Fonctions Régulues

Goulwen Fichou, Johannes Huisman, Frédéric Mangolte, Jean-Philippe Monnier

▶ **To cite this version:**

Goulwen Fichou, Johannes Huisman, Frédéric Mangolte, Jean-Philippe Monnier. Fonctions Régulues. 2012. hal-00652828v2

HAL Id: hal-00652828
https://hal.science/hal-00652828v2

Preprint submitted on 4 Jul 2012 (v2), last revised 28 Mar 2014 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FONCTIONS RÉGULUES

GOULWEN FICHOU, JOHANNES HUISMAN, FRÉDÉRIC MANGOLTE
JEAN-PHILIPPE MONNIER

Résumé. Nous étudions l'anneau des fonctions rationnelles qui se prolongent par continuité sur $\mathbf{R}^n$. Nous établissons plusieurs propriétés algébriques de cet anneau dont un Nullstellensatz fort. Nous étudions les propriétés schématiques associées et montrons une version régulue des Théorèmes A et B de Cartan. Nous caractérisons géométriquement les idéaux premiers de cet anneau à travers leurs lieux d'annulation et montrons que les fermés régulus coïncident avec les fermés algébriquement constructibles.

Mathematics subject classification (2000) : 14P99

Table des matières

1. Introduction 1
2. Variétés réelles algébriques et fonctions régulières 5
3. Fonctions régulues sur les variétés affines 9
4. Théorèmes fondamentaux 21
5. Ensembles régulument fermés 36
Références 47

1. Introduction

Dès que l'on a tenté de développer la géométrie réelle algébrique [1] selon le modèle de la géométrie algébrique complexe, des obstacles sont apparus. L'un des exemples les plus emblématique étant que les versions algébriques complexes des Théorèmes A et B de Cartan telles qu'elles ont été démontrées par Serre [24, 2.4] n'ont pas trouvé leurs analogues en géométrie réelle algébrique. Dans la théorie régulière telle que développée dans [4, Chapitre 3], aucun des Théorèmes A et B de Cartan n'est valable [2]. De même à travers l'approche Nash de la géométrie réelle algébrique, les Théorèmes A et B de Cartan ne sont pas vérifiés [3]. Dans cet article, nous proposons une approche nouvelle de la géométrie réelle algébrique, basée sur les fonction rationnelles continues, et

1. La géométrie réelle algébrique étudie les variétés réelles possédant une structure algébrique, alors que la géométrie algébrique réelle étudie les variétés algébriques complexes munies d'une structure réelle, cf. [4, Chap. 3].

2. Voir [4, Exemple 12.1.5] pour un contre-exemple au Théorème A, et [6, Theorem 1] pour un contre-exemple au Théorème B en géométrie réelle régulière.

3. Voir [13] pour des contre-exemples en géométrie réelle Nash.

plus généralement les fonctions rationnelles de classe $\mathcal{C}^k$, qu'on appellera k-régulues. Ces fonctions constituent un assouplissement des fonctions régulières lorsque $k < \infty$ pour lesquelles les analogues des Théorèmes A et B de Cartan deviennent valables (cf. 4.46 et 4.47).

Avant de donner un aperçu des principaux résultats de cet article, il convient de rappeler certaines notions de géométrie réelle algébrique. Suivant un abus courant en géométrie algébrique, on dira qu'une *fonction rationnelle* sur $\mathbf{R}^n$ (cf. 2.8 pour une définition formelle) est une fonction à valeurs réelles f définie sur un ouvert de Zariski non vide U de $\mathbf{R}^n$ telle qu'il existe des polynômes $p, q \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ pour lesquels

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

pour chaque $x \in U$. Cette écriture fractionnaire sous-entend que la fonction polynomiale q ne s'annule pas sur U. Deux fonctions rationnelles sur $\mathbf{R}^n$ sont alors égales si elles coïncident sur un ouvert de Zariski non vide contenu dans leurs domaines de définition. Une fonction rationnelle f sur $\mathbf{R}^n$ possède un plus grand ouvert de Zarsiki sur lequel elle est définie (cf. [4, Proposition 3.2.3]). On appelle cet ouvert le *domaine* de f, et on le note $\mathrm{dom}(f)$. On note $\mathrm{pol}(f)$ le complémentaire du domaine de définition. A titre d'exemple, le domaine de la fonction rationnelle f sur $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ est égal à $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $\mathrm{pol}(f) = \{0\}$. L'ensemble des fonctions rationnelles sur $\mathbf{R}^n$ est un corps et s'identifie au corps des fractions rationnelles $\mathbf{R}(X_1, \ldots, X_n)$

Une fonction rationnelle f sur $\mathbf{R}^n$ est une *fonction régulière* sur $\mathbf{R}^n$ si elle est définie sur $\mathbf{R}^n$ tout entier, i.e., si $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^n$ [4, Définition 3.2.1]. A titre d'exemple, la fonction rationnelle $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ est régulière sur $\mathbf{R}$. L'ensemble des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$ est un sous-anneau du corps des fonctions rationnelles sur $\mathbf{R}^n$, que nous noterons $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Nous justifierons plus loin ce choix de notation.

Dans ce travail, nous nous proposons donc d'étudier les fonctions rationnelles sur $\mathbf{R}^n$ qui s'étendent par continuité à $\mathbf{R}^n$ tout entier. Par «continuité» on entend ici la continuité par rapport à la topologie euclidienne. Remarquons tout de suite qu'une fonction rationnelle sur $\mathbf{R}^n$ étant continue sur son domaine de définition, il s'agit de fonctions qui s'étendent par continuité à leur lieu polaire. Plus précisément, une *fonction régulue* sur $\mathbf{R}^n$ est une fonction à valeurs réelles définie en tout point de $\mathbf{R}^n$, qui est continue pour la topologie euclidienne et dont la restriction à un ouvert de Zariski non vide est rationnelle. A titre d'exemple, la fonction régulière

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ s'étend par continuité en l'origine et définit donc une fonction régulue sur $\mathbf{R}^2$. Son graphe est la toile du célèbre parapluie de Cartan (voir 5.14). L'ensemble des fonctions régulues sur $\mathbf{R}^n$ est un sous-anneau du corps $\mathbf{R}(\mathbf{R}^n)$ des fonctions rationnelles sur $\mathbf{R}^n$, que nous notons $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. Une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$ étant évidemment régulue, on obtient une chaîne de

sous-anneaux

$$\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathbf{R}(\mathbf{R}^n).$$

Plus généralement, une fonction sur $\mathbf{R}^n$ est *k-régulue*, si elle est à la fois régulière sur un ouvert de Zariski non vide, et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbf{R}^n$. Ici, k désigne un *entier surnaturel*, i.e., k est ou bien un entier naturel, ou bien k est égal à ∞. A titre d'exemple, la fonction régulière

$$f(x,y) = \frac{x^{3+k}}{x^2+y^2}$$

sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ s'étend par continuité en l'origine et définit une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^2$, si k est un entier naturel. Nous démontrons (cf. Théorème 3.3) qu'une fonction ∞-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est nécessairement régulière. Pour k un entier surnaturel, l'ensemble des fonctions k-régulues est un sous-anneau du corps $\mathbf{R}(\mathbf{R}^n)$ des fonctions rationnelles sur $\mathbf{R}^n$, que nous notons $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Notons qu'il n'y a pas de conflit de notation ni avec l'anneau des fonctions régulues $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$, ni avec l'anneau de fonctions régulières $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$ introduits ci-dessus. On a une chaîne de sous-anneaux

$$\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}^2(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathcal{R}^1(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathbf{R}(\mathbf{R}^n).$$

Le plus petit de ses sous-anneaux est égal à l'intersection de tous les autres sous-anneaux de la chaîne, i.e.,

$$\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n) = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n).$$

Dans un premier temps nous déterminons les propriétés algébriques de l'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$, où k est un entier naturel. Ces anneaux ont été assez peu étudiés ; les seules références qui nous sont connues étant [17, 15]. L'anneau $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$ des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$, en revanche, a attiré beaucoup d'attention [4]. Nous montrons que $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est un anneau non-noethérien pour lequel le Nullstellensatz est valable (4.25). Cela est d'autant plus remarquable que l'intersection de tous ces anneaux, à savoir $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$, est un anneau noethérien pour lequel le Nullstellensatz n'est pas valable ! Une version affaiblie du Nullstellensatz est néanmoins vraie pour $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$, cette version fait intervenir le radical réel d'un idéal de fonctions régulières [4, § 4.4]. Ce Nullstellensatz réel, bien qu'intéressant en lui-même, ne répare en rien le défaut accablant de l'anneau des fonctions régulières qui est de posséder trop d'idéaux premiers, ce qui ne manque pas de poser des problèmes en géométrie réelle régulière. Nous verrons, en revanche, que la géométrie réelle k-régulue, pour k fini, ne pose pas ces problèmes, et, de ce fait, se rapproche plus de la géométrie algébrique sur un corps algébriquement clos que la géométrie réelle régulière.

Malgré le caractère non noethérien de l'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$, son usage reste raisonnable en géométrie algébrique car nous démontrons que son spectre de Zariski $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est un espace topologique noethérien. De manière équivalente (grâce à la validité du Nullstellensatz justement) l'ensemble $\mathbf{R}^n$ muni de la topologie k-régulue est un espace topologique noethérien, lorsque k

est fini (cf. 3.15). On entend par «topologie k-régulue» la topologie dont une base de fermés est la collection des sous-ensembles de la forme

$$\mathcal{Z}(f) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0\},$$

où f est k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Cette topologie est strictement plus fine que la topologie de Zariski sur $\mathbf{R}^n$, lorsque $n \geq 2$. Cette dernière pouvant également être dénommée topologie régulière ou ∞-régulue.

Dans un deuxième temps, nous posons les bases de l'étude des variétés régulues abstraites. Nous revenons sur un fibré en droites régulier pathologique sur $\mathbf{R}^2$ bien connu qui n'est pas engendré par ses sections régulières globales [4, Example 12.1.5], et montrons que cette pathologie disparait si on le considère comme fibré en droite régulu. Nous en déduisons alors la validité des Théorèmes A et B de Cartan dans le cadre régulu (4.46 et 4.47).

Nous concluons par un chapitre consacré à la caractérisation géométrique des fermés régulus de $\mathbf{R}^n$ et montrons un résultat fondamental : les fermés régulument irréductibles de $\mathbf{R}^n$ coïncident avec les sous-ensembles algébriquement constructibles fermés de $\mathbf{R}^n$ (Théorème. 5.4). Dans le cas des courbes et des surfaces, nous poussons notre étude et proposons en particulier une relecture *régulue* des fameux parapluies de Cartan, de Whitney, et d'un parapluie de Kollár. Nous introduisons aussi un nouveau parapluie *cornu* (5.14).

A notre connaissance, les fonctions régulues ont été étudiées de façon systématique pour la première fois par Kucharz dans [17] (où elles sont appelées *continuous rational*). Dans son article, Kucharz montre que ce sont les bonnes fonctions pour approcher le plus algébriquement possible les fonctions continues. Il démontre notamment que toute classe d'homotopie d'une application continue entre deux sphères de dimensions quelconques contient une application régulue, là où les applications polynomiales et régulières font défaut !

Dans [15], Kollár étudie la restriction des fonctions régulues à une sous-variété algébrique réelle, ainsi que l'extension de ces fonctions d'une sous-variété à la variété ambiante, cf. 4.39. Notre définition de fonction régulue sur les variétés singulières (cf. 2.15) coïncide dans les cas que Kollár considère avec ce qu'il appelle les fonctions rationnelles continues héréditairement rationnelles.

Objets naturels, les fonctions régulues apparaissent aussi dans des résultats antérieurs. En 1978, voir [7, p. 369], Kreisel remarque (sans employer le terme "fonction régulue" bien sûr) que le Positivstellensatz de Stengle [26] permet de représenter tout polynôme $f \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ positif sur $\mathbf{R}^n$ comme une somme de carrés de fonctions régulues sur $\mathbf{R}^n$.

Il est à noter que l'étude des isomorphismes ∞-régulus sur les surfaces a connu récemment des progrès importants, cf. e.g. [2, 11, 16, 3].

Remerciements. Nous remercions J. Kollár pour nous avoir transmis une version préliminaire de son article, ainsi que M. Coste, L. Evain, W. Kucharz, K. Kurdyka, D. Naie et A. Parusiński pour l'intérêt précoce qu'ils ont porté à nos travaux et pour leurs suggestions qui ont contribué à améliorer cet article.

2. Variétés réelles algébriques et fonctions régulières

Ensemble des zéros d'une fonction réelle. Soit n un entier naturel. On définit, de manière générale, l'ensemble des zéros et l'ensemble des non zéros d'une fonction réelle sur $\mathbf{R}^n$, ou d'un ensemble de fonctions réelles :

Notation 2.1. Soit $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction réelle sur $\mathbf{R}^n$. On note $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble des zéros de f dans $\mathbf{R}^n$, i.e.,

$$\mathcal{Z}(f) = \{p \in \mathbf{R}^n |\ f(p) = 0\}.$$

L'ensemble des non zéros de f est

$$\mathcal{D}(f) = \{p \in \mathbf{R}^n |\ f(p) \neq 0\}.$$

Soit E un ensemble de fonctions réelles sur $\mathbf{R}^n$. On note $\mathcal{Z}(E)$ l'ensemble des zéros communs des fonctions dans E, i.e.,

$$\mathcal{Z}(E) = \bigcap_{f \in E} \mathcal{Z}(f),$$

On a les propriétés habituelles suivantes :

Proposition 2.2. *Soit n un entier naturel.*

(1) $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$ *et* $\mathcal{Z}(\emptyset) = \mathbf{R}^n$.

(2) *Soit E_α, $\alpha \in A$, une collection d'ensembles de fonctions réelles sur $\mathbf{R}^n$. Alors*

$$\mathcal{Z}(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(E_\alpha).$$

(3) *Soient $E_1, \ldots, E_m$ un nombre fini d'ensembles de fonctions réelles sur $\mathbf{R}^n$, où m est un entier naturel. Alors*

$$\mathcal{Z}(E_1 \cdot \ldots \cdot E_m) = \mathcal{Z}(E_1) \cup \cdots \cup \mathcal{Z}(E_m).$$

(4) *Soit E un sous-ensemble d'un anneau A de fonctions réelles sur $\mathbf{R}^n$. Alors $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(I)$, où I est l'idéal de A engendré par E.* □

Un propriété moins habituelle, mais cruciale en géométrie réelle, est la suivante :

Proposition 2.3. *Soit n un entier naturel. Soit A un anneau de fonctions réelles sur $\mathbf{R}^n$, et soient $f_1, \ldots, f_m$ un nombre fini d'éléments de A. Alors, il existe une fonction réelle $f \in A$ telle que*

$$\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_m).$$

Plus précisément, la fonction $f = f_1^2 + \cdots + f_m^2$ convient. □

Rappelons qu'un sous-ensemble F de $\mathbf{R}^n$ est un *fermé de Zariski*, s'il existe un sous-ensemble E de l'anneau des fonctions polynomiales réelles sur $\mathbf{R}^n$ tel que

$$\mathcal{Z}(E) = F.$$

Comme ce dernier anneau est isomorphe à l'anneau noethérien des polynômes réels $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$, un sous-ensemble F de $\mathbf{R}^n$ est un fermé de Zariski si et

seulement s'il existe un nombre fini de fonctions polynomiales $f_1, \ldots, f_m$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que

$$\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_m) = F.$$

En appliquant la proposition précédente 2.3, on pourra encore dire qu'un sous-ensemble F de $\mathbf{R}^n$ est un fermé de Zariski si et seulement s'il existe une fonction polynomiale f sur $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\mathcal{Z}(f) = F.$$

Les fermés de Zariski de $\mathbf{R}^n$ constituent la collection des fermés d'une topologie sur $\mathbf{R}^n$, la *topologie de Zariski* sur $\mathbf{R}^n$.

Fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$. Soit n un entier naturel, et U un ouvert de Zariski de $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction réelle sur U, et $x \in U$. La fonction f est *régulière en un point x* s'il existe un voisinage Zariski ouvert V de x dans U et des fonctions polynomiales p et q sur $\mathbf{R}^n$ tel que $f(y) = p(y)/q(y)$ pour tout $y \in V$, où il est sous-entendu que q ne s'annule pas sur V. La fonction f est régulière sur U si elle est régulière en tout point de U. On note $\mathcal{Q}(U)$ l'ensemble des fonctions régulières sur U. Cet ensemble est une algèbre réelle de manière évidente.

Soit V un ouvert de Zariski contenu dans U, la restriction à V d'une fonction régulière sur U est régulière sur V. Il s'ensuit que $\mathcal{Q}$ est un préfaisceau d'algèbres réelles sur $\mathbf{R}^n$. Compte tenu de la définition locale d'une fonction régulière, il est évident que $\mathcal{Q}$ est un faisceau sur $\mathbf{R}^n$.

Soit x un point de $\mathbf{R}^n$. La fibre $\mathcal{Q}_x$ s'identifie avec l'algèbre réelle locale des fonctions rationnelles p/q définies en x, i.e., $q(x) \neq 0$. Le faisceau $\mathcal{Q}$ sur $\mathbf{R}^n$ est donc un faisceau en algèbres réelles locales.

Il est remarquable que les sections du faisceau $\mathcal{Q}$ au-dessus d'un ouvert de Zariski U de $\mathbf{R}^n$ admettent une description globale (cf. [4, Proposition 3.2.3]) :

Proposition 2.4. *Soit n un entier naturel, et U un ouvert de Zariski de $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction réelle sur U. Alors f est régulière sur U si et seulement s'il existe des fonctions polynomiales p et q sur $\mathbf{R}^n$ telles que $f(x) = p(x)/q(x)$, avec $q(x) \neq 0$, pour tout $x \in U$.*

Démonstration. Voir Proposition 2.5 ci-dessous où on démontre l'énoncé dans un cadre plus général. □

Variétés réelles algébriques affines. Soit n un entier naturel, et F un fermé de Zariski de $\mathbf{R}^n$. On considère F muni de la topologie induite par la topologie de Zariski, qu'on appelle *topologie de Zariski* sur F. Notons que cette topologie est encore noethérienne.

Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{Q}$ des fonctions régulières s'annulant sur F. Le faisceau quotient $\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ sera noté $\mathcal{Q}_F$. Son support est égal à F. De ce fait, on considère $\mathcal{Q}_F$ comme un faisceau sur F. C'est une faisceau en algèbres réelles locales de corps résiduel $\mathbf{R}$. On peut donc le considérer comme un sous-faisceau des fonctions réelles sur F, et on l'appelle le faisceau des fonctions régulières sur F.

On a à nouveau une description globale des sections de $\mathcal{Q}_F$ (cf. [4, Proposition 3.2.3]) :

Proposition 2.5. *Soit n un entier naturel, et F un fermé de Zariski de $\mathbf{R}^n$. Soit U un ouvert de Zariski de F et soit f une fonction réelle sur U. Alors f est régulière sur U si et seulement s'il existe des fonctions polynomiales p et q sur $\mathbf{R}^n$ telles que $f(x) = p(x)/q(x)$, avec $q(x) \neq 0$, pour tout $x \in U$.*

Pour la commodité du lecteur, on reproduit la démonstration de [4, Proposition 3.2.3].

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication directe. Supposons donc que f est régulière sur U. Comme la topologie de Zariski sur F est noethérienne, il existe un recouvrement ouvert fini $\{U_1, \ldots, U_m\}$ de U et des fonctions polynomiales $p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que $f_i(x) = p_i(x)/q_i(x)$ pour tout $x \in U_i$, pour $i = 1, \ldots, m$. Soit s_i une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^n$ avec $\mathcal{Z}(s_i) = F \setminus U_i$, pour tout i. Montrons que

$$f = \frac{s_1^2 p_1 q_1 + \cdots + s_m^2 p_m q_m}{s_1^2 q_1^2 + \cdots + s_m^2 q_m^2}$$

sur U.

Montrons d'abord que le second membre, qu'on notera g dans la suite, est bien une fonction régulière sur U. Soit $x \in U$. Il existe i avec $x \in U_i$. On a donc $s_i^2(x) q_i^2(x_i) > 0$. Comme $s_j^2(x) q_j^2(x) \geq 0$, pour $j \neq i$, le dénominateur de g ne s'annule pas en x. Le second membre est donc bien une fonction régulière sur U.

Il reste à montrer que $f = g$ sur U. Soit $x \in U$. Soit I l'ensembles des indices i pour lesquels $x \in U_i$. Lorsque $i \in I$, on a $f(x) = p_i(x)/q_i(x)$, et donc aussi

$$s_i^2(x) q_i^2 f(x) = s_i^2 p_i(x) q_i^2(x) \ .$$

Observons que cette dernière formule est également valable lorsque $i \notin I$ puisque $s_i(x) = 0$ dans ce cas. Il s'ensuit que

$$(s_1^2(x)q_1^2(x)+\cdots+s_m^2(x)q_m^2(x))f(x) = (s_1^2(x)p_1(x)q_1(x)+\cdots+s_m^2(x)p_m(x)q_m(x))$$

et donc aussi que $f(x) = g(x)$. □

Définition 2.6. Une *variété réelle algébrique affine* est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est une faisceau en algèbres réelles locales ayant la propriété suivante. Il existe un entier naturel n et un fermé de Zariski F de $\mathbf{R}^n$ tels que $(F, \mathcal{Q}_F)$ soit isomorphe à $(X, \mathcal{O})$. Si $(X, \mathcal{O})$ est une variété réelle algébrique affine, on appellera encore sa topologie la topologie de Zariski sur X, et une section de $\mathcal{O}$ sur un ouvert U une fonction régulière sur U.

Remarque 2.7. On pourrait penser que cette définition induit une notion naturelle de variété réelle algébrique abstraite, mais l'intérêt d'une telle notion est limité par le fait que tout sous-ensemble localement fermé de $\mathbf{R}^n$ (voire de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$) muni de son faisceau naturel des fonctions régulières est une variété réelle algébrique affine (voir [4, Proposition 3.2.10], [4, Théorème 3.4.4] et la remarque qui suit).

Définition 2.8. Soit X une variété réelle algébrique affine. Une *fonction rationnelle* sur X est une classe d'équivalence de paires (f, U), où U est un ouvert dense (i.e. non-vide) de X et f est une fonction régulière sur U. Deux

telles paires (f, U) et (g, V) étant équivalentes s'il existe un ouvert dense W de X contenu dans $U \cap V$ tel que $f_{|W} = g_{|W}$.

Notons que cette dernière condition est équivalente à la condition

$$f_{|U\cap V} = g_{|U\cap V} \cdot$$

Soit f une fonction rationnelle sur la variété réelle algébrique affine X. Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les paires (g, V) qui sont équivalentes à (f, U). On introduit une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{F}$ en définissant $(g, V) \leq (h, W)$ lorsque $V \subseteq W$. Comme $\mathcal{O}$ est un faisceau, l'ensemble $\mathcal{F}$ contient un plus grand élément (g, V). Comme cet élément est unique, on appelle V le domaine de définition de f et on le note $\mathrm{dom}(f)$. Du coup, on pourra également considérer f comme fonction régulière définie sur $\mathrm{dom}(f)$, son extension rationnelle étant unique.

Proposition 2.9. *Soit X une variété réelle algébrique affine et f une fonction rationnelle sur X. Alors il existe des fonctions régulières p et q sur X, avec $q \neq 0$ sur $\mathrm{dom}(f)$, telles que $f = p/q$ sur $\mathrm{dom}(f)$.*

Démonstration. Conséquence immédiate de la Proposition 2.5. □

Remarque 2.10. Si X est un fermé de Zariski de $\mathbf{R}^n$, pour un certain entier naturel n, on peut même supposer que p et q sont des fonctions polynomiales avec les propriétés voulues.

Soit X une variété réelle algébrique affine. L'ensemble des fonctions rationnelles sur X est un anneau de manière évident, *l'anneau total des fonctions rationnelles* sur X. On le note $\mathbf{R}(X)$.

Proposition 2.11. *Soit X une variété réelle algébrique affine irréductible. Alors $\mathbf{R}(X)$ est un corps.*

Proposition 2.12. *Soit X une variété réelle algébrique affine et $X_1, \ldots, X_m$ ses composantes irréductibles. Les morphismes de restriction $\mathbf{R}(X) \to \mathbf{R}(X_i)$ induisent un isomorphisme d'algèbres réelles*

$$\mathbf{R}(X) \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \mathbf{R}(X_i).$$

En particulier, l'anneau $\mathbf{R}(X)$ est un produit de m corps.

Variétés réelles algébriques affines lisses.

Définition 2.13. Soit X une variété réelle algébrique affine. La variété X est *lisse* en un point x de X si l'anneau local $\mathcal{O}_x$ est régulier. La variété X est *lisse* si elle l'est en chacun de ces points.

On rappelle le résultat suivant (cf. [4, Proposition 3.3.10]) :

Proposition 2.14. *Soit X une variété réelle algébrique affine et $X_1, \ldots, X_m$ ses composantes irréductibles. Alors, X est lisse si et seulement si*

(1) *X est réunion disjointe des X_i, et*
(2) *chaque variété réelle algébrique affine X_i est lisse.* □

On va définir la notion de fonction k-régulue sur une variété réelle algébrique affine lisse. Kollár montre par un exemple qu'une fonction rationnelle sur une surface réelle algébrique affine singulière qui s'étend par continuité à toute la surface peut avoir des propriétés non souhaitables [15, Ex. 2].

Remarquons que si X est une variété réelle algébrique affine lisse, alors X possède une structure sous-jacente de variété différentiable de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout entier surnaturel k. Pour $k = 0$, on considère la variété topologique sous-jacente à X, donc munie de la topologie euclidienne.

Définition 2.15. Soit k un entier surnaturel. Soit X une variété réelle algébrique affine lisse, et soit f une fonction réelle sur X. La fonction f est *k-régulue* sur X si

(1) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur X, et

(2) il existe un ouvert de Zariski U dense dans X tel que $f_{|U}$ est régulière.

On note $\mathcal{R}^k(X)$ l'ensemble des fonctions k-régulues sur X. Cet ensemble est de toute évidence un anneau.

Pour une variété réelle algébrique affine lisse X donnée on dispose d'une suite croissante

$$\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{R}^\infty(X) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}^1(X) \subseteq \mathcal{R}^0(X).$$

3. Fonctions régulues sur les variétés affines

Fonctions ∞-régulues. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^n$. Le but de cette section est de démontrer que si f est ∞-régulue sur $\mathbf{R}^n$, alors elle est régulière sur $\mathbf{R}^n$. Cet énoncé est connu (voir par exemple [17, Proposition 2.1]), mais nous allons en donner une nouvelle preuve.

On a bien l'inclusion $\mathcal{Q}(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Le but de cette section est de montrer que cette inclusion est une égalité. Dans le reste de l'article, comme dans l'introduction, il sera ainsi justifié d'utiliser la notation $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$ pour l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$.

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^n$. Rappellons que f est *semi-algébrique* si son graphe est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ [4, Définition 2.2.5]. Rappelons également que f est *Nash* si f est à la fois semi-algébrique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ [4, Définition 2.9.3]. De manière équivalente, f est Nash si f est une fonction analytique réelle et elle est algébrique sur l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$, i.e., il existe des fonctions polynomiales $a_0, \ldots, a_d$ sur $\mathbf{R}^n$ telles que

$$a_d f^d + a_{d-1} f^{d-1} + \cdots + a_0 = 0$$

sur $\mathbf{R}^n$, où a_d est non identiquement nulle [4, Proposition 8.1.8].

Proposition 3.1 (Kucharz [17])**.** *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est semi-algébrique. En particulier, une fonction ∞-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est Nash.*

Démonstration. Soit f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Notons U le domaine de f comme fonction rationnelle, et soient p et q deux fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^n$ telles que $f(x) = p(x)/q(x)$ pour tout $x \in U$. Clairement, le graphe

de la restriction de f à U est un sous-ensemble semi-algébrique de $U \times \mathbf{R}$. Comme f est continue, le graphe de la fonction f sur $\mathbf{R}^n$ est l'adhérence de l'ensemble précédent pour la topologie euclidienne dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Or, l'adhérence d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique [4, Prop. 2.2.2]. Il s'ensuit que f est une fonction semi-algébrique. □

Corollaire 3.2. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Un sous-ensemble fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$ est semi-algébriquement fermé.* □

Théorème 3.3. *Soit n un entier naturel. On a*

$$\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n) = \mathcal{Q}(\mathbf{R}^n),$$

i.e., une fonction réelle sur $\mathbf{R}^n$ est ∞-régulue si et seulement si elle est régulière.

Cet énoncé se généralise certainement au cas où X est une variété réelle algébrique affine lisse mais la preuve en devient plus technique et ne nous semble pas apporter d'idée nouvelle.

Démonstration. Comme une fonction régulière est trivialement ∞-régulue, il suffit de démontrer la réciproque.

Soit U le domaine de la fonction rationnelle f. Ecrivons $f = p/q$, où p et q sont des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^n$, q ne s'annulant pas sur U. On montre que la fraction rationnelle p/q est définie en tout point de $\mathbf{R}^n$. Autrement dit, on montre que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la fraction rationnelle p/q appartient à l'anneau local $\mathcal{Q}_x$ des germes des fonctions régulières en x. Il suffit de le montrer pour x l'origine de $\mathbf{R}^n$.

D'après la proposition précédente, la fonction f sur $\mathbf{R}^n$ est semi-algébrique. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est Nash. Une fonction Nash sur $\mathbf{R}^n$ est, en particulier, analytique réelle [4, Proposition 8.1.6]. Du coup, f s'étend à un ouvert de $\mathbf{C}^n$ contenant $\mathbf{R}^n$ comme fonction analytique complexe, encore notée f. En particulier, f définit un germe d'une fonction analytique complexe en 0 ayant la propriété que $qf = p$. La fonction polynomiale q divise donc p dans l'anneau local $\mathcal{H}_0$ des germes des fonctions analytiques complexes en 0. Cela implique que q divise p dans la complétion de $\mathcal{H}_0$, à savoir l'anneau des séries formelles complexes $\mathbf{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Ce dernier est aussi la complétion de l'anneau local $\mathcal{O}_0$ des fonctions rationnelles complexes sur $\mathbf{C}^n$ définies en 0. Comme ce dernier anneau est noethérien, q divise p dans $\mathcal{O}_0$ (cf. [27, Corollary 2, p. 257]. Comme

$$\mathcal{O}_0 \cap \mathbf{R}(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{Q}_0,$$

la fonction rationnelle réelle p/q appartient à $\mathcal{Q}_0$.

On a donc démontré que f est une section globale du faisceau $\mathcal{Q}$, i.e., f est une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$. □

Sous-ensembles k-régulus de $\mathbf{R}^n$. Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Un sous-ensemble F de $\mathbf{R}^n$ est un *fermé k-régulu* s'il existe un sous-ensemble E de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ tel que

$$\mathcal{Z}(E) = F.$$

Remarquons que F n'est pas a priori le lieu des zéros communs d'un nombre fini de fonctions k-régulues. Un sous-ensemble U de $\mathbf{R}^n$ est un *ouvert k-régulu* si son complémentaire est un fermé k-régulu. Les ouverts k-régulus de $\mathbf{R}^n$ constituent une topologie sur $\mathbf{R}$, la *topologie k-régulue*.

Soit X un espace topologique. On rappelle que X est *noethérien* si et seulement si toute suite décroissante dénombrable $F_i \supseteq F_{i+1}$, $i \in \mathbf{N}$, de sous-ensembles fermés de X est stationnaire. De manière équivalente, tout recouvrement ouvert d'un ouvert de X contient un sous-recouvrement fini.

Compte tenu du Théorème 3.3, un ouvert ∞-régulu de $\mathbf{R}^n$ est un ouvert de Zariski, et réciproquement. Comme l'anneau des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^n$ est noethérien, la topologie de Zariski sur $\mathbf{R}^n$ est noethérienne. Il s'ensuit que la topologie ∞-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est noethérienne. On verra ci-dessous qu'il en est de même pour la topologie k-régulue lorsque k est fini (voir Corollaire 3.15).

Si $k \leq k'$, la topologie k-régulue est plus fine que la topologie k'-régulue. En particulier, La topologie k-régulue est plus fine que la topologie de Zariski sur $\mathbf{R}^n$. L'exemple suivant montre que la topologie k-régulue est strictement plus fine que la topologie de Zariski, lorsque k est un entier naturel et $n \geq 2$.

Exemple 3.4. Soit C la courbe cubique d'équation $y^2 = x^2(x-1)$ dans $\mathbf{R}^2$. Comme le polynôme définissant la courbe C est irréductible dans $\mathbf{R}[x, y]$, le sous-ensemble C de $\mathbf{R}^2$ est un fermé de Zariski irréductible. En particulier, la clôture de Zariski de $C \setminus \{O\}$ est égale à C.

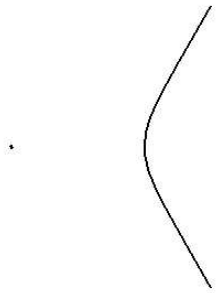

FIGURE 1. Courbe cubique avec un point isolé.

Soit f la fonction rationnelle sur $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2(x-1)}{y^2 + x^2} = 1 - \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Il est clair que f s'étend par continuité en une fonction régulue sur $\mathbf{R}^2$. On a $f(O) = 1$ et $\mathcal{Z}(f) = C \setminus \{O\}$. Remarquons que l'origine O est un point isolé de la courbe C. Par conséquent, $C \setminus \{O\}$ est régulument fermé dans $\mathbf{R}^2$, mais non fermé au sens de Zariski. En particulier, le fermé ∞-régulu irréductible C n'est pas irréductible pour la topologie régulue sur $\mathbf{R}^2$ et s'écrit comme réunion de deux sous-fermés régulus stricts.

$$C = (C \setminus \{O\}) \cup \{O\}.$$

Pour montrer que $C \setminus \{O\}$ est un fermé k-régulu, pour tout entier naturel k, on peut supposer que $k+1$ est impair. Posons

$$f_k = 1 - (1-f)^{k+1}.$$

La fonction f_k est bien k-régulue sur $\mathbf{R}^2$, et, comme $k+1$ est impair, on a $\mathcal{Z}(f_k) = \mathcal{Z}(f) = C \setminus \{O\}$. Cela montre bien que ce dernier ensemble est un fermé k-régulu, pour tout entier naturel k.

Cet exemple représente en fait le cas général. En effet, on verra dans le Corollaire 5.5 que les topologies k-régulue et k'-régulue coincident pour k et k' des entiers naturels quelconques.

Propriétés élémentaires des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Dans ce paragraphe nous allons étudier les fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$, et les comparer avec d'autres classes de fonctions sur $\mathbf{R}^n$.

Dans l'énoncé suivant, et dans le reste de l'article d'ailleurs, on utilise librement la notion de dimension, ou plutôt de codimension, d'un fermé de Zariski de $\mathbf{R}^n$, et plus généralement d'un ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$ [4, §2.8].

Proposition 3.5. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit $f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Soient p et q des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^n$ telles que $f(x) = p(x)/q(x)$ pour chaque $x \in \mathrm{dom}(f)$. Si p, q sont premiers entre eux, alors $\mathcal{Z}(q) \subseteq \mathcal{Z}(p)$ et $\mathrm{codim}_{\mathbf{R}^n}\ \mathcal{Z}(q) \geq 2$.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'énoncé lorsque $k = 0$. Montrons d'abord l'inclusion $\mathcal{Z}(q) \subseteq \mathcal{Z}(p)$. Soit $x \in \mathcal{Z}(q)$. Comme q n'est pas identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros $\mathcal{Z}(q)$ est nulle part dense dans $\mathbf{R}^n$. Il existe donc une suite (x_m) dans $\mathbf{R}^n$ convergeant vers x telle que $q(x_m) \neq 0$, pour tout k. On a alors

$$p(x) = \lim p(x_m) = \lim q(x_m) f(x_m) = q(x) f(x) = 0,$$

i.e., $x \in Z(p)$.

Montrons ensuite que $\mathrm{codim}\, \mathcal{Z}(q) \geq 2$. Par l'absurde, supposons que $\mathrm{codim}\, \mathcal{Z}(q) \leq 1$. Comme q n'est pas identiquement nulle, on a $\mathrm{codim}\, \mathcal{Z}(q) = 1$. Il existe donc un diviseur irréductible q' de q dans $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ avec $\mathrm{codim}\, \mathcal{Z}(q') = 1$. D'après ce qui précède, $\mathcal{Z}(q') \subseteq \mathcal{Z}(p)$. Comme $\mathrm{codim}\, \mathcal{Z}(q') = 1$, on en déduit que q' divise p [4, Th. 4.5.1, p.85]. Cela contredit l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux. □

Comme on a vu, l'énoncé ci-dessus peut être considérablement renforcé lorsque $k = \infty$. En effet, dans ce cas la fonction f est régulière et est de la forme p/q où q ne s'annule pas sur $\mathbf{R}^n$, i.e., $\mathcal{Z}(q) = \emptyset$.

Corollaire 3.6. *Soit $n \leq 1$ et k un entier surnaturel. Toute fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est régulière.* □

Corollaire 3.7. *Soit k un entier surnaturel. Une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^2$ est régulière en dehors d'un ensemble fini.* □

Corollaire 3.8. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit $f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Le lieu* $\mathrm{pol}(f)$ *où f n'est pas une fonction régulière est un fermé de Zariski de $\mathbf{R}^n$ de codimension ≥ 2.* □

Une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ est *k-régulue* lorsque toutes ses fonctions coordonnées le sont. Il n'est pas clair que la composition de deux applications k-régulues soit encore k-régulue. Un cas où c'est évident est le suivant :

Corollaire 3.9. *Soit ℓ, m, n des entiers naturels et k un entier surnaturel. Soient*

$$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad \text{et} \quad g\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^\ell$$

deux applications k-régulues. Si l'image de f est de codimension ≤ 1, alors la composition $g \circ f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\ell$ est k-régulue. □

On verra ci-dessous que la conclusion est valable même si la codimension de l'image de f est plus grand que 1 (voir Corollaire 3.23).

Fonctions régulues et fonctions régulières après éclatement. Soit $X \subseteq \mathbf{R}^m$ une variété réelle algébrique lisse irréductible. Soit $Y \subseteq X$ une sous-variété réelle algébrique lisse. Soient $f_0, \ldots, f_k$ des fonctions régulières sur X engendrant l'idéal de Y dans X. Notons f l'application régulière de $X \setminus Y$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{R})$ de coordonnées homogènes $f_0, \ldots, f_k$. L'éclaté $E_Y(X)$ de X le long de Y est la clôture de Zariski du graphe de f dans le produit $X \times \mathbf{P}^k(\mathbf{R})$. L'éclaté $E_Y(X)$ est encore une variété réelle algébrique affine. L'application de projection

$$\pi\colon E_Y(X) \longrightarrow X$$

est une application régulière, et birégulière au-dessus de $X \setminus Y$. L'image réciproque de Y via π peut s'identifier avec le fibré normal projectif de Y dans X.

Soit $X \subseteq \mathbf{R}^m$ une variété réelle algébrique lisse irréductible. Soit f une fonction régulière sur X. On dit que f est *localement monomiale* sur X si pour tout $p \in X$ il existe un système régulier de paramètres locaux $x_1, \ldots, x_n$ en p tel que

$$f = u x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

dans l'anneau local $\mathcal{R}^\infty(X)_p$, où u est inversible et $i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{N}$, avec $i_1 \leq \cdots \leq i_n$.

Soit f une fonction régulière sur X. Une composition $\phi\colon \tilde{X} \to X$ d'éclatements de X est *monomialisante* pour f si $f \circ \phi$ est localement monomiale sur $\tilde{X}$. Dans ce cas, pour tout $p \in \tilde{X}$, les entiers naturels $i_1, \ldots, i_n$ comme ci-dessus, sont uniquement déterminés, à l'ordre près. On les appelera les *multiplicités* de f en p.

En utilisant le théorème de la résolution des singularités de Hironaka [10], on démontre facilement qu'il existe une composition d'éclatements monomialisante pour toute fonction régulière sur X :

Théorème 3.10 (Hironaka)**.** *Soit n un entier naturel. Soit f une fonction régulière sur X. Alors, il existe une composition d'éclatements à centres lisses*

$$\phi\colon \tilde{X} \longrightarrow X$$

telle que la fonction régulière

$$f \circ \phi \colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbf{R}$$

est localement monomiale, et ϕ est birégulière au-dessus de l'ouvert de X où $\operatorname{grad}(f) \neq 0$. □

Soit $X \subseteq \mathbf{R}^m$ une variété réelle algébrique lisse irréductible. Une fonction continue sur X est *régulière après éclatements* (*blow-regular*, en anglais) s'il existe une composition d'éclatements à centres lisses $\phi \colon \tilde{X} \to X$ telle que $f \circ \phi$ est régulière. Lorsque $X = \mathbf{R}^n$, cette notion est analogue à celles des fonctions de Nash après éclatements ou encore des fonctions analytiques réelles après éclatements [18].

Une fonction sur X qui est régulière après éclatements est bien-sûr régulue sur X.

Théorème 3.11. *Soit $X \subseteq \mathbf{R}^m$ une variété réelle algébrique lisse irréductible. Soit f une fonction réelle sur X. La fonction f est régulue sur X si et seulement si f est régulière après éclatements. Plus précisément, f est régulue si et seulement s'il existe une composition d'éclatements à centres lisses*

$$\phi \colon \tilde{X} \longrightarrow X$$

telle que la composition

$$f \circ \phi \colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbf{R}$$

est régulière.

Démonstration. Il est clair que f est régulue si f est régulière après éclatement. Montrons la réciproque. Soit f une fonction régulue.

D'après la Proposition 2.9, on peut écrire $f = r/s$ avec r et s des fonctions régulières sur X. Appliquons le Théorème 3.10 à la fonction régulière rs sur X. Il existe donc une composition d'éclatements à centres lisses $\phi \colon \tilde{X} \to X$ telle que $rs \circ \phi$ est localement monomiale. Il s'ensuit que $r \circ \phi$ et $s \circ \phi$ sont localement monomiales de manière simultanée. Soit $p \in \tilde{X}$, et $x_1, \ldots, x_n$ un système régulier de paramètres locaux en p tel que

$$r \circ \phi = u x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} \quad \text{et} \quad s \circ \phi = v x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n},$$

avec u et v inversibles en p. Soit $Y \subseteq X$ un fermé strict tel que ϕ est birégulière au-dessus de $X \setminus Y$. Soit (p_k) une suite dans $\phi^{-1}(X \setminus Y)$ convergeant vers p. Comme $f \circ \phi$ est continue, on a

$$f(\phi(p)) = \lim f(\phi(p_k)) = \lim \frac{r(\phi(p_k))}{s(\phi(p_k))} = \lim \frac{u(p_k)}{v(p_k)} x_1(p_k)^{i_1 - j_1} \cdot \ldots \cdot x_n(p_k)^{i_n - j_n}.$$

Comme cette limite existe pour toute suite (p_k) convergeant vers p, on a $i_\ell \geq j_\ell$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Du coup, f est régulière en p. □

Une fonction semi-algébrique $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est appelée *analytique par arcs* [19] si $f \circ \gamma$ est analytique pour tout arc analytique $\gamma \colon I \to \mathbf{R}^n$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Dans [1, Thm. 1.1], Bierstone et Milman montrent que $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est analytique par arcs si et seulement si f devient analytique (et même Nash) après une suite finie d'éclatements à centres algébriques

lisses bien choisis. Comme une fonction régulière est analytique, on obtient la conséquence suivante du Théorème 3.11, grâce à la Proposition 3.1 :

Corollaire 3.12. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est analytique par arcs.* □

Remarque 3.13. Il existe bien évidemment des fonctions analytiques par arcs qui ne sont pas régulues. Par exemple $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$ est analytique par arcs [1] et n'est clairement pas régulue sur $\mathbf{R}^2$.

On rappelle qu'un ensemble E semi-algébrique dans $\mathbf{R}^n$ est dit *symétrique par arcs* si et seulement si pour tout arc analytique $\gamma\colon]-1,1[\to \mathbf{R}^n$, si $\gamma(]-1,0[) \subseteq E$ alors $\gamma(]-1,1[) \subseteq E$, voir [19]. Le lien avec les fonctions analytiques par arcs est le suivant. Si f est une fonction analytique par arcs sur $\mathbf{R}^n$, alors son lieu de zéros $\mathcal{Z}(f)$ est symétrique par arcs.

Suivant les notations de [19], on appelle $\mathcal{AR}$ la topologie dont les ensembles fermés sont les ensembles symétriques par arcs. Kurdyka a montré que la topologie $\mathcal{AR}$ est noethérienne [19, Th. 1.4.]. On verra ci-dessous que la topologie $\mathcal{AR}$ est plus fine que la topologie régulue. On en déduira que la topologie k-régulue est noethérienne, pour tout k.

Proposition 3.14. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit F un fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$. Alors F est un ensemble symétrique par arcs.*

Démonstration. Soit $F = \mathcal{Z}(E)$ un fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$. D'après le Corollaire 3.12, $\mathcal{Z}(f)$ est symétrique par arcs, pour tout $f \in E$. Comme les sous-ensembles symétriques par arcs sont les fermés d'une topologie,

$$\mathcal{Z}(E) = \bigcap_{f\in E} \mathcal{Z}(f)$$

est encore symétrique par arcs. □

Corollaire 3.15. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. La topologie k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est noethérienne.* □

Corollaire 3.16. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Tout fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$ est de la forme $\mathcal{Z}(f)$, pour une certaine fonction k-régulue f sur $\mathbf{R}^n$.* □

Corollaire 3.17. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Tout fermé k-régulu F de $\mathbf{R}^n$ est un fermé de Zariski après éclatements, i.e., il existe une composition d'éclatements à centres lisses*

$$\phi\colon \tilde{\mathbf{R}}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

telle que l'image réciproque $\phi^{-1}(F)$ est Zariski fermée dans $\tilde{\mathbf{R}}^n$.

Démonstration. D'après Corollaire 3.16, il existe une fonction k-régulue f sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{Z}(f) = F$. D'après Théorème 3.11, il existe une composition d'éclatements de $\mathbf{R}^n$ à centres lisses ϕ telle que $f\circ\phi$ est régulière. En particulier,

$$\mathcal{Z}(f\circ\phi) = \phi^{-1}(\mathcal{Z}(f)) = \phi^{-1}(F)$$

est un fermé de Zariski. □

Remarque 3.18. On verra dans la Proposition 5.6 que la réciproque du corollaire ci-dessus est valable.

Même si la topologie k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est plus fine, $\mathbf{R}^n$ reste irréductible dans cette topologie :

Proposition 3.19. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Alors $\mathbf{R}^n$ muni de la topologie k-régulue est irréductible.*

Démonstration. Supposons que $\mathbf{R}^n = F \cup G$, où F et G sont des fermés k-régulus de $\mathbf{R}^n$. Il existe des fonctions k-régulues f et g sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\mathcal{Z}(f) = F$ et $\mathcal{Z}(g) = G$. On a

$$\mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g) = F \cup G = \mathbf{R}^n.$$

Par conséquent, $fg = 0$. L'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ étant un sous-anneau du corps $\mathbf{R}(\mathbf{R}^n)$, il est intègre. On a donc $f = 0$ ou $g = 0$, i.e., $F = \mathbf{R}^n$ ou $G = \mathbf{R}^n$. □

Fonctions régulues et fonctions régulières par strates. Rappelons qu'un sous-ensemble localement fermé de $\mathbf{R}^n$, au sens de Zariski, est un sous-ensemble de la forme $U \cap F$, où $F \subseteq \mathbf{R}^n$ est un fermé de Zariski et $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un ouvert de Zariski.

Théorème 3.20. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Alors, il existe une stratification finie de $\mathbf{R}^n$*

$$\mathbf{R}^n = \coprod_{i=1}^{m} S_i$$

en sous-ensembles localement fermés de $\mathbf{R}^n$ au sens de Zariski telle que la restriction $f_{|S_i}$ est régulière, pour tout i.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $k = 0$. On peut, bien-sûr, supposer que f est non identiquement nulle sur $\mathbf{R}^n$.

Notons $\mathbf{A}^n$ l'espace affine $\operatorname{Spec}\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ sur $\mathbf{R}$, de sorte que $\mathbf{A}^n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^n$ et $\mathbf{A}^n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^n$. La conjugaison complexe γ agit sur $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$. On identifie $\mathbf{A}^n(\mathbf{R})$ avec l'ensemble des points fixes de γ sur $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$.

Ecrivons $f = r/s$ avec r et s des polynômes réels en $x_1, \ldots, x_n$. Soit Y le sous-schéma réduit de $\mathbf{A}^n$ défini par le polynôme rs. Comme f est non nulle, Y est un sous-schéma de $\mathbf{A}^n$ de codimension 1.

Appliquons le théorème de Hironaka au sous-schéma Y de $\mathbf{A}^n$ en éclatant $\mathbf{A}^n$, de manière successive, mais seulement en des centres dont l'ensemble des points réels est dense. Plus précisément, il existe une suite finie de morphismes

$$X_\ell \longrightarrow X_{\ell-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 = \mathbf{A}^n$$

où chaque morphisme $\pi_i \colon X_i \to X_{i-1}$ est un éclatement de centre lisse $C_{i-1} \subseteq X_{i-1}$ de codimension ≥ 2 ayant les propriétés suivantes. Pour tout i, l'ensemble des points réels $C_i(\mathbf{R})$ est dense dans C_i, et le transformé strict Y_ℓ de Y dans X_ℓ n'a que des points réels lisses. Notons $E_i \subseteq X_i$ le diviseur exceptionnel de π_i. On peut supposer, de plus, que $Y_\ell(\mathbf{R})$ intersecte $E_\ell(\mathbf{R})$ transversalement en des points réels lisses de E_ℓ. On note encore ϕ la composition $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_\ell$.

Par construction, $f \circ \phi$ est une fonction rationnelle sur X_ℓ dont le domaine de définition contient tous les points réels de X_ℓ.

Soit p un point du schéma $\mathbf{A}^n$ dont le corps résiduel $\kappa(p)$ est réel. La fibre $\phi^{-1}(p)$ est une réunion finie connexe d'espaces projectifs sur $\kappa(p)$. Soit P l'un de ces espaces projectifs. Comme le domaine de définition de $f \circ \phi$ contient tous les points réels de X_ℓ, la fonction rationnelle $f \circ \phi$ se restreint à une fonction rationnelle sur P. Il existe un point $\kappa(p)$-rationnel q de P en lequel $f \circ \phi$ est définie. Soit F le sous-schéma de X_0 dont le point générique est p, et G le sous-schéma de X_ℓ dont le point générique est q. La restriction de ϕ à G est un morphisme birationnel dans F. Il existe donc des ouverts non vides U de F et V de G tels que $\phi_{|V}$ soit un isomorphisme de V sur U. Quitte à remplacer U et V par des ouverts plus petits, on peut supposer que $f \circ \phi$ est définie sur V. Or ϕ induit, sur les points réels, un isomorphisme birégulier de $V(\mathbf{R})$ sur $U(\mathbf{R})$. Il s'ensuit que la restriction de f à $U(\mathbf{R})$ est régulière.

La construction précédente montre que pour tout idéal premier réel p de $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$, il existe un sous-ensemble localement fermé irréductible R_p dense de $\mathcal{Z}(p)$ tel que $f_{|R_p}$ est régulière. Il existe alors un nombre fini d'idéaux premiers réels distincts $p_1, \ldots, p_k$ tels que

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^{m} R_{p_i}.$$

Pour simplifier la notation, on notera R_i au lieu de R_{p_i}.

On construit ensuite une stratification selon le procédé habituel : en agrandissant la famille $\{R_i\}$ si nécessaire, on peut supposer que toutes les composantes irréductibles des intersections finies des sous-ensembles de la forme R_i appartiennent encore à la famille $\{R_i\}$. Introduisons un ordre partiel sur la collection $\{R_i\}$. On pose $R_i \leq R_j$ si R_i est contenu dans la clôture de Zariski $\overline{R}_j$ de R_j. Soit

$$S_i = R_i \setminus \bigcup_{R_j < R_i} \overline{R}_j.$$

Le sous-ensemble S_i de $\mathbf{R}^n$ est localement fermé, et contenu dans R_i. La restriction de la fonction f à S_i est donc bien régulière.

Montrons que $S_i \cap S_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$. C'est clair lorsque $R_j < R_i$ ou l'inverse. Supposons donc que R_i et R_j ne sont pas comparables. Ecrire l'intersection $R_i \cap R_j$ comme réunion des R_k où k parcourt un ensemble d'indice I. Comme on a $R_k \subseteq \overline{R}_i$ et $R_k \subseteq \overline{R}_j$, pour tout $k \in I$, on a bien $S_i \cap S_j = \emptyset$, lorsque $i \neq j$.

Il nous reste à montrer que $\mathbf{R}^n = \bigcup S_i$. Soit $p \in \mathbf{R}^n$ et soit R_i le plus petit élément de la collection $\{R_i\}$ tel que $p \in R_i$. On a bien $p \in S_i$. □

Rappelons qu'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est *Zariski constructible* s'il est réunion finie de sous-ensemble localement fermés au sens de Zariski.

Corollaire 3.21. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Un ensemble fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$ possède une stratification finie en sous-ensembles localement fermés de $\mathbf{R}^n$. En particulier, tout ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^n$ est Zariski constructible.* □

Notons qu'un sous-ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^n$ n'est pas forcément localement fermé, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.22. Soit $C \subseteq \mathbf{R}^2$ la courbe cubique ayant la singularité isolée en O de l'Exemple 3.4. Soit $C' = C \setminus \{O\}$. Le sous-ensemble

$$F = (C' \times \mathbf{R}) \cup \{O\}$$

est un sous-ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas localement fermé au sens de Zariski. En effet, la clôture de Zariski de F est égale à $C \times \mathbf{R}$. Le sous-ensemble F de $C \times \mathbf{R}$ n'est pas Zariski ouvert pour la topologie induite car son intersection avec $\{O\} \times \mathbf{R}$ est réduite à l'origine de $\mathbf{R}^3$ et n'est pas ouvert dans $\{O\} \times \mathbf{R}$.

Dans le cas $k = \infty$, l'énoncé du Corollaire 3.21 peut être considérablement renforcé car les fermés sont alors les fermés de Zariski.

Le Théorème 3.20 a encore l'énoncé suivant comme conséquence :

Corollaire 3.23. *Soit ℓ, m, n des entiers naturels et k un entier surnaturel. Soient*

$$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \quad et \quad g\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^\ell$$

deux applications k-régulues. Alors la composition $g \circ f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\ell$ est k-régulue.

Démonstration. L'application $g \circ f$ est bien-sûr de classe $\mathcal{C}^k$. Soit U l'intersection des domaines des fonctions coordonnées de f. La restriction de f à U est donc une application régulière dans $\mathbf{R}^m$. D'après Théorème 3.20, il existe une stratification

$$\mathbf{R}^m = \coprod_{i=1}^{p} S_i$$

en sous-ensembles localement fermés de $\mathbf{R}^m$ au sens de Zariski telle que la restriction $g_{|S_i}$ est régulière, pour tout i. Soit i tel que $U \cap f^{-1}(S_i)$ est Zariski dense dans U. Soit U' un ouvert Zariski dense dans U avec $f(U') \subseteq S_i$. La restriction à U' de $g \circ f$ est alors régulière. □

Corollaire 3.24. *Soit m, n des entiers naturels et k un entier surnaturel. Une application k-régulue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ est continue pour la topologie k-régulue.*

Démonstration. Soit $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ une application k-régulue et F un fermé k-régulu de $\mathbf{R}^m$. Il existe une fonction k-régulue g sur $\mathbf{R}^m$ dont l'ensemble des zéros est égal à F. D'après Corollaire 3.23, $g \circ f$ est k-régulue. L'image réciproque

$$f^{-1}(F) = \mathcal{Z}(g \circ f)$$

est donc un fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$. □

Grâce au Corollaire 3.23, on est en mesure de montrer que l'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ n'est pas noetherien, lorsque k est fini, même si la topologie k-régulue est noethérienne :

Proposition 3.25. *Soient n et k des entiers naturels. L'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ n'est pas noethérien lorsque $n \geq 2$.*

Démonstration. Pour $m \in \mathbf{N}$, soit f_m la fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ définie par

$$f_m = \frac{x_2^{3+k}}{x_2^2 + (x_1 - m)^2}.$$

Soit I_m l'idéal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ engendré par les fonctions $f_0, \ldots, f_m$. On montre comme dans [19, Ex. 6.11] que la suite d'idéaux croissante $I_0, I_1, \ldots$ n'est pas stationnaire. En fait, on montre par l'absurde que $I_{m+1} \neq I_m$. En effet, supposons que f_{m+1} appartient à I_m. On peut donc écrire

$$f_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i,$$

où $g_1, \ldots, g_m$ sont des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. En restreignant à la courbe réelle algébrique $C = \{m+1\} \times \mathbf{R} \times \{0\}^{n-2}$, qu'on identifie avec $\mathbf{R}$, on obtient

$$x_2^{1+k} = \sum_{i=1}^{m} (g_i)_{|C} (f_i)_{|C}$$

sur C. D'après Corollaire 3.23, les fonctions $(g_i)_{|C}$ et $(f_i)_{|C}$ sont k-régulues et donc régulières. De plus, la fonction

$$(f_i)_{|C} = \frac{x_2^{3+k}}{x_2^2 + (m+1-i)^2}$$

s'annule au point $x_2 = 0$ avec multiplicité $3 + k$, pour $i = 1, \ldots, m$. Il s'ensuit que x_2^{1+k} s'annule en $x_2 = 0$ avec multiplicité au moins $3+k$. Contradiction. □

Jets de fonctions k-régulues. Soient k, ℓ et n des entiers naturels, avec $\ell \leq k$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. Habituellement, on écrit le ℓ-ième polynôme de Taylor de f en un point a sous la forme

$$\sum_{|I| \leq \ell} \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(a) \frac{(x-a)^I}{I!}.$$

Lorsqu'on s'intéresse à celui-ci comme fonction de a, on est amené à le noter

$$\sum_{|I| \leq k} \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(x) \frac{(y-x)^I}{I!},$$

où y désigne un système de coordonnées affine arbitraire sur $\mathbf{R}^n$. On appelle ce dernier le *ℓ-jet* de f, et on le note $j_\ell(f)$.

Le fibré vectoriel trivial J_ℓ sur $\mathbf{R}^n$ de base

$$\frac{(y-x)^I}{I!}, \quad |I| \leq \ell$$

est le *fibré des ℓ-jets* sur $\mathbf{R}^n$. Le ℓ-jet $j_\ell(f)$ de f est une section de J_ℓ de classe $\mathcal{C}^{k-\ell}$ au-dessus U.

Le jonglage notationnel ci-dessus a l'avantage que le 0-jet $j_0(f)$ de f coincide avec f. Plus généralement, le coefficient de $(y-x)^I/I!$ du ℓ-jet de f est égal à la dérivée partielle d'ordre I de f.

Le fibré vectoriel des ℓ-jets J_ℓ possède une structure de fibré en algèbres si on définit

$$\frac{(y-x)^I}{I!}\cdot\frac{(y-x)^I}{J!}=\begin{cases}\binom{I+J}{I}\frac{(y-x)^{I+J}}{(I+J)!} & \text{si } |I+J|\leq \ell, \text{ et}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, on a

$$j_\ell(fg)=j_\ell(f)j_\ell(g)$$

sur U.

Comme le fibré vectoriel J_ℓ est libre d'une base explicitée, on peut identifier ses sections au-dessus d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ avec des applications de U dans $\mathbf{R}^N$, où $N=N_{n,k,\ell}$ est le rang de J_ℓ. Du coup, cela a un sens de parler de *section rationnelle* ou encore de *section m-régulue* de J_ℓ, où m est un entier surnaturel quelconque.

Lemme 3.26. *Soit ℓ un entier naturel. Soit f une fonction rationnelle sur $\mathbf{R}^n$, et soit U son domaine. Le ℓ-jet $j_\ell(f)$ est une section rationelle de J_ℓ de domaine U.*

Démonstration. Ecrivons $f=p/q$ sur U, où p et q sont des fonctions polynomiales, q ne s'annulant pas sur U. On sait que la dérivée partielle d'ordre I de f est de la forme $r/q^{|I|+1}$, où r est une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^n$. Il s'ensuit que $j_\ell(f)$ est une section rationnelle de J_ℓ de domaine $V\supseteq U$. Comme le coefficient de $(y-x)^0/0!$ est $p/q=f$, le domaine V est égal à U. □

Proposition 3.27. *Soit f une fonction réelle sur $\mathbf{R}^n$. La fonction f est 1-régulue si et seulement si f est rationnelle et la section rationnelle $j_1(f)$ de J_1 au-dessus de $\mathrm{dom}(f)$ s'étend de manière continue à $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. L'implication directe est évidente compte tenu du Lemme 3.26. Montrons donc l'implication réciproque, et soit f une fonction rationnelle telle que $j_1(f)$ s'étend de manière continue à $\mathbf{R}^n$. Notons U le domaine de f. D'après l'hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit Z le complémentaire de U, i.e., $Z=\mathrm{pol}(f)$. Comme Z est un sous-ensemble Zariski fermé strictement contenu dans $\mathbf{R}^n$, il existe un système de coordonnées affine x' sur $\mathbf{R}^n$ avec la propriété suivante. Aucune des fibres des projections associées

$$p_i\colon \mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^{n-1}$$

omettant la i-ième coordonnée x'_i n'est contenue entièrement dans Z. Quitte à remplacer x par x', on peut supposer que la propriété est satisfaite par le système des coordonnées x, i.e., pour tout $i=1,\dots,n$ et pour tout $a\in\mathbf{R}^{n-1}$, l'intersection $Z\cap p_i^{-1}(a)$ est un ensemble fini.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, les dérivées partielles $f_i=\partial f/\partial x_i$, $i=1,\dots,n$, de f existent et sont continues sur U. De plus, d'après l'hypothèse, elles s'étendent par continuité sur $\mathbf{R}^n$ tout entier. En particulier, f_i s'étend par continuité sur $p_i^{-1}(a)$ pour tout $a\in\mathbf{R}^{n-1}$ et pour tout i. D'après un résultat classique en analyse [25, Theorem 11.7], cela implique que la restriction de f_i à $p_i^{-1}(a)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $p_i^{-1}(a)$, pour tout a et i. (C'est là qu'on utilise la propriété que $Z\cap p_i^{-1}(a)$ est fini, ou discret en tout cas.) Autrement

dit, f est partiellement différentiable sur $\mathbf{R}^n$ tout entier, et ses dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur $\mathbf{R}^n$. D'après un autre résultat classique d'analyse [23, Thm 9.21], f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^n$. □

Théorème 3.28. *Soit k un entier naturel. Soit f une fonction réelle sur $\mathbf{R}^n$. La fonction f est k-régulue si et seulement si f est rationnelle et la section rationnelle $j_k(f)$ de J_k au-dessus de* $\mathrm{dom}(f)$ *s'étend de manière continue à $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. L'implication directe étant encore évidente, on démontre l'implication réciproque. Le cas $k = 0$ est trivial. Supposons que $k > 0$ et soit f une fonction rationnelle de domaine U telle que la section $j_k(f)$ au-dessus de U s'étend de manière continue à $\mathbf{R}^n$. Les dérivées partielles f_I d'ordre $k-1$ de f ont des 1-jets qui s'étendent de manière continue à $\mathbf{R}^n$. D'après Proposition 3.27, ces dérivées partielles sont toutes 1-régulues. Il s'ensuit que f est k-régulue. □

Théorème 3.29. *Soit k un entier surnaturel et ℓ un entier naturel $\leq k$. Soit f une fonction réelle sur $\mathbf{R}^n$. La fonction f est k-régulue si et seulement si f est rationnelle et la section rationnelle $j_\ell(f)$ de J_ℓ au-dessus de* $\mathrm{dom}(f)$ *s'étend de manière $\mathcal{C}^{k-\ell}$ à $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. On peut supposer que k est fini. Comme avant, il suffit de démontrer l'implication indirecte. Soit donc f rationelle dont toutes les dérivées d'ordre $\leq \ell$ sont $(k-\ell)$-régulues. D'après l'implication directe du Théorème 3.28, le k-jet de f s'étend de manière continue à $\mathbf{R}^n$. D'après l'implication indirecte du même théorème, f est k-régulue. □

4. Théorèmes fondamentaux

L'inégalité de Lojasiewicz. Un rôle clé dans la suite est joué par une version k-régulue de l'inégalité de Lojasiewicz sous sa forme de [4, Prop. 2.6.4] :

Lemme 4.1. *Soit n et k des entiers naturels. Soit f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Si*

$$g\colon \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$$

est k-régulue, alors il existe un entier naturel N tel que l'extension à $\mathbf{R}^n$ par 0 de $f^N g$ est k-régulue.

Démonstration. D'après l'inégalité de Lojasiewicz classique, il existe un entier naturel M tel que pour tout I avec $|I| \leq k$, l'extension de

$$f^M \cdot \frac{\partial^{|I|} g}{\partial x^I}$$

par 0 est continue sur $\mathbf{R}^n$ tout entier. Soit $N = M + k$. Comme f est k-régulue sur $\mathbf{R}^n$, tout coefficient du k-jet $j_k(f^N)$ de f^N est de la forme $f^M \cdot h$, où h est une fonction régulue sur $\mathbf{R}^n$. Du coup, $j_k(f^N)$ lui-même est de la forme $f^M \cdot s$, où s est une section régulue de J_k. Il s'ensuit que l'extension par 0 de

$$j_k(f^N g) = j_k(f^N) j_k(g) = f^M s j_k(g)$$

est une section régulue de J_k au-dessus $\mathbf{R}^n$ tout entier. D'après Théorème 3.28, la fonction $f^N g$ est k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. □

Le lemme ci-dessus nous sera utile sous la forme suivante :

Lemme 4.2. *Soient n et k des entiers naturels. Soit U un ouvert k-régulu de $\mathbf{R}^n$, et soit f une fonction k-régulue sur U. Si*

$$g\colon \mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$$

est une fonction k-régulue, il existe un entier naturel N tel que l'extension à U par 0 de $f^N g$ est k-régulue.

Démonstration. Soit h une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{D}(h) = U$. D'après Lemme 4.1, il existe un entier naturel M tel que l'extension par 0 de $h^M f$ est k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Comme g est k-régulue sur $\mathcal{D}(h^M f)$, il existe encore d'après Lemme 4.1, un entier naturel N tel que l'extension par 0 de $(h^M f)^N g$ est k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Il s'ensuit que l'extension par 0 de $f^N g$ à $U = \mathcal{D}(h)$ est k-régulue. □

Remarquons que les deux énoncés ci-dessus sont faux lorsque $k = \infty$. Un contre-exemple est le suivant. Soit f la fonction sur $\mathbf{R}^2$ définie par $f(x) = x^2 + y^2$, et soit g la fonction sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $g(x, y) = 1/(x^2 + 2y^2)$. Les fonctions f et g sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais l'extension à $\mathbf{R}^2$ par 0 de $f^N g$ n'est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour aucun entier naturel N.

Le faisceau des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit U un ouvert k-régulu de $\mathbf{R}^n$. La topologie de Zariski sur U est la topologie induite par la topologie de Zariski sur $\mathbf{R}^n$. Une fonction réelle f définie sur U est k-régulue sur U si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, et il existe des fonctions polynomiales p et q sur $\mathbf{R}^n$ telles que $f = p/q$ sur un ouvert de Zariski dense de U. On note $\mathcal{R}^k(U)$ l'ensemble des fonctions k-régulues sur U. C'est un anneau sous les opérations habituelles. Si V est un ouvert k-régulu de $\mathbf{R}^n$ contenu dans U, l'application de restriction de $\mathcal{R}^k(U)$ dans $\mathcal{R}^k(V)$ est un morphisme d'anneaux. Il est clair que $\mathcal{R}^k$ est donc un préfaisceau.

Proposition 4.3. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Le préfaisceau $\mathcal{R}^k$ est un faisceau sur $\mathbf{R}^n$ pour la topologie k-régulue.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'énoncé suivant. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert k-régulu U de $\mathbf{R}^n$. Supposons que f_i est une fonction k-régulue sur U_i, pour tout i, telles que

$$(f_i)_{|U_i \cap U_j} = (f_j)_{|U_i \cap U_j}$$

pour tout i, j. Alors il existe une fonction k-régulue f sur U dont la restriction à U_i est égale à f_i. En effet, il existe une fonction f sur U de classe $\mathcal{C}^k$ dont la restriction à U_i est égale à f_i pour tout i. Pour montrer que f est k-régulue, on peut supposer que U est non vide. Du coup, il existe i tel que U_i est non vide. Comme $\mathbf{R}^n$ est irréductible pour la topologie k-régulue, tout ouvert k-régulu non vide de $\mathbf{R}^n$ est dense. En particulier, un ouvert de Zariski dense dans U_i est aussi dense dans U. Comme f_i est régulière sur un ouvert de Zariski dense dans U_i, la fonction f est régulière sur un ouvert de Zariski dense dans U. □

Corollaire 4.4. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Le faisceau $\mathcal{R}^k$ sur $\mathbf{R}^n$ est un faisceau en $\mathbf{R}$-algèbres locales. La paire $(\mathbf{R}^n, \mathcal{R}^k)$ est un espace localement annelé en $\mathbf{R}$-algèbres.* □

Corollaire 4.5. *Soit m, n des entiers naturels et k un entier surnaturel. Une application k-régulue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ induit naturellement un morphisme d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres de $(\mathbf{R}^n, \mathcal{R}^k)$ dans $(\mathbf{R}^m, \mathcal{R}^k)$. Cela établit une bijection entre l'ensemble des applications k-régulues de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ et l'ensemble des morphismes d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres de $(\mathbf{R}^n, \mathcal{R}^k)$ dans $(\mathbf{R}^m, \mathcal{R}^k)$.*

Démonstration. Soit f une application k-régulue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$. D'après Corollaire 3.24, f est une application continue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$, par rapport aux topologies k-régulues. De plus, si g est une fonction k-régulue sur un ouvert k-régulu U de $\mathbf{R}^m$, la composition $f^{\#}(g) = g \circ f$ est une fonction k-régulue sur l'ouvert k-régulu $f^{-1}(U)$ de $\mathbf{R}^n$, d'après Corollaire 3.23. On en déduit donc un morphisme d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres

$$(f, f^{\#})\colon (\mathbf{R}^n, \mathcal{R}^k) \longrightarrow (\mathbf{R}^m, \mathcal{R}^k).$$

Réciproquement, étant donné un tel morphisme $(f, f^{\#})$, l'application f est une application k-régulue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ car la i-ième fonction coordonnée f_i de f est $f^{\#}(x_i)$ et est une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$, pour $i = 1, \ldots, m$. □

Grâce à la version k-régulue de l'inégalité de Lojasiewicz, on a une description de l'anneau des sections du faisceau $\mathcal{R}^k$ au-dessus d'un ouvert comme une localisation de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$, lorsque k est fini :

Proposition 4.6. *Soient n et k des entiers naturels. Soit U un ouvert k-régulu de $\mathbf{R}^n$, et soit f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{D}(f) = U$. Alors, le morphisme de restriction de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{R}^k(U)$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)_f \cong \mathcal{R}^k(U).$$

Démonstration. Soit $\varphi\colon \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{R}^k(U)$ le morphisme de restriction. Comme la restriction de f à U ne s'annule pas, φ induit un morphisme

$$\varphi_f\colon \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)_f \longrightarrow \mathcal{R}^k(U).$$

On montre que φ_f est un isomorphisme.

Soit $g \in \mathcal{R}^k(U)$. D'après Lemme 4.2, il existe un entier naturel N tel que $f^N g$ se prolonge en une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Par conséquent φ_f est surjectif.

Pour montrer que φ_f est injectif, il suffit de montrer l'énoncé suivant. Pour toute fonction k-régulue h sur $\mathbf{R}^n$ dont la restriction à U est identiquement nulle, la fonction fh est identiquement 0 sur $\mathbf{R}^n$. Cet énoncé est clair lorsque $U = \emptyset$, car $f = 0$ dans ce cas. Si $U \neq \emptyset$, alors U est dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la topologie euclidienne. Il s'ensuit que $h = 0$ sur $\mathbf{R}^n$, et en particulier, $fh = 0$. □

Idéaux radicaux de fonctions régulues. On rappelle qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est *réel* s'il satisfait la propriété suivante : Si $f_1^2 + \ldots + f_m^2 \in I$, avec $f_1, \ldots, f_m \in A$, alors $f_i \in I$ pour chaque $i = 1, \ldots, m$.

Proposition 4.7. *Soit n et k des entiers naturels. Soit $I \subseteq \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ un idéal radical. Alors I est un idéal réel.*

Démonstration. On suppose $f_1^2 + \ldots + f_m^2 \in I$ avec $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Pour $i = 1, \ldots, k$ on a $\frac{f_i^{3+k}}{\sum_{i=1}^m f_i^2} \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. En effet c'est la composée des applications k-régulues $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ et de $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \frac{x_i^{3+k}}{\sum_{i=1}^m x_i^2}$, qui est bien k-régulue d'après le Corollaire 3.23. Donc $f_i^{3+k} = \frac{f_i^{3+k}}{\sum_{i=1}^m f_i^2}(\sum_{i=1}^m f_i^2) \in I$. L'idéal I étant radical on obtient $f_i \in I$. □

Remarque 4.8. La proposition précédente montre que l'idéal engendré par $X^2 + Y^2$ dans $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^2)$ n'est pas radical. En effet s'il est radical alors il est réel et par conséquent $X \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^2).(X^2 + Y^2)$ et donc $X = f.(X^2 + Y^2)$ avec $f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^2)$. Mais $f = \frac{X}{X^2+Y^2}$ n'est clairement pas continue en l'origine.

Soit I un idéal radical dans $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. On sait que I est un idéal réel d'après la Proposition 4.7. On montre que cette propriété est conservée en intersectant avec les polynômes.

Lemme 4.9. *Soit I un idéal radical dans $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Alors $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est un idéal réel et on a $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = J$.*

Démonstration. L'idéal J est réel car I est réel (Proposition 4.7). On obtient $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = J$ par le Nullstellensatz réel [4, Thm. 4.1.4] □

Soit J un idéal de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. On regarde le comportement de J quand on l'étend dans les fonctions régulues.

On fixe d'abord quelques notations.

Notations et Définitions 4.10. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Dans la suite, on note

$$\mathfrak{m}_x = \{p \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] |\ p(x) = 0\}$$

$$\mathfrak{M}_x = \{f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) |\ f(x) = 0\}$$

les idéaux maximaux de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ respectivement, des polynômes et des fonctions régulues qui s'annulent en x. Plus généralement, si $A \subseteq \mathbf{R}^n$, on note dans la suite

$$\mathcal{I}(A) = \{p \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] |\ p(x) = 0\ \forall x \in A\}$$

et

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}^k}(A) = \{f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) |\ f(x) = 0\ \forall x \in A\}.$$

On donne l'exemple suivant. Soit $(X, Y) = \mathfrak{m}_O = \{p \in \mathbf{R}[X, Y] |\ p(O) = 0\}$ l'idéal maximal de $\mathbf{R}[X, Y]$ où O est l'origine de $\mathbf{R}^2$. On montre que $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2).\mathfrak{m}_O$ n'est pas maximal dans $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$.
On a clairement $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2).\mathfrak{m}_O \subseteq \mathfrak{M}_O$. On a aussi $f = \frac{XY^2}{X^2+Y^2} \in \mathfrak{M}_O$. On va montrer par contre que $f \notin \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2).\mathfrak{m}_O$. Supposons que f s'écrive $f = X.g + Y.h$ avec $g, h \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$. Alors on peut écrire

$$f = g(O).X + h(O).Y + (g - g(O)).X + (h - h(O)).Y = a.X + b.Y + o(\sqrt{X^2 + Y^2}).$$

Mais alors f serait différentiable à l'origine et on obtient une contradiction. Cet exemple montre que l'on peut s'attendre à quelques surprises.

Théorème 4.11. *Soit J un idéal réel de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Alors*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n).J) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^k}(\mathcal{Z}(J)).$$

Démonstration. On note $I = \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n).J$. Soit $f \in \mathrm{Rad}(I)$, il existe $r \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^r \in I$. Comme $J = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(J))$ [4, Thm. 4.1.4] dans $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ car J est réel, on en déduit que f^r s'annule identiquement sur $\mathcal{Z}(J)$. Par conséquent f s'annule aussi identiquement sur $\mathcal{Z}(J)$ i.e. $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^k}(\mathcal{Z}(J))$. On a montré une inclusion.

Pour l'inclusion réciproque, on suppose $J = (p_1, \ldots, p_l)$ avec $p_i \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Alors on a $V = \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(s)$ avec $s = p_1^2 + \ldots + p_l^2$. Soit $f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ tel que $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)}(V)$. Soit $g = \frac{1}{s}$, c'est une fonction semi-algébrique C^k sur $\mathbf{R}^n \setminus V$ donc sur $\mathcal{D}(f)$. Par le Lemme 4.1, il existe un entier positif N tel que $h = f^N.g$ étendue par 0 sur $\mathcal{Z}(f)$ est k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. On a clairement $h \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^k}(\mathcal{Z}(f)) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}^k}(V)$ et de plus $f^N = h.s$: en effet, sur $\mathcal{D}(f)$ c'est évident et si $x \in Z(f)$ on a aussi $f^N(x) = h(x)s(x) = 0$ (on utilisera plusieurs fois dans la suite ce même argument). Par conséquent

$$f^N = h.s \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n).J = I$$

car $s \in J$. □

Dans le cas où J est maximal, on obtient

Corollaire 4.12. *On a*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n).\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{M}_x \ .$$

Corollaire 4.13. *On suppose $k = 0$ et soit $f \in \mathfrak{M}_x$. Il existe un entier strictement positif N tel que f^N soit différentiable en x avec $D(f)_x = 0$.*

Démonstration. On suppose $x = O$. En regardant la preuve du théorème précédent, il existe un entier strictement positif N tel que $f^N = (X_1^2 + \ldots + X_n^2).h$ avec $h \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On a donc $f^N = X_1.h_1 + \ldots + X_n.h_n$ avec $h_i \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $h_i(O) = 0$. On peut donc écrire $f^N = o(\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2})$ ce qui termine la preuve. □

L'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R})$ est radicalement principal. Soit A un anneau. On dira qu'un idéal I de A est *radicalement principal* s'il existe $f \in I$ tel que

$$\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(f).$$

Dans ce cas, on dira aussi que f est un *générateur radical* de I. On dit que A est *radicalement principal* si tous ses idéaux le sont.

Proposition 4.14. *Soit n et k des entiers naturels. Soit I un idéal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$, et supposons que $f \in I$ soit telle que $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(I)$. Alors, f est un générateur radical de I, i.e.,*

$$\mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Rad}(I).$$

Démonstration. Comme $f \in I$, on a bien-sûr l'inclusion $\mathrm{Rad}(f) \subseteq \mathrm{Rad}(I)$. Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que $\mathrm{Rad}(f) \supseteq I$. Soit $g \in I$. La fonction $1/f$ est bien définie et k-régulue sur $\mathcal{D}(g)$. D'après Lemme 4.1, il existe un entier naturel N tel que l'extension h par 0 de g^N/f

sur $\mathcal{Z}(g)$ est encore k-régulue. On a $g^N = fh$ sur $\mathbf{R}^n$. Cela implique que $g \in \mathrm{Rad}(f)$. □

Proposition 4.15. *Soit n et k des entiers naturels. L'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est radicalement principal. Plus précisément, soit I un idéal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe une fonction k-régulue $f \in I$ telle que*

$$\mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Rad}(I).$$

Démonstration. D'après le Corollaire 3.15, la topologie k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ est noethérienne. Il existe donc un nombre fini de fonctions k-régulues $f_1, \ldots, f_m$ dans I telles que

$$\mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_m) = \mathcal{Z}(I).$$

Soit

$$f = f_1^2 + \cdots + f_m^2.$$

Comme $f \in I$ et $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(I)$, la fonction f est un générateur radical de I d'après la Proposition 4.14. □

Proposition 4.16. *Soit n et k des entiers naturels. Soit f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$, et soit I un idéal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Alors, $f \in \mathrm{Rad}(I)$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f) \supseteq \mathcal{Z}(I)$.*

Démonstration. D'après la Proposition 4.15, il existe $g \in I$ telle que $\mathrm{Rad}(g) = \mathrm{Rad}(I)$. En particulier, on a

$$\mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(\mathrm{Rad}(g)) = \mathcal{Z}(\mathrm{Rad}(I)) = \mathcal{Z}(I).$$

L'énoncé est donc une conséquence de la proposition suivante. □

Proposition 4.17. *Soit n et k des entiers naturels. Soient f et g des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. Alors, $f \in \mathrm{Rad}(g)$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f) \supseteq \mathcal{Z}(g)$.*

Démonstration. Supposons que $f \in \mathrm{Rad}(g)$, et soit $x \in \mathcal{Z}(g)$. Il existe un entier naturel N tel que $f^N \in (g)$, i.e., $f^N = gh$ pour une certaine fonction k-régulue h sur $\mathbf{R}^n$. Comme $g(x) = 0$, on a $f^N(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$, i.e., $x \in \mathcal{Z}(f)$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{Z}(f) \supseteq \mathcal{Z}(g)$. Cela veut dire que g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}(f)$. En particulier, la fonction $1/g$ existe sur $\mathcal{D}(f)$ et y est k-régulue. D'après la version k-régulue de l'inégalité de Lojasiewicz, il existe un entier naturel N tel que l'extension par 0 de f^N/g sur $\mathcal{Z}(f)$ est k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Notons cette extension par h. On a donc $f^N = gh$, i.e., $f \in \mathrm{Rad}(g)$. □

Corollaire 4.18. *Soit n et k des entiers naturels. Soient f et g des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. Alors, $\mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Rad}(g)$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$.* □

En utilisant Proposition 4.15 encore, on obtient la caractérisation géométrique suivante des générateurs radicaux d'un idéal de fonctions k-régulues :

Corollaire 4.19. *Soit n et k des entiers naturels. Soit f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$, et soit I un idéal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Alors, $\mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Rad}(I)$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(I)$.* □

Ou encore plus généralement :

Corollaire 4.20. *Soit n et k des entiers naturels. Soient I et J des idéaux de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Alors,* $\mathrm{Rad}(I) = \mathrm{Rad}(J)$ *si et seulement si $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(J)$. En particulier, deux idéaux radicaux de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ sont égaux si et seulement s'ils ont le même ensemble des zéros.* □

En résumé :

Théorème 4.21. *Soit n et k des entiers naturels. L'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est radicalement principal. Plus précisément, soit I un idéal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe une fonction k-régulue $f \in I$ telle que*

$$\mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Rad}(I).$$

i.e. telle que

$$\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(I).$$

Le Nullstellensatz k-régulu.

Notation 4.22. Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Si V est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on note $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_k}(V)$, ou maintenant simplement $\mathcal{I}(V)$ s'il n'y a pas de confusion possible, l'ensemble des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$ s'annulant sur V, i.e.,

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) \mid f(x) = 0 \ \forall x \in V\}.$$

Il est clair que $\mathcal{I}(V)$ est un idéal radical dans l'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$.

Proposition 4.23 (Nullstellensatz faible pour idéaux de type fini.)**.** *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit I un idéal de type fini de l'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. Si $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ dans $\mathbf{R}^n$, alors $I = \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$. Soient $f_1, \ldots, f_m$ des générateurs de I. En posant

$$f = f_1^2 + \cdots + f_m^2,$$

on a

$$\emptyset = \mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_m) = \mathcal{Z}(f).$$

Cela veut dire que la fonction k-régulue f n'a pas de zéros dans $\mathbf{R}^n$. Elle est donc inversible dans $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Comme elle appartient aussi à l'idéal I, on a $I = \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. □

Théorème 4.24 (Nullstellensatz pour idéaux de type fini)**.** *Soit n et k des entiers naturels. Soit I un idéal de type fini de l'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. Alors,*

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \mathrm{Rad}(I).$$

On adapte l'argument de Rabinowitsch [9, p. 59] :

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \supseteq I$. Comme le premier est radical, on a bien $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) \supseteq \mathrm{Rad}(I)$.

Pour montrer l'inclusion inverse, soit f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ s'annulant sur $\mathcal{Z}(I)$. On peut supposer que f n'est pas identiquement nulle. On identifie le corps des fractions $\mathbf{R}(x_1, \ldots, x_n)$ avec son image dans $\mathbf{R}(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Le sous-anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est alors bien un sous-anneau de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^{n+1})$.

Soit I' l'idéal dans $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^{n+1})$ engendré par I et $x_{n+1}f-1$. Il est de type fini car I est de type fini. Observons que $\mathcal{Z}(I')=\emptyset$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$. En effet, si $(x_1,\dots,x_{n+1})$ est un zéro commun de I', alors $(x_1,\dots,x_n)$ est un zéro de I dans $\mathbf{R}^n$, et un non zéro de f, ce qui contredit l'hypothèse que f s'annule sur $\mathcal{Z}(I)$. On a donc bien $\mathcal{Z}(I')=\emptyset$. D'après le Nullstellensatz faible pour idéaux de type fini, $I'=\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^{n+1})$. Il existe donc $g_1,\dots,g_{m+1}$ dans $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^{n+1})$ et $f_1,\dots,f_m$ dans I telles que

$$g_1f_1+\cdots+g_mf_m+g_{m+1}(x_{n+1}f-1)=1$$

dans $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^{n+1})$.

Soit $U=\mathcal{D}(f)$, et soit $h\colon U\to\mathbf{R}^{n+1}$ l'application k-régulue définie par $h(x)=(x,1/f(x))$. Comme l'image de h est de codimension 1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$, on a un morphisme d'anneaux

$$\phi\colon \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^{n+1})\longrightarrow\mathcal{R}^k(U)$$

induit par la composition avec h. On a alors

$$\phi(g_1)f_1+\cdots+\phi(g_m)f_m=1$$

sur U. D'après le Lemme 4.1, il existe un entier naturel N tel que l'extension par 0 de $f^N\phi(g_i)$ soit k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ tout entier, pour tout i. Du coup,

$$f^N=f^N\phi(g_1)f_1+\cdots+f^N\phi(g_m)f_m\in I,$$

et donc $f\in\mathrm{Rad}(I)$. □

Remarquons que le Nullstellensatz 4.24 n'est pas valable pour les fonctions ∞-régulues. Un contre-exemple est le suivant. Soit I l'idéal de $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^2)$ engendré par x^2+y^2. L'ensemble des zéros $\mathcal{Z}(I)$ de I est égal à l'origine de $\mathbf{R}^2$. La fonction x s'annule bien sur $\mathcal{Z}(I)$, mais n'appartient pas à l'idéal radical $\mathrm{Rad}(I)$ de I dans $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^2)$. En effet, l'extension à $\mathbf{R}^2$ de la fonction $x^N/(x^2+y^2)$ n'est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour aucun entier naturel N.

Corollaire 4.25 (Nullstellensatz)**.** *Soient n et k des entiers naturels.*

(1) *Soit F un fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$. Alors $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(F))=F$.*

(2) *Soit I un idéal (non-nécessairement de type fini) de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Alors, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))=\mathrm{Rad}(I)$.*

En particulier, on a une correspondance entre les fermés régulus de $\mathbf{R}^n$ et les idéaux radicaux de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. Le 1 est une conséquence du 2. En effet, en écrivant $F=\mathcal{Z}(I)$ pour un idéal I de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$, on a

$$\mathcal{Z}(\mathcal{I}(F))=\mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)))=\mathcal{Z}(\mathrm{Rad}(I))=\mathcal{Z}(I)=F.$$

Il suffit donc de montrer le 2. Soit I un idéal quelconque de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. D'après la Proposition 4.15, il existe $f\in I$ telle que $\mathrm{Rad}(f)=\mathrm{Rad}(I)$. D'après le Nullstellensatz pour idéaux de type fini, on a $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(f))=\mathrm{Rad}(f)$. Comme $\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}(I)$ et $\mathrm{Rad}(f)=\mathrm{Rad}(I)$, on a bien $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))=\mathrm{Rad}(I)$.

On donne une preuve différente du 2 sans utiliser le Nullstellensatz pour idéaux de type fini. L'inclusion $\mathrm{Rad}(I)\subset\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ est évidente. Pour l'inclusion inverse on considère $g\in\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$. D'après le Théorème 4.21, il existe $f\in I$

telle que $\mathrm{Rad}(f) = \mathrm{Rad}(I)$ et $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(I)$. Par conséquent $g \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(f))$ i.e. $\mathcal{Z}(f) \subseteq \mathcal{Z}(g)$. D'après le Lemme 4.1, il existe un entier naturel N tel que l'extension par 0 de $\frac{g^N}{f}$ sur $\mathcal{Z}(g)$ soit k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Notons h cette extension. On obtient finalement $g^N = fh \in I$ i.e. $g \in \mathrm{Rad}(I)$. □

Remarquons que l'inégalité de Lojasiewicz 4.1 pour les fonctions k-régulues est l'outil principal pour la démonstration du Nullstellensatz 4.25. Ce même type d'idée est utilisé dans [5] pour montrer que l'anneau des fonctions semi-algébriques continues est un anneau de Gelfand.

Le spectre de l'anneau des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$. Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit $f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. L'ensemble des zéros de f dans le spectre $\mathrm{Spec}\,\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est noté $\mathcal{V}(f)$, i.e.,

$$\mathcal{V}(f) = \{p \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) \mid f \in p\}\ .$$

Son complémentaire est noté $\mathcal{U}(f)$. Plus généralement, si E est un sous-ensemble de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$, l'ensemble des zéros communs dans $\mathrm{Spec}\,\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ des éléments de E est noté $\mathcal{V}(E)$, et son complémentaire est $\mathcal{U}(E)$. Plus précisément,

$$\mathcal{V}(E) = \{p \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) \mid E \subseteq p\}$$

et

$$\mathcal{U}(E) = \{p \in \mathrm{Spec}\,\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) \mid E \not\subseteq p\}.$$

Il est bien connu que les sous-ensembles de la forme $\mathcal{U}(E)$ constituent une topologie sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ [8, Chapitre 1]. L'espace topologique $\mathrm{Spec}\,\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est quasi-compact. Plus généralement, les ouverts de la forme $\mathcal{U}(f_1, \ldots, f_m)$ sont quasi-compacts.

Soient n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. On note encore $\mathfrak{M}_x$ l'ensemble des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$ s'annulant en x, i.e.,

$$\mathfrak{M}_x = \{f \in \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n) \mid f(x) = 0\}.$$

Il est clair que $\mathfrak{M}_x$ est un idéal maximal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Une conséquence du Nullstellensatz (4.25) est que tout idéal maximal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est de cette forme.

Proposition 4.26. *Soient n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Il existe un et un seul $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}$.*

Démonstration. Regardons d'abord le cas $k = \infty$. L'anneau des fonctions ∞-régulues est égal à l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$. Ce dernier est la localisation de l'anneau des polynômes $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ par rapport à la partie multiplicative des polynômes ne s'annulant pas sur $\mathbf{R}^n$. Si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$, c'est par conséquent un ideal réel et le Nullstellensatz classique fonctionnne i.e. $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$ [4, Thm. 4.1.4].

Soit k un entier surnaturel. D'après le Corollaire 4.25 si k est fini et ce qui précède si k est infini, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$. En particulier, $\mathcal{Z}(\mathfrak{M})$ est non-vide. Soit $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{M})$. On a donc $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_x$. Par maximalité, on obtient $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x$. Cela montre l'existence de x. L'unicité est claire car $\mathfrak{M}_x \neq \mathfrak{M}_y$ lorsque x et y sont des éléments différents de $\mathbf{R}^n$. □

Soit

$$\iota\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$$

l'application définie par $\iota(x) = \mathfrak{M}_x$, où $\mathfrak{M}_x$ est l'idéal maximal de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ des fonctions k-régulues s'annulant en x. L'application ι est bien continue lorsqu'on considère $\mathbf{R}^n$ avec la topologie k-régulue. D'après la version faible du Nullstellensatz régulu, ι est une bijection sur l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. La version forte du Nullstellensatz (Corollaire 4.25) peut se reformuler ainsi :

Théorème 4.27. *Soient n et k des entiers naturels. L'application ι induit une bijection entre $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ et l'ensemble des sous-ensembles k-régulument fermés et irréductibles de $\mathbf{R}^n$. Plus précisément, pour tout sous-ensemble fermé k-régulument irréductible X de $\mathbf{R}^n$ il existe un et un seul idéal premier p de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ tel que $X = \iota^{-1}(\mathcal{V}(p))$.* □

Comme précédemment, cet énoncé est faux si $k = \infty$. Par exemple, l'idéal de $\mathbf{R}[x, y]$ engendré par le polynôme irréductible $x^2 + y^2$ est un idéal premier p. Or,

$$\iota^{-1}(\mathcal{V}(p)) = O = \iota^{-1}(\mathcal{V}(\mathfrak{M}_O)).$$

Soit $F \subseteq \mathbf{R}^n$ un fermé k-régulu. Notons par $\tilde{F}$ le plus petit sous-ensemble fermé de $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ tel que $\iota(F) \subseteq \tilde{F}$, i.e., $\tilde{F}$ est l'adhérence de $\iota(F)$ dans $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ i.e. $\tilde{F} = \mathcal{V}(\iota(F))$.

Lemme 4.28. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel.*

(1) *Soit F_α, $\alpha \in A$ une collection de sous-ensembles k-régulument fermés de $\mathbf{R}^n$. Alors*
$$\widetilde{\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in A} \tilde{F}_\alpha.$$

(2) *Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-ensembles k-régulument fermés de $\mathbf{R}^n$. Alors*
$$\widetilde{(F_1 \cup \cdots \cup F_m)} = \tilde{F}_1 \cup \cdots \cup \tilde{F}_m.$$

Démonstration. La deuxième propriété est évidente. La première est valable car ι est injectif. □

Théorème 4.29. *Soient n et k des entiers naturels. L'application ι induit une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles fermés de $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ et l'ensemble des sous-ensembles k-régulument fermés de $\mathbf{R}^n$. Plus précisément, pour tout sous-ensemble k-régulument fermé X de $\mathbf{R}^n$ il existe un et un seul ensemble fermé Y de $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ tel que $X = \iota^{-1}(Y)$, à savoir $Y = \tilde{X}$.*

Démonstration. Soit X fermé k-régulu dans $\mathbf{R}^n$. Posons $Y = \tilde{X}$ et montrons que $\iota^{-1}(Y) = X$. Comme $\mathbf{R}^n$ est noethérien, X possède un nombre fini de composantes irréductibles k-régulus $F_1, \ldots, F_m$. D'après le lemme précédent, $Y = \tilde{F}_1 \cup \cdots \cup \tilde{F}_m$. D'après le Théorème 4.27, on a alors

$$\iota^{-1}(Y) = \iota^{-1}(\tilde{F}_1) \cup \cdots \cup \iota^{-1}(\tilde{F}_m) = F_1 \cup \cdots \cup F_m = X\ .$$

Montrons l'unicité de Y. Soit Z un sous-ensemble fermé de $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ tel que $\iota^{-1}(Z) = X$. Comme Y est le plus petit fermé de $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$

contenant $\iota(X)$, on a $Y \subseteq Z$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $p \in Z$, et soit $F = \iota^{-1}(\mathcal{V}(p))$. Montrons d'abord que $\iota(F) \subseteq Y$. Soit $x \in F$. On a $\iota(x) \in \mathcal{V}(p)$. Comme $\mathcal{V}(p)$ est contenu dans Z, et comme $\iota^{-1}(Z) = X$, on a $x \in X$. On a également $\iota^{-1}(Y) = X$, donc $\iota(x) \in Y$. Cela montre bien que $\iota(F) \subseteq Y$. Or, d'après le Théorème 4.27, F est un fermé k-régulument irréductible dans $\mathbf{R}^n$, et $p \in \tilde{F}$. Il s'ensuit que $p \in Y$. Cela montre l'inclusion $Z \subseteq Y$. □

Corollaire 4.30. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. L'espace topologique* $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ *est noethérien.*

Démonstration. Si k est fini, c'est une conséquence du théorème précédent. Pour le cas $k = \infty$, il suffit de rappeler que l'anneau $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)$ est noethérien. □

Pour U un ouvert régulu de $\mathbf{R}^n$, soit $\tilde{U}$ le complémentaire de $\tilde{F}$ dans $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$, où F est le complémentaire de U dans $\mathbf{R}^n$.

Dans l'anneau $\mathcal{R}^\infty$ des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^2$, on peut remarquer que $O = \iota^{-1}(\mathcal{V}(X,Y)) = \iota^{-1}(\mathcal{V}(X^2+Y^2))$ où (X,Y) et (X^2+Y^2) sont deux idéaux premiers distincts de $\mathcal{R}^\infty$. Voici un corollaire qui montre bien la différence entre l'anneau des fonctions régulues et l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$:

Corollaire 4.31. *Soient n et k des entiers naturels. Soit $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un ouvert k-régulu. Il existe un et un seul ouvert V de* $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ *tel que $\iota^{-1}(V) = U$, à savoir $V = \tilde{U}$.* □

Là encore, cet énoncé est faux lorsque $k = \infty$, et ce pour presque tous les ouverts lorsque $n \geq 2$!

Comme conséquence du corollaire précédent, on donne l'énoncé suivant :

Corollaire 4.32. *Soient n et k des entiers naturels. Tout ouvert de* $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ *est de la forme $\mathcal{U}(f)$.*

Dans la suite de ce paragraphe, on identifiera $\mathbf{R}^n$ avec son image dans $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ via l'application ι, pour simplifier.

Notons $\widetilde{\mathcal{R}}^k$ le faisceau structural sur le schéma affine $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$. Il induit par restriction un faisceau en anneaux locaux sur $\mathbf{R}^n$ que l'on notera encore $\widetilde{\mathcal{R}}^k$. Soit U un ouvert k-régulu de $\mathbf{R}^n$, et f une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{D}(f) = U$. D'après le Corollaire 4.31, on a

$$\widetilde{\mathcal{R}}^k(U) = \mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)_f.$$

D'après la Proposition 4.6,

$$\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)_f = \mathcal{R}^k(U).$$

Il s'ensuit l'énoncé suivant :

Corollaire 4.33. *Soient n un entier naturel et k un entier surnaturel. La restriction du faisceau structural sur* $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ *à $\mathbf{R}^n$ est le faisceau $\mathcal{R}^k$ des fonctions k-régulues sur $\mathbf{R}^n$.* □

Le cas $k = \infty$ vient du fait suivant. Soit U un ouvert de Zariski de $\mathbf{R}^n$. L'anneau des fonctions régulières $\mathcal{R}^\infty(U)$ sur U peut s'identifier avec la limite inductive des localisations $\mathcal{R}^\infty(\mathbf{R}^n)_f$, où f parcourt l'ensemble des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$ qui ne s'annule pas sur U.

Faisceaux k-régulus quasi-cohérents sur $\mathbf{R}^n$. Soient n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit M un $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$-module. Le faisceau $\tilde{M}$ sur le schéma $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ induit encore par restriction un faisceau $\tilde{M}$ sur $\mathbf{R}^n$. Là aussi, pour un ouvert k-régulu U de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\tilde{M}(U) = M_f$$

lorsque k est fini, où f est une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ avec $\mathcal{D}(f) = U$. Dans le cas $k = \infty$, le module $\tilde{M}(U)$ peut s'identifier avec la limite inductive des localisations M_f, où f parcourt l'ensemble des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$ qui ne s'annulent pas sur U.

Plus généralement, soit V un ouvert k-régulu de $\mathbf{R}^n$, et g une fonction k-régulue sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{D}(g) = V$. Soit M un $\mathcal{R}^k(V)$-module. La restriction à V du faisceau $\tilde{M}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(V)$ est un faisceau en $\mathcal{R}^k_{|V}$-modules, encore noté $\tilde{M}$, déterminé par

$$\tilde{M}(U) = M_f$$

pour tout ouvert k-régulu U de V, et pour toute fonction k-régulue f sur V avec $\mathcal{D}(f) = U$. Dans le cas $k = \infty$, le module $\tilde{M}(U)$ peut s'identifier avec la limite inductive des localisations M_f, où f parcourt l'ensemble des fonctions régulières sur V qui ne s'annulent pas sur U.

Un faisceau *k-régulu* sur $\mathbf{R}^n$ est un faisceau en $\mathcal{R}^k$-modules sur $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau k-régulu sur $\mathbf{R}^n$. On dira que le faisceau $\mathcal{F}$ est *quasi-cohérent* s'il existe un recouvrement de $\mathbf{R}^n$ par des ouverts k-régulus U_i, $i \in I$, tel que, pour tout i, il existe un $\mathcal{R}^k(U_i)$-module M_i avec $\tilde{M}_i$ isomorphe à $\mathcal{F}_{|U_i}$.

Nous obtenons alors une version k-régulue du Théorème A de Cartan, cf. [24, 2.4] et [4, Chapitre 12].

Théorème 4.34. *Soient n et k des entiers naturels. Le foncteur qui associe à un $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$-module M le faisceau $\tilde{M}$ est une équivalence de catégories sur la catégorie des faisceaux k-régulus quasi-cohérents sur $\mathbf{R}^n$. Le foncteur réciproque est le foncteur "sections globales" H^0. En particulier, le faisceau $\tilde{M}$ est engendré par ses sections globales.* □

Comme signalé dans l'introduction, ce résultat est faux pour $k = \infty$. En effet, il existe des faisceaux réguliers quasi-cohérents sur $\mathbf{R}^n$ qui ne sont pas engendrés par leurs sections globales :

Exemple 4.35 (cf.[4, Example 12.1.5]). Soit $p \in \mathbf{R}[x, y]$ le polynôme défini par

$$p = x^2(x-1)^2 + y^2.$$

Remarquons que p possède exactement deux racines réelles à savoir $c_0 = (0, 0)$ et $c_1 = (1, 0)$. Soit $U_i = \mathbf{R}^2 \setminus \{c_i\}$ pour $i = 0, 1$. Les ouverts réguliers U_0 et U_1 constituent un recouvrement de $\mathbf{R}^2$. On définit un faisceau régulier quasi-cohérent $\mathcal{F}$ par rapport à ce recouvrement. En fait, $\mathcal{F}$ va être localement libre de rang 1. Explicitement, on construit $\mathcal{F}$ à partir des faisceaux $\mathcal{R}^\infty_{|U_0}$ et $\mathcal{R}^\infty_{|U_1}$ en les recollant au-dessus de $U_0 \cap U_1$ à l'aide de la fonction de transition $g_{01} = p$ sur $U_0 \cap U_1$. Plus précisément, deux sections s_0 et s_1 de $\mathcal{R}^\infty_{|U_0}$ et $\mathcal{R}^\infty_{|U_1}$ au-dessus d'ouverts de Zariski V_0 et V_1, respectivement, se recollent si $g_{01}s_1 = s_0$ sur $V_0 \cap V_1$.

Montrons que toute section régulière globale s de $\mathcal{F}$ s'annule en c_1. La restriction s_i de s à U_i est une fonction régulière sur U_i, pour $i = 0, 1$. La condition de recollement est $g_{01}s_1 = s_0$ sur $U_0 \cap U_1$. Ecrivons $s_i = p_i/q_i$, où $p_i, q_i \in \mathbf{R}[x, y]$, avec $q_i \neq 0$ sur U_i et p_i, q_i premiers entre eux, pour $i = 0, 1$. La condition de recollement implique que $pq_0p_1 = p_0q_1$ sur $\mathbf{R}^2$. Comme p est irréductible, et comme $q_1(c_0) \neq 0$, le polynôme p divise p_0. En particulier, $p_0(c_1) = 0$ et donc aussi $s(c_1) = 0$.

Il s'ensuit que le faisceau régulier quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{R}^2$ n'est pas engendré par ses sections globales.

Pour compléter, montrons que le faisceau k-régulu quasi-cohérent $\mathcal{F}^k = \mathcal{R}^k \otimes \mathcal{F}$ induit est bien engendré par ses sections globales, pour k un entier naturel. On montre même plus : le faisceau $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{R}^k$ en exhibant une section globale de $\mathcal{F}^k$ qui ne s'annule jamais. Soit s la section régulue globale de L définie par

$$s_0 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\ell} \quad \text{et} \quad s_1 = \frac{(x^2 + y^2)^\ell}{p},$$

où ℓ est le plus petit entier $\geq (k+1)/2$. La fonction s_i est bien k-régulue sur U_i et non nulle, pour $i = 0, 1$. Le faisceau k-régulu $\mathcal{F}$ est donc isomorphe à $\mathcal{R}^k$. En particulier, il est engendré par ses sections globales.

Il suit du Théorème A de Cartan version k-régulue, que le foncteur "sections globales" est exact sur les faisceaux k-régulus quasi-cohérents sur $\mathbf{R}^n$. D'où le la version k-régulue du Théorème B de Cartan :

Théorème 4.36. *Soient n et k des entiers naturels. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau k-régulu quasi-cohérent sur $\mathbf{R}^n$. Alors,*

$$H^i(\mathbf{R}^n, \mathcal{F}) = 0$$

pour tout $i \neq 0$. □

Variétés k-régulues affines. Soit F un sous-ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^n$. La *topologie k-régulue* sur F est la topologie induite par la topologie k-régulue de $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{R}^k$ des fonctions s'annulant sur F. Le faisceau quotient $\mathcal{R}^k/\mathcal{I}$ possède un support égal à F, et est donc un faisceau sur F, le *faisceau des fonctions k-régulues* sur F, noté $\mathcal{R}^k_F$. Soit U un ouvert k-régulu de F. Une *fonction k-régulue* sur F est une section du faisceau $\mathcal{R}^k_F$. En particulier, une fonction k-régulue sur F est une section globale du faisceau $\mathcal{R}^k_F$ sur F.

Proposition 4.37. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit F un fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$, et U un ouvert k-régulu de F. Soit V un ouvert k-régulu de $\mathbf{R}^n$ tel que $V \cap F = U$. Si f est une fonction k-régulue sur U, alors il existe une fonction k-régulue g sur V dont la restriction à U est égal à f.*

Démonstration. Montrons l'énoncé d'abord au cas où k est fini. On a une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents

$$0 \to \mathcal{I}_{|V} \to \mathcal{R}^k_{|V} \to (\mathcal{R}^k_F)_{|V} \to 0$$

sur $\mathbf{R}^n$. D'après la version k-régulue du Théorème B de Cartan, on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(V) \to \mathcal{R}^k(V) \to \mathcal{R}^k_F(V) \to 0.$$

Comme $\mathcal{R}^k_F(V) = \mathcal{R}^k_F(U)$, il existe bien une fonction k-régulue g sur V dont la restriction à U est égale à f, pour toute fonction f k-régulue sur U, lorsque k est fini.

Il nous reste à montrer l'énoncé lorsque $k = \infty$. Soit f donc une fonction régulière sur U. Il existe des fonctions polynomiales p et q sur $\mathbf{R}^n$ telles que $f(x) = p(x)/q(x)$ pour tout $x \in U$. Soit s une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^n$ dont l'ensemble des zéros est égal à F. L'ensemble des zéros de la fonction polynomiale $q^2 + s^2$ est contenu dans le fermé de Zariski $G = F \setminus U$. La fonction définie sur $\mathbf{R}^n \setminus G$ par

$$g(x) = \frac{p(x)q(x)}{q^2(x) + s^2(x)}$$

est bien régulière, et son restriction à U est égale à f. □

Corollaire 4.38. *Soit n un entier naturel et k un entier surnaturel. Soit F un fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$. Si f est une fonction k-régulue sur F, alors il existe une fonction k-régulue g sur $\mathbf{R}^n$ dont la restriction à F est égale à f. Plus précisément, l'application de restriction de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{R}^k(F)$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)/\mathcal{I}(F) \cong \mathcal{R}^k(F). \quad \square$$

Remarque 4.39. D'après le corollaire précédent, les fonctions k-régulues telles que nous venons de les définir sur des sous-ensembles fermés k-régulus coïncident avec les fonctions «hereditarily rational» de Kollár [15], lorsque $k = 0$. L'exemple [15, Ex. 2] d'une fonction rationnelle continue sur une surface singulière dont la restriction à l'axe des z n'est pas rationnelle n'est pas une fonction régulue.

Soit F un sous-ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^n$. La paire $(F, \mathcal{R}^k_F)$ est un espace localement annelé en $\mathbf{R}$-algèbres. Une *variété k-régulue affine* est un espace localement annelé en $\mathbf{R}$-algèbres isomorphe à $(F, \mathcal{R}^k_F)$ pour un certain fermé k-régulu de $\mathbf{R}^n$, où n est un entier naturel. Un *morphisme* entre variétés k-régulues affines est un morphisme d'espaces localement annelés en $\mathbf{R}$-algèbres.

Corollaire 4.40. *Soient m et n des entiers naturels et k un entier surnaturel. Soient $F \subseteq \mathbf{R}^n$ et $G \subseteq \mathbf{R}^m$ des fermés k-régulus. Une application $f\colon G \to F$ est un morphisme de variétés affines k-régulues si et seulement s'il existe des applications k-régulues $f_1, \ldots, f_n$ sur $\mathbf{R}^m$ telles que*

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

pour tout $x \in G$. □

Soit k un entier surnaturel. Soit $(X, \mathcal{O})$ une variété k-régulue affine. Soit f une fonction k-régulue sur X, i.e., f est une section globale de $\mathcal{O}$. L'ensemble des zéros de f dans le spectre $\operatorname{Spec} \mathcal{O}(X)$ est noté $\mathcal{V}(f)$, i.e.,

$$\mathcal{V}(f) = \{p \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}(X) \mid f \in p\}\ .$$

Son complémentaire est noté $\mathcal{U}(f)$. Plus généralement, si E est un sous-ensemble de $\mathcal{O}(X)$, l'ensemble des zéros communs dans $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ des éléments de E est noté $\mathcal{V}(E)$, et son complémentaire est $\mathcal{U}(E)$. Plus précisément,

$$\mathcal{V}(E) = \{p \in \operatorname{Spec}\mathcal{O}(X) \mid E \subseteq p\}$$

et

$$\mathcal{U}(E) = \{p \in \operatorname{Spec}\mathcal{R}^k(F) \mid E \not\subseteq p\}.$$

Comme avant, les sous-ensembles de la forme $\mathcal{U}(E)$ constituent une topologie sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ [8, Chapitre 1]. L'espace topologique $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ est quasi-compact. Plus généralement, les ouverts de la forme $\mathcal{U}(f_1, \ldots, f_m)$ sont quasi-compacts.

Soit $x \in X$. On note $\mathfrak{M}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}(X)$ des fonctions k-régulues sur X s'annulant en x. Proposition 4.26 implique alors l'énoncé suivant :

Proposition 4.41. *Soit k un entier surnaturel. Soit X une variété k-régulue affine. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}(X)$. Il existe un et un seul $x \in X$ tel que $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}$.* □

Comme dans le cas $\mathbf{R}^n$, on a une injection

$$\iota\colon X \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}(X).$$

Le Théorème 4.27 se généralise alors ainsi :

Théorème 4.42. *Soit k un entier naturel. Soit X une variété k-régulue affine. L'application ι ci-dessus induit une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles fermés de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ et l'ensemble des sous-ensembles fermés de X. Plus précisément, pour tout sous-ensemble fermé F de X il existe un et un seul ensemble fermé G de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ tel que $F = \iota^{-1}(G)$.* □

Pour les ouverts cela donne l'énoncé suivant :

Corollaire 4.43. *Soit k un entier naturel. Soit X une variété k-régulue affine. Soit $U \subseteq X$ un ouvert. Il existe un et un seul ouvert V de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ tel que $\iota^{-1}(V) = U$.* □

On a encore :

Corollaire 4.44. *Soit k un entier naturel. Soit X une variété k-régulue affine. Tout ouvert de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ est de la forme $\mathcal{U}(f)$, pour une certaine fonction k-régulue sur X.* □

Comme auparavant, on identifiera X avec son image dans $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ via l'application ι.

Corollaire 4.45. *Soit k un entier surnaturel. Soit X une variété k-régulue affine. La restriction du faisceau structural sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ à X s'identifie avec le faisceau $\mathcal{O}$.* □

Soit M un $\mathcal{O}(X)$-module. Le faisceau $\tilde{M}$ sur le schéma $\operatorname{Spec}\mathcal{O}(X)$ induit encore par restriction un faisceau $\tilde{M}$ sur X. Pour un ouvert U de X, on a

$$\tilde{M}(U) = M_f$$

lorsque k est fini, où f est une fonction k-régulue sur X avec $\mathcal{D}(f) = U$.

Un faisceau *k-régulu* sur X est un faisceau en $\mathcal{O}$-modules sur X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau k-régulu sur X. On dira que le faisceau $\mathcal{F}$ est *quasi-cohérent* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts k-régulus U_i, $i \in I$, tels que, pour tout i, il existe un $\mathcal{O}(U_i)$-module M_i avec $\tilde{M}_i$ isomorphe à $\mathcal{F}_{|U_i}$.

La version k-régulue du Théorème A de Cartan implique alors l'énoncé suivant :

Théorème 4.46. *Soit k un entier naturel. Soit X une variété k-régulue affine. Le foncteur qui associe à un $\mathcal{O}(X)$-module M le faisceau $\tilde{M}$ est une équivalence de catégories sur la catégorie des faisceaux k-régulus quasi-cohérents sur X. Le foncteur réciproque est le foncteur "sections globales" H^0. En particulier, le faisceau $\tilde{M}$ est engendré par ses sections globales.* □

De même, on a une version k-régulue du Théorème B de Cartan pour les variétés k-régulues affines :

Théorème 4.47. *Soit k un entier naturel. Soit X une variété k-régulue affine. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau k-régulu quasi-cohérent sur X. Alors,*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$$

pour tout $i \neq 0$. □

En particulier les théorèmes 4.46 et 4.47 s'appliquent pour tout $k \in \mathbf{N}$ lorsque X est une variété réelle algébrique affine singulière. L'énoncé est alors en tout point identique au cas algébriquement clos ! Cf. [4, Chapitre 12].

5. Ensembles régulument fermés

Le but de cette section est de déterminer les sous-ensembles k-régulument fermés de $\mathbf{R}^n$ pour k et n des entiers naturels. Ceci fait, si F est un sous-ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^n$ (par exemple si F est une sous-variété réelle algébrique de $\mathbf{R}^n$), on saura caractériser les sous-ensembles k-régulument fermés de F via la topologie induite.

Ensembles algébriquement constructibles. On dit qu'un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$ est algébriquement constructible s'il appartient à l'algèbre booléenne engendré par les sous-ensembles Zariski fermés de $\mathbf{R}^n$. Ces ensembles forment une catégorie constructible, de la même manière que les ensembles symétriques par arcs. En particulier la topologie pour laquelle les fermés sont les ensembles algébriquement constructibles fermés (au sens de la topologie euclidienne) est noethérienne. On renvoie à [22, 21] pour une introduction aux catégories constructibles.

Le but de cette section est de montrer que les sous-ensembles k-régulument fermés de $\mathbf{R}^n$ coincident avec les sous-ensembles algébriquement constructibles fermés de $\mathbf{R}^n$. On commence par deux résultats précisant la place des points réguliers ainsi que la dimension d'un ensemble k-régulument fermé vis-à-vis de son adhérence de Zariski.

Si E est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on notera dans la suite $\overline{E}^{\mathrm{eucl}}$ l'adhérence de E dans $\mathbf{R}^n$ pour la topologie euclidienne.

Théorème 5.1. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On note $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et on suppose que J est principal i.e. $J = (s)$ avec $s \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ irréductible. On note V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$ et V_{reg} l'ensemble des points lisses de V. Alors*

$$\overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathrm{eucl}} \subseteq \mathcal{Z}(I) = \{x \in \mathbf{R}^n |\ I \subseteq \mathfrak{M}_x\} = \{x \in \mathbf{R}^n |\ f(x) = 0\ \forall f \in I\}.$$

Démonstration. Les fonctions de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ étant continues, il est suffisant de montrer que

$$V_{\mathrm{reg}} \subseteq \mathcal{Z}(I) = \{x \in \mathbf{R}^n |\ I \subseteq \mathfrak{M}_x\}\ .$$

Pour $x \in V_{\mathrm{reg}}$, on doit montrer que $I \subseteq \mathfrak{M}_x$. Supposons l'existence de $f \in I$ telle que $f \notin \mathfrak{M}_x$, c'est-à-dire $f(x) \neq 0$. On écrit $f = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ premiers entre eux. On obtient alors

$$p = q.f \in I \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] = J = (s)$$

et donc $p = r.s$ avec $r \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Ceci implique que p s'annule identiquement sur V, i.e. $V \subseteq \mathcal{Z}(p)$. Le Lemme 4.9 nous montre que $J = (s)$ est un idéal réel et par conséquent $\dim(V = \mathcal{Z}(s)) = n - 1$ [4, Thm. 4.5.1]. On en déduit que $\dim \mathcal{Z}(p) = n - 1$. Comme $\mathcal{Z}(q) \subseteq \mathcal{Z}(p)$ (car $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$) on a aussi $q(x) = 0$ car $f(x) \neq 0$. On sait que $\dim \mathcal{Z}(q) \leq n - 2$ par la Proposition 3.5. Comme $x \in V_{\mathrm{reg}}$, il existe un voisinage ouvert semi-algébrique de x dans $V \subseteq \mathcal{Z}(p)$ de dimension $n - 1$ [4, Prop. 3.3.10]. On note A le semi-algébrique $\mathcal{Z}(p) \setminus \mathcal{Z}(q)$. D'après ce qu'on a dit précédemment, le point x est un point adhérent à A. Le lemme de sélection des courbes [4, Thm. 2.5.5] pour le semi-algébrique A nous fournit une fonction semi-algébrique $h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^n$ telle que $h(0) = x$ et $h(]0, 1]) \subseteq A$. Par conséquent $f \circ h\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ est une fonction semi-algébrique continue telle que $(f \circ h)(]0, 1]) = 0$ et $(f \circ h)(0) \neq 0$, ce qui contredit la continuité de f. □

On évalue maintenant la dimension d'un fermé régulu vu comme un ensemble semi-algébrique, c'est-à-dire la dimension de son adhérence de Zariski.

Proposition 5.2. *Soit I un idéal radical de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ et $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ sa trace sur les polynômes. On note V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$. Alors*

$$\overline{\mathcal{Z}(I)}^{\mathrm{Zar}} = V$$

où $\overline{\mathcal{Z}(I)}^{\mathrm{Zar}}$ est l'adhérence pour la topologie de Zariski de $\mathcal{Z}(I)$. En particulier $\dim \mathcal{Z}(I) = \dim V$.

Démonstration. Posons $V' = \overline{\mathcal{Z}(I)}^{\mathrm{Zar}}$. Alors V' est inclus dans V car V est un fermé de Zariski contenant $\mathcal{Z}(I)$.

Supposons maintenant que V' soit strictement inclus dans V. Alors $\mathcal{I}(V') = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ contient strictement $\mathcal{I}(V)$, sinon $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(V')) = V' = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(V)) = V$. Par conséquent il existe $p \in \mathcal{I}(V')$ tel que $p \notin \mathcal{I}(V)$. Mais p est une fonction régulue qui s'annule identiquement sur $\mathcal{Z}(I)$ et donc, par le Nullstellensatz régulu,

$$p \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(\mathcal{Z}(I)) \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] = I \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] = J.$$

Par conséquent $p(V) = 0$, et donc p appartient à $\mathcal{I}(V)$, en contradiction avec le choix de p. □

Dans la cas du plan, on peut construire *à la main* une fonction régulue qui sépare les points isolés de l'adhérence euclidienne des points réguliers d'une courbe, démontrant au passage que l'adhérence au sens de la topologie euclidienne des points réguliers de la courbe est un ensemble régulument fermé.

Proposition 5.3. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$. Soit $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, X_2]$ et notons V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$. On note aussi V_{reg} l'ensemble des points lisses de V et $W = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathrm{eucl}}$. Alors*

$$W = \mathcal{Z}(I) = \{x \in \mathbf{R}^2 |\ I \subseteq \mathfrak{M}_x\} = \{x \in \mathbf{R}^2 |\ f(x) = 0\ \forall f \in I\}.$$

Démonstration. Si $J = (0)$ alors $I = (0)$ et le résultat est évident. Si J est maximal, le Corollaire 4.26 donne le résultat voulu.

On suppose donc que J est de hauteur 1, c'est-à-dire $J = (s)$ avec $s \in \mathbf{R}[X_1, X_2]$ irréductible. Ainsi $V = \mathcal{Z}(s)$ est une courbe algébrique affine irréductible. L'idéal J étant réel, on a $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = J$. L'inclusion

$$W \subseteq \mathcal{Z}(I)$$

provient du Théorème 5.1. Comme $J \subseteq I$, on obtient par ailleurs $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathcal{Z}(J) = V$. En résumé, on a les inclusions suivantes

$$W \subseteq \mathcal{Z}(I) \subseteq V.$$

Pour terminer la preuve, pour tout $x \in V \setminus W$ on doit trouver $f \in I$ telle que $f(W) = 0$ et vérifiant $f(x) \neq 0$.

Soit $x \in V \setminus W$. Supposons x égal à l'origine O pour simplifier les notations. Alors O est un zéro isolé de s. Il existe donc un disque fermé B centré en O tel que O soit l'unique zéro de s dans B. En utilisant l'inégalité de Lojasiewicz pour $X_1^2+X_2^2$ et $\frac{1}{s^2}$ dans B, il existe un entier strictement positif N tel que $\frac{(X_1^2+X_2^2)^N}{s^2}$ s'étende de façon continue par 0 en O dans B. On pose $f = \frac{s^2}{s^2+(X_1^2+X_2^2)^{2N}}$. La fonction f est clairement continue en dehors de O et peut être étendue de manière continue par 1 en O car

$$\lim_{(X_1,X_2)\to O} \frac{(X_1^2 + X_2^2)^{2N}}{s^2} = 0.$$

Par conséquent $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$ et la restriction de f à V_{reg} est identiquement nulle puisque la restriction de f à $V \setminus \{O\}$ est identiquement nulle. Comme f est continue on a aussi $f(W) = 0$. Il reste donc à montrer que f appartient à I. Déjà

$$(s^2 + ((X_1^2 + X_2^2)^N)^2).f \in I,$$

et puisque I est un idéal premier, au moins un des deux termes du produit appartient à I. Supposons qu'il s'agisse du premier, c'est-à-dire

$$(s^2 + ((X_1^2 + X_2^2)^N)^2) \in I \cap \mathbf{R}[X_1, X_2] = J.$$

Alors $(X_1^2 + X_2^2)^N$ appartient à J car J est un idéal réel. L'idéal J étant de plus premier, on en déduit que $X_1^2 + X_2^2 \in J$. Mais alors $X_1 \in J$ et $X_2 \in J$ en invoquant une nouvelle fois la réalité de J. On en déduit que J est maximal, en contradiction avec notre hypothèse. Par conséquent f appartient à I, ce qui termine la preuve de la proposition. □

En particulier, on constate que les courbes 0-régulument fermées du plan sont des ensembles Zariski constructibles fermés. On montre ci-dessous que c'est en fait le cas pour tout ensemble k-régulu.

Théorème 5.4. *Soit k un entier naturel. Les sous-ensembles k-régulument fermés de $\mathbf{R}^n$ coincident avec les sous-ensembles algébriquement constructibles fermés de $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. On sait déjà que tout ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^n$ est algébriquement constructible d'après le Corollaire 3.21. On montre la réciproque par récurrence sur la dimension.

En dimension nulle, le résultat est clair. Soit C un sous-ensemble algébriquement constructible fermé de $\mathbf{R}^n$. On peut supposer que C est irréductible, autrement dit que son adhérence de Zariski V est une sous variété réelle algébrique irréductible de $\mathbf{R}^n$, quitte à raisonner composante par composante. On note Z la réunion des composantes algébriquement constructibles de V de dimension strictement plus petite que V. Ainsi $V = C \cup Z$. Il existe une fonction k-régulue g définie sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{Z}(g) = Z$ par hypothèse de récurrence. Par ailleurs, soit f une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\mathcal{Z}(f) = V$. D'après le Lemme 4.2, il existe un entier naturel N tel que la fonction $\frac{g^N}{f^2}$, k-régulue sur $\mathcal{D}(f)$, se prolonge par 0 sur $\mathcal{D}(f) \cup Z$ en une fonction k-régulue. Posons

$$h = \frac{f^2}{f^2 + g^{2N}}.$$

Alors la fonction h est k-régulue sur $\mathcal{D}(g)$, et s'annule sur $C \cap \mathcal{D}(g)$. On la prolonge par 1 sur Z. Elle est alors k-régulue en dehors de $Z \cap C$ par choix de N. L'ensemble $Z \cap C$ est algébriquement constructible de dimension strictement plus petite que C, il existe donc une fonction k-régulue l telle que $Z \cap C = \mathcal{Z}(l)$ par hypothèse de récurrence. D'après le Lemme 4.1, il existe alors un entier N' tel que la fonction $l^{N'}h$ soit k-régulue sur $\mathbf{R}^n$. Elle satisfait $\mathcal{Z}(l^{N'}h) = C$, ce qui fait de C un ensemble k-régulument fermé. □

Corollaire 5.5. *Pour k et k' des entiers naturels, les topologies k-régulue et k'-régulue sont équivalentes.*

Maintenant qu'on a identifié les fermés k-régulus avec les ensembles algébriquement constructibles fermés, on peut établir une réciproque au Corollaire 3.17.

Proposition 5.6. *Soit F un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$. Alors F est un sous-ensemble algébriquement constructible de $\mathbf{R}^n$ si et seulement s'il existe une composition d'éclatements à centres lisses*

$$\phi \colon \tilde{\mathbf{R}}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

telle que l'image réciproque $\phi^{-1}(F)$ est Zariski fermée dans $\tilde{\mathbf{R}}^n$.

Démonstration. On sait qu'un sous-ensemble constructible de $\mathbf{R}^n$ peut devenir Zariski fermé après éclatements en combinant le Théorème 5.4 et le Corollaire 3.17. Réciproquement, remarquons qu'il suffit de traiter le cas d'un seul éclatement, et raisonnons par récurrence sur la dimension de F.

Soit F un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$ tel que $\phi^{-1}(F)$ soit un sous-ensemble Zariski fermé de $\tilde{\mathbf{R}}^n$, avec $\phi\colon \tilde{\mathbf{R}}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ l'éclatement de $\mathbf{R}^n$ le long du centre C, avec diviseur exceptionnel E. On peut supposer que $V = \phi^{-1}(F)$ est irréductible, quitte à raisonner composante par composante. Notons déjà que F est fermé pour la topologie euclidienne de $\mathbf{R}^n$ comme image d'un sous-ensemble (Zariski-)fermé par une application fermée. De plus ϕ est un isomorphisme entre $V \setminus E$ et $F \setminus C$, donc $F \setminus C$ est algébriquement constructible. Par ailleurs $F \cap C$ est un ensemble semi-algébrique fermé qui a pour image réciproque par ϕ l'ensemble Zariski fermé $V \cap E$, donc $F \cap C$ est constructible par hypothèse de récurrence, à condition que $F \cap C$ soit de dimension strictement plus petite que F. Si ce n'est pas le cas, alors V est inclus dans E par irréductibilité de V et donc F est inclus dans le centre C. En particulier, F est un sous-ensemble Zariski fermé de C. □

Décomposition en ensembles symétriques par arcs. On sait qu'un sous-ensemble k-régulument fermé de $\mathbf{R}^n$ est un sous-ensemble algébriquement constructible fermé d'après le Théorème 5.4. En particulier, un ensemble k-régulument fermé irréductible est égal à la composante algébriquement constructible de dimension maximale de son adhérence de Zariski. Le but de cette section est de décrire cette composante algébriquement constructible de dimension maximale en terme d'ensembles symétriques par arcs.

Proposition 5.7. *Soit V une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbf{R}^n$ de dimension d. Soit S un sous-ensemble semi-algébrique de V de dimension d et soit $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ s'annulant identiquement sur S. Alors f s'annule identiquement sur la réunion W des composantes $\mathcal{AR}$-irréductibles de dimension maximale de V.*

Pour autant, il se peut que f s'annule sur strictement plus que W comme on le verra dans l'exemple 5.12.

Démonstration de la Proposition 5.7. La fonction f reste régulue en restriction à V (cf. Remarque 4.39). Il existe donc une composition d'éclatements à centres lisses $\phi : \tilde{V} \to V$, avec $\tilde{V}$ une variété réelle algébrique irréductible non singulière, telle que $f \circ \phi$ soit régulière sur $\tilde{V}$ d'après le Théorème 3.11.

Comme S est de dimension d, la fonction régulière $f \circ \phi$ s'annule sur un sous-ensemble Zariski dense de $\tilde{V}$, donc sur $\tilde{V}$ qui est irréductible. Alors f s'annule sur les points réguliers de V, donc aussi sur W car $Z(f)$ est un ensemble symétrique par arcs. □

Soit E un ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$. D'après [21, Cor. 2.15], l'intersection des ensembles symétriques par arcs contenant E est un ensemble symétrique par arcs de même dimension que E, et noté $\overline{E}^{\mathcal{AR}}$. De même, on note $\overline{E}^{C}$ l'adhérence de E pour la topologie algébriquement constructible (ou la topologie régulue).

On généralise maintenant le Théorème 5.1 au cas non principal en utilisant la théorie des ensembles symétriques par arcs.

Proposition 5.8. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On note $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$. On note aussi V_{reg} l'ensemble des points*

lisses de V et W la réunion des composantes $\mathcal{AR}$-irréductibles de V de dimension d, où $d = \dim V$. Alors

$$\overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}} = W \subseteq \mathcal{Z}(I).$$

Démonstration. Notons déjà que l'adhérence symétrique par arcs $\overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ est égal à W d'après [21, Thm. 2.21, Lem. 2.22]. On sait que $\mathcal{Z}(I)$ est un sous-ensemble algébriquement constructible fermé de V d'après le Théorème 5.4, de dimension maximale d'après la Proposition 5.2. Comme V est irréductible, $\mathcal{Z}(I)$ est donc égal à l'unique composante algébriquement constructible irréductible de dimension maximale de V, et en particulier $\mathcal{Z}(I)$ contient W. □

Corollaire 5.9. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On note $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. On note V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$ et V_{reg} l'ensemble des points lisses de V. Alors*

$$\mathcal{Z}(I) = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{C}.$$

On poursuit l'étude des relations entre les fonctions régulues sur une variété réelle algébrique et celles sur la réunion de ses composantes $\mathcal{AR}$-irréductibles de dimension maximale.

Proposition 5.10. *Soit V une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbf{R}^n$. On note $W = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ la réunion des composantes $\mathcal{AR}$-irréductibles de dimension maximale de V. Alors*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V_{\mathrm{reg}})$$

est un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V_{\mathrm{reg}})$ alors $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)$ car $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble symétrique par arcs. On a donc $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V_{\mathrm{reg}})$.

Soient f et g deux fonctions régulues telles que le produit $f.g$ s'annule identiquement sur V_{reg}. Les fonctions f et g restent régulues en restriction à V d'après la Remarque 4.39, il existe donc une composition d'éclatements à centres lisses $\phi : \tilde{V} \to V$ telle que $f \circ \phi$ et $g \circ \phi$ soient régulières sur $\tilde{V}$, avec $\tilde{V}$ une variété réelle algébrique irréductible non singulière, d'après le Théorème 3.11. Le produit de fonctions régulières $(f \circ \phi).(g \circ \phi)$ s'annule identiquement sur la variété irréductible $\tilde{V}$. On peut donc conclure que, par exemple, $f \circ \phi$ s'annule identiquement sur $\tilde{V}$ et donc f s'annule identiquement sur V_{reg} i.e. $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V_{\mathrm{reg}})$, ce qui termine la preuve. □

Proposition 5.11. *Soit V une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbf{R}^n$. On note $W = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ la réunion des composantes $\mathcal{AR}$-irréductibles de dimension maximale de V. Si $V = W$ (en particulier si V est lisse), alors V est un ensemble régulument fermé et régulument irréductible.*

Démonstration. Comme les fonctions régulières sont régulues, V est un fermé régulu. De plus $V = W$ donc l'idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$ est un idéal premier par la Proposition 5.10.

Supposons que V soit la réunion $V_1 \cup V_2$ de deux fermés régulus non-vides. D'après le Théorème 4.21, il existe des fonctions régulues f_1, f_2 telles que $V_1 = \mathcal{Z}(f_1)$ et $V_2 = \mathcal{Z}(f_2)$. Alors le produit $f_1.f_2$ appartient à l'idéal premier $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$ et on en déduit que $V \subseteq V_1$ ou $V \subseteq V_2$. □

Soit $V \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété algébrique irréductible. On note $W = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ la réunion des composantes $\mathcal{AR}$-irréductibles de dimension maximale de V. La même preuve que celle de la proposition précédente montre que W est un ensemble régulument irréductible. Mais ce n'est pas en général un ensemble régulument fermé.

Exemple 5.12. On considère la sous-variété algébrique irréductible V de $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ de dimension 2 donnée par les équations

$$\begin{cases} (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + y^2 = 0 \ ; \\ u^2 = xv^2 \ . \end{cases}$$

Cette variété est un ensemble régulument irréductible.

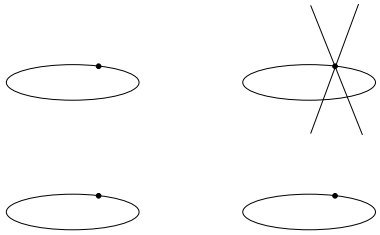

FIGURE 2. Un fermé régulument irréductible.

Sur la figure, on a représenté la fibre de $(x, y, u, v) \mapsto (x, y)$ au dessus de chaque point des deux composantes connexes de la courbe hyperelliptique d'équation $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + y^2 = 0$. Au dessus de l'un des ovales la fibre est un point, alors qu'au dessus de l'autre ovale, la fibre est formée de deux droites sécantes.

La variété V possède deux composantes connexes W et Z, avec W l'unique composante symétrique par arcs irréductible de dimension 2 de V. Le lieu singulier de V est la courbe hyperelliptique C d'équations $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + y^2 = 0$ et $u = v = 0$, possédant deux composantes connexes Z et Y avec $Y \subset W$. On suppose que W est un fermé régulu. Il existe donc $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^4)$ telle que $\mathcal{Z}(f) = W$ et par conséquent f s'annule identiquement sur Y mais pas sur Z. Une telle fonction ne peut exister par la Proposition 5.7 en considérant sa restriction à $C = Z \cup Y$.

Les résultats précédents permettent de déterminer la dimension de Krull de l'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ pour $k \in \mathbf{N}$.

Proposition 5.13. *Soit $k \in \mathbf{N}$. L'espace topologique $\mathbf{R}^n$ est de dimension n pour la topologie régulue. L'anneau $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est par conséquent de dimension de Krull n.*

Démonstration. Soit

$$W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq W_m \subseteq \mathbf{R}^n$$

une suite d'inclusions de fermés régulus irréductibles avec $m > n$. Pour $i = 0, \ldots, m$, on note $I_i = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W_i)$, $J_i = I_i \cap \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ et $V_i = \overline{W_i}^{Zar}$. On a dim W_i = dim V_i et de plus V_i est irréductible pour la topologie de Zariski

car $V_i = \mathcal{Z}(J_i)$ d'après la Proposition 5.2 (l'idéal J_i est bien un idéal premier). On obtient donc une suite d'inclusions de fermés de Zariski irréductibles

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_m \subseteq \mathbf{R}^n.$$

Puisque $\mathbf{R}^n$ est de dimension n pour la topologie de Zariski, il existe $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ tel que $V_i = V_{i+1}$. L'ensemble $S = W_{i+1} \setminus W_i$ est un ouvert régulu de W_{i+1}, il est donc dense dans W_{i+1} pour la topologie régulue. On en déduit que W_{i+1} est le plus petit fermé régulu contenant S. Un fermé de Zariski étant un fermé régulu, un fermé de Zariski contenant S contient aussi W_{i+1} donc V_{i+1}. Par conséquent $\overline{S}^{Zar} = V_{i+1}$ et $\dim S = \dim V_{i+1}$. D'après le Théorème 5.8, $(V_i)_{reg} = (V_{i+1})_{reg} \subseteq W_i$ et par conséquent S est contenu dans le lieu singulier de V_{i+1} qui est un fermé de Zariski de dimension strictement inférieure à celle de V_{i+1}, ce qui fournit une contradiction. La dimension régulue de $\mathbf{R}^n$ est donc inférieure à n. Il est clairement possible de construire une suite d'inclusions

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = \mathbf{R}^n$$

de fermés de Zariski irréductibles lisses. D'après la Proposition 5.11, les V_i sont des fermés régulus irréductibles ce qui prouve que la dimension régulue de $\mathbf{R}^n$ est bien n. Soit $k \in \mathbf{N}$. On rappelle que les topologies k-régulue et 0-régulues coincident. En utilisant le Nullstellensatz k-régulu, on en déduit que la dimension de Krull de $\mathcal{R}^k(\mathbf{R}^n)$ est n. □

Exemples 5.14. On considère trois exemples (les deux premiers sont classiques).

- Le parapluie de Whitney :

  Considérons la sous-variété V d'équation $zx^2 = y^2$ dans $\mathbf{R}^3$. Le parapluie V est un ensemble régulument fermé et vérifie la relation $V = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}}$. Par la Proposition 5.11, c'est un ensemble régulument fermé et irréductible.

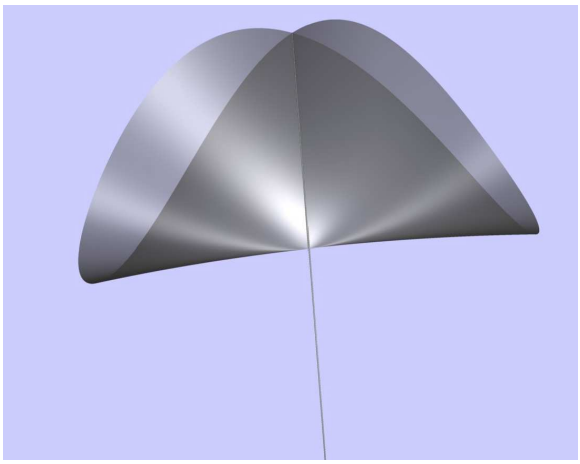

FIGURE 3. Parapluie de Whitney.

- Le parapluie de Cartan :

  Considérons la sous-variété V d'équation $z(x^2 + y^2) = x^3$ de $\mathbf{R}^3$. La décomposition de V en ensembles $\mathcal{AR}$-irréductibles est $W \cup Z$ où

$W = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ est la toile du parapluie et Z est le manche. L'ensemble W est régulument fermé car $W = \mathcal{Z}(f)$ avec $f = z - \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Par la Proposition 5.10, W est régulument irréductible. L'ensemble Z est un ensemble régulument fermé car $Z = \mathcal{Z}(x^2+y^2)$. L'ensemble V est donc un ensemble régulument fermé et non-régulument irréductible.

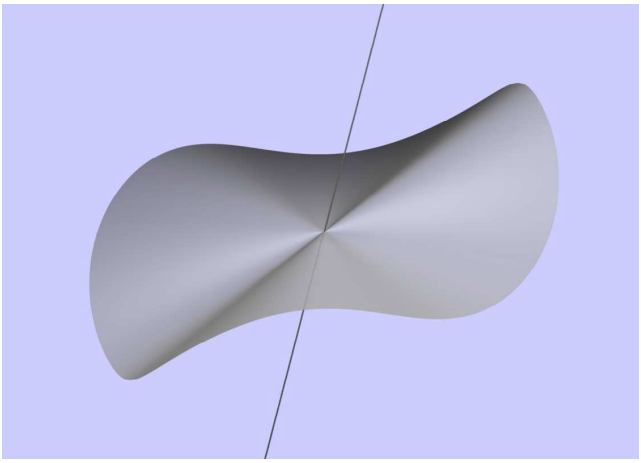

FIGURE 4. Parapluie de Cartan.

- Un parapluie cornu :
  Considérons la sous-variété V d'équation $s(x,y,z) = x^2+y^2((y-z^2)^2+yz^3) = x^2+y^4+y^2z^4+y^3z^3-2y^3z^2 = 0$ de $\mathbf{R}^3$. La décomposition de V en ensembles $\mathcal{AR}$-irréductibles est $W \cup Z$ où $W = \overline{V_{\mathrm{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ est la corne du parapluie et Z est le manche. L'ensemble W est régulument fermé car $W = \mathcal{Z}(f)$ avec $f = z^2\frac{s(x,y,z)}{x^2+y^4+y^2z^4}$. Par la Proposition 5.10, W est régulument irréductible. Le manche Z est un ensemble régulument fermé car $Z = \mathcal{Z}(x^2+y^2)$. Comme pour le parapluie de Cartan, l'ensemble V est donc un ensemble régulument fermé et non-régulument irréductible.

On énonce maintenant un théorème qui résume ce qui précède.

Théorème 5.15. *Les fermés irréductibles régulus de* $\mathbf{R}^n$ *sont les ensembles du type*

$$\overline{V_{\mathrm{reg}}}^{C}$$

où V_{reg} *désigne l'ensemble des points lisses d'une variété réelle algébrique irréductible* $V \subset \mathbf{R}^n$.

Le résultat suivant permet de construire de façon algorithmique le plus petit fermé algébriquement constructible contenant les points réguliers d'une variété réelle algébrique affine et donc de caractériser les fermés irréductibles régulus de $\mathbf{R}^n$.

Proposition 5.16. *Soit* $V \subset \mathbf{R}^n$ *une sous-variété réelle algébrique irréductible. Soit* W *la réunion des composantes symétriques par arcs de dimension*

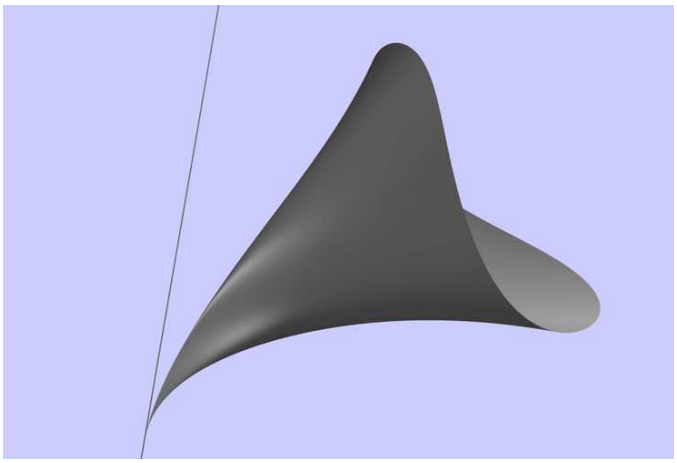

FIGURE 5. Un parapluie cornu.

maximale de V. Soit Z une composante symétrique par arc irréductible de dimension strictement plus petite que V. Si

$$\dim \overline{Z}^{Zar} \cap W = \dim Z,$$

alors Z est dans $\overline{W}^C$.

Remarque 5.17. La réciproque de la Proposition 5.16 est fausse, voir l'Exemple 5.18.

Démonstration de la Proposition 5.16. Notons que l'adhérence de Zariski de Z forme une variété réelle algébrique irréductible de même dimension que Z. Soit f une fonction régulue définie sur $\mathbf{R}^n$ et s'annulant sur W. Par hypothèse, la fonction f s'annule sur un ensemble semi-algébrique $S = \overline{Z}^{Zar} \cap W$ de même dimension que $\overline{Z}^{Zar}$, donc sur Z aussi d'après la Proposition 5.7. Par conséquent Z appartient à l'adhérence pour la topologie algébriquement constructible de W. □

On décrit maintenant de manière algorithmique l'unique composante algébriquement constructible irréductible de dimension maximale d'une variété réelle algébrique affine en termes d'ensembles symétriques par arcs irréductibles. Soit $V \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété réelle algébrique affine irréductible de dimension d. On note

$$V = \cup_{i \in I_d} W_i \cup_{i=0}^{d-1} \cup_{j \in I_i} Z_j^i$$

la décomposition de V en sous-ensembles symétriques par arcs irréductibles, avec $\dim Z_j^i = i$ pour $j \in I_i$. On note W la réunion des composantes symétriques par arcs de dimension maximale de V.

Soit $j \in I_{d-1}$.

(1) Si Z_j^{d-1} satisfait la condition de la Proposition 5.16, alors $Z_j^{d-1} \subset \overline{W}^C$.

(2) Sinon, Z_j^{d-1} n'est pas tout entier contenu dans $\overline{W}^C$. Néanmoins, un sous-ensemble symétrique par arcs de Z_j^{d-1} peut être contenu dans

$\overline{W}^C$. L'intersection $Z_j^{d-1} \cap W$ est un ensemble symétrique par arcs de dimension au plus $d-2$, et on rajoute les composantes symétriques par arcs irréductibles de son adhérence de Zariski $\overline{Z_j^{d-1} \cap W}^{Zar}$ à celles de dimension au plus $d-2$ de V. Procédant de même pour tout $j \in I_{d-1}$, on obtient ainsi une réunion d'ensembles symétriques par arcs irréductibles de dimension au plus $d-2$

$$\cup_{i=0}^{d-2} \cup_{j \in I_i^2} Z_j^i,$$

où I_i^2 est un ensemble d'indices fini contenant I_i.

Notons W^2 la réunion de W et des composantes Z_j^{d-1}, pour $j \in I_{d-1}$, satisfaisant la condition de la Proposition 5.16. On renouvelle maintenant les opérations (1) et (2) avec W^2 à la place de W et en considérant les indices j appartenant à I_{d-2}^2. Ainsi, on construit pas à pas, en au plus $d-1$ étapes, l'adhérence pour la topologie algébriquement constructible de W.

Exemple 5.18. On modifie légèrement l'exemple 5.12 de la façon suivante. On considère la sous-variété algébrique irréductible V' de $\mathbf{R}^6$ de dimension 3 donnée par les équations

$$\begin{cases} (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) + y^2 = 0 \ ; \\ w^2 + u^2 = xv^2 \ ; \\ t^2 = (x-3)w^2 \ . \end{cases}$$

Notons C la courbe donnée par les équations de V' en faisant $t = u = v = w = 0$. La décomposition en sous-ensembles symétriques par arcs irréductibles de V' est de la forme $V' = Z_1' \cup Z_2' \cup W$ avec Z_1' l'ovale de C contenant le point de coordonnées $(-2, 0, 0, 0, 0, 0)$, Z_2' la surface contenant l'ovale de C contenant le point de coordonnées $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, et W' la partie de dimension trois contenant le dernier ovale de C.

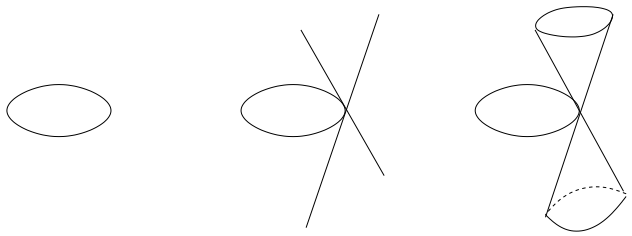

FIGURE 6. Une chaine d'ensembles symétriques par arcs.

Soit $T \in \mathbf{R}[x, y, t, u, v, w]$ l'équation d'un tore contenant en son intérieur l'ovale $C \cap W'$ (c'est-à-dire l'ovale de droite sur le dessin). On suppose de plus que T est négatif à l'intérieur du tore et positif à l'extérieur (cf. Example 3.2.8 dans [4]). On définit alors V dans $\mathbf{R}^7$, en ajoutant une variable s, par les équations de V' auxquelles on rajoute l'équation $s^2 = T$.

La variété V ainsi obtenue forme un revêtement double de V' à l'extérieur du tore, et efface la partie à l'intérieur du tore. Notons W la partie symétrique par arcs de dimension maximale de V. Soit Z_1 une composante symétrique par

arcs de dimension un de V s'envoyant sur l'ovale Z_1' (de gauche sur le dessin) de la courbe C par le revêtement. L'adhérence de Zariski de Z_1, formée de quatre ovales vivant au dessus des ovales Z_1' et $Z_2' \cap C$ de la courbe C, ne rencontre pas W par construction de V. Ainsi Z_1 ne satisfait pas l'hypothèse de la Proposition 5.16. Pour autant, Z_1 est bien dans l'adhérence pour la topologie algébriquement constructible de W. En effet, les deux composantes symétriques par arcs de dimension deux de V satisfont les hypothèses de la Proposition 5.16 puisque $\overline{Z_2'}^{Zar} = V' \cap \{t = 0\}$, et donc font partie de $\overline{W}^C$. Notons Z_2 leur réunion. Alors l'adhérence de Zariski de Z_1 rencontre Z_2 le long d'une courbe, donc d'après la Proposition 5.16, Z_1 est dans l'adhérence pour la topologie algébriquement constructible de Z_2, donc dans celle de W.

Références

[1] E. Bierstone, P. D. Milman, *Arc-analytic functions*, Invent. Math. **101**, 411–424, 1990.

[2] I. Biswas, J. Huisman, *Rational real algebraic models of topological surfaces*, Doc. Math. **12**, 549–567, 2007.

[3] J. Blanc, F. Mangolte, *Geometrically rational real conic bundles and very transitive actions*, Compositio Mathematica **147**, 161–187, 2011.

[4] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3 Folge, 12. Berlin Heidelberg New York, Springer 1987.

[5] M. Carral, M. Coste, *Normal spectral spaces and their dimensions*, Journal of Pure and Applied Algebra **30**, 227–235, 1983.

[6] M. Coste, M. M. Diop, *Real algebraic* 1*-cocycles are Nash coboundaries*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 6, no. 2, 249–254, 1992.

[7] C. N. Delzell, *A continuous, constructive solution to Hilbert's 17th problem*, Invent. Math. **76**, 365–384, 1984.

[8] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *EGA1, Le langage des schémas*, Publ. Math. IHES **4**, 1960.

[9] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 133, Springer-Verlag

[10] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. 79, 109-326, 1964

[11] J. Huisman, F. Mangolte, *The group of automorphisms of a real rational surface is n-transitive*, Bull. London Math. Soc. **41**, 563–568, 2009.

[12] S. Holzer, O. Labs, SURFEX 0.90. University of Mainz and University of Saarbrücken (2008) `www.surfex.AlgebraicSurface.net`

[13] J. H. Hubbard, it On the cohomology of Nash sheaves, Topology **11**, 265–270, 1972.

[14] J. Kollár, *Lectures on resolution of singularities*, Princeton University Press 2007

[15] J. Kollár, *Continuous rational functions*, `arXiv:1101.3737v1 [math.AG]`.

[16] J. Kollár, F. Mangolte, *Cremona transformations and diffeomorphisms of surfaces*, Adv. in Math. **222**, 44–61, 2009.

[17] W. Kucharz, *Rational maps in real algebraic geometry*, Adv. Geom. **9** (4), 517–539, 2009.

[18] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities*, Invent. Math. **82**, 257–262, 1985.

[19] K. Kurdyka, *Ensemble semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. **282**, 445-462, 1988.

[20] K. Kurdyka, *Injective endomorphisms of real algebraic sets are surjective*, Math. Ann. **313**, 69–82, 1999.

[21] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings*, Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry, 33–67, Panor. Synthèses **24**, Soc. Math. France, Paris, 2007.

[22] A. Parusiński, *Topology of injective endomorphisms of real algebraic sets*, Math. Ann. **328**, no. 1-2, 353–372, 2004.

[23] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, International student editions 1976

[24] J-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61**, 197–278, 1955.

[25] M. Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, Houston, 1984.

[26] G. Stengle, *A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry*, Math. Ann. **207**, 87–97, 1974.

[27] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra Volume II*, Graduate texts in Mathematics, Volume 29, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

Goulwen Fichou, IRMAR (UMR 6625), Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France
E-mail address: goulwen.fichou@univ-rennes1.fr

Johannes Huisman, Département de Mathématiques, Université de Bretagne Occidentale, 6, Av. Victor Le Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest Cedex 3, France
E-mail address: Johannes.Huisman@univ-brest.fr

Frédéric Mangolte, Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2, Bd. Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France
E-mail address: Frederic.Mangolte@univ-angers.fr

Jean-Philippe Monnier, Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2, Bd. Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France
E-mail address: monnier@tonton.univ-angers.fr