc une approche qui annonce les notions de groupe et d'algèbre de Lie qui seront développés à la même période.

Le théorème démontré alors par Helmholtz montre que, ces axiomes étant posés, que non seulement la métrique doit être nécessairement une forme quadratique, mais de plus, elle doit être nécessairement ce qui correspondrait chez Riemann à un espace à courbure constante.

Il rajoute alors, seulement après coup, des axiomes supplémentaires : la dimension 3 de l'espace, et l'hypothèse de l'étendue infinie de l'espace. Seule la géométrie euclidienne usuelle est alors compatible avec toutes ses hypothèses. Son point de vue est donc finalement conservateur. Il réhabilite la vieille géométrie euclidienne, au niveau fondationnel, au détriment du point de vue différentiel de Riemann.

Voilà, où en est le problème de l'espace lorsque Weyl le reprend à son compte en 1921.

Le problème de l'espace chez Weyl

Weyl est d'accord avec Helmholtz sur l'insuffisance du traitement riemannien de la question. Il faut pouvoir déterminer si la métrique la plus générale possible est bien la métrique riemannienne, la racine carrée d'une forme quadratique, ce que Weyl appelle une métrique pythagoricienne, parce qu'elle vérifie le théorème de Pythagore généralisé.

Conformément à l'esprit de la Nahegeometrie, Weyl ne prétend pas déterminer l'ensemble des relations métriques mais uniquement les relations métriques infinitésimales. Comment les caractériser ?

On va devoir caractériser en chaque point P de notre variété, le groupe continu G_P de toutes les rotations infinitésimales, c'est-à-dire de toutes les transformations linéaires sur l'espace T_P tangent au point P qui conservent la métrique. Ainsi, l'algèbre permet de reformuler la question de la détermination de la nature de la métrique, par la question de la caractérisation du groupe des rotations infinitésimales, qui, pour des raisons simples, doit être un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{R})$ le groupe des transformations linéaires de déterminant 1⁵. Deux groupes $G_P, G_{P'} \subset SL_n(\mathbb{R})$ pourront être considérés comme de même espèce, si on peut passer de l'un à l'autre par un simple changement de coordonnées, ce qu'on doit comprendre comme une simple réorientation de notre espace. Cela advient s'il y a une matrice U de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$G_{P'} = \{B \mid \exists A \in G_P \quad B = UAU^{-1}\}$$

Après avoir caractérisé algébriquement chaque structure métrique locale individuelle associée à des points isolés de l'espace, il faut ensuite exprimer algébriquement la notion de connexion métrique, c'est-à-dire connecter ensemble ses structures métriques locales. Cela se fait en caractérisant parmi toutes les bijections linéaires de T_P vers $T_{P'}$, celles qui sont considérées comme des *transports congruents*.

Hermann Weyl remarque que si « A » est un tel transport congruent de T_P vers $T_{P'}$, et si on considère $G \in G_P$, alors l'application (AoG) obtenue par composition de ces deux applications sera elle-même un transport congruent. L'ensemble, que nous noterons « $G_{P \rightarrow P'}$ », des transports congruents de T_P vers $T_{P'}$ est alors obtenu à partir d'un élément A de l'ensemble par l'opération :

$$G_{P \rightarrow P'} = \{(AoG) \mid G \in G_P\} = \{(GoA) \mid G \in G_P\}$$

En considérant l'application « A^{-1} », inverse de « A », on obtient en composant une fois de plus, l'application « $A^{-1} \circ GoA$ » ($A \in G_{P \rightarrow P'}, A^{-1} \in G_{P' \rightarrow P}, G \in G_P$) qui doit être un élément de G_P . Ainsi, l'application :

$$A^{-1} \circ \bullet \circ A : \quad G_{P'} \rightarrow G_P$$

⁵ L'idée qu'il y a une mesure naturelle des volumes dans une variété différentiable, avant même toute considération proprement métrique, semble à voir avec l'hypothèse de Riemann sur le fait qu'un élément linéaire a une longueur stationnaire quand on le déplace infinitésimalement.

$$G \rightarrow A^{-1}oGoA$$

établit un *isomorphisme de groupe* de G_p , vers G_p .

On voit donc que les espaces décrits par Weyl, tout comme ceux décrits par Euclide, Klein, Lie, ou Helmholtz, sont homogènes. C'est-à-dire, que la structure métrique vue depuis un point de l'espace, est la même que la structure métrique vue depuis un autre point de l'espace,. Si bien que, pour reprendre le phrasé de Helmholtz, un corps rigide peut bien se déplacer indifféremment en chaque point de l'espace. Mais, la différence fondamentale, c'est qu'avec Weyl cette homogénéité n'a un sens que local. Ce n'est pas la structure métrique globale de l'espace qui est vue à l'identique depuis chaque point de l'espace. C'est uniquement la structure métrique locale, infinitésimale, ce qui s'exprime par l'isomorphie des groupes de rotations infinitésimales.

Autrement dit, Weyl est d'accord avec Helmholtz que la possibilité de déplacer un corps rigide est une hypothèse fondamentale de la géométrie. Mais ce n'est pas la mobilité d'un corps rigide au dimensions finie qu'il faut poser. En accord avec la Nahegeometrie, c'est plutôt la mobilité d'un corps rigide infinitésimal.

La différence est absolument essentielle, d'un point de vue épistémologique, car toute interprétation empiriste d'un tel postulat de mobilité et de la façon dont il se réalise dans l'a réalité physique est rendue , contrairement à ce qui se passait avec le corps rigide à dimension finie de Helmholtz.

Une fois posé algébriquement ce cadre général des Nahegeometrie, Weyl entend résoudre le problème de l'espace en posant simplement deux axiomes :

<u>Axiome 1</u> : La nature de l'espace n'impose aucune restriction à la connexion métrique.
--

Il faut comprend que, même lorsque les groupe G_p , G_p , ... des rotations infinitésimales associées à chaque point de l'espace sont déterminés, à isomorphie près, l'ensemble des transports congruents $G_{p \rightarrow p'}$ reste encore parfaitement indéterminé⁶.

Ce premier axiome inscrit donc, au cœur du fondement de la géométrie, l'idée de la rupture épistémologique radicale entre l'infinitésimal et le fini. La détermination locale des structures métriques ne doit pas limiter la liberté de connexion qui joue pour déterminer les relations spatiales à distance finie.

Le deuxième axiome s'exprime ainsi :

<u>Axiome 2</u> : La connexion affine est uniquement déterminée par la connexion métrique.
--

⁶ Pour développer ceci précisément, Weyl effectue un travail qui consiste, grosso modo, à passer de la considération des groupes de Lie G_p à leurs algèbres de Lie. Idem pour $G_{p \rightarrow p'}$.

Ce deuxième axiome établit les liens fondamentaux entre la strate affine et la strate métrique de la notion d'espace. Il affirme que, une fois la connexion métrique donnée, c'est-à-dire la façon dont la notion de longueur est transportée d'un point de l'espace à un autre, il doit y avoir exactement *une* connexion affine qui soit telle que le vecteur, lors de son transport, conserve sa longueur. Ainsi, la notion de rectitude doit, en définitive être dérivée de la relation de mesure.

Le théorème de Weyl (en fait encore incomplet en 1921) nous dit alors :

Théorème de Weyl pour la résolution du problème de l'espace:

Les seules géométries infinitésimales répondant aux deux axiomes sont celles dont la nature de la métrique est pythagoricienne.

La solution de Weyl aboutit donc à la détermination unique d'une structure métrique, celle donnée par un espace de Weyl. Donc une classe de formes quadratiques différentielle $[g_{\mu\nu}]$ plus une connexion métrique $d\varphi$. Ce théorème est donc la consécration de cette vision rationaliste, aprioriste, de la géométrie dans ses aspects locaux (infinitésimaux).

L'idéalisme de Weyl et l'historicité de la géométrie

Après avoir caractérisé l'idéalisme de Weyl en géométrie, sa portée et la nature des fondements a priori qu'il propose, je reviens à notre question initiale.

Puisque l'historicité de la géométrie est un problème face à tout idéalisme transcendantal de l'espace, comment Weyl y fait-il face?

Non évidence des principes et faiblesse de la nature humaine

D'abord, il faut remarquer que les éléments a priori de sa géométrie ne peuvent prétendre au même statut évidence qu'ont les axiomes d'Euclide. Chez Weyl, les éléments a priori de la géométrie sont certes fondés en nous. Ce sont des hypothèses rationnelles par lesquelles nous donnons un sens a priori à la mesure. Mais ils ne sauraient s'imposer par une simple introspection immédiate.

L'analyse mathématique du problème de l'espace est une conquête mathématique qui lie ensemble des éléments a priori : l'homogénéité de l'espace, la liberté de la connexion, la détermination de la connexion affine. Mais ces éléments n'ont pu devenir explicites pour nous en tant que fondements, qu'à travers la longue évolution historique de la géométrie, et en particulier les deux révolutions dont nous avons parlé au début de notre exposé.

Ainsi, l'apriorité pour Weyl ne signifie pas l'évidence. On ne peut découvrir les éléments a priori une spéculation qui n'aurait pas été préparée par une pratique mathématique. C'est pourquoi Weyl est méfiant à l'égard des métaphysiciens. Il nous dit « ce sont les plus impatients d'entre les savants ». En droit, dit Weyl, ils ont raison de penser que la théorie de la connaissance et les fondements a priori des sciences doivent précéder le mouvement historique de la science, comme un préliminaire. Mais, dans les faits, la faiblesse de la nature humaine est telle qu'on ne parvient pas à ces éléments a priori par un simple retour sur soi spéculatif. La faiblesse de la raison humaine oblige à passer par la médiation de l'histoire des sciences pour mettre à jour progressivement les éléments a priori de la connaissance, qui pourtant, de droit, devrait précéder.

Le fait que la géométrie ait une histoire, pour Weyl n'est donc pas le signe que les principes de la géométrie ont un statut empirique. C'est simplement parce, en raison de la faiblesse de la nature humaine, il nous faut passer par une époque de tâtonnements où les principes a priori de la géométrie vont petit à petit être explicités.

L'histoire de la géométrie comme histoire d'une épuration

Les axiomes de la géométrie, dans les premiers temps de l'histoire mêlent, sans que nous nous ne rendions immédiatement compte, les véritables éléments a priori de la notion d'espace, avec des éléments contingents, issus de l'expérience ou de préjugés infondés.

Ainsi, Euclide avait-il posé que la structure euclidienne, qui semble s'imposer à nous dans notre voisinage immédiat se prolonge à l'identique et de façon rigide sur toute l'étendue du cosmos. Il n'était pas suffisamment conscient de la nature fondamentalement localisée du sujet, qui interdit sur le plan épistémologique de pouvoir poser a priori une telle prolongation. Riemann découvre cette inconsistance et l'élimine pour parvenir à la notion d'espace de Riemann. Cette élimination est permise, certes, par l'analyse épistémologique profonde de Riemann. Mais il n'est pas un métaphysicien spéculatif. S'il a pu produire cette analyse épistémologique, c'est parce qu'elle était préparée par les analyse inhérentes à l'histoire de la géométrie qui précédait. On redonne ici à « histoire de la géométrie » son acception la plus large, qui dépasse la simple histoire des axiomes. Pour Riemann, ce sont les progrès dans la compréhension de la géométrie différentielle qui l'ont guidé, entre autres les travaux de Leonard Euler et de Friedrich Gauss. De même, on l'a vu, Weyl découvre une inconsistance dans la géométrie riemannienne. Elle traite différemment, sans que cela soit justifier, la strate affine et la strate métrique de la géométrie. Il élimine alors cette impureté. Là aussi, c'est l'épistémologie de Weyl qui lui permet d'éliminer cette impureté. Mais ces éléments d'épistémologie ne sont devenus conscients qu'en raison de l'histoire de la géométrie qui précède Weyl. Ici, je pense avant tout aux continuateurs de Riemann qui ont développé la notion de connexion : à Christoffel, à Ricci, à Levi-Civita, etc.

Finalement, on voit donc que l'histoire de la géométrie, au sens de l'histoire des principes de la géométrie, pour Weyl est interprétée comme l'histoire d'une épuration progressive. Par la pratique mathématique, on met en évidence que nos axiomes ne sont pas assez généraux parce qu'ils mêlent, aux éléments a priori de la connaissance, des présupposés infondés épistémologiquement que seule l'histoire des la géométrie, au sens large cette fois, permet de

mettre en évidence. A la fin de ce mouvement historique d'épuration des principes, selon Weyl, la raison « s'inonde de lumière ».

La fin possible de l'histoire de la géométrie ?

Si l'histoire de la géométrie est bien chez Weyl l'histoire d'une épuration progressive, au sein des axiomes, des préjugés infondés qui se mêlent aux véritables éléments a priori. Elle a peut-être alors une fin. L'histoire des principes de la géométrie pourrait s'arrêter avec l'Analyse mathématique du problème de l'espace de Weyl.

La fin du vingtième siècle et ce début de vingt-et-unième siècle ont-ils donné raison à cette hypothèse ?

Il est en fait difficile de prouver que l'histoire de la géométrie s'arrête avec Weyl. Par contre, c'est plus facile de réfuter cette hypothèse. Il suffit de trouver une théorie physique qui, pour pouvoir rendre compte des phénomènes spatiaux, ne peut se passer d'une base géométrique qui déborde la notion des espaces de Weyl.

Dispose-t-on aujourd'hui d'une telle théorie physique ?

Bien sûr, la théorie de la relativité générale et toutes les cosmologies relativistes classiques, s'appuie sur des espaces de Riemann, et ne peuvent donc invalider cette thèse. La mécanique quantique ne convient pas non plus parce que, classiquement, elle est rétrograde quand à la conception de l'espace, revenant, pour des raisons pratiques, à des espaces non-courbes. Il faudrait alors analyser les différentes théories rivales de la gravité quantique et voir quelle notion d'espace elles utilisent. Pour le moment, je ne peux pas me prononcer sur la question.

Par contre, sans s'éloigner temporellement de Weyl, on trouve au moins une théorie physique qui pose problème à la thèse de Weyl c'est la théorie d'Einstein-Cartan. C'est une généralisation de la relativité générale qui a été développée par Elie Cartan dès l'année 1922, c'est-à-dire au moment même où Weyl achevait les jalons principaux de son analyse mathématique du problème de l'espace. Cette théorie s'appuie sur une conception de l'espace faisant intervenir une connexion affine avec torsion. Or, l'analyse mathématique du problème de l'espace de Weyl interdit un tel espace à torsion.

Et il serait donc très fructueux d'analyser en parallèle les travaux de Cartan avec ceux de Weyl, non seulement en raison de ce désaccord sur la possibilité d'introduire une notion de torsion en géométrie, mais surtout parce que ce désaccord se produit sur fond d'une problématique extrêmement proche concernant le fait de donner une justification algébrique en terme de groupes de transformations aux structure d'un espace de Riemann ou plus généralement d'un espace courbe, c'est-à-dire d'un espace qui n'est pas globalement homogène, au sens de Klein.