



**HAL**  
open science

## Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions

Fabrice Vandebrouck

### ► To cite this version:

Fabrice Vandebrouck. Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 2011, 16, pp.149-185. <hal-00654184>

**HAL Id: hal-00654184**

**<https://hal.science/hal-00654184v1>**

Submitted on 21 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

**FABRICE VANDEBROUCK**  
**PERSPECTIVES ET DOMAINES DE TRAVAIL**  
**POUR L'ETUDE DES FONCTIONS**

**Abstract.** Perspectives and working domains for functions' studies

The aim of this paper is to understand and interpret the difficulties that students are facing when learning calculus during the transition from high school to university. We are specifically interested by the study of functions. We first discuss the general background concerning this transition and the notion of function. Then we define quite separate working domains, specific on the one hand of the high school practices and on the other hand of university practices. Finally, we present a study in which we examine the freshmen's difficulties in calculus.

**Key-Words.** Mathematics, Functions, Transition from secondary to tertiary level, Perspectives

**Résumé.** Le but de ce travail est de comprendre et d'interpréter les difficultés des étudiants en Analyse à la transition lycée-université et plus particulièrement en ce qui concerne l'étude des fonctions. Après des spécificités génériques liées à la transition et à la notion de fonction, nous définissons des domaines de travail assez étanches mais spécifiques d'une part des pratiques au lycée et d'autre part des pratiques attendues à l'université. Nous terminons par des travaux de recherche sur les étudiants entrant à l'université et une interprétation en termes de perspectives (points de vue spécifiques dans le travail sur les fonctions) de leurs difficultés en Analyse à la transition lycée-université.

**Mots-clés.** Mathématiques, Fonctions, Transition Lycée-Université, Perspectives

---

## **1. Introduction et problématique**

Dans cet article, nous proposons un travail sur la transition lycée-université et sur les difficultés des étudiants en ce qui concerne l'entrée dans la démarche d'Analyse. Ce thème a été très étudié depuis plusieurs décennies (Robert 1982, 1983, Artigue 1991, Robert 1998, Artigue, Batanero et Kent 2007 ou Gueudet 2008) mais les caractéristiques, sans cesse changeantes, des populations étudiantes arrivant à l'université d'une part (en particulier les difficultés des élèves) et des contenus d'enseignements d'autre part, tant au lycée qu'à l'université, justifient que l'on s'y intéresse de façon continue et renouvelée.

Bien souvent, les étudiants entrant à l'université ne savent pas manipuler des fonctions qui ne sont pas définies par une formule algébrique. Or la démarche d'Analyse est une démarche fondamentalement différente de la démarche algébrique. Elle impose un nouveau point de vue sur l'égalité des nombres réels qui est l'égalité si les deux réels sont arbitrairement proches. Les techniques qui sont

attachées à l'Analyse relèvent de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires et elles mettent en jeu pour beaucoup les propriétés locales des fonctions (notamment les limites). Mais lors de ces études locales, les étudiants traitent algébriquement les équivalents ou les développements limités, donnant très difficilement du sens aux expressions du type  $o(x)$ ,  $O(x)$ ... Enfin, les étudiants ne tracent des graphes que quand la question leur est explicitement demandée et ils ne pensent pas spontanément à utiliser cette représentation des fonctions pour faire les raisonnements locaux attendus d'eux. Notre travail consiste donc à interroger leurs difficultés afin de mieux pouvoir y remédier par un travail en amont et un travail au début de l'université.

Nous nous plaçons dans le cadre général de la théorie de l'activité, constitué dans une lignée de recherche qui articule les apports de Piaget et Vygotsky pour enrichir une approche par la conceptualisation des apprentissages mathématiques des élèves (Vergnaud 1991, 1996, 1999/2002, Leplat 1997, Rogalski 2008). Dans ce cadre, nous reprenons les outils théoriques proposés par Robert (2008) qui spécifie divers éléments des théories de l'apprentissage aux mathématiques et à la situation scolaire : les apprentissages des élèves et des étudiants sont appréhendés par l'intermédiaire d'analyses de leurs activités<sup>1</sup> en classe, elles-mêmes caractérisées par les mises en fonctionnement de connaissances mathématiques qu'ils sont amenés à faire, à partir des tâches qui leurs sont proposées, des modes de travail et des aides de l'enseignant (Robert 2008). Les apprentissages sont référés à la conceptualisation visée, elle-même définie à partir des spécificités des notions mathématiques, des programmes d'enseignement et des difficultés des élèves. La théorie est exposée en détail dans Vandebrouck (2008b).

Notre investigation s'articule avec le travail mené par Kuzniak (2010) sur les espaces de travail géométrique pour le thème de la géométrie en ce sens que pourraient être introduits des espaces de travail pour l'Analyse (ETA). Cependant c'est à une échelle plus fine que nous souhaitons travailler en spécifiant des domaines de travail pour l'étude des fonctions, domaines qui traversent la scolarité de la classe de troisième aux premières années de l'université et auxquels sont associés une certaine conceptualisation de la notion de fonction. A partir de ces domaines de travail, les connaissances et les mises en fonctionnement qu'ils valorisent, nous questionnons cette conceptualisation, ou plutôt les conceptions des étudiants entrant à l'université relativement à la notion de fonction (au sens de la théorie des champs conceptuel, Vergnaud 1991). Nous donnons ensuite une interprétation en termes de perspective de leurs difficultés pour entrer dans la démarche d'Analyse attendue d'eux à ce niveau. Par perspective, nous entendons

---

<sup>1</sup> Le singulier sera utilisé dans une acception générique : l'activité de l'élève étant constituée de l'ensemble de ses activités contextualisées.

des points de vue spécifiques dans le travail sur les fonctions, associées aux trois grands types de propriétés des fonctions : ponctuelles, globales et locales.

Nous commençons dans le deuxième paragraphe par une étude didactique de la notion de fonction et des difficultés liées à cette notion, déjà pointées dans les travaux de recherche sur le sujet. Nous menons en particulier une discussion sur les représentations des fonctions et les différentes perspectives que l'on peut adopter dans le travail sur les fonctions. Nous continuons dans le troisième paragraphe en définissant trois domaines de travail pour l'étude des fonctions, spécifiques d'une part des pratiques au lycée et d'autre part des pratiques attendues à l'université. Au paragraphe 4, nous rendons compte de travaux de recherches sur les conceptions des élèves de terminale et des étudiants du début de l'université, ainsi que de notre interprétation en termes de perspectives des difficultés en Analyse à la transition lycée-université.

## **2. Les fonctions à la transition lycée-université**

De nombreuses différences peuvent être identifiées à un niveau très général entre le secondaire et le supérieur : passage d'un cours avec un seul enseignant à des cours magistraux en amphithéâtre et à des travaux dirigés ; modularisation des enseignements qui peut contribuer à isoler les connaissances les unes des autres... En didactique des mathématiques, nous pointons également des différences liées aux contenus mathématiques en jeu, ce qui fait l'objet du paragraphe 2a. Dans le paragraphe 2b, nous étudions la complexité de la notion de fonction et sa conceptualisation dans notre cadre théorique. Dans le paragraphe 2c, nous exposons des approches complémentaires, en didactique des mathématiques, pour penser cette conceptualisation de la notion de fonction à la transition lycée université. Enfin, dans le paragraphe 2d, nous nous focalisons sur le rôle des perspectives dans la conceptualisation et leurs liens avec les représentations.

### **2a. Quelques caractéristiques générales liées aux mathématiques**

De nombreuses études ont déjà précisé des caractéristiques de cette transition (Robert 1998, Artigue, Batanero et Kent 2007, Gueudet 2008). Par exemple, Robert (1998) a pointé l'introduction à l'université d'un nouveau type de notions mathématiques : les notions à la fois Formalisatrice, Unificatrices et Généralisatrices (FUG), spécifiquement toutes les notions d'algèbre linéaire : espace vectoriel, application linéaire... ces notions permettent en effet d'introduire plus de généralité, en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme, qui de fait simplifie les écritures mais peut aussi brouiller le sens pour les étudiants. Les notions de topologie, maintenant repoussées en L2 ou L3 sont aussi FUG (Bridoux 2011). En classe de troisième compte tenu des nouveaux programmes du collège, la notion de fonction numérique semble présenter des aspects FUG (Robert, travail en cours).

Robert (1998) a aussi relevé une distribution différente, entre lycée et université, au niveau des types de tâches proposées aux étudiants et au niveau des mises en fonctionnement des connaissances attendues : au lycée, les tâches mettent souvent en jeu des connaissances qui sont explicitées et qui doivent être appliquées de façon relativement immédiates. A l'Université, les tâches mettent plus souvent en jeu des connaissances à reconnaître (supposées disponibles) et aussi à adapter (changements de points de vue sur les tâches, mélanger les connaissances visées avec d'autres connaissances, introduire des objets intermédiaires, des étapes de raisonnement ...). A l'université, de ce fait, les connaissances doivent être plus disponibles (mobilisables sans indication) et mises en fonctionnement de façon plus complexe, avec une augmentation des exigences en termes de raisonnements, preuves, formalisations et langage. Par ailleurs, le caractère outil (Douady 1986) de certaines connaissances est valorisé dans le secondaire alors que c'est plutôt le caractère objet qui l'est à l'université et vice versa pour d'autres connaissances. A ce niveau didactique, Bloch (2005) a clarifié la complexité par l'introduction de 9 « variables didactiques » dont les valeurs différentes contribuent à « mesurer » les différences entre lycée et université.

On note enfin une différence entre secondaire et supérieur au niveau des déroulements (Grenier-Boley 2009). Par exemple, il y a une accélération du temps didactique, avec un renouvellement rapide des objets mathématiques enseignés qui oblige à des assimilations plus rapides. Il y a également un nouvel équilibre entre exercices à portée générale et exercices plus particuliers, un éventail des types d'exercices plus large qui rend la routinisation beaucoup plus difficile qu'au lycée, cette dernière étant déléguée aux étudiants en travail personnel, qui se doivent de ce fait d'être plus autonomes face à leurs apprentissages (aussi dans Praslon 2000).

## **2b. La notion complexe de fonction et sa conceptualisation**

La notion de fonction peut intervenir dans de nombreux cadres, comme outil ou comme objet (Douady 1986) et elle se trouve connectée à deux autres notions essentielles du champ de l'Analyse : les nombres réels (en particulier les nombres réels comme limites) et les suites numériques. Ceci nécessite de prendre en compte le vaste champ conceptuel des l'Analyse (Vergnaud 1991) et non la notion isolée pour questionner la conceptualisation de la notion de fonction. Les domaines de travail que nous définirons plus bas ne seront caractérisés que par rapport à la notion de fonction mais ils devront être entendus pour tout ce champ conceptuel. C'est une limite du travail à prendre en compte, sur laquelle nous revenons en fin de notre conclusion, avec les espaces de travail en Analyse.

Le travail sur et avec les fonctions fait également intervenir plusieurs systèmes de représentations dans plusieurs registres différents (Duval 1991), ce qui fait l'une de ses spécificités essentielles : les représentations en tableau de valeurs (registre numérique), les représentations en courbes (registre graphique), les représentations

par des formules (registre algébrique), les représentations en tableau de variations (registre schématique) et les représentations formelles (registre symbolique). Selon Duval, la conceptualisation de la notion passe par trois stades de mises en fonctionnement des représentations : la formation des représentations, le traitement des représentations à l'intérieur d'un registre et la conversion entre représentations de registres différents.

Les fonctions sont donc des objets complexes, encore en apprentissage lorsque les étudiants entrent à l'université. Nous postulons que la conceptualisation de la notion de fonction numérique est liée à la rencontre et à la mise en fonctionnement de la notion dans plusieurs cadres, comme outil ou comme objet (Douady 1986), proposées dans un ordre approprié, dans des registres multiples (avec des activités de formation, de traitement, de conversion des représentations au sens de Duval 1991) et à travers des tâches variées, à l'origine de diverses adaptations de connaissances (Robert, 1998), y compris de nombreuses applications immédiates le cas échéant (les « gammes »).

En outre, les études de fonctions font également appel à plusieurs aspects de la notion de fonction. En effet, certaines propriétés sont ponctuelles en un point  $x_0$ , c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la valeur de la fonction au point  $x_0$ . Par exemple, énoncer  $f(x_0)=3$  est une propriété ponctuelle qui ne donne rien sur  $f(x_1)$  lorsque  $x_1 \neq x_0$ . Certaines propriétés sont globales, c'est-à-dire qu'elles sont des propriétés valables sur des intervalles : parité, périodicité, croissance, continuité et dérivabilité globales... Enfin, certaines propriétés d'une fonction  $f$  sont locales en un point  $x_0$ , c'est-à-dire qu'elles dépendent des valeurs de  $f$  sur un voisinage de  $x_0$  aussi petit soit-il : avoir une limite en  $x_0$ , être continue en  $x_0$ , être dérivable en  $x_0$ , être négligeable devant une autre fonction au voisinage de  $x_0$ , avoir un développement limité en  $x_0$ ... Dans certains cas,  $x_0$  peut aussi être infini mais ce cas est pour nous particulier ; par exemple les propriétés locales de continuité et dérivabilité n'y sont pas définies. Nous y reviendrons.

Nous pointons dans nos travaux l'importance pour la conceptualisation de la notion de fonction de ses mises en fonctionnement sous les trois perspectives ponctuelle, globale ou locale. Autrement dit, comme en fait l'hypothèse Rogalski M. (2008), un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives, ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction (voir aussi Bloch 2003, Maschietto 2001, 2008, Chorlay 2011).

### **2c. Différentes approches complémentaires sur les conceptions et sur la conceptualisation des fonctions**

Les conceptions des élèves et des étudiants ont bien sûr déjà été étudiées à travers plusieurs théories didactiques que nous souhaitons mentionner ici : Tall et Vinner (1981) introduisent la distinction entre concept image et concept définition, le premier ne concordant pas généralement avec le concept définition, spécialement dans le cas des fonctions (Vinner 1983). Balacheff et Gaudin (2002) identifient deux types de conceptions chez des élèves à la fin du lycée : une conception « courbe – algébrique » et une conception « algébrique – graphique ». Les élèves possédant la première conception voient prioritairement les fonctions comme des cas particuliers de courbes, celles pour lesquelles une expression algébrique peut être attachée. Les autres considèrent que les fonctions sont d'abord des expressions algébriques, le graphique venant ensuite. Focalisant aussi sur les représentations graphiques et algébriques des fonctions, Duval (1993) explique que « *la lecture des représentations graphiques suppose la perception des variations correspondantes à l'écriture algébrique. Cette lecture est une démarche d'interprétation globale qui suppose une attitude contraire à la pratique épellative associant un point à un couple de nombres* ». Il montre que les élèves ont des difficultés en cette interprétation globale du graphe. Elia et al. (2008) mènent une étude multidimensionnelle et mettent en évidence par des analyses statistiques implicatives des corrélations possibles dans les réponses des étudiants entre quatre dimensions : la définition donnée de fonction, les exemples donnés, l'aptitude à reconnaître et à convertir des représentations et enfin l'aptitude à résoudre des problèmes sur les fonctions. Monoyiou et Gagatsis (2010) proposent quant à eux un questionnaire portant sur les fonctions et leurs représentations à des enseignants en formation initiale à Chypre et en Italie. Malgré les différences existant au niveau des programmes, des manuels scolaires et des pratiques enseignantes entre les deux pays, leurs analyses statistiques révèlent deux classes distinctes de variables, la première correspondant à une approche algébrique des fonctions et la deuxième correspondant à ce qu'ils appellent une approche coordonnée des représentations algébriques et graphiques des fonctions. Enfin, Gagatsis et al. (2010) retrouvent ces résultats auprès d'élèves âgés de 16 à 17 ans en lien avec l'enseignement reçu. Plus précisément, ils notent que des étudiants ayant un enseignement scientifique des fonctions dépassant les démarches intuitives et les traitements algébriques persistent toujours dans une approche très algébrique des fonctions.

D'autres approches portent sur la conceptualisation elle-même de la notion de fonction. Une première est basée sur la dualité processus-objet de la théorie APOS (Dubinsky 1991) : la conceptualisation de la notion de fonction débute par des actions sur des objets physiques ou mentaux déjà construits. Ces actions s'intériorisent alors en processus qui sont ensuite encapsulés en nouveaux objets mathématiques puis manipulés dans des schémas. Cette approche a été complétée par la triade Intra-Inter-Trans (Piaget et Garcia 1989) qui enrichit le stade « Schéma » de Dubinsky : au niveau intra, l'élève ou l'étudiant considère les

fonctions comme des objets isolés et se concentre sur les processus dans lesquels ils sont engagés. Au niveau inter, il commence à faire des connexions entre objets fonctionnels de même nature, à donner sens à l'idée de transformation engageant ces fonctions. Au niveau Trans enfin, il peut considérer des systèmes de transformations et les structures qui en émergent.

Sfard (1991) propose, à la même époque, que les concepts mathématiques tels que les fonctions peuvent être conceptualisés sous deux formes : d'abord opérationnelle, en tant que processus, puis structurelle, en tant qu'objets, les deux conceptions étant toujours successives dans sa théorie de la réification. Suivant Bachelard (1938), Sierpiska (1992) utilise la notion d'obstacle épistémologique pour étudier certaines propriétés des fonctions et notamment la notion de limite. Réfutant ensuite l'idée de succession des conceptions sous tendue par la théorie APOS et la théorie de la réification, Tall (1996) introduit la notion de procept, amalgame entre deux composants : un processus qui donne naissance à un objet mathématique et un symbole qui représente de façon duale à la fois le processus et l'objet<sup>2</sup>.

Finalement, Tall (2006) modélise l'évolution cognitive dans la « pensée fonctionnelle » en caractérisant trois mondes mathématiques : un monde « incorporé conceptuel » fait d'expériences sensorimotrices de la quantité et de la covariation, un monde « symbolique proceptuel » où les représentations permettent les manipulations aux niveaux processus et objets des fonctions puis un monde « formel axiomatique » où les objets sont assujettis à des définitions et les propriétés déduites via des preuves formelles.

La transition lycée-université peut donc être interprétée en un passage du monde « symbolique proceptuel » de Tall, caractéristique des pratiques à la fin du lycée, au monde « axiomatique formel », ainsi qu'en une élévation dans la triade de Piaget et Garcia : des niveaux Intra et Inter vers les niveaux Inter et Trans. En effet, le travail sur les fonctions est caractérisé dès le début de l'université par un élargissement vers le langage ensembliste avec les nouvelles notions qui lui sont attachées (injectivité, image réciproque...). Cet élargissement s'accompagne d'une introduction de nouveaux types de fonctions (fonctions caractéristiques d'ensembles, fonctions de deux variables...), une généralité plus grande (multiplicité des paramètres, familles de fonctions...), un rapport aux procepts différents (rôle accru de la représentation symbolique, rôle minoré de la représentation algébrique, nouveau rôle d'outil de la représentation graphique pour

---

<sup>2</sup> John Monaghan qui a travaillé avec David Tall à cette époque sur cette dualité entre processus et objet avait proposé la terminologie de « projet », ce qui ne pouvait convenir, d'où l'émergence de la notion de procept, amalgame entre processus et concept. Mais l'idée initiale est bien la dualité entre le processus et l'objet.

supporter les preuves et les formalisations par exemple...) sans oublier l'utilisation plus importante des aspects locaux des fonctions et de la perspective correspondante qu'ils amènent à adopter de la part des étudiants.

## 2d. Discussion sur les registres de représentations et les perspectives

Bloch (2003) exploite l'idée que les différentes représentations sont réductrices ou productrices par rapport aux aspects ponctuels ou globaux des fonctions et donc font travailler différemment les perspectives sur les fonctions. En effet, la représentation numérique, et notamment le tableau de valeurs, ne fait travailler que la perspective ponctuelle sur les fonctions.

Au contraire, la représentation en tableau de variation fait travailler la perspective globale. Coppé et al. (2007) ont montré à ce propos que des élèves de seconde ont plus de difficultés à utiliser le registre des tableaux de variations que le registre numérique des tableaux de valeurs. En même temps, la conversion d'un tableau de variation à un autre système de représentation (algébrique, graphique et même numérique) semble être plus difficile que la conversion à partir d'une table de valeur. Ils pointent ainsi que la complexité du tableau de variation est certainement sous estimée dans l'enseignement. Il y a donc des difficultés inhérentes à l'adoption de la perspective globale sur les fonctions à partir des tableaux de variations en classe de seconde.

Les représentations graphiques permettent à la fois les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions : en effet le graphe d'une fonction peut être tracé point par point et l'adoption de la perspective ponctuelle sur le graphe permet de manipuler les propriétés ponctuelles classiques sur les images et les antécédents. Mais le graphe peut également être considéré globalement et il traduit alors pour les fonctions simples les propriétés globales : croissance, parité, périodicité, majoration...

Au contraire, la représentation algébrique (la formule) ne peut pas soutenir aisément la perspective globale sur les fonctions. Rogalski (1984) explique par exemple que « *les caractères producteurs dominants – de la représentation graphique – sont essentiellement le fait que la représentation graphique fait apparaître une fonction comme unité, ce qui la différencie de l'algorithme de calcul représenté par la formule ou aux données discontinues et partielles de la table de valeur* ». Dans la même idée, selon Raftopoulos et Portides (2010), les formules ne peuvent être interprétées globalement que par les experts. La fonction  $x \rightarrow x^2$  ou la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  peuvent être interprétées globalement par des élèves car ils ont le graphe en tête (disponibilité du graphe) mais c'est plus difficile pour eux dès que les expressions algébriques deviennent plus complexes. Dire que  $x \rightarrow x^2 + \sqrt{x} + \exp(x)$  est croissante sur  $R^+$  car somme de trois fonctions croissantes suppose l'adoption de la perspective globale à partir de la formule, ce qui demande

une certaine expertise. Les élèves de première ou terminale vont bien souvent calculer une dérivée de la fonction sur  $[0, +\infty[$ . En général, les propriétés globales ne sont pas visibles directement à partir de la formule mais elles doivent être déduites à partir de traitements algébriques. Comme cas extrême, citons l'exemple de

$$f(x) = \frac{x e^{-x}}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{x}{2}$$

qui est une fonction paire. Cependant, même en adoptant une perspective globale sur la formule, il est impossible de s'en rendre compte. C'est un développement en série entière qui permet de le réaliser ou bien une recherche directe de parité par le calcul de  $f(-x)$ .

Pour le non expert, la formule ne permet donc pas en général de déduire des aspects globaux de la fonction. Elle ne permet pas la construction directe du tableau de variation. Elle permet la construction de la courbe, mais point par point, ce qui ne fait pas travailler la perspective globale sur la fonction en jeu. C'est seulement la réinterprétation d'un tableau de variation ou d'un graphe déjà construit qui peut faire adopter une perspective globale sur la fonction pour des élèves.

Remarquons que le traitement de ces propriétés globales peut plus ou moins faire travailler la perspective globale : certaines propriétés globales sont en effet des propriétés ponctuelles universelles, c'est-à-dire des propriétés ponctuelles vérifiées pour toutes les valeurs de  $x$  dans l'intervalle de définition – par exemple :  $f$  est paire si et seulement si son intervalle de définition est symétrique et pour tout  $x$  de cet intervalle, on a  $f(x)=f(-x)$  ;  $f$  est  $t$  périodique si et seulement si pour tout  $x$  de son intervalle de définition, on a  $f(x)=f(x+t)$ . L'établissement de ces propriétés est donc facilement accessible par un traitement mettant en jeu une seule variable  $x$ . L'absence de perspective globale peut ne pas être handicapante sauf s'il faut réinterpréter globalement des propriétés ponctuelles universelles (par exemple pour tout  $x$ ,  $f(x)=f(x+t)$  donc  $f$  est  $t$  périodique). Au contraire, d'autres propriétés, comme la croissance, sont liées à la variation, et sans une hypothèse de dérivabilité des fonctions, elles ne peuvent pas se traduire par une propriété ponctuelle universelle. Elles nécessitent la prise en compte de deux valences de la variable sur l'intervalle de définition de la fonction :  $f$  est croissante si et seulement si pour tout  $x$  et  $y$  tels que  $x \leq y$  on a  $f(x) \leq f(y)$ . La perspective globale et la quantification deviennent fondamentales dans l'activité. En particulier, un traitement de la croissance sous cette forme fait sans nul doute mieux travailler la perspective globale qu'un traitement par la positivité de la dérivée. Nous y reviendrons.

En ce qui concerne la perspective locale, remarquons tout d'abord que les propriétés locales en un point  $x_0$  ne sont rien d'autres que des propriétés globales vérifiées sur tout voisinage de  $x_0$ . Nous émettons l'hypothèse qu'adopter une

perspective locale sur le graphe suppose donc de dépasser la perspective uniquement ponctuelle. En effet, dans une recherche ancienne sur l'acquisition de la notion locale de limite de suites, Robert (1982) met en évidence la corrélation entre une conception statique, bidimensionnelle, de la notion locale de limite et l'acquisition de la définition en termes formels. Aussi, la perspective ponctuelle sur les fonctions ne semble pas permettre une conception statique et bidimensionnelle de la notion de limite mais plutôt une conception dynamique, qui fait obstacle à l'acquisition de la définition. Cette perspective ponctuelle peut rentrer en conflit avec la perspective locale. Par exemple, les représentations de la droite numérique (et donc des fonctions) associées à la perspective ponctuelle sont des représentations discrètes alors que les représentations nécessaires pour adopter la perspective locale sont des représentations continues, qui ne sont disponibles qu'avec une perspective globale sur la droite ou la fonction. En d'autres termes, la perspective locale sur les fonctions ne pourrait s'adopter sans la disponibilité préalable d'une perspective globale et savoir adopter la perspective globale serait une condition nécessaire pour conceptualiser la notion fondamentale de limite.

En outre, Robert et Boschet (1984) pointent l'importance pour les étudiants de disposer de connaissances disponibles dans plusieurs cadres et registres (hypothèse des blocs) et non seulement dans un seul (qu'il soit algébrique, graphique ou symbolique notamment). D'après ces résultats et conformément aux arguments développés plus haut, adopter la perspective globale sur les fonctions ne pourrait se faire sans une maîtrise par les étudiants de représentations mettant l'accent sur les propriétés globales des fonctions, d'où la nécessité de connaissances graphiques et symboliques. Les représentations algébriques, seules, peuvent ne pas suffire pour adopter la perspective globale, en particulier lorsque des propriétés comme la croissance ne sont pas suffisamment travaillées avec leur définition originale relevant de la perspective globale.

### **3. Domaines de travail pour l'étude des fonctions**

Dans l'enseignement, la notion de fonction apparaît dans la scolarité française à la fin du collège et s'enrichit jusqu'à l'université. Les premiers travaux que nous avons menés avec la CI2U<sup>3</sup> (Vandebrouck 2008a), à partir de l'étude des programmes, des manuels scolaires, d'épreuves de baccalauréat et de feuilles d'exercices de la première année d'université ont amené l'idée que le travail sur les fonctions est maintenant divisé en trois grands domaines, bien distincts, non hiérarchisés et assez étanches. Ces trois domaines de travail décrivent donc la réalité actuelle de l'enseignement de la notion de fonction. Nous utilisons la définition que fait Robert (2003) de « domaines de travail » en géométrie : un ensemble auto consistant, cohérent, enseigné ou enseignable, spécifié par des

---

<sup>3</sup> Commission Inter Irem Université

fondements, un corps de définitions, des modes de raisonnements, un niveau de rigueur et enfin un corps de problèmes résolubles en son sein. Un domaine de travail fait partie d'un champ conceptuel, plus vaste.

Dans le paragraphe 3a), nous décrivons rapidement les évolutions de la notion de fonction à travers les programmes de lycée, depuis les années 80. Les trois paragraphes suivants correspondent à la description des trois domaines de travail.

### **3a. Evolution des programmes d'enseignements de 1981 à 2002**

La notion de fonction apparaît dans les programmes dès le collège, à partir de l'étude des situations de proportionnalité et en lien avec les fonctions linéaires et affines. Nous ne parlons dans la suite que des programmes de lycée, à partir de la classe de seconde et nous nous tournons vers ce qui touche à la démarche d'Analyse et à la perspective locale.

Nous situons notre point de départ de cette étude des programmes en 1981 où Lazet et Ovaert publient un article intitulé « *pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'Analyse* ». Suite à la réforme des mathématiques modernes, ils dénoncent l'introduction des notions de base de l'Analyse sans problématique sous-jacente ou avec une problématique très élaborée mathématiquement mais loin de l'élève. Ils dénoncent l'emploi trop précoce du langage formalisé souvent hermétique aux élèves, un enseignement trop centré sur le discours du maître, une construction linéaire des concepts, non rapportée à la résolution de problèmes, une prédominance trop grande du qualitatif sur le quantitatif, un intérêt trop précoce pour le pathologique (Artigue 1993).

Ils proposent de modifier les rapports entre théorie et applications, de promouvoir une approche plus constructiviste des apprentissages, de rééquilibrer le quantitatif et le qualitatif et enfin de ne théoriser que le seul nécessaire, en s'appuyant sur des niveaux de formalisation accessibles aux élèves. Dans leur texte, il apparaît à plusieurs reprises les fonctions ou suites de références comme objets privilégiés pour entrer dans la démarche d'Analyse. Les techniques de majorations, minorations, encadrements avec des suites et des fonctions de références sont mises en valeurs comme techniques fondamentales de l'Analyse. Les suites et fonctions de références apparaissent donc à deux niveaux, le premier comme objets simples et typiques permettant d'aborder qualitativement les propriétés des fonctions et le second comme outils permettant d'aborder quantitativement les propriétés (globales et locales notamment) de classes plus larges de fonctions.

Dans la réforme de 1982, les prescriptions de Lazet et Ovaert sont assez suivies. Le champ de l'approximation est en jeu dès la classe de seconde, avant même un quelconque enseignement de l'Analyse. Il y a une importance accordée à l'exploration (graphique et numérique) à l'aide des calculatrices et à l'étude globale et locale de fonctions simples (fonctions de références) en préalable à

l'introduction de définitions générales. C'est ainsi que pour la progression vers la définition de la limite en 0 d'une fonction en première scientifique, les enseignants commencent par des exemples de fonctions vérifiant  $|f(x)| < M|x|$  au voisinage de 0 et la vérification que ce type de  $|f(x)|$  peut-être rendu aussi petit que voulu, en imposant à  $|x|$  d'être dans un intervalle suffisamment petit centré en 0. Les enseignants continuent par un examen de situations qui échappent à ce cadre et incitent à un point de vue plus qualitatif ( $\sqrt{|x|}$  par exemple). La stratégie préconisée est analogue pour la dérivation. Il y a également une limitation bienvenue de la formalisation. Seule la limite en 0 est formalisée en epsilon et eta.

Il s'en suit un période où les fonctions de références envahissent les programmes de seconde. Leur étude globale est traitée et l'étude de leurs aspects locaux se limite à des observations en classe de première. Plus précisément, les limites en 0 sont introduites sur la base d'explorations à la calculatrice du comportement global et local des fonctions de références. Par rapport aux programmes précédents, un aspect conjectures à partir des explorations se perd, qui préparaient à des démonstrations. L'algèbre des limites disparaît en outre des programmes. Les limites sont définies de façon générale mais uniquement par des critères suffisants à partir des fonctions de références. Le recours à l'approximation est donc imposé. Les majorations, minoration, encadrements (et le théorème des gendarmes) deviennent des outils essentiels de l'activité des élèves. Même si les techniques sont parfois très lourdes, les enseignants reconnaissent un gain au niveau des majorations, minoration, encadrements, au niveau du contrôle de la variable indépendante, au niveau du choix de fonctions de références pour mettre en évidence une limite, au niveau de l'approximation, du maniement de la valeur absolue ou encore du repérage de terme algébriques prépondérants dans une expression.

La réforme de 1990 voit le repli des fonctions de références dans les programmes de lycée. Mais il n'y a plus de définitions (ou même pseudo définitions à partir des fonctions de références) des notions de convergence et de limite dans les programmes. Il reste un appui sur des explorations numériques et graphiques pour l'introduction des limites, mais pas seulement sur les fonctions de références, qui perdent ainsi progressivement leur statut. Dès la classe de première, les rudiments de l'algèbre des limites sont réintroduits et donc la majoration, minoration par des fonctions de références n'est plus le passage obligé pour l'étude des limites. Les règles algébriques sont essentiellement admises et leur signification est mise en valeur intuitivement. Enfin, les programmes de 2002 se mettent en place et ils entraînent les trois domaines de travail que nous introduisons maintenant.

### **3b. Un premier domaine de travail F1 d'entrée dans la pensée fonctionnelle**

Ce domaine de travail couvre la fin de collège jusqu'au début de la classe de première S. Dans ce domaine F1, les représentations des fonctions (notamment les tableaux de variations, les graphiques et les formules algébriques) sont introduites, donnant corps à un nouveau cadre de travail pour les élèves, appelé cadre fonctionnel. Le chapitre central de la classe de seconde est le chapitre « généralités sur les fonctions ». A partir d'une introduction ensembliste de la notion de fonction, l'enjeu d'apprentissage semble être que les élèves entrent dans la « pensée fonctionnelle », c'est-à-dire qu'ils conceptualisent les fonctions en tant qu'objet, qu'ils puissent adopter la perspective globale sur cet objet, en coordonnant les multiples registres de représentations et en reliant le cadre fonctionnel à de nombreux autres cadres (géométrique ou physique notamment). Robert (2011) parle de « relief des notions à enseigner » pour présenter les caractères spécifiques des notions, qui peuvent orienter l'enseignement.

Les notions de parité, de périodicité ou de croissance, dont nous avons déjà parlé, sont des propriétés globales des fonctions qui sont spécifiquement travaillées en seconde au sein de ce domaine. Les notions de maximum, minimum (globaux) sont également travaillées, toujours sous différents registres de représentations. Les variations globales de fonctions polynômes de degré 2, de l'inverse, et dans une moindre mesure de fonctions homographiques, sont étudiées mais ces fonctions perdent leur statut de fonctions de références. Des inéquations sont résolues, à la fois algébriquement et graphiquement. Toutes ces activités doivent concourir à l'objectif énoncé plus haut, en particulier l'articulation entre perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions. Dans la terminologie de Tall et Garcia, l'élève doit accéder au monde « symbolique - proceptuel » où les représentations permettent les manipulations aux niveaux processus et objets des fonctions mais aussi accéder au niveau Inter de Garcia : il doit commencer à faire des connexions entre des objets fonctionnels de même nature et à donner sens à l'idée de transformation engageant ces fonctions. Le gain d'un tel effort doit se faire sentir par des tâches de comparaisons de fonctions ou par les propriétés à mettre en jeu dès lors qu'est utilisée une classification des fonctions : linéaires, affines, du 2<sup>nd</sup> degré, polynomiales....

Cependant, comme dit Comin (2005) : « *l'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles, modélisée par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs (...) nous faisons l'hypothèse que les pratiques qui sont proposées aux élèves portent sur un nombre fini de valeurs et éloignent les élèves de l'idée de variabilité et de continuité* ». Autrement dit, l'approche retenue dans les programmes pour la définition de fonction éloigne de la perspective globale sur les fonctions, peut enfermer les élèves dans la perspective ponctuelle, voire ne pas leur permettre d'accéder au niveau de conceptualisation objet. Les utilisations de

tableaux de valeurs, les tâches de recherches d'image et d'antécédent ou les tâches de recherches de solutions à des équations seraient par exemple surreprésentées au sein du domaine de travail F1. En outre, l'herbier de fonctions disponibles dans ce domaine F1 se limite à des fonctions affines, des fonctions polynomiales de degré 2, la fonction inverse et parfois quelques fonctions homographiques. Ces fonctions perdent enfin leur statut de fonctions de référence pour introduire les notions locales comme dans les programmes précédents.

Bloch (2003) met en évidence le fait que les élèves n'exploitent que rarement, à l'issue de ce domaine de travail F1, la puissance du graphique au niveau global. Elle fait des propositions pour des séquences d'enseignement en seconde, supportées par la perspective globale du registre graphique. Elle pointe déjà le travail au niveau local qui pourrait être engagé dans ce domaine F1. Dans son travail, Maschietto (2001) met aussi en évidence l'importance que pourraient avoir les représentations graphiques comme outils pour entrer dans des tâches d'Analyse locale dès la première S.

### **3c. Un deuxième domaine de travail F2 très algébrisé**

Dès la classe de seconde (mais surtout à partir de la première S) et jusqu'à l'université où il est complexifié, il s'ouvre un domaine F2 très algébrisé, théoriquement formalisateur et simplificateur du domaine F1. Par exemple, comme le notent Coppé et al. (2007), le registre algébrique déjà important pour l'étude des fonctions dans les manuels de seconde (de 30% à 58% des exercices selon un manuel de seconde) devient prédominant dans les manuels de première et de terminale scientifique. Notre hypothèse est que le cadre fonctionnel se réduit alors au cadre algébrique où tout le « relief » que l'enseignement a donné à la notion de fonction dans le domaine F1 est masqué : en particulier les deux perspectives ponctuelle et globale sur les objets fonctions, qui ne sont pas suffisamment repérées par les élèves à l'issue de F1, ne sont plus mises en valeur dans le domaine F2, étant donné l'insuffisance de la représentation algébrique vis-à-vis de ces perspectives. Autrement dit, les élèves ne sont pas assez experts au sortir de la classe de seconde pour interpréter toutes les représentations algébriques rencontrées comme des fonctions sous leur perspective globale.

Cependant, dans ce domaine F2, les notions locales sont progressivement introduites : limite, continuité, dérivabilité, la dernière étant d'ailleurs introduite dans les programmes de première scientifique avant la notion de limite. De nombreux travaux (Schneider 1991, Castela 1995, Vivier 2010) ont ici mis en évidence la difficulté pour les élèves à adopter la perspective locale à partir du jeu de cadre géométrique / numérique symbolique (Schneider 1991) qui est proposé dans l'enseignement. Cette introduction est basée sur l'idée de tangente comme limite des sécantes mais les élèves ne peuvent avoir qu'une perspective globale sur la tangente, vue au collège et en seconde comme droite qui intercepte la courbe (le

cercle ou la parabole essentiellement) en un unique point double. Le changement de perspective, important au moment de l'introduction de ce nombre dérivé, ne peut donc pas être suffisamment repéré par les élèves. Cette perspective locale est ensuite très peu travaillée pour elle-même en première et en terminale. Maschietto (2001, 2008) a par exemple travaillé avec les technologies le jeu global/local au moment de l'introduction du nombre dérivé. Elle utilisait la fonctionnalité de zooms des calculatrices graphiques mais il s'agissait d'un travail d'ingénierie qui n'est pas usuel dans les pratiques enseignantes. Les notions locales sont en fait principalement mobilisées dans des exercices où les fonctions sont représentées et représentables par une formule algébrique, en général polynomiale puis mêlant exponentielles et logarithmes en terminale. Les recherches de limites sont traitées par des calculs algébriques et les démarches de minorations, majorations et encadrement avec des fonctions de références, qui avaient été introduites dans les programmes à partir de 1982 et qui pouvaient donner corps à la perspective locale, ont quasiment disparu. Il n'y a plus de définition opérationnelle du concept de limite et une approche intuitive de la notion de limite apparaît. Les représentations graphiques permettent seulement d'illustrer les notions et quelques résultats locaux dont les preuves ne sont pas assumées. Selon Bloch (2002), « *cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique / fonctions supposé transparent : les élèves sont supposés voir dans le dessin graphique ce qu'y voit le professeur* ». Compte tenu des considérations faites plus haut sur la difficulté d'accès à la perspective globale sur les fonctions, cette perspective locale ne peut effectivement pas aller de soi pour les élèves.

Au niveau du baccalauréat, Coppé et al. (2007) notent qu'il existe toujours une forte algébrisation de techniques pour l'étude des fonctions, basées sur des règles de calcul algébriques (calculs de limites, de dérivées, étude des variations de fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes...), qui renforcent les élèves dans des pratiques algébriques. Les questions portent sur des études globales mais sont algébrisées. En particulier, les fonctions sont toujours dérivables globalement et la variation est étudiée à partir du signe de la dérivée, ce qui ramène des propriétés globales à des propriétés ponctuelles universelles et masque le caractère global de ces propriétés. Les tableaux de variations et les graphiques dont l'usage permettrait de travailler la perspective globale, ne sont que rarement des outils de travail mais sont essentiellement des objets à construire, à compléter, à confronter aux résultats algébriques. Le théorème et l'inégalité des accroissements finis, qui étaient des outils permettant des encadrements et des majorations globales, critiqués parce que stéréotypant les sujets de baccalauréat, ont disparu des programmes, participant à ce recul du travail des perspectives globale et locale sur les fonctions. Les questions ponctuelles (résolutions d'équations ou intersections de graphes) sont traitées algébriquement et le graphique ne sert encore qu'à conforter

les résultats algébriques, ce qui réduit son rôle à un rôle de contrôle. Les problèmes locaux (limites, continuité, dérivabilité en un point) sont encapsulés dans des procédures algébriques. Le taux de variation d'une fonction peut-être explicitement demandé à des élèves de terminale mais l'idée de son calcul n'est pas supposée disponible spontanément quand elle est judicieuse.

Au final, Bloch, Comin, Coppé et al pointent comme nous, le fait qu'avec le travail algébrique dans le domaine F2, de façon assez isolée du travail dans le domaine F1, l'enseignement secondaire contribue à masquer les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions et il évacue aussi la perspective locale dans ses programmes, ses manuels et ses pratiques. Autrement dit, il y aurait, avec le travail en F2, une large algébrisation, qui nuirait d'une part à l'accès des élèves à la perspective locale et qui masquerait d'autre part les perspectives ponctuelle et globale à adopter sur les fonctions. Des élèves, qui se retrouveraient majoritairement dans les populations étudiantes à l'université, ne pourraient pas facilement passer du ponctuel au global et vice versa. Hors des situations algébrisées, les fonctions seraient considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Dans les situations algébrisées, les objets manipulés seraient très formels, sans les différentes perspectives sous jacentes.

### **3d. Un troisième domaine de travail F3 tourné vers l'Analyse**

Le troisième domaine de travail F3 s'engage cependant dès le début de l'université. C'est le domaine de l'Analyse non algébrisée avec toutes ses règles, et notamment les règles de quantifications qui deviennent ici impératives. Comme nous l'avons vu plus haut, la démarche d'Analyse est une démarche différente de la démarche algébrique. Les techniques qui sont attachées à l'Analyse relèvent de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires et relèvent pour beaucoup de la perspective locale sur les fonctions. Son fonctionnement ne doit pas pour autant sacrifier les démarches algébriques simplificatrices et notamment l'algèbre des limites qui reste toujours présent dans ce domaine. Cependant des expressions proposées dans les programmes d'enseignement, comme « proche de » ou « de plus en plus proche », ne peuvent pas être opérationnelles dans le cadre algébrique et sans recours aux quantificateurs. Les fondements du domaine de travail F3 sont ceux de la complétude de  $R$ , généralement admise sous l'une des trois formes suivante : la convergence des suites croissantes majorées, la convergence des suites adjacentes ou la convergence des suites de Cauchy. Le premier théorème d'Analyse locale, concernant l'image d'une suite convergente par une fonction continue, est démontré. Sa démonstration nécessite le recours à la quantification et aux définitions précises des notions de convergence et de continuité.

Le travail dans ce domaine F3 nécessite aussi constamment un jeu entre les deux perspectives globale et locale : le calcul algébrique de la limite d'une expression complexe nécessite par exemple une mise en perspective locale pour repérer les termes prépondérants et les termes négligeables de l'expression manipulée. Ensuite vient le travail sur les fonctions négligeables, les fonctions équivalentes, les développements limités et les formules de Taylor qui ont soit un caractère global (formule de Taylor Lagrange ou formule de Taylor avec reste intégrale) ou un caractère local (formule de Taylor Young).

#### 4. Expérimentations sur les conceptions des étudiants

Notre identification des trois domaines de travail nous permet une première compréhension des difficultés observées chez les étudiants entrant à l'université. Dans ce paragraphe, nous souhaitons préciser ces difficultés à partir de productions d'élèves et d'étudiants, en reliant directement ces difficultés à la notion de perspective introduite plus haut. Dans le premier paragraphe, nous référons à une recherche exploratoire menée dans le cadre du travail de la CI2U (Vandebrouck 2008a). Dans les deux paragraphes suivants, nous référons à une recherche personnelle et orientée par notre problématique de l'adoption des perspectives par les élèves et les étudiants.

##### 4a. Le travail de la CI2U

Dans le cadre du travail de la CI2U, un questionnaire a été proposé aux étudiants de L1 de plusieurs universités françaises (Paris Diderot, Bordeaux 1, Montpellier, Rouen) aux rentrées 2007 et 2008, pendant la première semaine de cours. 298 réponses d'étudiants ont été analysées pour ce qui concerne l'Analyse.

Comme prévu, les résultats concernant des calculs de limites étaient assez bons dès lors que ces limites mettaient en jeu des règles algébriques sur les fonctions monômes, exponentielles, logarithmes, avec des formes et des bornes usuelles : le calcul de la limite de  $g(x) = x^{10} e^x$  lorsque  $x$  tend vers moins l'infini étant par exemple réussi à 55 %, le calcul lorsque  $x$  tend vers plus l'infini étant le mieux réussi avec 87 %. Les résultats étaient toujours corrects mais sensiblement moins bons lorsque les formes ne correspondaient pas à des formes indéterminées usuelles de terminale, c'est-à-dire que les règles algébriques ne s'appliquaient pas de façon immédiate : le calcul de la limite de  $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$  lorsque  $x$  tend vers plus l'infini étant par exemple réussi à 53 %, celui le moins bien réussi étant celui de la limite de  $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$  lorsque  $x$  tend vers 0, réussi à seulement 9 % : l'absence de disponibilité de la perspective globale sur la fonction représentée semble pouvoir expliquer ce taux d'échec chez les étudiants. En effet, la fonction

$f(x) = \frac{e^x}{x^3}$  tend vers  $-\infty$  en  $0^-$  et tend vers  $+\infty$  en  $0^+$ . La perspective globale adoptée

sur l'expression algébrique  $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$  permettrait d'appréhender cette difficulté

mais comme nous l'avons expliqué plus haut seul un expert peut spontanément adopter cette perspective à partir de la seule expression algébrique. L'étudiant peut ne référer qu'aux formules algébriques et ne pense pas à la différence de traitement qui doit être faite en  $0^+$  et en  $0^-$ .

En outre, les résultats de la CI2U ont remis en évidence la non disponibilité chez les étudiants de la perspective locale nécessaire pour un calcul correct des limites en formes de taux d'accroissement, la limite de  $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$  lorsque  $x$  tend vers 2 n'étant réussie qu'à 13%.

Concernant des calculs de limites à l'infini qui ne mettent pas en jeu des règles algébriques, seuls 3 étudiants sur 298 ont répondu correctement aux deux calculs de limites  $\sin(2\pi n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini et  $\cos(2\pi x)$  lorsque  $x$  tend vers plus l'infini. Plus précisément, deux groupes d'étudiants sont alors apparus nettement. Le premier groupe est constitué des étudiants, très nombreux (126 sur 298), qui ne se dégagent pas d'une approche algébrique et ne donnent aucune réponse à ce genre de calcul de limite ( $\sin(2\pi n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $\cos(2\pi x)$  lorsque  $x$  tend vers plus l'infini et d'autres du même type). L'autre groupe est constitué d'étudiants qui semblent pouvoir dépasser cette approche purement algébrique des fonctions et des calculs de limites : on trouve cependant parmi ceux-là d'une part des étudiants qui semblent plutôt raisonner sur les deux limites (et d'autres) avec une perspective ponctuelle, donnant une limite finie à la suite et à la fonction (54 étudiants sur les 298), et d'autre part des étudiants qui semblent plutôt adopter une perspective globale pour conclure (traitant notamment les suites comme des fonctions, 49 sur 298). Pour tous les autres étudiants, hors des deux grands groupes que nous venons d'identifier, le questionnaire était trop limité pour les catégoriser.

Comme le calcul de ces limites se fait à l'infini, il semble que ce ne soit pas la perspective locale qui soit pertinente ici mais bien la perspective ponctuelle (dans quelques cas particulier de suites comme  $\sin(2\pi n)$  où la perspective ponctuelle permet de trouver que la suite est constamment nulle) et surtout la perspective globale sur les fonctions en jeu (comme pour la fonction  $\cos(2\pi x)$  où la perspective globale permet de déduire de l'oscillation la non convergence). De fait, si la coordination des deux perspectives ponctuelle et globale se révélait nécessaire pour traiter au mieux tous les calculs de limites rencontrés, il est apparu que peu d'étudiants arrivant en L1 semblent capables de changer de perspective spontanément (une vingtaine dont les 3 qui ont répondu correctement aux limites

de  $\sin(2\pi n)$  et  $\cos(2\pi x)$  ) et que beaucoup d'étudiants ne semblent mobiliser aucune des deux perspectives, répondant faux ou ne répondant pas à toutes les questions où les procédures algébriques sont inefficaces et où ces perspectives sont pertinentes.

Signalons que dans le test de la CI2U, des résultats généraux mettaient bien en évidence la meilleure réussite au baccalauréat des étudiants semblant avoir pu raisonner à un certain moment sous la perspective globale, confortant notre hypothèse selon laquelle l'aptitude à adopter la perspective globale intervient certainement dans la réussite des étudiants en Analyse. Signalons enfin que le test de la CI2U mettait bien en évidence également les difficultés des étudiants pour manipuler les valeurs absolues et leurs énormes difficultés en ce qui concerne la logique.

#### **4b. Un exercice à la transition lycée-université**

Il a été proposé en 2010 à des élèves de terminale scientifique (S) et à des étudiants de L1 un exercice similaire, caractéristique de la transition lycée – université. Il nous a permis d'affiner notre étude des conceptions sur les fonctions en les reliant à la notion de perspective ainsi que la façon dont cette dernière intervient dans des exercices d'Analyse. Les résultats permettent de préciser les caractéristiques des deux classes d'élèves ou d'étudiants selon la capacité à mobiliser la perspective globale sur les objets manipulés (disponibilité de la perspective globale, ce qui correspondra à l'approche coordonnée proposée par Monoyiou et Gagatsis, 2010) ou bien la prégnance chez eux des seules procédures algébriques dans toutes les situations (l'approche algébrique). Ces résultats sont également cohérents avec ceux de Balacheff et Gaudin (2002), ainsi que ceux de Robert (1983) de façon plus indirecte.

Notre dispositif a consisté à étudier les productions d'élèves de terminale S et d'étudiants de L1 sur un exercice qui mélange le registre algébrique et le registre symbolique, traitant d'une fonction définie par une intégrale de la forme :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

Au lycée et à l'université, les intégrales sont introduites comme des aires sous les courbes, c'est-à-dire une approche par les intégrales définies. Le lien entre les intégrales des fonctions continues et les primitives est fait rapidement (démonstré partiellement en général) de sorte que les élèves et les étudiants peuvent travailler la plupart des exercices dans le cadre algébrique.

Nous avons choisi de comparer les productions des élèves et des étudiants de L1 sur cet exercice car il est très proche de tâches classiques dans les deux institutions et les adaptations sont raisonnables, aussi bien pour les élèves que pour les

étudiants. En effet, même si ce genre de fonction  $G$  est inhabituel dans les pratiques des élèves et des étudiants, ces derniers ont déjà rencontré des intégrales indéfinies sur des intervalles de la forme  $[a, x]$  ou  $[a, \beta(x)]$  ( $\beta$  étant une fonction linéaire) au moment du test. Les élèves devront donc adapter leurs connaissances anciennes, par exemple en introduisant un point intermédiaire  $a$  et en utilisant la relation de Chasles. L'intérêt d'un tel type d'étude est que des procédures relevant uniquement du domaine F2 peuvent ne pas suffire pour dégager des propriétés de la fonction  $G$ , mêmes ponctuelles. Il faut travailler dans le domaine F1 et recourir aux perspectives.

Le test a impliqué une classe d'élèves de terminale S d'un lycée parisien (15 étudiants) et un groupe d'étudiants de L1 (109 étudiants de l'Université Paris Diderot). Les énoncés précis ont été choisis par les professeurs de chacun des deux niveaux et de façon indépendante, avec des consignes pour traiter des questions concernant des propriétés ponctuelles et globales de la fonction  $G$ . Voici l'énoncé qui a été proposé en L1 :

Exercice 5

Soit  $f$  une fonction continue sur  $R$  et soit  $G$  la fonction définie sur  $R$  par

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

- 1) Montrer que si  $f$  est une fonction constante, la fonction  $G$  est également constante.
  - 2) Montrer que si  $f$  est paire (respectivement impaire), la fonction  $G$  est paire (respectivement impaire).
  - 3) Montrer que  $G$  est dérivable et calculer  $G'$ .
  - 4) Expliciter la fonction  $G$  associée à la fonction  $f(t)=|t|$ .
- (...)

Enoncé de L1 (mars 2010)

Dans cet énoncé de L1, la fonction  $f$  est supposée continue globalement sur  $R$ . Les étudiants doivent montrer des propriétés globales sur  $G$ , notamment une propriété de parité de  $G$  (par changement de variable, connaissance spécifique de L1). Ils doivent aussi justifier que  $G$  est dérivable et calculer  $G'$ . Les questions 1) et 3) peuvent se traiter algébriquement, en introduisant une primitive  $F$  de  $f$  et sans aucune considération de perspective sur les fonctions  $f$  et  $G$ . Les difficultés des étudiants liées aux perspectives ponctuelle et globale peuvent apparaître pour les questions 2) – si  $f$  est paire alors  $G$  est paire - et 4) – expliciter  $G$  lorsque  $f$  est la fonction valeur absolue. Par exemple, en question 4), les seules procédures algébriques ne suffisent plus, bien que le registre des questions et des réponses attendues reste toujours algébrique. En effet, même en exploitant la parité de la valeur absolue et le résultat de la question 2), il est nécessaire d'envisager plusieurs

cas selon que 0 appartient ou non à l'intervalle  $[x-1, x+1]$  ; c'est-à-dire  $x < -1$ ,  $x$  dans  $[-1, 1]$  et  $x > 1$ . La difficulté nous semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément la perspective ponctuelle sur  $G$  en  $x$  et la perspective globale sur  $f$  dans l'intervalle  $[x-1, x+1]$  pour dégager les cas de figure. La question 5) concerne quant à elle uniquement le domaine de travail F3 et nous ne développerons pas à son sujet.

Dans l'énoncé de terminale, l'introduction par l'énoncé d'une primitive  $F$  permet d'emblée de rester dans le domaine de travail F2 pour de nombreuses questions : 1a), 1b), 1c), 2a), 3a) 1<sup>ère</sup> partie et enfin 3b).

**I** THÈMES : Fonction définie par une intégrale

Dans le problème,  $\mathcal{D}$  désignera l'ensemble des fonctions définies, dérivables sur  $\mathbb{R}$ . À toute fonction  $f$  de  $\mathcal{D}$ , on associe la fonction  $\tilde{f}$  telle que pour tout réel  $x$  :  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$ .

1.a. Montrez que pour toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ;  

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} (F(x+1) - F(x-1)).$$

b. Calculez  $\tilde{f}$  lorsque  $f$  est la fonction définie par  $f(t) = t^n$ ,  $n$  entier,  $n \geq 1$ .  
 Montrez que pour toute fonction polynôme  $f$ ,  $\tilde{f}$  est une fonction polynôme de même degré.

c. Calculez  $\tilde{f}$  lorsque  $f$  est la fonction définie par  $f(t) = \cos \pi t$ .

2.a. Montrez que pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{D}$ ,  $\tilde{f}$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x$  réel  $(\tilde{f})'(x) = \frac{1}{2} (f(x+1) - f(x-1))$ .

b. Dédisez-en que les propositions (1) et (2) suivantes sont équivalentes : (1)  $\tilde{f}$  est une fonction constante ; (2)  $f$  est périodique et 2 est une période.

3.a. On suppose  $f$  croissante sur  $\mathbb{R}$ . Montrez qu'alors  $\tilde{f}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout réel  $x$ ,  $f(x-1) \leq \tilde{f}(x) \leq f(x+1)$ .

b.  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \frac{4e^t}{t^2 + 4}$ . Étudiez les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Dédisez-en les variations de  $\tilde{f}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Enoncé de terminale S (mai 2010)

Les premiers exemples de fonctions  $f$  permettent de sensibiliser les élèves à la dépendance de  $G$  (appelée  $f$  tilde dans l'énoncé) à  $f$ , ce qui n'est pas une préoccupation en L1, les étudiants devant raisonner directement dans le registre symbolique. Des caractéristiques d'énoncés de terminale S se retrouvent, par rapport à des énoncés de L1, concernant la complexité des tâches : la tâche de calcul de la dérivée de  $G$  est découpée en deux sous-tâches : question 1a) et question 2a) alors que les étudiants de L1 sont supposés trouver  $G'$  directement. Tout en restant dans le domaine de travail F2, la question 1b) partie 2 comporte des adaptations de connaissances pour les lycéens, mais elle ne questionne toujours pas les perspectives. Ce sont les questions 2b) et 3a) qui obligent ici à sortir du domaine de travail F2 et qui permettent de tester la capacité des élèves à manipuler des fonctions de façon symbolique sous les perspectives ponctuelle et globale. Autrement dit, comme certaines des questions du partiel de L1, il s'agit de questions qui nécessitent de dépasser les démarches algébrisées.

Dans la question 2b), il faut jouer entre deux propriétés globales sur  $f$  et  $G - f$  est 2 périodique et  $G$  est constante - par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur  $f$  - pour tout  $x$  réel, on a  $f(x-1)=f(x+1)$ . Plus précisément, dans le sens direct par exemple, il faut traduire de façon ponctuelle universelle le fait que  $G$  est constante - pour tout  $x$  réel, on a  $G'(x)=0$ . Il faut ensuite réinterpréter l'information ponctuelle universelle - pour tout  $x$  réel, on a  $f(x-1)=f(x+1)$  - en périodicité de la fonction  $f$ . Remarquons cependant qu'aucune de ces traductions ne met a priori en jeu la perspective globale. En effet, la périodicité et la constance se traduisent de façon ponctuelle universelle (comme nous l'avons signalé plus haut, les programmes ont évacué la perspective locale liée à la dérivabilité et les propriétés globales de variation des fonctions sont réduites à des propriétés ponctuelles universelles de leur dérivée).

Dans la première partie de la question 3a), il faut jouer de la même façon entre deux propriétés globales sur  $f$  et  $G - f$  et  $G$  sont croissantes - par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur  $f$  - pour tout  $x$  réel, on a  $f(x-1) \leq f(x+1)$ . Plus précisément, il faut à partir de la propriété globale -  $f$  est croissante - écrire la propriété ponctuelle universelle - pour tout  $x$  réel, on a  $f(x-1) \leq f(x+1)$  - et réinterpréter la propriété ponctuelle universelle -  $G'(x) \geq 0$  - en propriété globale -  $G$  croissante. Remarquons ici que l'écriture en propriété ponctuelle universelle - pour tout  $x$  réel, on a  $f(x-1) \leq f(x+1)$  - n'est pas une traduction ponctuelle universelle de la croissance. Il s'agit d'une perte d'information par rapport à l'écriture globale d'une propriété globale - la croissance : pour tout  $x, y$  réels,  $x \leq y$  implique  $f(x) \leq f(y)$  - qui ne peut ici se traduire de façon ponctuelle universelle.

Dans la deuxième partie de la question 3a), il ne s'agit pas par contre de passer d'une propriété globale à une autre en les traduisant de façon ponctuelle

universelle. Comme dans l'exercice de L1, la difficulté semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément le point de vue ponctuel sur  $G$  en  $x$  et le point de vue global sur  $f$  dans l'intervalle  $[x-1, x+1]$ . En effet, il faut traduire avec deux variables une propriété globale sur  $f$  - pour tout  $x$  réel et  $t$  dans l'intervalle  $[x-1, x+1]$ , on a  $f(x-1) \leq f(t) \leq f(x+1)$ . Une autre méthode consiste à changer de registre et interpréter graphiquement la croissance de  $f$  et son intégrale sur un intervalle  $[x-1, x+1]$ . Cette question est donc plus complexe que les précédentes car elle met directement en jeu la perspective globale sur  $f$  et pas uniquement des propriétés ponctuelles universelles.

La question 3b) est quant à elle une simple application, les variations de  $f$  se déterminent algébriquement (calcul de dérivée, étude de signe).

#### **4c. Les résultats des élèves et des étudiants en termes de perspectives**

Focalisés sur la transition lycée-université, nous avons choisi de n'analyser que les copies des cinq élèves de la classe de terminale désignés par leur enseignant comme susceptibles de se retrouver à l'université l'année d'après. En effet, dans une première lecture des productions des élèves, il est apparu que celles-ci étaient de bien meilleure qualité globalement que les productions des étudiants de L1, relativement à la difficulté des énoncés. Cela s'expliquait par le fait que bon nombre de bons élèves de terminale ne se retrouvent pas dans les populations d'étudiants de L1. Ils s'orientent beaucoup par exemple vers les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieur. Les copies des étudiants ont par contre toutes été consultées, sans pour autant en faire une analyse exhaustive.

Comme prévu, les difficultés des cinq élèves de terminale ont surtout porté sur les questions 2b) et 3a). Un seul d'entre eux a réussi les deux questions de façon acceptable. Les autres questions, qui ne mettent pas en jeu les perspectives ponctuelle et globale, ont été traitées sans problèmes majeurs. Seule la question 1b), dont nous avons noté plus haut qu'elle est complexe pour les lycéens, est mal réussie majoritairement.

Il apparaît que la question 2b) est moins bien réussie que la première partie de la question 3a), quand bien même les deux mettent en jeu une propriété ponctuelle universelle qui ne fait pas a priori travailler la perspective globale et quand bien même la propriété ponctuelle universelle de la question 3a) n'est pas une traduction mais une perte d'information par rapport à la propriété de croissance.

En fait, la traduction des propriétés globales de constance ou de croissance en propriétés ponctuelles universelles  $G'(x) = 0$  ou  $G'(x) \geq 0$  est routinisée par les élèves de fin de terminale. C'est respectivement en jeu dans les deux questions 2b) et 3a). Sans doute la traduction de la périodicité par la propriété pour tout  $x$  réel, on a  $f(x+t)=f(x)$  est-elle, elle aussi, routinisée chez les élèves. Cependant, la propriété ponctuelle universelle qui apparaît en 2b) est  $f(x+1)=f(x-1)$ . Son interprétation en

périodicité fait donc finalement pleinement travailler la perspective globale. Au contraire, dans la première partie de la question 3a) où il faut traduire la croissance de  $f$  de façon ponctuelle universelle - pour tout  $x$  réel, on a  $f(x-1) \leq f(x+1)$ , cette traduction est aidé par le contexte et ce à quoi il faut arriver. Ceci semble expliquer cette réussite moindre dans la question 2b) par rapport à la question 3a). Voici un exemple de production d'élève 5 pour la question 2b) :

<p>2b.</p> <p>(1) <math>f</math> est une fonction constante équivaut à <math>f(x)=a</math>  (2) <math>f</math> est périodique de période 2 équivaut à <math>f(x)=f(x+2)</math></p> <p>On peut donc dire ces relations par un autre énoncé</p> $f(x) - f(x+1) = f(x+1) - f(x+2) \text{ et } f(x) = a$ <p>donc <math>\frac{1}{2}(f(x+1) - f(x+2)) = 0</math> (1)</p> <p><math>\Leftrightarrow f(x+1) - f(x+2) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow f(x+1) = f(x+2)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow f(x+1) + f(1) = f(x+2) + f(1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow f(x+2) = f(x)</math> (2)</p> <p>donc (1) <math>\Leftrightarrow</math> (2).</p>	<p>(1) <math>G</math> est constante <math>\Leftrightarrow G'(x)=0</math>  (2) <math>f</math> est 2 périodique <math>\Leftrightarrow f(x)=f(x+2)</math>  On part d'un membre pour arriver à l'autre :</p> <p><math>G'(x) = \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)]</math> et <math>G'(x)=0</math>  ...  <math>\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) + f(1) = f(x-1) + f(1)</math>    <math>\Leftrightarrow f(x+2) = f(x)</math> (2)  so (1) <math>\Leftrightarrow</math> (2).</p>
--	---

Elève 5 : question 2b)

L'élève 5 explicite sa procédure « on part d'un membre pour arriver à l'autre ». Il n'y a aucune quantification qui traduirait une sensibilité à la perspective globale dans les propriétés ponctuelles universelles. En outre, les équivalences sont fausses. Il est nécessaire pour l'élève de revenir à la forme initiale de la périodicité  $f(x)=f(x+2)$  pour conclure à la périodicité de  $f$  car l'obtention de  $f(x-1)=f(x+1)$ , même sans quantification, n'est pas pour lui une caractérisation de la périodicité. Du coup, ce sont des procédés algébriques qui font foi et tout est mis en œuvre algébriquement pour faire apparaître  $f(x)=f(x+2)$ .

Concernant la première partie de la question 3a), la croissance de la fonction  $f$  est traduite par  $f(x-1) < f(x+1)$  sans les quantificateurs chez 3 élèves (dont le 5). Il y a également présence d'équivalences, ceci dénotant peut-être aussi l'absence de perspective globale chez ces élèves. Voici les productions des élèves 2 et 5 :

<p>3a) On sait que <math>f</math> est croissante.          On a donc <math>f(x+1) &gt; f(x) &gt; f(x-1)</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) &gt; f(x-1)</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow f'(x) &gt; 0</math>          donc <math>f</math> est croissante</p>	<p>3a. monia que <math>f</math> est croissante et <math>f</math> est croissante  <math>f</math> est dérivable sur <math>\mathbb{R}</math> (l.a)  <math>x+1 &gt; x-1</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) &gt; f(x-1)</math> car <math>f</math> est croissante  <math>\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow f'(x) &gt; 0</math>          donc <math>f'(x) &gt; 0</math> sur <math>\mathbb{R}</math>, donc <math>f</math> est croissante sur <math>\mathbb{R}</math></p>
<p>3a) On sait que <math>f</math> est croissante.          On a donc <math>f(x+1) &gt; f(x) &gt; f(x-1)</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) &gt; f(x-1)</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow G'(x) &gt; 0</math>          Donc <math>G</math> est croissante.</p>	<p>3a) <math>G</math> est dérivable sur <math>\mathbf{R}</math> (2a)  <math>x+1 &gt; x-1</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) &gt; f(x-1)</math> car <math>f</math> est croissante  <math>\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow G'(x) &gt; 0</math>  <math>G'(x) &gt; 0</math> sur <math>\mathbf{R}</math>,          donc <math>G</math> est croissante sur <math>\mathbf{R}</math>.</p>

Elève 2 : question 3a)

Elève 5 : question 3a)

La production de l'élève 3 est sensiblement identique à celle de l'élève 2, sans quantificateur, mais il n'y a pas les symboles d'équivalence. Tout se passe comme si ces trois élèves ne travaillaient que dans le domaine F2, où seuls des calculs algébriques permettent de passer d'un état A traduisant des hypothèses à un état B caractéristique du résultat attendu. Le jeu ponctuel / ponctuel universel / global mis à l'œuvre dans ces deux questions est totalement masqué par des procédures algébriques. Les quantifications permettant de mettre en scène ce jeu sont systématiquement absentes. C'est pourtant l'élève 5 qui réussit correctement la deuxième partie de la question 3b) plus complexe mais il reconnaît en fait une application immédiate de la formule de la moyenne et passe donc en quelque sorte à côté de l'aspect global.

Le profil des élèves 1 et 4 semble par contre un peu différent. Même si des caractéristiques de leurs productions sont similaires à celles des élèves précédents (présence des équivalences notamment, ce qui pourrait sans doute s'expliquer en référant au contrat didactique, Brousseau 1997), il semble que ces élèves sont plus à même d'interpréter ponctuellement ou globalement les écritures symboliques qu'ils manipulent.

Dans la question 2b), ces élèves ne traduisent pas les propriétés globales avec des quantificateurs (mais ils vont le faire en 3a)). Cependant comme nous l'avons remarqué plus haut, la quantification explicite n'est pas nécessaire pour réussir la question 2b) puisque les propriétés globales mises en jeu sont uniquement ponctuelles universelles. Alors il est légitime de se demander si cette quantification n'est pas présente implicitement. En effet, contrairement aux trois élèves du groupe précédent, les élèves 1 et 4 peuvent interpréter directement l'écriture  $f(x-1)=f(x+1)$  comme la 2-périodicité.

<p>b. <math>f</math> est une fonction constante</p> <p><math>(\Rightarrow) f'(x) = 0</math></p> <p><math>(\Leftrightarrow) \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] = 0</math></p> <p><math>(\Leftrightarrow) f(x+1) - f(x-1) = 0</math></p> <p><math>(\Leftrightarrow) f(x+1) = f(x-1)</math></p> <p><math>(\Leftrightarrow) f</math> est périodique de période 2 car <math>x+1 - (x-1) = 2</math>.</p> <p>D'où (1) <math>(\Leftrightarrow)</math> (2).</p>	<p><math>f</math> est une fonction constante sur <math>\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = 0</math></p> <p><math>(\Leftrightarrow) \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] = 0</math></p> <p><math>(\Leftrightarrow) f(x+1) = f(x-1)</math></p> <p><math>(\Leftrightarrow) f</math> est périodique de période 2.</p>
<p>b) <math>G</math> est une fonction constante</p> <p><math>\Leftrightarrow G'(x) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] = 0</math></p> <p>...</p> <p><math>\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow f</math> est périodique de période 2 car <math>x+1 - (x-1) = 2</math></p> <p>D'où (1) <math>\Leftrightarrow</math> (2)</p>	<p><math>G</math> est une fonction constante</p> <p><math>\Leftrightarrow G'(x) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow f(x+1) = f(x-1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow f</math> est périodique de période 2</p>

Elève 1 : question 2b)

Elève 4 : question 2b)

L'élève 1 explicite d'ailleurs le fait que «  $f$  est périodique de période 2 car  $x+1 - (x-1) = 2$  ». Autrement dit, ce n'est pas tant la présence du quantificateur qui est importante mais la capacité à interpréter globalement l'écriture  $f(x-1)=f(x+1)$ . Et comme nous l'avons expliqué plus haut, il faut bien mobiliser une perspective globale sur les fonctions pour passer directement de cette écriture (même non quantifiée) à la 2-périodicité, ce que n'ont pas pu faire les élèves du profil précédent.

Concernant la question 3a) (première partie), ces deux mêmes élèves mobilisent cette fois explicitement la quantification pour traduire les propriétés globales en propriétés ponctuelles universelles, ce qui peut signifier encore la prise en compte de la perspective globale. Cependant les élèves n'identifient pas qu'il s'agit d'une perte d'information et non d'une traduction ponctuelle universelle de la croissance. Par exemple, l'élève 1 ci-dessous déduit la croissance de  $G$  à partir de la relation  $G(x-1) \leq G(x) \leq G(x+1)$ , ce qui constitue une grave erreur liée à des lacunes dans cette perspective globale.

<p>3.a. <math>f</math> croissante sur <math>\mathbb{R}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow</math> Pour tout <math>n \in \mathbb{R}</math>, <math>f(n-1) \leq f(n) \leq f(n+1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \int_{x-1}^{x+1} f(x-1) dx \leq \int_{x-1}^{x+1} f(x) dx \leq \int_{x-1}^{x+1} f(x+1) dx</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(x-1) dx \leq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(x+1) dx</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \tilde{f}(x-1) \leq \tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(x+1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \tilde{f}</math> est croissante sur <math>\mathbb{R}</math>.</p>	<p>3a) Soit <math>f</math> croissante sur <math>\mathbb{R}</math>,          Pour tout <math>x \in \mathbb{R}</math>, <math>x-1 &lt; x+1</math>  <math>\Leftrightarrow f(x-1) &lt; f(x+1)</math>  <math>\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] &gt; 0</math>  <math>\Leftrightarrow f'(x) &gt; 0</math> donc <math>f(x)</math> est croissante sur <math>\mathbb{R}</math></p>
<p>3a) <math>f</math> est croissante sur <math>\mathbb{R}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow</math> Pour tout <math>x</math> de <math>\mathbb{R}</math>, <math>f(x-1) \leq f(x) \leq f(x+1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \int_{x-1}^{x+1} f(x-1) dx \leq \int_{x-1}^{x+1} f(x) dx \leq \int_{x-1}^{x+1} f(x+1) dx</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \dots</math></p> <p><math>\Leftrightarrow G(x-1) \leq G(x) \leq G(x+1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow G</math> est croissante sur <math>\mathbb{R}</math></p>	<p>3a) Soit <math>f</math> croissante sur <math>\mathbb{R}</math></p> <p>Pour tout <math>x</math> de <math>\mathbb{R}</math>, <math>x-1 &lt; x+1</math></p> <p><math>\Leftrightarrow f(x-1) &lt; f(x+1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \dots</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \frac{1}{2} [f(x+1) - f(x-1)] &gt; 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow G'(x) &gt; 0</math> donc <math>G</math> est croissante sur <math>\mathbb{R}</math></p>

Elève 1 : question 3a) partie 1

Elève 4 : question 3a) partie 1

Ces deux classes (ou profils) ayant été identifiés chez les élèves, nous avons essayé de retrouver des caractéristiques de ces classes chez les étudiants de L1. Ici, les difficultés liées aux changements de perspectives pertinentes ou nécessaires pour résoudre les questions concernent les questions 2) et 4).

Chez beaucoup d'étudiants de L1, les propriétés globales, dans la question 2) en particulier, sont traduites sans quantificateurs. Ceci entraîne un amalgame entre les différentes perspectives qui sont masquées par des procédures algébriques. Les

écritures ne peuvent jamais être interprétées quand c'est nécessaire. Il s'en suit chez des étudiants une confusion entre les variables et une non distinction des rôles différents que chacune d'entre elle tient : ponctuel pour le  $x$  et global pour le  $t$ , comme dans les deux exemples ci-dessous :

<p>Si, dans le cas où <math>f</math> est paire :</p> $f(t) = f(-t) \text{ donc } \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \int_{x-1}^{x+1} f(-t) dt$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-t) dt$ <p>donc <math>G(x) = \frac{1}{2} (F(x+1) - F(x-1)) = \frac{1}{2} (F(-x+1) - F(-x-1))</math></p> $= \frac{1}{2} (F(-x-1) - F(-x+1))$ $= G(-x) \text{ donc } G \text{ est aussi paire}$	<p>Si <math>f</math> est paire alors <math>f(t) = f(-t)</math>.</p> $G(-x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-t) dt = G(x)$ <p><math>G(-x) =</math></p> <p>Si <math>f</math> est impaire alors <math>f(t) = -f(-t)</math>.</p> $G(-x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-t) dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} -f(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$ $G(-x) = -G(x)$
<p>Dans le cas où <math>f</math> est paire :</p> $f(t) = f(-t) \text{ donc } \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \int_{x-1}^{x+1} f(-t) dt$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-t) dt$ <p>donc <math>G(x) = \frac{1}{2} [F(x+1) - F(x-1)] = \frac{1}{2} [F(-x+1) - F(-x-1)]</math></p> $= \frac{1}{2} [F(-x-1) - F(-x+1)] = G(-x) \text{ donc } G \text{ est aussi paire}$	<p>Si <math>f</math> paire alors <math>f(t) = f(-t)</math></p> $G(-x) =$ <p>Si <math>f</math> impaire alors <math>f(-t) = -f(t)</math></p> $G(-x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(-t) dt$ $= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} -f(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$ $G(-x) = -G(x)$

Exemples de réponses à la question 2)

D'un autre côté, il y a des copies où la mise en perspective globale est mieux assurée, même implicitement, lorsqu'elle est pertinente. Les quantificateurs sont présents pour traduire les propriétés globales, en particulier ici lorsqu'il s'agit d'intégrer une relation d'égalité. Cela ne permet pas pour autant à ces étudiants de réussir les questions mais des arguments globaux sont mentionnés : « *c'est la même partie qu'il faut intégrer* » ou « *si deux fonctions sont égales, leurs primitives sont égales* ».

Concernant la question 4), cette distinction se retrouve à nouveau. Pour une partie des étudiants, les procédures mobilisées ne relèvent que du domaine de travail F2 comme dans la copie suivante.

<p>4) Pour <math>f(t) =  t </math></p> <p>On a <math>\int  t  = \left  \frac{t^2}{2} \right  \Rightarrow \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \left  \frac{(x+1)^2}{2} \right  - \left  \frac{(x-1)^2}{2} \right </math></p> <p>donc <math>G(x) = \frac{1}{2} \left( \left  \frac{(x+1)^2}{2} \right  - \left  \frac{(x-1)^2}{2} \right  \right)</math></p>	<p>4) Pour <math>f(t) =  t </math></p> <p>On a <math>\int  t  =  t^2/2  \Rightarrow</math></p> <p><math>\int_{x-1}^{x+1} f(t) dt =  (x+1)^2/2  -  (x-1)^2/2 </math></p> <p>donc <math>G(x) = 1/2 [  (x+1)^2/2  -  (x-1)^2/2  ]</math></p>
---	---

Exemple de réponses à la question 4)

Chez d'autres étudiants par contre, il y a une prise en compte des cas de figure, même si à nouveau cela ne mène pas aux bonnes solutions.

<p>4) Explicitons la fonction G associée à la fonction <math>f(t) =  t </math></p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1}  t  dt</math></p> <p>si <math>t &lt; 0</math> alors</p> <p><math>G(x) = -\frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t dt = -\frac{1}{2} [x+1-x+1] = -1</math></p> <p>si <math>t &gt; 0</math> alors</p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t dt = \frac{1}{2} [x+1-x+1] = 1</math></p>	<p>4) Explicitons G</p> <p>Soit <math>x &gt; 0</math></p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt</math> <math>f(t) =  t </math></p> <p>si <math>x &gt; 0</math></p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{4} \left[ \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} \right] = \frac{1}{4} \frac{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{2}</math></p> <p>si <math>x &lt; 0</math></p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} -t dt = -\frac{1}{2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{x-1}^{x+1} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} \right]</math></p>
<p>4) Explicitons la fonction G associée à la fonction <math>f( t )</math></p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1}  t  dt</math></p> <p>Si <math>t &lt; 0</math> alors</p> <p><math>G(x) = -\frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t dt = -\frac{1}{2} [x+1-x+1] = -1</math></p> <p>Si <math>t &gt; 0</math> alors</p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t dt = \frac{1}{2} [x+1-x+1] = 1</math></p>	<p>4) Explicitons G</p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt</math> <math>f(t) =  t </math></p> <p>Si <math>x &gt; 0</math></p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t dt = \frac{1}{2} [t^2/2]_{x-1}^{x+1} = \dots</math></p> <p>Si <math>x &lt; 0</math></p> <p><math>G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} -t dt = -\frac{1}{2} [t^2/2]_{x-1}^{x+1} = \dots</math></p>

Exemples de réponses à la question 4)

On trouve extrêmement peu de procédures correctes sur l'ensemble des questions et des étudiants de L1, mais une condition nécessaire à la réussite semble bien être

que l'étudiant fasse partie du deuxième groupe. Dans les deux copies précédentes, il apparaît clairement combien, même en ayant pris conscience du fait qu'il faille considérer des cas, il est difficile de gérer simultanément la perspective ponctuelle sur  $G$  - calcul de  $G(x)$  pour des valeurs de  $x < 1$ ,  $x$  dans  $[-1,1]$  ou  $x > 1$  - et la perspective globale sur la valeur absolue - considération de  $|t|$  pour  $t$  dans  $[x-1, x+1]$  - ou pour dire autrement les deux variables en jeu, le domaine de variation de  $t$  étant défini par rapport à la première variable  $x$ . C'est sans aucun doute une difficulté supplémentaire de cette question, qui dépasse les seules considérations sur les perspectives ponctuelle et globale.

## 5. Conclusions et discussion

À l'issue de notre synthèse de résultats déjà mis en évidence dans de nombreux travaux, nous émettons l'hypothèse que le cadre fonctionnel est réduit à un cadre algébrique chez les élèves de fin de terminale scientifique, avec la manipulation de formules algébriques sans le « relief » que l'enseignement a voulu donner à la notion de fonction dans le domaine de travail F1. Ce cadre algébrique suppose tout de même la possibilité de travailler avec des expressions symboliques, et la possibilité d'envisager un certain degré de généralité, comme dans l'exercice d'intégration présenté ci-dessus. Cependant, il développe chez certains élèves une approche algébrique qui limite leurs possibilités à l'entrée dans l'Analyse.

En effet, les deux perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions, qui ne semblent déjà pas suffisamment repérés par les élèves à l'issue de leur travail dans le domaine F1, ne sont plus suffisamment manipulées dans le domaine F2 du fait de l'insuffisance des formules algébriques vis-à-vis de la perspective globale, du faible herbier de fonctions disponibles et de la sous-exploitation des représentations globales (graphique ou tableau de variation) comme outil heuristique<sup>4</sup> de l'activité mathématique. Les propriétés globales de variation sont en outre réduites à des propriétés ponctuelles universelles, grâce aux hypothèses fortes de dérivabilité, ce qui ne favorise pas la nécessité des quantificateurs et nuit également au travail de la perspective globale. Du coup, le manque de disponibilité de cette perspective globale, la non articulation entre les perspectives ponctuelle et globale, associés à la seule disponibilité du registre algébrique au détriment des registres graphiques

---

<sup>4</sup> En reprenant Duval (1999), les représentations graphiques sont essentiellement réduites à un rôle iconique : « *Iconic representations refer to a previous perception of represented object [...] whereas visualization consists in grasping directly the whole configuration of relations and in discriminating what is relevant in it* ». De ce fait, la visualisation au sens de Duval peut-être reliée à la perspective globale sur les courbes et à un rôle heuristique de ces représentations. De même qu'adopter la perspective globale est difficile, il n'y a pas toujours visualisation au sens de Duval dès qu'un graphique est utilisé.

ou symbolique, constitue sans doute l'un des obstacles majeurs à l'entrée des lycéens et des étudiants dans les exercices d'Analyse, où les mises en perspectives sont souvent pertinentes (sans pour autant parler nécessairement d'exercices mettant en jeu des notions locales).

Ces hypothèses semblent confirmées par les résultats à l'issue de notre exercice d'intégration proposé aux lycéens et étudiants. En cherchant à préciser les conceptions sur les fonctions à l'issue de la terminale scientifique et à l'entrée à l'université, nous pouvons ici dégager deux populations d'élèves et d'étudiants.

Certains étudiants à l'entrée de l'université n'ont plus aucune disponibilité de la richesse qui leur a été enseignée à propos des fonctions. Ils ne raisonnent plus qu'algébriquement sans pouvoir se détacher des représentations issues des formules et sans pouvoir adopter la ou les perspectives pertinentes pour les questions en jeu. Hors des situations algébrisées, les fonctions sont considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Les productions de ces étudiants semblent caractérisées par une absence totale des quantificateurs universels pour traduire des propriétés ponctuelles universelles, ce qui peut être associé à la non disponibilité de la perspective globale sur les fonctions. Cette population d'élèves ou d'étudiants est sûrement à mettre en relation avec la conception algébrique – graphique de Balacheff et Gaudin (2002). Elle se retrouve aussi parmi les nombreux étudiants qui n'ont pu raisonner ni ponctuellement ni globalement dans les questions de limites non algébrisées du questionnaire de la CI2U. Ce sont aussi les étudiants qui ont une approche algébrique<sup>5</sup> du concept de fonction au sens de Monoyiou et Gagatsis (2010).

Une deuxième population d'étudiants est par contre capable de dépasser l'approche algébrique et notamment d'adopter, dans certaines situations à mieux circonscrire, la perspective globale sur les représentations manipulées (symboliques, graphiques mais aussi algébriques). Ce sont ici les étudiants qui ont une approche coordonnée du concept de fonctions au sens de Monoyiou et Gagatsis (2010), étant capables d'adopter une perspective globale sur des formules algébriques en référence à la représentation globale graphique. Ces étudiants peuvent notamment introduire plus spontanément des quantificateurs universels (sous leur forme symbolique ou non) pour traduire que certaines propriétés utilisées sont globales ou même ponctuelles universelles. Ces élèves sont sûrement plus proches de la conception courbe - algébrique de Balacheff. Cette population se rapproche également sans doute des élèves dont Robert (1982, 1983) met en évidence qu'ils disposent d'une conception statique de la notion locale de limite, favorable à une conceptualisation correcte de

---

<sup>5</sup> Dire « conception algébrique » nous semble trop fort étant donné les limites de notre étude et ce que sous tend le terme de conceptions .

la définition. Il faut enfin rapprocher ce résultat du fait que les étudiants du questionnaire de la CI2U qui ont pu raisonner d'un point de vue global pour les calculs de limites sont ceux qui statistiquement avaient eu une meilleure réussite au baccalauréat.

Ces résultats sont à affiner mais considérant au final que l'adoption de la perspective globale est une nécessité pour aborder le travail local, avec toutes ses contraintes, nous concluons que l'approche algébrique exclusive fait obstacle à l'entrée dans le champ de l'Analyse et notamment à la conceptualisation des notions locales sur les fonctions, travaillées explicitement dès le début de l'université. Un facteur prédictif de succès des étudiants à l'entrée à l'université est ainsi qu'ils puissent dépasser l'approche algébrique, qu'ils puissent avoir une approche coordonnée des différentes représentations des fonctions et qu'ils puissent adopter les perspectives globale ou locale - même dans des manipulations algébriques : par exemple, détecter les termes prédominants ou négligeables dans des calculs de limites « complexes », ce que sait faire l'expert mathématicien.

Ce travail invite à étendre le domaine de travail F1 jusqu'à la terminale et à l'imbriquer avec le domaine F2 pour mieux préparer le domaine F3. Cela signifie d'une part enrichir l'herbier de fonctions disponible dans le domaine F1 afin que les élèves puissent se représenter globalement les fonctions en jeu à travers des manipulations de formules. Cela signifie aussi ancrer dans le domaine F1 les problèmes de calculs de limites, de calculs de dérivée et d'étude de variations qui relèvent actuellement uniquement du domaine F2 et ne sont plus connectées à des situations concrètes pour les élèves. Enfin, cela signifie travailler dès le domaine F1 des problèmes locaux afin de pouvoir envisager au sein de ce domaine de travail F1 à la fois des questions ponctuelles, des questions globales et des questions relevant de l'aspect local des fonctions. En ce sens, le travail avec les technologies que nous menons par ailleurs est une opportunité pour enrichir le domaine de travail F1 dans ces directions, par exemple en reliant des tâches relevant du travail algébrique à des représentations dynamiques géométriques ou graphiques des fonctions en jeu.

Le travail de recherche reste lui aussi à poursuivre, pour l'étendre à tous le champ de l'Analyse et notamment relier les trois domaines de travail sur les fonctions, les multiples niveaux de conceptualisation caractérisés de diverses manières, à des espaces de travail en Analyse (ETA). Par exemple, les artefacts des ETA seraient à relier aux outils technologiques pour l'Analyse mais tout ce travail théorique reste à faire.

### **Bibliographie**

ARTIGUE M. (1991) Analysis. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

- ARTIGUE M. (1993) Enseignement de l'analyse et fonctions de références. *Repère IREM*. Vol 11. pp 115-139.
- ARTIGUE M., BATANERO C., KENT P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. Dans F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.1011-1049). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc.
- BACHELARD G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*, Paris: Vrin.
- BALACHEFF N., GAUDIN N. (2002) *Students conceptions: an introduction to a formal characterization*. Cahier Leibniz, Numéro 65, Publication de l'Université Joseph Fourier. [http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00190425\\_v1/](http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00190425_v1/)
- BLOCH I. (2002) Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*. Vol 58. pp 25-46.
- BLOCH I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 52. pp 3-28.
- BLOCH I. (2005) The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and the university: factors of rupture. Communication to the Topic Study Group 12, Dans M. Niss (Eds.) *Actes de ICME10*. Copenhagen. Copenhagen: Roskilde University.
- BRIDOUX S. (2011) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université : une étude de cas*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.
- BROUSSEAU G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- CASTELA C. (1995) Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 15 (1). pp 7-48.
- CHORLAY R. (2011) Local-global: the first twenty years. *Archives for history for exact sciences*. Vol 65. pp 1-66.
- COMIN E. (2005) Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. *Petit x*. Vol 67. pp 33-61.
- COPPE S., DORIER J.-L., YAVUZ I. (2007) De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 27 (2). pp 151-186.
- DOUADY R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 7 (2). pp 5-31.
- DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical thinking* (pp.95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- DUVAL R. (1991) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Vol 5. pp 37-65.

- DUVAL R. (1993) *Graphiques et équations: l'articulation de deux registres*, Caen: C.E.R.S.E.
- DUVAL R. (1999) Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning, Dans F. Hitt et M. Santos (Eds.) *Actes de 21st North American PME Conference*. 1. 3-26.
- ELIA I., et al. (2008) Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technology*. Vol 8 (1). pp 49-69.
- GAGATSI A., et al. (2010) Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks. *Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics*. Vol 10. pp 51-67.
- GRENIER-BOLEY N. (2009) *Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université*. Cahier de Didirem, Numéro 59, Publication de IREM de Paris 7.
- GUEUDET G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 67. pp 237-254.
- KUZNIAK A. (2010) L'espace de travail mathématique et ses genèses, Dans *Actes de Deuxième Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Work Space »*. 9-18. Paris.
- LEPLAT J. (1997) *Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris: PUF.
- MASCHIETTO M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Vol 21 (1-2). pp 123-156.
- MASCHIETTO M. (2008) Graphic Calculators and Micro Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computer for Mathematics Learning*. Vol 13. pp 207-230.
- MONOYIOU A., GAGATSI A. (2010) Pre-service teachers' approaches in function problem solving: A comparative study between Cyprus and Italy. *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica*. Vol 1-2. pp 9-23.
- PIAGET J., GARCIA R. (1989) *Psychogenesis and the history of science*, New-York: Colombia University Press.
- PRASLON F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.
- RAFTOPOULOS A., PORTIDES D. (2010) Le concept de fonction et sa représentation spatiale, Dans *Actes de Deuxième Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Work Space »*. 201-214. Paris.
- ROBERT A. (1982) *Divers travaux de mathématiques et l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. Thèse d'Etat. Université Paris 7.
- ROBERT A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP*. Vol 340. pp 431-449.

- ROBERT A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2). pp 139-190.
- ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième: l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x*. Vol 63. pp 7-29.
- ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59-68). Toulouse: Octarès Edition.
- ROBERT A. (2011) Des recherches de type "ingénierie". Dans C. Margolinas, et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.
- ROBERT A., BOSCHET F. (1984) *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année*. Cahier de didactique des mathématiques, Numéro 7, Publication de IREM de Paris 7.
- ROGALSKI J. (1984) Représentations graphiques dans l'enseignement: concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonction. Dans A. Giordan et J.-L. Martinand (Eds.) *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifiques. Sixième journées internationales sur l'éducation scientifique et technique* (pp.379-388). Chamonix:
- ROGALSKI J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.23-30). Toulouse: Octarès Editions.
- ROGALSKI M. (2008) Les rapports entre local et global: mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (Eds.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp.61-87). Paris: PUF.
- SCHNEIDER M. (1991) Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repère IREM*. Vol 5. pp 65-82.
- SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 22. pp 1-36.
- SIERPINSKA A. (1992) On understanding the notion of function. Dans G. Harel et E. Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America Notes, volume 25.
- TALL D. (1996) Functions and calculus. Dans A. J. Bishop, et al. (Eds.) *International handbook of mathematics education* (pp.289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- TALL D. (2006) A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 11. pp 195-215.

TALL D., VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 12. pp 151-169.

VANDEBROUCK F. (2008a) Functions at the transition between French upper secondary school and University. Communication de la commission inter irem université (CI2U), Dans *Actes de ICMI*. Monterey, Mexico.

VANDEBROUCK F. (Eds) (2008b) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse: Octarès.

VANDEBROUCK F. (2011, à paraître) Points de vue et domaines de travail en analyse. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol. pp

VERGNAUD G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 10 (2-3). pp 133-169.

VERGNAUD G. (1996) Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds.) *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.174-185). Clermont-Ferrand: IREM.

VERGNAUD G. (1999/2002) On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget. Dans Y. Clot (Eds.) *Avec Vygotski* (pp.55-68). Paris: La dispute.

VINNER S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, Vol 14 (3). pp 293-305.

VIVIER L. (2010) Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de didactique de Strasbourg*. Vol 15. pp 173-199.

**FABRICE VANDEBROUCK**  
[vandebro@math.jussieu.fr](mailto:vandebro@math.jussieu.fr)