



Fonctions Régulues

Goulwen Fichou, Johannes Huisman, Frédéric Mangolte, Jean-Philippe Monnier

► To cite this version:

Goulwen Fichou, Johannes Huisman, Frédéric Mangolte, Jean-Philippe Monnier. Fonctions Régulues. 2011. hal-00652828v1

HAL Id: hal-00652828

<https://hal.science/hal-00652828v1>

Preprint submitted on 16 Dec 2011 (v1), last revised 28 Mar 2014 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FONCTIONS RÉGULIÈRES

GOULWEN FICHO, JOHANNES HUISMAN, FRÉDÉRIC MANGOLTE,
AND JEAN-PHILIPPE MONNIER

RÉSUMÉ. Nous étudions l'anneau des fonctions rationnelles qui se prolongent par continuité sur $\mathbf{R}^n$. Nous établissons plusieurs propriétés de cet anneau dont un Nullstellensatz fort. Nous caractérisons géométriquement les idéaux premiers de cet anneau à travers leurs lieux d'annulation.

Mathematics subject classification (2000) : 14P99

1. INTRODUCTION

Une fonction rationnelle f sur $\mathbf{R}^n$ est un quotient de deux polynômes $p, q \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, $q \neq 0$, tels que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ pour chaque $x \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $q(x) \neq 0$. Une fonction *régulière* sur $\mathbf{R}^n$ est une fonction rationnelle sur $\mathbf{R}^n$ qui se prolonge par continuité en tout point de $\mathbf{R}^n$. Par exemple, $f(X, Y) = \frac{X^3}{X^2 + Y^2}$ est une fonction régulière sur $\mathbf{R}^2$ dont le graphe est la toile du célèbre parapluie de Cartan (voir 3.28).

On note $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ ou $\mathcal{R}^{0,n}$ ou encore $\mathcal{R}^0$ l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$. L'objet de cet article est d'étudier cet anneau $\mathcal{R}^0$. Dans un premier temps, nous nous intéressons aux propriétés algébriques de $\mathcal{R}^0$ et nous montrons en particulier qu'il s'agit d'un anneau non-noethérien mais pour lequel un Nullstellensatz fort est satisfait (2.28). Nous montrons aussi que la topologie dont les fermés sont engendrés par les zéros de fonctions régulières est noethérienne (2.16) et strictement plus fine que la topologie de Zariski. Ces propriétés font de $\mathcal{R}^0$ un anneau qui se comporte mieux que l'anneau des fonctions régulières $\mathcal{R}^\infty$ du point de vue de la géométrie des variétés algébriques réelles.

Nous poursuivons notre étude par une tentative de caractérisation géométrique des fermés réguliers irréductibles de $\mathbf{R}^n$, reliée à une question posée par Michel Coste. On répond affirmativement à cette Question 3.10 dans le cas des courbes et négativement à partir de la dimension 2. Nous obtenons néanmoins une caractérisation complète pour les courbes et les surfaces (3.23 et 3.25) et des restrictions fortes pour les dimensions supérieures (3.21). Nous proposons en particulier une relecture *régulière* des fameux parapluies de Cartan et Whitney et nous introduisons un nouveau parapluie *cornu* (3.28).

Nous concluons par un chapitre posant les bases de l'étude des variétés régulières abstraites. Nous revenons sur un fibré en droites régulier pathologique sur $\mathbf{R}^2$ bien connu qui n'est pas engendré par ses sections régulières globales [1, Exemple 12.1.5].

A notre connaissance, les fonctions régulières ont été utilisées de façon systématiques pour la première fois par Kucharz dans [7] (où elles sont appelées *continuous rational*). Dans son article, Kucharz montre que ce sont les bonnes fonctions pour approcher le plus algébriquement possible les fonctions différentiables.

Dans [6], Kollár étudie la restriction de ces fonctions à une sous-variété algébrique réelle, ainsi que l'extension de ces fonctions d'une sous-variété à la variété ambiante, cf. 2.20.

Objets naturels, les fonctions régulières apparaissent aussi dans des résultats antérieurs. En 1978 Kreisel remarque [3, p. 369] que le Positivstellensatz de Stengle [11] permet de représenter tout polynôme $f \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ positif sur $\mathbf{R}^n$ comme une somme de carrés de fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$.

2. FONCTIONS RÉGULIÈRES SUR $\mathbf{R}^n$

Soit n un entier naturel. Dans ce paragraphe nous allons étudier les fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$, et les comparer avec d'autres classes de fonctions sur $\mathbf{R}^n$. On notera $\mathcal{R}^{0,n}$ l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$.

Notation 2.1. Soit $f \in \mathcal{R}^{0,n}$. On notera $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble des zéros de f dans $\mathbf{R}^n$, i.e.,

$$\mathcal{Z}(f) = \{p \in \mathbf{R}^n \mid f(p) = 0\}.$$

Soit E un sous-ensemble de $\mathcal{R}^{0,n}$. On notera $\mathcal{Z}(E)$ l'ensemble des zéros communs des fonctions dans E , i.e.,

$$\mathcal{Z}(E) = \bigcap_{f \in E} \mathcal{Z}(f).$$

Proposition 2.2. Soit n un entier naturel. Soit $f \in \mathcal{R}^{0,n}$. Soient $r, s \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$, $s \neq 0$, tels que $f(p) = \frac{r(p)}{s(p)}$ pour chaque $p \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $s(p) \neq 0$. On suppose r, s premiers entre eux. Alors $\mathcal{Z}(s) \subseteq \mathcal{Z}(r)$ et $\text{codim}_{\mathbf{R}^n} \mathcal{Z}(s) \geq 2$.

Démonstration. Montrons d'abord l'inclusion $\mathcal{Z}(s) \subseteq \mathcal{Z}(r)$. Soit $p \in \mathcal{Z}(s)$. Comme s n'est pas identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros $\mathcal{Z}(s)$ est nul part dense dans $\mathbf{R}^n$. Il existe donc une suite (p_k) dans $\mathbf{R}^n$ convergeant vers p telle que $s(p_k) \neq 0$, pour tout k . On a alors

$$r(p) = \lim r(p_m) = \lim s(p_m)f(p_m) = s(p)f(p) = 0,$$

i.e., $p \in \mathcal{Z}(r)$.

Montrons ensuite que $\text{codim} \mathcal{Z}(s) \geq 2$. Par l'absurde, supposons que $\text{codim} \mathcal{Z}(s) \leq 1$. Comme s n'est pas identiquement nulle, on a $\text{codim} \mathcal{Z}(s) = 1$. Il existe donc un diviseur irréductible s' de s dans $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ avec $\text{codim} \mathcal{Z}(s') = 1$. D'après ce qui précède, $\mathcal{Z}(s') \subseteq \mathcal{Z}(r)$. Comme $\text{codim} \mathcal{Z}(s') = 1$, on en déduit que s' divise r [1, Th. 4.5.1, p.85]. Cela contredit l'hypothèse que r et s sont premiers entre eux. $\square$

Corollaire 2.3. Une fonction régulière sur $\mathbf{R}^1$ est régulière.

Corollaire 2.4. Une fonction régulière sur $\mathbf{R}^2$ est régulière en dehors d'un ensemble fini.

Étudions plus en détails les fonction régulières sur $\mathbf{R}^n$. Pour ce faire il convient de rappeler certaines notions de la géométrie algébrique réelle.

Soit $X \subseteq \mathbf{R}^n$ une variété algébrique réelle lisse irréductible. Soit $Y \subseteq X$ une sous-variété algébrique réelle lisse. Soient $f_0, \dots, f_k$ des fonctions régulières sur X engendrant l'idéal de Y dans X . Notons f l'application régulière de $X \setminus Y$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{R})$ de coordonnées homogènes $f_0, \dots, f_k$. L'éclaté $E_Y(X)$ de X le long de Y est la clôture de Zariski du graphe de f dans le produit $X \times \mathbf{P}^k(\mathbf{R})$. L'éclaté $E_Y(X)$ est encore une variété algébrique réelle affine. L'application de projection

$$\pi: E_Y(X) \longrightarrow X$$

est une application régulière, et birégulière au-dessus de $X \setminus Y$. L'image réciproque de Y via π peut s'identifier avec le fibré normal projectif de Y dans X .

Soit $X \subseteq \mathbf{R}^n$ une variété algébrique réelle lisse irréductible. Soit f une fonction régulière sur X . On dit que f est *localement monomiale* sur X si pour tout $p \in X$ il existe un système régulier de paramètres locaux $x_1, \dots, x_n$ en p tel que

$$f = ux_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

dans l'anneau local $\mathcal{R}_p^0$, où u est inversible et $i_1, \dots, i_n \in \mathbf{N}$, avec $i_1 \leq \dots \leq i_n$.

Soit f une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$. Une composition $\phi: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ d'éclatements de $\mathbf{R}^n$ est *monomialisante* pour f si $f \circ \phi$ est localement monomiale sur X . Dans ce cas, pour tout $p \in X$, les entiers naturels $i_1, \dots, i_n$ comme ci-dessus, sont uniquement déterminés. On les appellera les *multiplicités* de f en p .

En utilisant le Théorème de la résolution des singularités de Hironaka, on démontre facilement qu'il existe une composition d'éclatements monomialisante pour toute fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^n$:

Théorème 2.5. *Soit n un entier naturel. Soit f une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^n$. Alors, il existe une composition d'éclatements à centres lisses*

$$\phi: X \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

telle que la fonction régulière

$$f \circ \phi: X \longrightarrow \mathbf{R}$$

est localement monomiale, et ϕ est birégulière au-dessus de l'ouvert de $\mathbf{R}^n$ où $\text{grad}(f) \neq 0$.

Une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ est *régulière après éclatements* (*blow-regular*, en anglais) s'il existe une composition d'éclatements à centres lisses $\phi: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ telle que $f \circ \phi$ est régulière. Cette notion est analogue à celles des fonctions de Nash après éclatements ou encore des fonctions analytiques réelles après éclatements.

Une fonction sur $\mathbf{R}^n$ qui est régulière après éclatements et qui est constante sur les diviseurs exceptionnels est bien-sûr régulière. L'énoncé suivant dit, inversement, qu'une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$ est régulière après éclatements.

Théorème 2.6. *Soit n un entier naturel. Soit f une fonction régulue sur $\mathbf{R}^n$. Alors, il existe une composition d'éclatements à centres lisses*

$$\phi: X \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

telle que la composition

$$f \circ \phi: X \longrightarrow \mathbf{R}$$

est régulière.

Démonstration. Ecrivons $f = r/s$ avec r et s des polynômes réels en $x_1, \dots, x_n$. Appliquons le Théorème 2.5 à la fonction polynomiale rs sur $\mathbf{R}^n$. Il existe donc une composition d'éclatements à centres lisses $\phi: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ telle que $rs \circ \phi$ est localement monomiale. Il s'ensuit que $r \circ \phi$ et $s \circ \phi$ sont localement monomiales de manière simultanée. Soit $p \in X$, et $x_1, \dots, x_n$ un système régulier de paramètres locaux en p tel que

$$r \circ \phi = ux_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \quad \text{et} \quad s \circ \phi = vx_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n},$$

avec u et v inversibles en p . Soit $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ un fermé strict tel que ϕ est birégulière au-dessus de $\mathbf{R}^n \setminus Y$. Soit (p_k) une suite dans $\phi^{-1}(\mathbf{R}^n \setminus Y)$ convergeant vers p . Comme $f \circ \phi$ est continue, on a

$$f(\phi(p)) = \lim f(\phi(p_k)) = \lim \frac{r(\phi(p_k))}{s(\phi(p_k))} = \lim \frac{u(p_k)}{v(p_k)} x_1(p_k)^{i_1-j_1} \cdots x_n(p_k)^{i_n-j_n}.$$

Comme cette limite existe, on a $i_\ell \geq j_\ell$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Du coup, f est régulière en p . $\square$

Remarque 2.7. *Soit V une variété algébrique réelle irréductible et lisse. On peut définir la notion de fonctions régulues sur V de la même manière que sur $\mathbf{R}^n$ car tout ouvert de Zariski de V est dense dans V pour la topologie euclidienne (voir [6]). Le Théorème 2.6 reste alors valable pour une fonction régulue sur V .*

On rappelle qu'une fonction est appelée semi-algébrique si son graphe est un ensemble semi-algébrique.

Proposition 2.8 ([7]). *Soit $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$, alors f est une fonction semi-algébrique.*

Démonstration. Clairement, le graphe de la restriction de $f = \frac{p}{q}$ à $U = \{x \in \mathbf{R}^n \mid q(x) \neq 0\}$ est un sous-ensemble semi-algébrique de $U \times \mathbf{R}$. Le graphe de f est l'adhérence de l'ensemble précédent pour la topologie euclidienne dans $\mathbf{R}^{n+1}$. C'est aussi un ensemble semi-algébrique [1, Prop. 2.2.2]. $\square$

Une fonction semi-algébrique $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est appelée analytique par arcs si $f \circ \gamma$ est analytique pour tout arc analytique $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ (où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$) [8]. Dans [2, Thm. 1.1], Bierstone et Milman montrent que $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est analytique par arcs si et seulement si f devient analytique (et même Nash) après une suite finie d'éclatements à centres algébriques lisses bien choisis.

Corollaire 2.9. *Soit n un entier naturel. Une fonction régulue sur $\mathbf{R}^n$ est analytique par arcs.*

Remarque 2.10. *Il existe bien évidemment des fonctions analytiques par arcs qui ne sont pas régulières. Par exemple $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ est analytique par arcs [2] et n'est clairement pas régulière sur $\mathbf{R}^2$.*

Rappelons qu'un sous-ensemble localement fermé de $\mathbf{R}^n$, au sens de Zariski, est un sous-ensemble de la forme $U \cap F$, où $F \subseteq \mathbf{R}^n$ est un fermé de Zariski et $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un ouvert de Zariski.

Théorème 2.11. *Soit n un entier naturel. Soit f une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$. Alors, il existe une stratification finie de $\mathbf{R}^n$*

$$\mathbf{R}^n = \coprod_{i=1}^m S_i$$

en sous-ensembles localement fermés de $\mathbf{R}^n$ au sens de Zariski telle que la restriction $f|_{S_i}$ est régulière, pour tout i .

Démonstration. On peut, bien-sûr, supposer que f est non identiquement nulle sur $\mathbf{R}^n$.

Notons $\mathcal{A}^n$ l'espace affine $\text{Spec } \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ sur $\mathbf{R}$, de sorte que $\mathcal{A}^n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^n$ et $\mathcal{A}^n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^n$. La conjugaison complexe γ agit sur $\mathcal{A}^n(\mathbf{C})$. On identifie $\mathcal{A}^n(\mathbf{R})$ avec l'ensemble des points fixes de γ sur $\mathcal{A}^n(\mathbf{C})$.

Ecrivons $f = r/s$ avec r et s des polynômes réels en $x_1, \dots, x_n$. Soit Y le sous-schéma réduit de $\mathcal{A}^n$ défini par le polynôme rs . Comme f est non nulle, Y est un sous-schéma de $\mathcal{A}^n$ de codimension 1.

Appliquons le Théorème de Hironaka au sous-schéma Y de $\mathcal{A}^n$ en éclatant $\mathcal{A}^n$, de manière successive, mais seulement en des centres dont l'ensemble des points réels est dense. Plus précisément, il existe une suite finie de morphismes

$$X_\ell \longrightarrow X_{\ell-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 = \mathcal{A}^n$$

où chaque morphisme $\pi_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ est un éclatement de centre lisse $C_{i-1} \subseteq X_{i-1}$ de codimension ≥ 2 ayant les propriétés suivantes. Pour tout i , l'ensemble des points réels $C_i(\mathbf{R})$ est dense dans C_i , et le transformé strict Y_ℓ de Y dans X_ℓ n'a que des points réels lisses. Notons $E_i \subseteq X_i$ le diviseur exceptionnel de π_i . On peut supposer, de plus, que $Y_\ell(\mathbf{R})$ intersecte $E_\ell(\mathbf{R})$ transversalement en des points réels lisses de E_ℓ . On note encore ϕ la composition $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_\ell$. Par construction, $f \circ \phi$ est une fonction rationnelle sur X_ℓ dont le domaine de définition contient tous les points réels de X_ℓ .

Soit p un point du schéma $\mathcal{A}^n$ dont le corps résiduel $\kappa(p)$ est réel. La fibre $\phi^{-1}(p)$ est une réunion finie connexe d'espaces projectifs sur $\kappa(p)$. Soit P l'un de ces espaces projectifs. Comme le domaine de définition de $f \circ \phi$ contient tous les points réels de X_ℓ , la fonction rationnelle $f \circ \phi$ se restreint à une fonction rationnelle sur P . Il existe un point $\kappa(p)$ -rationnel q de P en lequel $f \circ \phi$ est définie. Soit F le sous-schéma de X_0 dont le point générique est p , et G le sous-schéma de X_ℓ dont le point générique est q . La restriction de ϕ à G est un morphisme birationnel dans F . Il existe donc des ouverts non vides U de F et V de G tels que $\phi|_V$ soit un isomorphisme de V sur U . Quitte à remplacer U et V par des ouverts plus petits, on peut supposer que $f \circ \phi$ est définie sur V . Or

ϕ induit, sur les points réels, un isomorphisme birégulier de $V(\mathbf{R})$ sur $U(\mathbf{R})$. Il s'ensuit que la restriction de f à $U(\mathbf{R})$ est régulière.

La construction précédente montre que pour tout idéal premier réel p de $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$, il existe un sous-ensemble localement fermé irréductible R_p dense de $\mathcal{Z}(p)$ tel que $f|_{R_p}$ est régulière. En particulier, $\mathbf{R}^n$ est la réunion des sous-ensembles R_p , où p parcourt les idéaux premiers réels de $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$. Comme $\mathbf{R}^n$ est noethérien pour la topologie constructible au sens de Zariski, il existe des idéaux premiers réels distincts $p_1, \dots, p_k$ tels que

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^m R_{p_i}.$$

Pour simplifier la notation, on notera R_i au lieu de R_{p_i} .

On construit ensuite une stratification selon le procédé habituel : en agrandissant la famille $\{R_i\}$ si nécessaire, on peut supposer que toutes les composantes irréductibles des intersections finies des sous-ensembles de la forme R_i appartiennent encore à la famille $\{R_i\}$. Introduisons un ordre partiel sur la collection $\{R_i\}$. On pose $R_i \leq R_j$ si R_i est contenu dans la clôture de Zariski $\overline{R_j}$ de $\mathbf{R}_j$. Soit

$$S_i = R_i \setminus \bigcup_{R_j < R_i} \overline{R_j}.$$

Le sous-ensemble S_i de $\mathbf{R}^n$ est localement fermé, et contenu dans R_i . La restriction de la fonction f à S_i est donc bien régulière.

Montrons que $S_i \cap S_j = \emptyset$ lorsque $i \neq j$. C'est clair lorsque $R_j < R_i$ ou l'inverse. Supposons donc que R_i et R_j ne sont pas comparables. Ecrire l'intersection $R_i \cap R_j$ comme réunion des R_k où k parcourt un ensemble d'indice I . Comme on a $R_k \subseteq \overline{R_i}$ et $R_k \subseteq \overline{R_j}$, pour tout $k \in I$, on a bien $S_i \cap S_j = \emptyset$, lorsque $i \neq j$.

Il nous reste à montrer que $\mathbf{R}^n = \bigcup S_i$. Soit $p \in \mathbf{R}^n$ et soit R_i le plus petit élément de la collection $\{R_i\}$ tel que $p \in R_i$. On a bien $p \in S_i$. $\square$

Corollaire 2.12. *Soit n un entier naturel. L'ensemble des zéros d'une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$ est localement fermé au sens de Zariski.*

Soit $f \in \mathcal{R}^0$. Rappelons encore que l'ensemble des zéros de f dans $\mathbf{R}^n$ est noté $\mathcal{Z}(f)$, et que son complémentaire est $\mathcal{D}(f)$. Plus généralement, si E est un sous-ensemble de $\mathcal{R}^0$, l'ensemble des zéros communs dans $\mathbf{R}^n$ des éléments de E est noté $\mathcal{Z}(E)$, et son complémentaire est $\mathcal{D}(E)$.

On a les propriétés habituelles :

Proposition 2.13. *Soit n un entier naturel.*

- (1) $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$ et $\mathcal{Z}(\emptyset) = \mathbf{R}^n$.
- (2) Soit E_α , $\alpha \in A$, une collection de sous-ensembles de $\mathcal{R}^0$. Alors

$$\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(E_\alpha) = \mathcal{Z}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right).$$

- (3) Soient $E_1, \dots, E_m$ des sous-ensembles de $\mathcal{R}^0$. Alors

$$\mathcal{Z}(E_1) \cup \dots \cup \mathcal{Z}(E_m) = \mathcal{Z}(E_1 \cdot \dots \cdot E_m).$$

- (4) Soit E un sous-ensemble de $\mathcal{R}^0$. Alors $\mathcal{Z}(E) = \mathcal{Z}(I)$, où I est l'idéal de $\mathcal{R}^0$ engendré par E .

Il s'ensuit que les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ de la forme $\mathcal{Z}(E)$ constituent une collection de sous-ensembles fermés pour une topologie sur $\mathbf{R}^n$, la *topologie régulue*.

Exemple 2.14. La topologie régulue est plus fine que la topologie de Zariski sur $\mathbf{R}^n$. En effet, soit C la courbe cubique d'équation $y^2 = x^2(x-1)$ dans $\mathbf{R}^2$. Comme le polynôme définissant la courbe C est irréductible dans $\mathbf{R}[x, y]$, le sous-ensemble C de $\mathbf{R}^2$ est un fermé de Zariski irréductible. En particulier, la clôture de Zariski de $C \setminus \{O\}$ est égale à C .

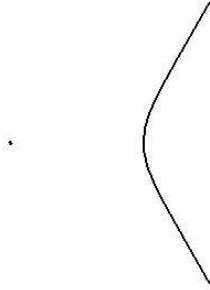


FIGURE 1. Courbe cubique avec un point isolé.

Soit f la fonction rationnelle sur $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2(x-1)}{y^2 + x^2} = 1 - \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

Il est clair que f s'étend par continuité en une fonction régulue sur $\mathbf{R}^2$. On a $f(O) = 1$ et $\mathcal{Z}(f) = C \setminus \{O\}$. (Remarquons que l'origine O est un point isolé de la courbe C .) Par conséquent, $C \setminus \{O\}$ est régulument fermé dans $\mathbf{R}^2$, mais non fermé au sens de Zariski.

On rappelle qu'un ensemble E semi-algébrique dans $\mathbf{R}^n$ est dit symétrique par arcs si et seulement si pour tout arc analytique $\gamma:]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}^n$, si $\gamma(]-1, 0]) \subseteq E$ alors $\gamma(]-1, 1]) \subseteq E$, voir [8]. Suivant les notations de [8], on appelle $\mathcal{AR}$ la topologie dont les ensembles $\mathcal{AR}$ -fermés sont les ensembles symétriques par arcs. On va voir dans la suite que la topologie $\mathcal{AR}$ est plus fine que la topologie régulue. Soit X un espace topologique. On rappelle aussi que X est noethérien si et seulement si toute suite décroissante $F_i \supseteq F_{i+1}$, $i \in \mathbf{N}$, de fermés est stationnaire.

Proposition 2.15. Soit F un fermé régulu de $\mathbf{R}^n$ alors F est un ensemble symétrique par arcs.

Démonstration. Si $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction régulue alors f est analytique par arcs par le Corollaire 2.9. Son lieu d'annulation $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble symétrique par arcs dans $\mathbf{R}^n$ [8, Prop. 5.1.]. Par conséquent, tout sous-ensemble fermé dans $\mathbf{R}^n$ pour la topologie régulue est un ensemble symétrique par arcs dans $\mathbf{R}^n$. $\square$

Les fermés réguliers étant symétriques par arcs, sachant aussi que Kurdyka a montré que la topologie $\mathcal{AR}$ est noethérienne [8, Th. 1.4.], on en déduit que la topologie régulière est aussi noethérienne.

Corollaire 2.16. *Soit n un entier naturel. L'espace affine $\mathbf{R}^n$, muni de sa topologie régulière, est noethérien. En particulier, tout ensemble fermé régulier dans $\mathbf{R}^n$ est une réunion finie de fermés réguliers irréductibles.*

Remarque 2.17. *L'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$ pour $n \geq 2$ n'est par contre pas noethérien. En effet, la suite non stationnaire d'idéaux emboîtés produite par Kurdyka [8, Ex. 6.11] pour montrer que l'anneau des fonctions arc-analytiques de $\mathbf{R}^n$ n'est pas noethérien, permet aussi de montrer que l'anneau $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ n'est pas noethérien car les fonctions arc-analytiques qui engendrent les idéaux considérés sont des fonctions régulières.*

Corollaire 2.18. *Soit n un entier naturel. Soit I un idéal de $\mathcal{R}^{0,n}$. Alors il existe un idéal de type fini $I' \subseteq I$ tel que $\mathcal{Z}(I') = \mathcal{Z}(I)$.*

Démonstration. Soit I_α , $\alpha \in A$, la famille de tous les idéaux de type fini de $\mathcal{R}^0$ contenus dans I . On a

$$\mathcal{Z}(I) = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{Z}(I_\alpha).$$

Comme $\mathbf{R}^n$ est noethérien, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tels que

$$\mathcal{Z}(I) = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{Z}(I_{\alpha_i}).$$

Posons $I' = I_{\alpha_1} + \dots + I_{\alpha_m}$. L'idéal I' est bien de type fini dans $\mathcal{R}^0$, est contenu dans I et $\mathcal{Z}(I') = \mathcal{Z}(I)$. $\square$

Soit U un ouvert régulier de $\mathbf{R}^n$. Une fonction $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ est régulière sur U si f est rationnelle sur $\mathbf{R}^n$ et si f se prolonge par continuité en tout point de U . On note $\mathcal{R}^0(U)$ l'anneau des fonctions régulières sur U . Soit $F \subseteq \mathbf{R}^n$ un fermé régulier. Une fonction $f: F \rightarrow \mathbf{R}$ est *régulière* si pour tout $p \in F$ il existe un ouvert régulier de $\mathbf{R}^n$ contenant p et une fonction régulière $g: U \rightarrow \mathbf{R}$ qui est un prolongement de $f|_{U \cap F}$. Par définition, si F est un fermé régulier de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$, alors la restriction $f|_F$ est régulière.

Proposition 2.19. *Soit n un entier naturel. Soit F un fermé régulier de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction régulière sur F . Alors, il existe une fonction régulière g sur $\mathbf{R}^n$ telle que $g|_F = f$.*

Démonstration. Comme [1, Proposition 3.2.3]. $\square$

Remarque 2.20. *D'après [6, Theorem 9], les fonctions régulières telles que nous venons de les définir sont "hereditarily rational". L'exemple [6, Ex. 2] d'une fonction rationnelle continue sur une surface singulière dont la restriction à l'axe des z n'est pas rationnelle n'est pas une fonction régulière.*

Le Théorème 2.11 a encore l'énoncé suivant comme conséquence :

Corollaire 2.21. *Soit n un entier naturel. Soit F un fermé régulier de $\mathbf{R}^n$, et $f: F \rightarrow \mathbf{R}^m$ une application régulière. Soit $G \subseteq \mathbf{R}^m$ un fermé régulier et $g: G \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ une application régulière. Si $f(F) \subseteq G$, alors la composition $g \circ f: F \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ est définie et régulière.*

Notation 2.22. *Si V est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on note $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$ (resp. $\mathcal{I}(V)$) l'ensemble $\{f \in \mathcal{R}^0 \mid f(x) = 0 \ \forall x \in V\}$ (resp. $\{p \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] \mid p(x) = 0 \ \forall x \in V\}$) qui est clairement un idéal. On a $\mathcal{I}(V) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$ de manière évidente.*

On donne une représentation des fonctions régulières avec des sommes de carrés.

Proposition 2.23. *Soit $f \in \mathcal{R}^0$. Soient $p, q \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ avec $q \neq 0$ tels que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ si $q(x) \neq 0$. Il existe alors $m \in \mathbf{N}^*$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ et $r \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ tels que*

$$f = \frac{rp}{p^{2m} + \sum_{i=1}^k p_i^2}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{Z}(q) \subseteq \mathcal{Z}(p)$, on a $p \in \mathcal{I}(\mathcal{Z}(q))$. Par conséquent p appartient au radical réel de (q) [1, Th. 4.4.6, p.84]. Il existe donc $m \in \mathbf{N}^*$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ tels que $p^{2m} + \sum_{i=1}^k p_i^2 \in (q)$ [1, Th. 4.4.6, p.84]. On en déduit qu'il existe $r \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $rq = p^{2m} + \sum_{i=1}^k p_i^2$ et on obtient

$$f = \frac{rp}{p^{2m} + \sum_{i=1}^k p_i^2}$$

□

Remarque 2.24. *A partir d'une identité du type $f = \frac{rp}{p^{2m} + \sum_{i=1}^k p_i^2}$ comme dans la proposition précédente, on peut seulement conclure que les zéros du dénominateur sont contenus dans les zéros du numérateur. On a clairement $\mathcal{Z}(p^{2m} + \sum_{i=1}^k p_i^2) \subseteq \mathcal{Z}(p) \subseteq \mathcal{Z}(rp)$. Mais on ne peut pas en conclure que f est régulière. Par exemple, $\frac{XY}{X^2+Y^2}$ est du type précédent mais n'est pas régulière sur $\mathbf{R}^2$.*

Dans la suite on utilisera à plusieurs reprises le lemme suivant, qui est équivalent à l'inégalité de Lojasiewicz. D'après la proposition précédente, il s'appliquera notamment aux fonctions régulières.

Lemme 2.25. [1, Prop. 2.6.4] *Soit A un ensemble semi-algébrique localement fermé. Soit $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction semi-algébrique continue. Soit $g: \{x \in A \mid f(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction semi-algébrique continue. Il existe alors un entier $N > 0$ tel que la fonction $f^N g$ étendue par zéro quand $f(x) = 0$ est continue sur A .*

Proposition 2.26 (Nullstellensatz version faible pour idéaux de t. f.). *Soit n un entier naturel. Soit I un idéal de type fini de l'anneau $\mathcal{R}^0$ des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$. Si $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ dans $\mathbf{R}^n$, alors $I = \mathcal{R}^0$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$. Soient $f_1, \dots, f_m$ des générateurs de I . On a

$$\emptyset = \mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(f_1, \dots, f_m) = \mathcal{Z}(f_1^2 + \dots + f_m^2).$$

Cela veut dire que la fonction régulue $f_1^2 + \dots + f_m^2$ n'a pas de zéros dans $\mathbf{R}^n$. Elle est donc inversible dans $\mathcal{R}^0$. Comme elle appartient aussi à l'idéal I , on a $I = \mathcal{R}^0$. $\square$

Théorème 2.27 (Nullstellensatz pour idéaux de type fini). *Soit n un entier naturel. Soit I un idéal de type fini de l'anneau $\mathcal{R}^0$ des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$. Alors,*

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \text{Rad}(I).$$

On adapte l'argument de Rabinowitsch [5, p. 59] :

Démonstration. Il est clair que $I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$. Comme ce dernier est radical, on a bien $\text{Rad}(I) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$.

Pour montrer l'inclusion inverse, soit f une fonction régulue sur $\mathbf{R}^n$ s'annulant sur $\mathcal{Z}(I)$. On peut supposer que f n'est pas identiquement nulle. On identifie le corps des fractions $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_n)$ avec son image dans $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n+1})$. Le sous-anneau $\mathcal{R}^{0,n}$ est alors bien un sous-anneau de $\mathcal{R}^{0,n+1}$. Cela est une conséquence du fait que la composition d'une fonction régulue sur $\mathbf{R}^n$ avec la projection de $\mathbf{R}^{n+1}$ sur les premiers n facteurs est régulue sur $\mathbf{R}^{n+1}$, grâce au Corollaire 2.21.

Soit I' l'idéal dans $\mathcal{R}^{0,n+1}$ engendré par I et $x_{n+1}f - 1$. Il est de type fini car I est de type fini. Si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est un zéro commun de I et $x_{n+1}f - 1$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est un zéro de I dans $\mathbf{R}^n$, et un non zéro de f , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. On a donc $\mathcal{Z}(I') = \emptyset$. D'après le Nullstellensatz faible, $I' = \mathcal{R}^{0,n+1}$. Il existe donc $g_1, \dots, g_{m+1}$ dans $\mathcal{R}^{0,n+1}$ et $f_1, \dots, f_m$ dans I telles que

$$g_1 f_1 + \dots + g_m f_m + g_{m+1}(x_{n+1}f - 1) = 1$$

dans $\mathcal{R}^{0,n+1}$.

Soit $U = \mathcal{D}(f)$, et soit $h: U \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ l'application régulue définie par $h(x) = (x, 1/f(x))$. Comme la clôture de Zariski de l'image de h est au plus de codimension 1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$, on a un morphisme d'anneaux

$$\phi: \mathcal{R}^{0,n+1} \longrightarrow \mathcal{R}^{0,n}(U)$$

induit par la composition avec h , grâce au Corollaire 2.21. On a alors

$$\phi(g_1)f_1 + \dots + \phi(g_m)f_m = 1$$

sur U . D'après Lemme 2.25, il existe un entier naturel N tel que $f^N \phi(g_i)$ soit régulue sur $\mathbf{R}^n$ tout entier, pour tout i . Du coup,

$$f^N = f^N \phi(g_1)f_1 + \dots + f^N \phi(g_m)f_m \in I,$$

et donc $f \in \text{Rad}(I)$. $\square$

Corollaire 2.28 (Nullstellensatz). *Soit n un entier naturel.*

- (1) *Soit F un fermé régulier de $\mathbf{R}^n$. Alors $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(F)) = F$.*
- (2) *Soit I un idéal de $\mathcal{R}^{0,n}$. Alors, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(I)) = \text{Rad}(I)$.*

En particulier, on a une correspondance entre les fermés réguliers de $\mathbf{R}^n$ et les idéaux radicaux de $\mathcal{R}^{0,n}$.

L'anneau $\mathcal{R}^0$ des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$ est un anneau intéressant ; on va montrer que c'est un anneau de dimension de Krull n dont tous les idéaux sont radicalement principaux. On dit qu'un idéal I d'un anneau est *radicalement principal* s'il existe $f \in I$ tel que

$$\text{Rad}(I) = \text{Rad}(f).$$

On dit que A est *radicalement principal* si tous ses idéaux le sont.

Corollaire 2.29. *Soit n un entier naturel. L'anneau $\mathcal{R}^{0,n}$ des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$ est radicalement principal.*

Démonstration. Soit I un idéal dans $\mathcal{R}^0$. D'après ce qui précède, il existe un idéal de type fini I' contenu dans I tel que $\text{Rad}(I') = \text{Rad}(I)$. Soient $f_1, \dots, f_m$ des générateurs de I' . On a encore

$$\text{Rad}(I') = \text{Rad}(f_1^2 + \dots + f_m^2)$$

ce qui montre que I est radicalement principal. $\square$

Corollaire 2.30. *Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{R}^0$. Il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x$$

où $\mathfrak{M}_x = \{f \in \mathcal{R}^0 \mid f(x) = 0\}$.

Démonstration. Par le corollaire 2.28, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$. On en déduit que $\mathcal{Z}(\mathfrak{M})$ est non-vidé et par conséquent il existe $x \in \mathcal{Z}(\mathfrak{M})$. Par maximalité, on obtient $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x$. $\square$

3. LE SPECTRE DE ZARISKI DE L'ANNEAU DES FONCTIONS RÉGULIÈRES

3.1. Idéaux radicaux de fonctions régulières.

Proposition 3.1. *Soit $I \subseteq \mathcal{R}^0$ un idéal radical. Alors I est un idéal réel.*

On rappelle qu'un idéal I d'un anneau commutatif A est appelé réel s'il satisfait la propriété suivante : Si $f_1^2 + \dots + f_k^2 \in I$ alors $f_i \in I$ pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$.

Démonstration. On suppose $f_1^2 + \dots + f_k^2 \in I$ avec $f_i \in \mathcal{R}^0 \setminus \{0\}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$. Pour $i = 1, \dots, k$ on a $\frac{f_i^3}{\sum_{i=1}^k f_i^2} \in \mathcal{R}^0$. En effet c'est la composée des applications régulières $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))$ et de $\mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto \frac{x_i^3}{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, la composée est bien régulière d'après le Corollaire 2.21. Donc $f_i^3 = \frac{f_i^3}{\sum_{i=1}^k f_i^2} (\sum_{i=1}^k f_i^2) \in I$. L'idéal I étant radical on obtient $f_i \in I$. $\square$

Remarque 3.2. *La proposition précédente montre que l'idéal engendré par $X^2 + Y^2$ dans $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$ n'est pas radical. En effet s'il était radical alors $X \in \mathcal{R}^0(X^2 + Y^2)$ et donc $X = f \cdot (X^2 + Y^2)$ avec $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$. Mais $f = \frac{X}{X^2 + Y^2}$ n'est clairement pas continue en l'origine.*

Soit I un idéal radical dans $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On sait que I est un idéal réel d'après la Proposition 3.1. On montre que cette propriété est conservée en intersectant avec les polynômes.

Lemme 3.3. *Soit I un idéal radical dans $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. Alors $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un idéal réel et on a $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = J$.*

Démonstration. L'idéal J est réel car I est réel (Proposition 3.1). On obtient $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = J$ par le Nullstellensatz réel [1, Thm. 4.1.4] $\square$

Soit J un idéal de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. On regarde le comportement de J quand on l'étend dans les fonctions régulières.

On fixe d'abord quelques notations.

Notations et Définitions 3.4. *Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Dans la suite, on note*

$$\mathfrak{m}_x = \{p \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] \mid p(x) = 0\}$$

$$\mathfrak{M}_x = \{f \in \mathcal{R}^0 \mid f(x) = 0\}$$

les idéaux maximaux de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathcal{R}^0$ respectivement, des polynômes et des fonctions régulières qui s'annulent en x .

On donne l'exemple suivant. Soit $(X, Y) = \mathfrak{m}_O = \{p \in \mathbf{R}[X, Y] \mid p(O) = 0\}$ l'idéal maximal de $\mathbf{R}[X, Y]$ où O est l'origine de $\mathbf{R}^2$. On montre que $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2) \cdot \mathfrak{m}_O$ n'est pas maximal dans $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$.

On a clairement $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2) \cdot \mathfrak{m}_O \subseteq \mathfrak{M}_O = \{f \in \mathcal{R}^0 \mid f(O) = 0\}$. On a aussi $f = \frac{XY^2}{X^2+Y^2} \in \mathfrak{M}_O$ on va montrer que $f \notin \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2) \cdot \mathfrak{m}_O$. Supposons $f = X.g + Y.h$ avec $g, h \in \mathcal{R}^0$. Alors on peut écrire $f = g(O).X + h(O).Y + (g - g(O)).X + (h - h(O)).Y = a.X + b.Y + o(\sqrt{X^2 + Y^2})$. Mais alors f serait différentiable à l'origine et on obtient une contradiction. Cet exemple montre que l'on peut s'attendre à quelques surprises.

Théorème 3.5. *Soit J un idéal réel de $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. Alors*

$$\text{Rad}(\mathcal{R}^0.J) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(\mathcal{Z}(J)) = \{f \in \mathcal{R}^0 \mid f(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{Z}(J)\}.$$

Démonstration. On note $I = \mathcal{R}^0.J$. Soit $f \in \text{Rad}(I)$, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^k \in I$. Comme $J = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(J))$ [1, Thm. 4.1.4] dans $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ car J est réel, on en déduit que f^k s'annule identiquement sur $\mathcal{Z}(J)$. Par conséquent f s'annule aussi identiquement sur $\mathcal{Z}(J)$ i.e. $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(\mathcal{Z}(J))$. On a montré une inclusion.

Pour l'inclusion réciproque, on suppose $J = (p_1, \dots, p_l)$ avec $p_i \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. Alors on a $V = \mathcal{Z}(J) = \mathcal{Z}(s)$ avec $s = p_1^2 + \dots + p_l^2$. Soit $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$. Soit $g = \frac{1}{s}$, c'est une fonction semi-algébrique continue sur $\mathbf{R}^n \setminus V$. Par le Lemme 2.25 pour f , g et $A = \mathbf{R}^n$, il existe un entier positif N tel que $h = f^N.g$ étendue par 0 sur $\mathcal{Z}(f)$ est continue sur $\mathbf{R}^n$. On a clairement $h \in \mathcal{R}^0$ et même $h \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$. Mais alors

$$f^N = h.s \in \mathcal{R}^0.J = I$$

car $s \in J$. $\square$

Dans le cas où J est maximal, on obtient

Corollaire 3.6. *On a*

$$\text{Rad}(\mathcal{R}^0.\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{M}_x.$$

Corollaire 3.7. *Soit $f \in \mathfrak{M}_x$. Il existe un entier strictement positif N tel que f^N soit différentiable en x avec $D(f)_x = 0$.*

Démonstration. On suppose $x = O$. En regardant la preuve du théorème précédent, il existe un entier strictement positif N tel que $f^N = (X_1^2 + \dots + X_n^2).h$ avec $h \in \mathcal{R}^0$. On a donc $f^N = X_1.h_1 + \dots + X_n.h_n$ avec $h_i \in S$ vérifiant $h_i(O) = 0$. On peut donc écrire $f^N = o(\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2})$ ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 3.8. *Soit $f \in \mathcal{R}^0$. On a*

$$\mathcal{R}^0(\mathcal{D}(f)) \simeq \mathcal{R}_f^0.$$

Démonstration. On note $U = \mathcal{D}(f)$. Soit $\varphi: \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{R}^0(U)$ le morphisme de restriction. Soit $g \in \mathcal{R}^0(U)$. En utilisant le Lemme 2.25 pour f, g et $A = \mathbf{R}^n$, il existe un entier strictement positif N tel que $f^N.g$ se prolonge par continuité en la fonction nulle sur $\mathcal{Z}(f) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Par conséquent φ induit un morphisme surjectif $\mathcal{R}_f^0 \rightarrow \mathcal{R}^0(U)$. On montre que φ est injectif et on en déduit que $\mathcal{R}_f^0 \rightarrow \mathcal{R}^0(U)$ est aussi injectif. Soit $h \in \mathcal{R}^0$ identiquement nulle sur U . On écrit $f = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ premiers entre eux. Comme $\mathcal{Z}(f) \subseteq \mathcal{Z}(p)$, h est identiquement nulle $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{Z}(p)$. On en déduit que $h = 0$ car h est continue et $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{Z}(p)$ est dense dans $\mathbf{R}^n$ pour la topologie euclidienne. $\square$

3.2. Les fermés réguliers irréductibles de $\mathbf{R}^n$. On se propose maintenant d'étudier le comportement de l'intersection d'un idéal de fonctions régulières avec l'anneau des polynômes. On aimerait caractériser géométriquement les fermés réguliers irréductibles de $\mathbf{R}^n$. Si E est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on notera dans la suite $\overline{E}^{\text{eucl}}$ l'adhérence de E dans $\mathbf{R}^n$ pour la topologie euclidienne.

Théorème 3.9. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On note $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ et on suppose que J est principal i.e. $J = (s)$ avec $s \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ irréductible. On note V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$, V_{reg} l'ensemble des points lisses de V . Alors*

$$\overline{V_{\text{reg}}}^{\text{eucl}} \subseteq \mathcal{Z}(I) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid I \subseteq \mathfrak{M}_x\} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}.$$

Démonstration. Les fonctions de $\mathcal{R}^0$ étant continues, il est suffisant de montrer que

$$V_{\text{reg}} \subseteq \mathcal{Z}(I) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid I \subseteq \mathfrak{M}_x\}.$$

Soit $x \in V_{\text{reg}}$, on doit montrer que $I \subseteq \mathfrak{M}_x$. Supposons l'existence de $f \in I$ telle que $f \notin \mathfrak{M}_x$ i.e. $f(x) \neq 0$. On écrit $f = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ premiers entre eux. On obtient $p = q.f \in I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] = J = (s)$ et donc $p = r.s$ avec $r \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ ce qui implique que p s'annule identiquement sur V i.e. $V \subseteq \mathcal{Z}(p)$. Le Lemme 3.3 nous montre que $J = (s)$ est un idéal réel et par conséquent $\dim(V = \mathcal{Z}(s)) = n - 1$ [1, Thm. 4.5.1]. On en déduit que $\dim \mathcal{Z}(p) = n - 1$. Comme $\mathcal{Z}(q) \subseteq \mathcal{Z}(p)$ ($f \in \mathcal{R}^0$) on a aussi $q(x) = 0$ car $f(x) \neq 0$. On sait que $\dim \mathcal{Z}(q) \leq n - 2$ par la Proposition 2.2. Comme $x \in V_{\text{reg}}$, il existe un voisinage ouvert semi-algébrique de x dans $V \subseteq \mathcal{Z}(p)$ de dimension

$n - 1$ [1, Prop. 3.3.10]. On note A le semi-algébrique $\mathcal{Z}(p) \setminus \mathcal{Z}(q)$. D'après ce qu'on a dit précédemment, le point x est clairement un point adhérent à A . Le lemme de sélection des courbes [1, Thm. 2.5.5] pour le semi-algébrique A nous fournit une fonction semi-algébrique $h: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ telle que $h(0) = x$ et $h([0, 1]) \subseteq A$. Par conséquent $f \circ h: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction semi-algébrique continue telle que $(f \circ h)([0, 1]) = 0$ et $(f \circ h)(0) \neq 0$, ceci contredit la continuité de f . $\square$

Plus généralement (c'est-à-dire sans l'hypothèse J principal) et suite à une remarque de Michel Coste, la question suivante semble naturelle :

Question 3.10. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ et $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ sa trace sur les polynômes. L'ensemble $\mathcal{Z}(I)$ est-il la réunion des composantes (symétriques par arcs) $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension maximale de $\mathcal{Z}(J)$?*

Avant de généraliser le Théorème 3.9 et d'étudier cette question, on commence par évaluer la dimension d'un fermé régulier vu comme un ensemble semi-algébrique i.e. la dimension de son adhérence de Zariski.

Proposition 3.11. *Soit I un idéal radical de $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ et $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ sa trace sur les polynômes. On note V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$. Alors*

$$\overline{\mathcal{Z}(I)}^{\text{Zar}} = V$$

où $\overline{\mathcal{Z}(I)}^{\text{Zar}}$ est l'adhérence pour la topologie de Zariski de $\mathcal{Z}(I)$. En particulier $\dim \mathcal{Z}(I) = \dim V$.

Démonstration. Soit $V' = \overline{\mathcal{Z}(I)}^{\text{Zar}}$, on a $V' \subseteq V$ car V est un fermé de Zariski et $\mathcal{Z}(I) \subseteq V$.

Supposons maintenant que V' soit strictement inclu dans V . Alors $\mathcal{I}(V') = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$ contient strictement $\mathcal{I}(V)$ (sinon $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(V')) = V' = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(V)) = V$) et par conséquent il existe $p \in \mathcal{I}(V')$ tel que $p \notin \mathcal{I}(V)$. Mais p est une fonction régulière qui s'annule identiquement sur $\mathcal{Z}(I)$ donc $p \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(\mathcal{Z}(I)) \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] = I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n] = J$. Par conséquent $p(V) = 0$, contradiction. $\square$

Soit E un ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$. L'intersection des ensembles symétriques par arcs contenant E est un ensemble symétrique par arcs noté $\overline{E}^{\mathcal{AR}}$ et on a $\dim \overline{E}^{\mathcal{AR}} = \dim E$ [10, Cor. 2.15].

On généralise maintenant le Théorème 3.9 en utilisant la théorie des ensembles symétriques par arcs. On obtient ainsi une des deux inclusions de la question 3.10.

Théorème 3.12. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On note $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. On note V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$, V_{reg} l'ensemble des points lisses de V et enfin W la réunion des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de V de dimension d où $d = \dim V$. Alors*

$$\overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}} = W \subseteq \mathcal{Z}(I).$$

Démonstration. On a $V = W \cup Z = W_1 \cup \dots \cup W_k \cup Z$ où Z désigne la réunion des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de V de dimension $< d$ et W_i , $i = 1, \dots, k$, les composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de V de dimension d . On a déjà $\overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}} = W$ [10, Thm. 2.21, Lem. 2.22]. Comme $\mathcal{Z}(I)$ est un ensemble symétrique par arcs de dimension d (Proposition 3.11), il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\dim(\mathcal{Z}(I) \cap W_i) = d$. Par [9, Prop. 1.5], on obtient $\mathcal{Z}(I) \cap W_i = W_i$ i.e. $W_i \subseteq \mathcal{Z}(I)$.

Soit $f \in I$, alors f s'annule identiquement sur W_i . La restriction de f à V est encore régulue d'après la Remarque 2.20 (ou bien la Proposition 8 de [6]), et on utilise alors une résolution des singularités de V puis la Remarque 2.7 pour construire une résolution $\pi : X \rightarrow V$ de V telle que $f \circ \pi$ soit régulière sur X et il existe une composante connexe C de X telle que $\pi(C) = \overline{(W_i)_{\text{reg}}}^{\text{eucl}}$. Par conséquent la fonction régulière $f \circ \pi$ s'annule identiquement sur C et donc s'annule identiquement sur la variété irréductible X . On en déduit que f s'annule identiquement sur $\pi(X) = \overline{V_{\text{reg}}}^{\text{eucl}}$. Comme $\mathcal{Z}(f)$ est un sous-ensemble symétrique par arcs de $\mathbf{R}^n$, f s'annule identiquement sur $\overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}} = W$ ce qui termine la preuve. $\square$

Avec les notations du Théorème 3.12, on remarque que si V est lisse alors $W = V$ et par conséquent la réponse à la question 3.10 est positive dans ce cas.

Corollaire 3.13. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ et $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ sa trace sur les polynômes. Si $V = \mathcal{Z}(J)$ ne possède que des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension maximale, en particulier si V est lisse, alors $\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(J)$ et la réponse à la question 3.10 est positive.*

En dimension ambiante 2, on montre l'inclusion réciproque du Théorème 3.12. On remarquera que pour $n = 2$ et avec les notations du Théorème 3.12, on a $\overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}} = W = \overline{V_{\text{reg}}}^{\text{eucl}}$ i.e. l'adhérence pour la topologie $\mathcal{AR}$ correspond ici à l'adhérence pour la topologie euclidienne pour les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ considérés.

Proposition 3.14. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$. Soit $J = I \cap \mathbf{R}[X_1, X_2]$. On note V l'ensemble $\mathcal{Z}(J)$, V_{reg} l'ensemble des points lisses de V et $W = \overline{V_{\text{reg}}}^{\text{eucl}} = \overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}}$. Alors*

$$W = \mathcal{Z}(I) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid I \subseteq \mathfrak{M}_x\} = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}.$$

Démonstration. Si $J = (0)$ alors $I = (0)$ et le résultat est évident. Si J est maximal, le Corollaire 2.30 donne le résultat voulu.

On suppose donc que J est de hauteur 1 i.e. $J = (s)$ avec $s \in \mathbf{R}[X_1, X_2]$ irréductible i.e. $V = \mathcal{Z}(s)$ est une courbe affine irréductible. L'idéal J étant réel, on a $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = J$. On a déjà

$$W \subseteq \mathcal{Z}(I)$$

par le Théorème 3.9. Comme $J \subseteq I$, on a $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathcal{Z}(J) = V$. En résumé, on a les inclusions suivantes

$$W \subseteq \mathcal{Z}(I) \subseteq V.$$

Pour terminer la preuve, pour tout $x \in V \setminus W$ on doit trouver $f \in I$ telle que $f(W) = 0$ et vérifiant $f(x) \neq 0$.

Soit $x \in V \setminus W$. On peut supposer $x = O$. Alors O est un zéro isolé de s . Il existe donc un disque fermé B centré en O tel que O soit l'unique zéro de s dans B . En utilisant le Lemme 2.25 pour $X_1^2 + X_2^2, \frac{1}{s^2}$ dans B , il existe un entier strictement positif N tel que $\frac{(X_1^2 + X_2^2)^N}{s^2}$ s'étende de façon continue par 0 en O dans B . On pose $f = \frac{s^2}{s^2 + (X_1^2 + X_2^2)^{2N}}$. La fonction f est clairement continue en dehors de O et peut être étendue de manière continue par 1 en O car $\lim_{x \rightarrow O} \frac{(X_1^2 + X_2^2)^{2N}}{s^2} = 0$. Par conséquent $f \in \mathcal{R}^0$ et la restriction de f à V_{reg} est identiquement nulle puisque la restriction de f à $V \setminus \{O\}$ est identiquement nulle. Comme f est continue on a aussi $f(W) = 0$. Il reste donc à montrer que $f \in I$. On a $(s^2 + ((X_1^2 + X_2^2)^N)^2) \cdot f \in I$ et puisque I est un idéal premier, au moins un des deux termes du produit appartient à I . Supposons $(s^2 + ((X_1^2 + X_2^2)^N)^2) \in I \cap \mathbf{R}[X_1, X_2] = J$ alors on obtient $(X_1^2 + X_2^2)^N \in J$ car J est un idéal réel. L'idéal J étant premier, on en déduit que $X_1^2 + X_2^2 \in J$. Mais alors $X_1 \in J, X_2 \in J$ en invoquant une nouvelle fois que J est un idéal réel. On en déduit que J est maximal ce qui est impossible. Par conséquent $f \in I$ ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

A partir du Théorème 3.12 et de la Proposition 3.14, on obtient :

Corollaire 3.15. *Si $n = 2$, la réponse à la question 3.10 est positive.*

Proposition 3.16. *Soit V une sous-variété irréductible de $\mathbf{R}^n$. On note $W = \overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ la réunion des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension maximale de V . Alors*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V_{\text{reg}})$$

est un idéal premier de $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. Si $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V_{\text{reg}})$ alors $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)$ car $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble symétrique par arcs. On a donc $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V_{\text{reg}})$.

Soient f et g deux fonctions régulières telles que le produit $f \cdot g$ s'annule identiquement sur V_{reg} . Quitte à résoudre les singularités de V , on peut supposer V lisse (f et g restant alors régulières). Alors f et g sont encore régulières en restriction à V d'après la Remarque 2.20 (ou bien la Proposition 8 de [6]). En utilisant la Remarque 2.7, il existe une composition d'éclatements $\pi : X \rightarrow V$ telle que $f \circ \pi$ et $g \circ \pi$ soient régulières sur X . Le produit de fonctions régulières $(f \circ \pi) \cdot (g \circ \pi)$ s'annule identiquement sur la variété irréductible X . On peut donc conclure que, par exemple, $f \circ \pi$ s'annule identiquement sur X et donc f s'annule identiquement sur V i.e. $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 3.17. *Soit V une sous-variété irréductible de $\mathbf{R}^n$. On note $W = \overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ la réunion des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension maximale de V . Si $V = W$ i.e. V ne possède que des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension maximale, en particulier si V est lisse, alors V est un ensemble régulier fermé et régulier irréductible.*

Démonstration. Comme les fonctions régulières sont régulières, V est un fermé régulier. Comme $V = W$, l'idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$ est un idéal premier par la

Proposition 3.16. Si V est la réunion $V_1 \cup V_2$ de deux fermés réguliers non-vides, le Corollaire 2.29 montre qu'il existe des fonctions régulières f_1, f_2 telles que $V_1 = \mathcal{Z}(f_1)$ et $V_2 = \mathcal{Z}(f_2)$. Alors $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(V)$ qui est premier et on en déduit que $V \subseteq V_1$ ou $V \subseteq V_2$. $\square$

Remarque 3.18. Soit $V \subset \mathbf{R}^n$ une sous-variété irréductible. On note $W = \overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ la réunion des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension maximale de V . La même preuve que la proposition précédente montre que W est un ensemble régulier irréductible. Mais on ne sait pas encore s'il est régulier fermé. Si la réponse à la question 3.10 est positive, alors W est un ensemble régulier fermé et régulier irréductible.

Avant de donner une réponse négative à la question 3.10, on donne une propriété concernant l'annulation des fonctions régulières.

Proposition 3.19. Soit V une sous-variété irréductible de $\mathbf{R}^n$ de dimension d . Soit S un sous-ensemble de V de dimension d i.e. tel que $\dim \overline{S}^{\text{Zar}} = d$ et soit $f \in \mathcal{R}^0$ s'annulant identiquement sur S . Alors f s'annule identiquement sur W , W désignant la réunion des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension maximale de V .

Démonstration. On peut supposer V lisse quitte à résoudre ses singularités. Alors f est encore régulière en restriction à V d'après la Remarque 2.20 (ou bien la Proposition 8 de [6]). En utilisant la Remarque 2.7, il existe une composition d'éclatements $\pi : X \rightarrow V$ telle que $f \circ \pi$ soit régulière sur X .

Comme S est de dimension d , la fonction régulière $f \circ \pi$ s'annule sur un sous-ensemble Zariski dense de X donc sur X . Comme dans la preuve de la Proposition 3.16, on peut en conclure que f s'annule identiquement sur W . $\square$

Exemple 3.20. (Réponse négative à la question 3.10)

On considère la sous-variété irréductible V de $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ de dimension 2 donnée par les équations

$$\begin{cases} (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + y^2 = 0 ; \\ u^2 = xv^2 . \end{cases}$$

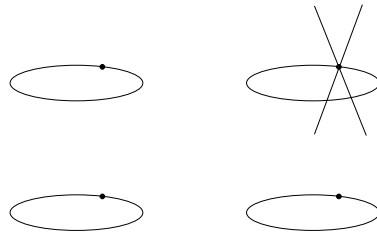


FIGURE 2. Réponse négative à la question 3.10.

Sur la figure, on a représenté la fibre de $(x, y, u, v) \mapsto (x, y)$ au dessus de chaque point des deux composantes connexes de la courbe hyperelliptique d'équation $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + y^2 = 0$. Au dessus de l'un des ovals

la fibre est un point, alors qu'au dessus de l'autre ovale, la fibre est formée de deux droites sécantes.

La variété V possède deux composantes connexes W et Z , W étant l'unique composante symétrique par arcs irréductible de dimension 2 de V . Le lieu singulier de V est la courbe hyperelliptique Y d'équations $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + y^2 = 0$ et $u = v = 0$, possédant deux composantes connexes Z et Z' avec $Z' \subset W$. On suppose que W est un fermé régulier. Il existe donc $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^4)$ telle que $\mathcal{Z}(f) = W$ et par conséquent f s'annule identiquement sur Z' mais pas sur Z . Une telle fonction ne peut exister par la Proposition 3.19 en considérant sa restriction à Y .

Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$, on cherche toujours à caractériser le lieu géométrique $\mathcal{Z}(I)$. Dans la suite et comme précédemment on notera V la variété algébrique $\overline{\mathcal{Z}(I)}^{\text{Zar}}$, d la dimension de V , W la réunion des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension d de V . Les résultats précédents montrent que l'ensemble recherché vérifie l'encadrement suivant

$$W \subseteq \mathcal{Z}(I) \subseteq V,$$

et qu'il existe des exemples tels que $W = \mathcal{Z}(I) \subsetneq V$ mais aussi tels que $W \subsetneq \mathcal{Z}(I) = V$ (le contre-exemple donné pour répondre négativement à la question 3.10). Dans la suite on va caractériser plus précisément $\mathcal{Z}(I)$ en petites dimensions.

Proposition 3.21. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. Soit Z une composante $\mathcal{AR}$ -irréductible de dimension $< d$ de V telle que $Y = \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}} \cap V \setminus \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}{}^{\mathcal{AR}}$ soit un sous-ensemble régulier fermé de codimension au moins un de $\overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$. Il existe une fonction régulière $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ s'annulant identiquement sur W et ne s'annulant pas identiquement sur Z .*

Remarque 3.22. *L'ensemble Y de la proposition est seulement symétrique par arcs en général. L'hypothèse cruciale est ici que c'est en plus un fermé régulier.*

Démonstration. Il existe deux fonctions régulières h, g sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\mathcal{Z}(h) = \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$ et $\mathcal{Z}(g) = V$. Par le Lemme 2.25, il existe un entier $N > 0$ tel que la fonction $\frac{h^N}{g^2}$ se prolonge par 0 sur $\overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$ et est donc définie sur $\mathcal{D}(g) \cup \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$. On définit alors une fonction k sur $\mathbf{R}^n$ par $k = \frac{g^2}{g^2 + h^{2N}}$ sur $\mathcal{D}(h)$ et par $k = 1$ sur $\overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$.

La fonction k est alors continue sur $\mathbf{R}^n \setminus Y$. En effet, k est clairement continue sur $\mathcal{D}(h) = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$. Montrons la continuité en $x \in \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}} \setminus Y$. On se donne une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $\mathbf{R}^n \setminus Y$ convergeant vers x , en lequel k prend la valeur 1. Si $x_n \in \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$ alors $k(x_n) = 1$, et on peut donc supposer par la suite que $x_n \notin \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$. Or il existe un voisinage de x qui ne rencontre pas $V \setminus \overline{\mathcal{Z}}^{\text{Zar}}$ par définition de Y , et donc x_n appartient à $\mathcal{D}(g)$ pour n assez grand. Ainsi

$\frac{h^N(x_n)}{g^2(x_n)}$ converge vers 0, et donc

$$k(x_n) = \frac{1}{1 + \frac{h^N(x_n)}{g^2(x_n)}}$$

tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

La fonction k est identiquement nulle sur $V \setminus \overline{Z}^{\text{Zar}}$. On va montrer qu'elle est de plus identiquement nulle sur $W \setminus Y$ en vérifiant que l'ensemble $W \cap Y$ est égal à $W \cap \overline{Z}^{\text{Zar}}$. L'inclusion $W \cap Y \subset W \cap \overline{Z}^{\text{Zar}}$ est immédiate, et l'autre inclusion provient de l'égalité $W = \overline{W \setminus \overline{Z}^{\text{Zar}}{}^{\mathcal{AR}}}$ puisqu'alors

$$W \cap \overline{Z}^{\text{Zar}} \subset \overline{W \setminus \overline{Z}^{\text{Zar}}{}^{\mathcal{AR}}} \cap \overline{Z}^{\text{Zar}} \subset \overline{V \setminus \overline{Z}^{\text{Zar}}{}^{\mathcal{AR}}} \cap \overline{Z}^{\text{Zar}} = Y.$$

Pour démontrer l'égalité $W = \overline{W \setminus \overline{Z}^{\text{Zar}}{}^{\mathcal{AR}}}$, on peut supposer que W est un ensemble symétrique par arcs irréductible quitte à le décomposer en ses composantes irréductibles. Alors $W \setminus \overline{Z}^{\text{Zar}}$ est un sous-ensemble symétrique par arcs ouvert non vide de W de même dimension, donc son adhérence symétrique par arcs est égale à W .

Ainsi la fonction k est définie sur $\mathbf{R}^n$, continue sur $\mathbf{R}^n \setminus Y$, identiquement nulle sur $W \setminus Y$ et constante égale à 1 sur $\overline{Z}^{\text{Zar}}$. Soit maintenant l une fonction régulue sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\mathcal{Z}(l) = Y$. Il existe un entier $N' > 0$ tel que la fonction $f = l^{N'} k$ étendue par 0 sur Y soit continue sur $\mathbf{R}^n$ d'après le Lemme 2.25. La fonction f ainsi construite est donc régulue sur $\mathbf{R}^n$, identiquement nulle sur W et non nulle sur $Z \setminus (Z \cap Y)$. $\square$

Comme les composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de codimension strictement positive d'une courbe algébrique de $\mathbf{R}^n$ sont des points isolés, la Proposition 3.21 utilisée avec $Y = \emptyset$ fournit une généralisation de la Proposition 3.14.

Corollaire 3.23. *Une courbe régulue irréductible de $\mathbf{R}^n$ est l'adhérence pour la topologie euclidienne du lieu lisse d'une courbe algébrique irréductible de $\mathbf{R}^n$.*

On regarde maintenant le cas des surfaces régulières.

Proposition 3.24. *Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$. On suppose ici que $d = 2$. Soit Z une composante composantes $\mathcal{AR}$ -irréductible de dimension < 2 de V . Si Z vérifie la condition :*

$$(i): \dim(\overline{Z}^{\text{Zar}} \cap W) \leq 0,$$

il existe une fonction régulue $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ s'annulant identiquement sur W et ne s'annulant jamais sur $Z \setminus W$.

Si Z vérifie la condition suivante :

$$(ii): \dim Z = 1 \text{ et } \dim(\overline{Z}^{\text{Zar}} \cap W) = 1,$$

toute fonction régulue s'annulant identiquement sur W s'annule aussi identiquement sur Z .

On peut illustrer le cas (i) par le parapluie de Cartan (cf Exemple 3.20) et le cas (ii) par l'exemple 3.28.

Démonstration. Si Z vérifie la condition (i), alors $\overline{Z}^{\text{Zar}}$ est de dimension zéro ou un, et donc $Y = \overline{Z}^{\text{Zar}} \cap V \setminus \overline{Z}^{\text{Zar}}^{\mathcal{AR}}$ est soit vide, soit une réunion finie de points. Dans les deux cas, on conclut par la Proposition 3.21.

Supposons Z vérifiant les conditions de (ii). Soit $f \in \mathcal{R}^0(\mathbf{R}^n)$ s'annulant identiquement sur W . La fonction f s'annule donc sur un sous-ensemble de dimension 1 de $\overline{Z}^{\text{Zar}}$ et s'annule donc sur $(\overline{Z}^{\text{Zar}})_{\text{reg}}^{\text{eucl}}$ par la Proposition 3.19. En effet, la variété $\overline{Z}^{\text{Zar}}$ est aussi irréductible puisque Z est $\mathcal{AR}$ -irréductible et puisque la topologie symétrique par arcs est plus fine que la topologie de Zariski. Enfin $Z \subseteq (\overline{Z}^{\text{Zar}})_{\text{reg}}^{\text{eucl}}$ puisque Z est une composante $\mathcal{AR}$ -irréductible de dimension maximale (= 1) de $\overline{Z}^{\text{Zar}}$. $\square$

Corollaire 3.25. *Une surface régulière irréductible de $\mathbf{R}^n$ est la réunion de l'adhérence pour la topologie symétrique par arcs du lieu lisse d'une surface algébrique irréductible de $\mathbf{R}^n$ et des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension < 2 de la surface algébrique vérifiant la condition (ii) de la Proposition 3.24.*

Dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, on a donc caractérisé tous les fermés réguliers irréductibles.

Théorème 3.26. *Il existe une bijection φ entre l'ensemble $\text{Spec } \mathcal{R}^0$ des idéaux premiers I de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^2)$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ des semi-algébriques fermés W de $\mathbf{R}^2$ d'une des formes suivantes*

- (i): $W = \mathbf{R}^2$,
- (ii): W est l'adhérence dans $\mathbf{R}^2$ pour la topologie euclidienne de l'ensemble V_{reg} des points lisses d'une courbe irréductible V de $\mathbf{R}^2$.
- (iii): $W = \{x\}$ avec $x \in \mathbf{R}^2$.

Si I est un idéal premier de $\mathcal{R}^0$ alors $\varphi(I) = \mathcal{Z}(I)$. Si W est un semi-algébrique fermé de $\mathbf{R}^2$ de la forme précédente, on a $\varphi^{-1}(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)$. En particulier, pour tout idéal premier I de $\mathcal{R}^0$ on a

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(\mathcal{Z}(I)) = I,$$

et pour tout semi-algébrique fermé W de $\mathbf{R}^2$ de la forme précédente, on a

$$\mathcal{Z}(\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)) = W.$$

Démonstration. La Proposition 3.14 montre qu'on a bien une application $\varphi: \text{Spec } \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{E}$ qui à I associe $\mathcal{Z}(I)$. La Proposition 3.16 nous fournit une application $\psi: \mathcal{E} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{R}^0$ qui à W associe $\psi(W) = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)$. Il reste à voir que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.

Soit I un idéal premier de $\mathcal{R}^0$, on a

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(\mathcal{Z}(I)) = \psi(\varphi(I)) = I$$

d'après le Corollaire 2.28.

Soit $W \in \mathcal{E}$, il faut montrer que

$$\mathcal{Z}(\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)) = W.$$

Si $W = \mathbf{R}^2$ ou si $W = \{x\}$ pour $x \in \mathbf{R}^2$ c'est évident. On suppose que W est l'adhérence dans $\mathbf{R}^2$ de l'ensemble V_{reg} des points lisses d'une courbe

irréductible V de $\mathbf{R}^2$. On a $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W) \supseteq \mathcal{I}(W)$ et on a aussi $\mathcal{I}(W) = \mathcal{I}(V)$ car W est Zariski dense dans V . Donc $W \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{I}(V)) = V$. Comme $\mathcal{Z}(\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)) \in \mathcal{E}$, on en déduit que $\mathcal{Z}(\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)) = W$. $\square$

La preuve précédente s'étend à $\mathbf{R}^3$ en utilisant les Corollaires 3.23 et 3.25.

Théorème 3.27. *Il existe une bijection φ entre l'ensemble $\text{Spec } \mathcal{R}^0$ des idéaux premiers I de $\mathcal{R}^0(\mathbf{R}^3)$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ des semi-algébriques fermés W' de $\mathbf{R}^3$ d'une des formes suivantes*

- (i): $W' = \mathbf{R}^3$,
- (ii): W' est la réunion de l'adhérence dans $\mathbf{R}^3$ pour la topologie symétrique par arcs de l'ensemble V_{reg} des points lisses d'une surface irréductible V de $\mathbf{R}^3$ et des composantes $\mathcal{AR}$ -irréductibles de dimension < 2 de V vérifiant la condition (ii) de la Proposition 3.24.
- (iii): W' est l'adhérence dans $\mathbf{R}^3$ pour la topologie euclidienne de l'ensemble V_{reg} des points lisses d'une courbe irréductible V de $\mathbf{R}^3$.
- (iv): $W' = \{x\}$ avec $x \in \mathbf{R}^3$.

Si I est un idéal premier de $\mathcal{R}^0$ alors $\varphi(I) = \mathcal{Z}(I)$. Si W' est un semi-algébrique fermé de $\mathbf{R}^3$ de la forme précédente, on a $\varphi^{-1}(W') = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W')$. En particulier, pour tout idéal premier I de $\mathcal{R}^0$ on a

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(\mathcal{Z}(I)) = I,$$

et pour tout semi-algébrique fermé W' de $\mathbf{R}^3$ de la forme précédente, on a

$$\mathcal{Z}(\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W')) = W'.$$

Exemples 3.28. *On considère trois exemples (les deux premiers sont classiques).*

- *Le parapluie de Whitney :*

Considérons la sous-variété V d'équation $zx^2 = y^2$ dans $\mathbf{R}^3$. Le parapluie V est un ensemble régulier fermé et vérifie la relation $V = \overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}}$. Par la Proposition 3.17, c'est un ensemble régulier fermé et irréductible.

- *Le parapluie de Cartan :*

Considérons la sous-variété V d'équation $z(x^2 + y^2) = x^3$ de $\mathbf{R}^3$. La décomposition de V en ensembles $\mathcal{AR}$ -irréductibles est $W \cup Z$ où $W = \overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ est la toile du parapluie et Z est le manche. L'ensemble W est régulier fermé car $W = \mathcal{Z}(f)$ avec $f = z - \frac{x^3}{x^2 + y^2}$. L'existence d'une telle fonction nous était donnée par la Proposition 3.24. Par la Proposition 3.16, W est régulier irréductible. L'ensemble Z est un ensemble régulier fermé car $Z = \mathcal{Z}(x^2 + y^2)$. L'ensemble V est donc un ensemble régulier fermé et non-régulier irréductible. En notant I , l'idéal premier $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)$, la réponse à la question 3.10 est positive pour le parapluie de Cartan.

- *Un parapluie cornu :*

Considérons la sous-variété V d'équation $s(x, y, z) = x^2 + y^2((y - z^2)^2 + yz^3) = x^2 + y^4 + y^2z^4 + y^3z^3 - 2y^3z^2 = 0$ de $\mathbf{R}^3$. La décomposition de V

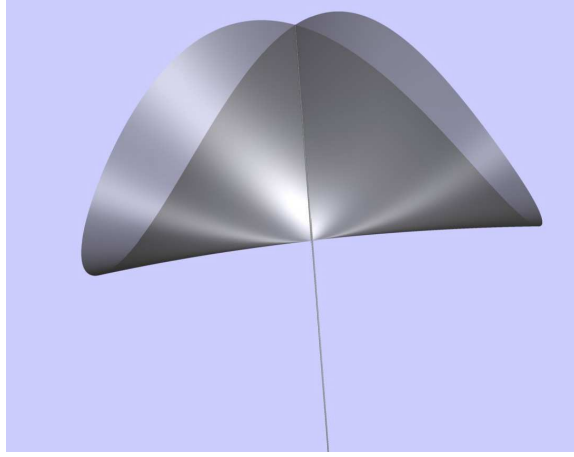


FIGURE 3. Parapluie de Whitney.

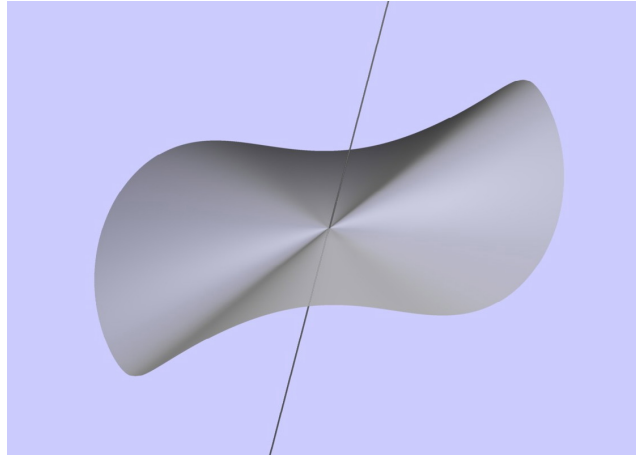


FIGURE 4. Parapluie de Cartan.

en ensembles $\mathcal{AR}$ -irréductibles est $W \cup Z$ où $W = \overline{V_{\text{reg}}}^{\mathcal{AR}}$ est la corne du parapluie et Z est le manche. L'ensemble W est régulument fermé car $W = \mathcal{Z}(f)$ avec $f = z^2 \frac{s(x,y,z)}{x^2+y^4+y^2z^4}$. L'existence d'une telle fonction nous était donnée par la Proposition 3.24. Par la Proposition 3.16, W est régulument irréductible. Le manche Z est un ensemble régulument fermé car $Z = \mathcal{Z}(x^2 + y^2)$. Comme pour le parapluie de Cartan, l'ensemble V est donc un ensemble régulument fermé et non-régulument irréductible. En notant I , l'idéal premier $\mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W)$, la réponse à la question 3.10 est positive pour le parapluie cornu.

On termine cette section par un résultat sur la dimension de Krull de l'anneau $\mathcal{R}^{0,n}$.

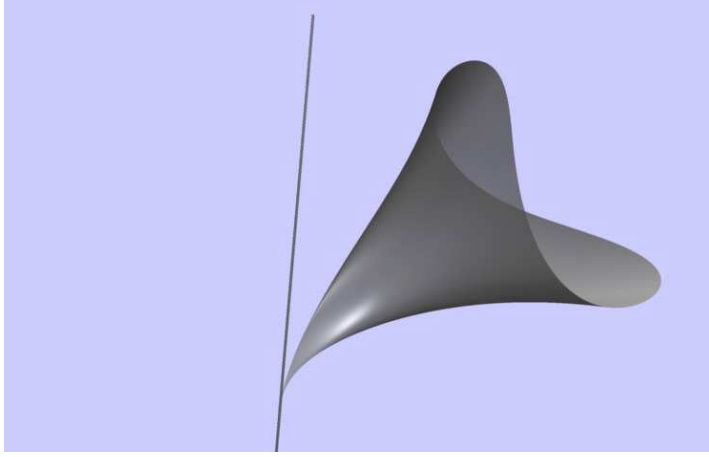


FIGURE 5. Un parapluie cornu.

Proposition 3.29. *L'espace topologique $\mathbf{R}^n$ est de dimension n pour la topologie régulière. L'anneau $\mathcal{R}^{0,n}$ est par conséquent de dimension de Krull n .*

Démonstration. Soit

$$W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_m \subseteq \mathbf{R}^n$$

une suite d'inclusions de fermés réguliers irréductibles avec $m > n$. Pour $i = 0, \dots, m$, on note $I_i = \mathcal{I}_{\mathcal{R}^0}(W_i)$, $J_i = I_i \cap \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ et $V_i = \overline{W_i}^{Zar}$. On a $\dim W_i = \dim V_i$ et de plus V_i est irréductible pour la topologie de Zariski car $V_i = \mathcal{Z}(J_i)$ d'après la Proposition 3.11 (l'idéal J_i est bien un idéal premier). On obtient donc une suite d'inclusions de fermés de Zariski irréductibles

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_m \subseteq \mathbf{R}^n.$$

Puisque $\mathbf{R}^n$ est de dimension n pour la topologie de Zariski, il existe $i \in \{0, \dots, m-1\}$ tel que $V_i = V_{i+1}$. L'ensemble $S = W_{i+1} \setminus W_i$ est un ouvert régulier de W_{i+1} , il est donc dense dans W_{i+1} pour la topologie régulière. On en déduit que W_{i+1} est le plus petit fermé régulier contenant S . Un fermé de Zariski étant un fermé régulier, un fermé de Zariski contenant S contient aussi W_{i+1} donc V_{i+1} . Par conséquent $\overline{S}^{Zar} = V_{i+1}$ et $\dim S = \dim V_{i+1}$. D'après le Théorème 3.12, $(V_i)_{reg} = (V_{i+1})_{reg} \subseteq W_i$ et par conséquent S est contenu dans le lieu singulier de V_{i+1} qui est un fermé de Zariski de dimension strictement inférieure à celle de V_{i+1} , ce qui fournit une contradiction. La dimension régulière de $\mathbf{R}^n$ est donc inférieure à n . Il est clairement possible de construire une suite d'inclusions

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = \mathbf{R}^n$$

de fermés de Zariski irréductibles lisses. D'après la Proposition 3.17, les V_i sont des fermés réguliers irréductibles ce qui prouve que la dimension régulière de $\mathbf{R}^n$ est bien n . En utilisant le Nullstellensatz régulier, on en déduit que la dimension de Krull de $\mathcal{R}^{0,n}$ est n . $\square$

4. COMPARAISON ENTRE $\mathbf{R}^n$ ET LE SPECTRE DE L'ANNEAU DES FONCTIONS RÉGULIÈRES SUR $\mathbf{R}^n$

Soit $f \in \mathcal{R}^{0,n}$. L'ensemble des zéros de f dans le spectre $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ est noté $\mathcal{V}(f)$, i.e.,

$$\mathcal{V}(f) = \{p \in \text{Spec } \mathcal{R}^{0,n} \mid f \in p\}.$$

Son complémentaire est noté $\mathcal{U}(f)$. Plus généralement, si E est un sous-ensemble de $\mathcal{R}^{0,n}$, l'ensemble des zéros communs dans $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ des éléments de E est noté $\mathcal{V}(E)$, et son complémentaire est $\mathcal{U}(E)$. Plus précisément,

$$\mathcal{V}(E) = \{p \in \text{Spec } \mathcal{R}^{0,n} \mid E \subseteq p\}$$

et

$$\mathcal{U}(E) = \{p \in \text{Spec } \mathcal{R}^{0,n} \mid E \not\subseteq p\}.$$

Il est bien connu que les sous-ensembles de la forme $\mathcal{U}(E)$ constituent une topologie sur $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ [4, Chapitre 1]. L'espace topologique $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ est quasi-compact. Plus généralement, les ouverts de la forme $\mathcal{U}(f_1, \dots, f_m)$ sont quasi-compacts.

Soit

$$\iota: \mathbf{R}^n \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$$

l'application définie par $\iota(x) = \mathfrak{M}_x$, où $\mathfrak{M}_x$ est l'idéal maximal de $\mathcal{R}^{0,n}$ des fonctions régulières s'annulant en x . L'application ι est bien-sûr continue. D'après la version faible du Nullstellensatz, ι est une bijection sur l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{R}^{0,n}$. La version forte du Nullstellensatz (Corollaire 2.28) peut se formuler ainsi :

Théorème 4.1. *L'application ι induit une bijection entre $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ et l'ensemble des sous-ensembles régulièrement fermés et irréductibles de $\mathbf{R}^n$. Plus précisément, pour tout sous-ensemble fermé régulier irréductible X de $\mathbf{R}^n$ il existe un et un seul idéal premier p de $\mathcal{R}^{0,n}$ tel que $X = \iota^{-1}(\overline{\{p\}}) = \mathcal{V}(p)$.*

Soit $F \subseteq \mathbf{R}^n$ un fermé régulier. Notons par $\tilde{F}$ le plus petit sous-ensemble fermé de $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ tel que $\iota(F) \subseteq \tilde{F}$, i.e., $\tilde{F}$ est l'adhérence de $\iota(F)$ dans $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$.

Lemme 4.2. *Soit n un entier naturel.*

- (1) *Soit F_α , $\alpha \in A$ une collection de sous-ensembles régulièrement fermés de $\mathbf{R}^n$. Alors*

$$\widetilde{\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in A} \tilde{F}_\alpha.$$

- (2) *Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-ensembles régulièrement fermés de $\mathbf{R}^n$. Alors*

$$\widetilde{(F_1 \cup \dots \cup F_m)} = \tilde{F}_1 \cup \dots \cup \tilde{F}_m.$$

Démonstration. La deuxième propriété est évidente. La première est valable car ι est injectif. $\square$

Théorème 4.3. *L'application ι induit une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles fermés de $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ et l'ensemble des sous-ensembles régulément fermés de $\mathbf{R}^n$. Plus précisément, pour tout sous-ensemble fermé X de $\mathbf{R}^n$ il existe un et un seul ensemble fermé Y de $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ tel que $X = \iota^{-1}(Y)$, à savoir $Y = \tilde{X}$.*

Démonstration. Soit X fermé régulier dans $\mathbf{R}^n$. Posons $Y = \tilde{X}$ et montrons que $\iota^{-1}(Y) = X$. Comme $\mathbf{R}^n$ est noethérien, X possède un nombre fini de composantes irréductibles $F_1, \dots, F_m$. D'après le lemme, $Y = \tilde{F}_1 \cup \dots \cup \tilde{F}_m$. D'après le Théorème 4.1, on a alors

$$\iota^{-1}(Y) = \iota^{-1}(\tilde{F}_1) \cup \dots \cup \iota^{-1}(\tilde{F}_m) = F_1 \cup \dots \cup F_m = X.$$

Montrons l'unicité de Y . Soit Z un sous-ensemble fermé de $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ tel que $\iota^{-1}(Z) = X$. Comme Y est le plus petit fermé de $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ contenant $\iota(X)$, on a $Y \subseteq Z$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $p \in Z$, et soit $F = \iota^{-1}(\overline{\{p\}})$. Montrons d'abord que $\iota(F) \subseteq Y$. Soit $x \in F$. On a $\iota(x) \in \overline{\{p\}}$. Comme $\overline{\{p\}}$ est contenu dans Z , et comme $\iota^{-1}(Z) = X$, on a $x \in X$. On a également $\iota^{-1}(Y) = X$, donc $\iota(x) \in Y$. Cela montre bien que $\iota(F) \subseteq Y$. Or, F est régulément irréductible dans $\mathbf{R}^n$ et, d'après le Théorème 4.1, $p \in \tilde{F}$ et donc $p \in Y$. Cela montre l'inclusion $Z \subseteq Y$. $\square$

Corollaire 4.4. *L'espace topologique $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ est noethérien.*

Pour U un ouvert régulier de $\mathbf{R}^n$, soit $\tilde{U}$ le complémentaire de $\tilde{F}$ dans $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$, où F est le complémentaire de U dans $\mathbf{R}^n$.

Dans l'anneau $\mathcal{R}^\infty$ des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^2$, on peut remarquer que $O = \iota^{-1}(\overline{(X, Y)}) = \iota^{-1}(\overline{(X^2 + Y^2)})$ où (X, Y) et $(X^2 + Y^2)$ sont deux idéaux premiers distincts de $\mathcal{R}^\infty$. Voici un corollaire qui montre bien la différence entre l'anneau des fonctions régulières et l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n$:

Corollaire 4.5. *Soit $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un ouvert régulier. Il existe un et un seul ouvert V de $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ tel que $\iota^{-1}(V) = U$, à savoir $V = \tilde{U}$.*

L'énoncé précédent dit que la géométrie algébrique régulière peut se faire schématiquement. Là encore, le lecteur appréciera la différence avec la géométrie algébrique régulière où les variétés sont souvent supposées affines *a priori* pour obtenir des résultats probants.

A titre d'exemple, revenons sur le fibré en droites régulier pathologique sur $\mathbf{R}^2$ bien connu qui n'est pas engendré par ses sections régulières globales [1, Exemple 12.1.5].

Exemple 4.6. *Soit $p \in \mathbf{R}[x, y]$ le polynôme défini par*

$$p = x^2(x - 1)^2 + y^2.$$

Remarquons que p possède exactement 2 racines réelles à savoir $c_0 = (0, 0)$ et $c_1 = (1, 0)$. Soit $U_i = \mathbf{R}^2 \setminus \{c_i\}$ pour $i = 0, 1$. Les ouverts de Zariski U_0 et U_1 constituent un recouvrement de $\mathbf{R}^2$. On définit un fibré en droites régulier par rapport à ce recouvrement, en prenant comme fonction de transition $g_{01} = p$ sur $U_0 \cap U_1$. Notons L le fibré en droites régulier sur $\mathbf{R}^2$ ainsi obtenu. Montrons que toute section régulière globale s de L s'annule en c_1 . La restriction s_i

de s à U_i est une fonction régulière sur U_i , pour $i = 0, 1$. La condition de recollement est $g_{01}s_1 = s_0$ sur $U_0 \cap U_1$. Ecrivons $s_i = p_i/q_i$, où $p_i, q_i \in \mathbf{R}[x, y]$, avec $q_i \neq 0$ sur U_i et p_i, q_i premiers entre eux, pour $i = 0, 1$. La condition de recollement implique que $p_0q_1 = p_1q_0$ sur $\mathbf{R}^2$. Comme p est irréductible, et comme $q_1(c_0) \neq 0$, le polynôme p divise p_0 . En particulier, $p_0(c_1) = 0$ et donc aussi $s(c_1) = 0$. Ceci ne permet pas à L d'être engendré par ses sections globales.

Pour compléter, montrons maintenant que ce fibré en droites vu comme fibré régulier est bien engendré par ses sections globales. En fait, le fibré en droites régulier L est trivial. Soit s la section régulière globale de L définie par

$$s_0 = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad s_1 = \frac{x^2 + y^2}{p}.$$

La fonction s_i est bien régulière sur U_i et non nulle, pour $i = 0, 1$. Le fibré en droites régulier L est donc bien trivial sur $\mathbf{R}^2$.

Dans la suite de ce paragraphe, on identifiera $\mathbf{R}^n$ avec son image dans $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ via l'application ι , pour simplifier. Le faisceau structural $\tilde{\mathcal{R}}^{0,n}$ sur le schéma affine $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ induit par restriction un faisceau en anneaux locaux sur $\mathbf{R}^n$ que l'on notera encore $\tilde{\mathcal{R}}^0$. D'après le Corollaire 4.5 et la Proposition 3.8,

$$\tilde{\mathcal{R}}^{0,n}(\mathcal{D}(f)) = \mathcal{R}_f^{0,n}$$

pour toute fonction régulière f sur $\mathbf{R}^n$. En particulier, on a

$$\tilde{\mathcal{R}}^{0,n}(\mathcal{D}(f)) = \{g : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbf{R} \mid g \text{ est régulière sur } \mathcal{D}(f)\},$$

comme il se doit.

Soit g une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$. On notera $\tilde{\mathcal{R}}_g^{0,n}$ la restriction de $\mathcal{R}^{0,n}$ à $\mathcal{D}(g)$. On a, plus généralement,

$$\tilde{\mathcal{R}}^{0,n}(\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)) = \mathcal{R}_{gf}^{0,n}$$

pour toute fonction régulière f sur $\mathbf{R}^n$.

Soit M un $\mathcal{R}^{0,n}$ -module. Le faisceau $\tilde{M}$ sur le schéma $\text{Spec } \mathcal{R}^{0,n}$ induit encore par restriction un faisceau $\tilde{M}$ sur $\mathbf{R}^n$. Là aussi, on a

$$\tilde{M}(\mathcal{D}(f)) = M_f$$

pour toute fonction régulière f sur $\mathbf{R}^n$.

Plus généralement, si g est une fonction régulière sur $\mathbf{R}^n$ et M est un $\mathcal{R}_g^{0,n}$ -module, on obtient par restriction un faisceau $\tilde{M}$ en $\tilde{\mathcal{R}}_g^{0,n}$ -modules sur $\mathcal{D}(g)$ avec la même propriété que

$$\tilde{M}(\mathcal{D}(f)) = M_f$$

pour toute fonction régulière f sur $\mathcal{D}(g)$ où $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathcal{D}(g) \mid f(x) \neq 0\}$.

On dira qu'un faisceau $\mathcal{F}$ en $\tilde{\mathcal{R}}^{0,n}$ -modules est quasi-cohérent s'il existe un recouvrement de $\mathbf{R}^n$ par des ouverts réguliers $\mathcal{D}(f_i)$, $i \in I$, tel que, pour tout i , $f_i \in \mathcal{R}^0$ et il existe un $\mathcal{R}_{f_i}^{0,n}$ -module M_i tel que $\mathcal{F}|_{\mathcal{D}(f_i)}$ est isomorphe à $\tilde{M}_i$.

La théorie des schémas nous donne gratuitement l'énoncé suivant :

Théorème 4.7. *Le foncteur qui associe à un $\mathcal{R}^{0,n}$ -module M le faisceau $\tilde{M}$ est une équivalence de catégories sur la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur $\mathbf{R}^n$. Le foncteur réciproque est le foncteur “sections globales” H^0 .*

Il s'en suit, en particulier, que le foncteur “sections globales” est exact sur les faisceaux quasi-cohérents sur $\mathbf{R}^n$. D'où le résultat suivant :

Théorème 4.8. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur $\mathbf{R}^n$. Alors,*

$$H^i(\mathbf{R}^n, \mathcal{F}) = 0$$

pour tout $i \neq 0$.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3 Folge, 12. Berlin Heidelberg New York, Springer 1987.
- [2] E. Bierstone, P. D. Milman, *Arc-analytic functions*, Invent. Math. **101**, 411–424, 1990.
- [3] Delzell, C. N., *A continuous, constructive solution to Hilbert's 17th problem*, Invent. Math. **76**, 365–384, 1984.
- [4] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *EGA1, Le langage des schémas* Publ. Math. IHES **4**, 1960.
- [5] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 133, Springer-Verlag
- [6] J. Kollár, *Continuous rational functions*, arXiv:1101.3737v1 [math.AG].
- [7] W. Kucharz, *Rational maps in real algebraic geometry*, Adv. Geom. **9** (4), 517–539, 2009.
- [8] K. Kurdyka, *Ensemble semi-algébriques symétriques par arcs* Math. Ann. **282**, 445–462, 1988.
- [9] K. Kurdyka, *Injective endomorphisms of real algebraic sets are surjective* Math. Ann. **313**, 69–82, 1999.
- [10] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings* Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry, 33–67, Panor. Synthèses **24**, Soc. Math. France, Paris, 2007.
- [11] Stengle G, *A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry* Math. Ann. **207**, 87–97, 1974.

GOULWEN FICHO, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE RENNES 1,,
CAMPUS DE BEAULIEU, 35042 RENNES CEDEX , FRANCE
E-mail address: goulwen.fichou@univ-rennes1.fr

JOHANNES HUISMAN, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE BRETAGNE
OCCIDENTALE,, 6, AV. VICTOR LE GORGEU, CS 93837, 29238 BREST CEDEX 3, FRANCE
E-mail address: Johannes.Huisman@univ-brest.fr

FRÉDÉRIC MANGOLTE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ D'ANGERS,,
2, BD. LAVOISIER, 49045 ANGERS CEDEX 01, FRANCE
E-mail address: Frederic.Mangolte@univ-angers.fr

JEAN-PHILIPPE MONNIER, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ D'AN-
GERS,, 2, BD. LAVOISIER, 49045 ANGERS CEDEX 01, FRANCE
E-mail address: monnier@tonton.univ-angers.fr