



HAL
open science

Capture des différents types d'ondes incidentes et réfléchies dans un tube à choc

Redouane Benhafsi

► **To cite this version:**

Redouane Benhafsi. Capture des différents types d'ondes incidentes et réfléchies dans un tube à choc. 2007. hal-00649403v2

HAL Id: hal-00649403

<https://hal.science/hal-00649403v2>

Submitted on 21 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Capture des différents types d'ondes incidentes et réfléchies dans un tube à choc

Redouane Benhafsi*

2007

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude du déplacement des ondes incidentes et réfléchies en écoulement compressible, à travers un tube à choc modélisé par les équations d'Euler. Nous employons une méthode mathématique implicite basée sur *l'approche de Boltzman* pour résoudre ce problème : l'utilisation de la méthode de décomposition des flux FVS (Flux Vector Splitting) de *Steger et Warming*.

Dans un premier temps, le système hyperbolique est approché par un algorithme implicite d'ordre un où la dérivée spatiale est décentrée selon le signe des valeurs propres de la Jacobienne des flux. Nous considérons ensuite le problème en définissant des conditions aux limites réfléchissantes, avec une approche *ghost cells* (Nœuds fictifs) constituée d'une donnée initiale et d'une condition de bord. Nous nous plaçons dans un cadre où, les conditions initiales sont de type *Riemann* avec l'application de quelques cas test. Un solveur bloc tridiagonal standard, qui utilise une variante de la méthode *LU* est adopté pour la résolution du système d'équations linéaire, les solutions obtenues sont comparées aux solutions exactes du problème de Riemann et aux solutions numériques obtenues avec d'autres schémas FVS.

mots clés :

Equations d'Euler, tube à choc, onde de choc, réflexion normale, Flux Vector Splitting, schéma implicite

*redouane.benhafsi@gmail.com ; Faculté de Génie Mécanique, Laboratoire de Mécanique Avancée, USTHB, Alger, Algérie.

1 Introduction

Un cas particulier du *problème de Riemann* [1, 2] qui est le tube à choc se modélise par des lois de conservation hyperboliques qui relatent un trait fondamental des écoulements compressibles, qui est la présence d'ondes qui se déplacent sans dissipation à vitesse finie dans le fluide en mouvement ce qui implique un caractère directionnel de propagation de l'information, notamment au niveau des fluctuations de pression [3]. En conséquence beaucoup de difficultés peuvent survenir lors du développement de schémas de résolution pour ce type de systèmes. Le choix d'un schéma numérique de résolution simple et en même temps qui tiendrait compte de ces caractéristiques devient alors nécessaire, afin de mieux prédire le comportement physique de l'écoulement. Ceci nous a amené à opter pour des schémas qui se classent dans la catégorie upwind, et qui introduisent notamment des notions de sens de propagation de l'information. Le schéma que nous avons utilisé pour résoudre ce problème est un schéma à décomposition des flux introduit en premier par Steger et Warming [4], et qui ensuite a été amélioré par Van Leer [5, 6].

Le second point que nous avons considéré, est la notion d'implication qui apparaît lorsque l'on cherche à augmenter l'ordre de précision temporelle, cette "technique" nous a permis d'accélérer la convergence vers l'état stationnaire. Cela a permis aussi de lever les conditions de stabilité restrictives sur le pas de temps qui sont généralement associées à une discrétisation explicite; évidemment, le prix à payer pour cette stabilité inconditionnelle est la nécessité de résoudre un système linéaire à chaque pas de temps en

raison du couplage des inconnues [7]. Pour le simple cas 1D considéré, le système linéaire bloc tridiagonal associé au schéma implicite peut être résolu à moindre coût par une factorisation LU^l , dite *algorithme de Thomas*.

2 Le modèle d'Euler

L'écoulement est modélisé par les équations d'Euler 1D instationnaires. Ces équations sont présentées sous forme d'un système différentiel à trois grandeurs instantanées, la masse volumique, la vitesse et l'énergie totale.

Les équations d'Euler pour un écoulement unidimensionnel instationnaire sous forme conservative sont :

continuité,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \quad (1)$$

mouvement,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \quad (2)$$

énergie,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho e_t + p)u] = 0 \quad (3)$$

où t représente le temps, x la position en coordonnée cartésienne, u la composante de la vitesse, ρ la masse volumique, p la pression, $e_t = e + \frac{1}{2}u^2$ l'énergie totale de l'écoulement, où e est l'énergie interne du fluide.

Les équations précédentes peuvent être exprimées sous forme vectorielle,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

où,

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e_t + p)u \end{bmatrix}$$

¹Lower-Upper

2.1 Discrétisation

Les équations d'Euler sont approchées par la méthode des différences finies, sur un maillage régulier avec intégration temporelle implicite précise au premier ordre.

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{\partial F^{n+1}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

La formulation étant implicite, le deuxième terme de l'équation (5) est exprimé à l'instant $n+1$, et le changement d'état du fluide à chaque pas de temps sera calculé par

$$\Delta U = U^{n+1} - U^n.$$

Les EDF² seront formulées en termes de ΔU , ceci se réfère à la formulation delta³.

Un développement en série de Taylor à l'ordre 1 permet d'exprimer la variable F^{n+1} à l'instant n :

$$F^{n+1} = F^n + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (6)$$

avec

$$\frac{\partial F(U)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad (7)$$

L'insertion de (7) dans (6), donne :

$$F^{n+1} = F^n + \frac{\partial F}{\partial U} \Delta U + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (8)$$

le terme $\frac{\partial F}{\partial U}$ représente la matrice jacobienne A du vecteur F ;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right)u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma u e_t & \gamma e_t - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (9)$$

Pour un fluide parfait, l'énergie totale e_t peut être exprimée en fonction de la vitesse du son a ,

$$e_t = \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{u^2}{2}$$

Par conséquent, la matrice A devient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{\gamma-3}{2}\right)u^2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ \left(\frac{\gamma}{2}-1\right)u^3 - \frac{u a^2}{\gamma-1} & \frac{a^2}{\gamma-1} + \left(\frac{3}{2}-\gamma\right)u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (10)$$

²Equations aux Différences Finies.

³Les solutions des EDF sont les ΔU_i .

2.1.1 Factorisation de la Jacobienne A

Une méthode simple, proposée par Steger et Warming (1980) pour la résolution des problèmes instationnaires, consiste à factoriser la Jacobienne du schéma compressible proposé pour l'équation (4). Cette factorisation s'appuie sur la propriété d'homogénéité du vecteur des flux F et la nature des valeurs propres de la jacobienne des flux, si ces valeurs propres sont réelles et leurs vecteurs propres associés sont linéairement indépendants, alors la matrice A est diagonalisable et peut s'écrire sous la forme :

$$A = K \Lambda K^{-1}$$

où Λ est la matrice diagonale dont les éléments représentent les valeurs propres de A , et K la matrice des vecteurs propres à droite associés aux valeurs propres de A . Les valeurs propres de la matrice A sont calculées par le polynôme caractéristique

$$|A - \lambda I| = 0,$$

ce qui donne les valeurs propres du système :

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u \quad \text{et} \quad \lambda_3 = u + a$$

Les vecteurs propres à droite associés au système d'Euler (4) sont

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ u - a \\ \frac{u^2}{2} - au + \frac{a^2}{\gamma-1} \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} \end{bmatrix}$$

et

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ u + a \\ \frac{u^2}{2} + au + \frac{a^2}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la matrice K est :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ u - a & u & u + a \\ \frac{u^2 - au}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} & \frac{u^2}{2} & \frac{u^2 + 2au}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matrice diagonale des valeurs propres s'écrit :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u - a & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u + a \end{bmatrix} \quad (12)$$

La matrice jacobienne A est reliée à la matrice des valeurs propres Λ par la relation :

$$\Lambda = K^{-1} A K$$

La matrice Λ est décomposée en deux parties selon le signe des valeurs propres de A , de la manière suivante :

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-$$

et par conséquent la matrice A peut être décomposée de la même façon :

$$A = A^+ + A^-$$

où

$$A^+ = K \Lambda^+ K^{-1} \quad \text{et} \quad A^- = K \Lambda^- K^{-1}$$

Pour un écoulement subsonique ($0 \leq M < 1$), la matrice des valeurs caractéristiques Λ s'écrit :

$$\Lambda = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u + a \end{bmatrix}}_{\Lambda^+} + \underbrace{\begin{bmatrix} u - a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Lambda^-}$$

A présent, le vecteur des flux F est décomposé en une partie F^+ et une partie F^- selon la décomposition de la matrice A , il s'écrit :

$$F = F^+ + F^- = A^+ U + A^- U \quad (13)$$

Les matrices A^+ et A^- pour un écoulement subsonique sont déterminées par le logiciel à manipulation symbolique Maple [8].

On obtient finalement l'expression du vecteur des flux convectifs qui est :

– pour $0 \leq M < 1$:

$$F^+ = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2\gamma u + a - u \\ 2(\gamma - 1)u^2 + (u + a)^2 \\ (\gamma - 1)u^3 + \frac{(u+a)^3}{2} + \frac{(3-\gamma)(u+a)a^2}{2(\gamma-1)} \end{bmatrix}$$

et

$$F^- = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} u - a \\ \frac{(u-a)^2}{2} \\ \frac{(u-a)^3}{2} + \frac{(3-\gamma)(u-a)a^2}{2(\gamma-1)} \end{bmatrix}$$

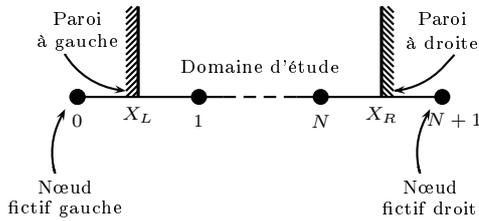


FIG. 1 – Conditions aux limites. Les nœuds fictifs sont à l'extérieur du domaine.

[10, 11, 12]. Les conditions initiales restent constantes à travers tout l'espace sauf pour la singularité qui se trouve à $x = x_0$, en d'autres termes, la singularité représente la séparation des deux fluides stagnants par le diaphragme à $x = x_0$.

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L = (\rho_L, \rho_L u_L, \rho_L e_{tL})^T & x < x_0, \\ U_R = (\rho_R, \rho_R u_R, \rho_R e_{tR})^T & x \geq x_0. \end{cases}$$

3 Résultats numériques

3.1 La définition des cas tests

Une des configuration possible pour la solution du problème de Riemann : selon les conditions initiales, correspond à l'écoulement dans un tube à choc où la discontinuité initiale entre deux gaz est réalisée par un diaphragme localisé à x_0 . Dans l'expérience, ce diaphragme est enlevé à l'instant $t = 0$ et l'écoulement se développe ensuite. Pour cette configuration, Sod [13] a défini des conditions initiales standard pour le calcul numérique. Nous nous basons sur ces valeurs en ce qui concerne les variables aérodynamiques. Le fluide considéré ici est de l'air ($\gamma = 1.4$).

3.2 Tests

L'objectif des tests présentés dans ce paragraphe est d'évaluer la performance du schéma implicite de Steger et Warming que nous avons proposé pour traiter le problème du tube à choc. Nous allons également effectuer une comparaison entre trois schémas FVS.

Ceci permet de juger le comportement des trois méthodes pour chaque test et de distinguer l'efficacité de chacune d'elles.

Nous utilisons trois tests avec leurs solutions exactes. Les données initiales sont constituées des deux états constants U_L et U_R séparés par le diaphragme à la position $x = x_0$, ces tests sont donnés par le tableau 3.2. Les solutions sont calculées à l'intérieur du domaine spatial $x_L \leq x \leq x_R$. Les solutions numériques sont obtenues pour 100 nœuds. Nous utilisons la condition de stabilité de type critère de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) pour le calcul de Δt global telle que, $|\lambda_{max}|\Delta x/\Delta t \leq 1$, où λ_{max} représente la vitesse maximale de l'onde $|u_i| + a_i$. La valeur initiale choisie du nombre de CFL est de 0.9, ensuite nous réduisons le nombre de CFL avec un pas de 0.01 afin de satisfaire les conditions de stabilité pour le calcul explicite. Les conditions de bord sont réfléchissantes. Pour chaque test nous sélectionons une position initiale x_0 du diaphragme et l'instant de calcul. Les résultats numériques obtenus sont comparés aux solutions exactes ainsi qu'aux résultats obtenus avec les schémas explicites de Van Leer et de Liou-Steffen [14]. Les méthodes explicites ainsi définies sont formellement d'une précision d'ordre un en espace et en temps.

Le codage des algorithmes pour ces tests a été effectué à l'aide du langage FORTRAN 90 [15]. Le temps de calcul n'est pas représentatif ; puisqu'il s'agit d'un code qui n'est pas optimisé.

Test	ρ_L ($\frac{kg}{m^3}$)	u_L ($\frac{m}{s}$)	p_L (kPa)	ρ_R ($\frac{kg}{m^3}$)	u_R ($\frac{m}{s}$)	p_R (kPa)
1	1	0	100	0.125	0	10
2	122	0	10000	1.22	0	100
3	1	0	1	1	0	0.01

TAB. 1 – Conditions initiales des problèmes test.

3.2.1 Test 1

Le test 1 à l'instant $t = 0.01s$ où l'écoulement est entièrement subsonique est une version du problème de Sod. les résultats obtenus avec le schéma

implicite de Steger-Warming (figure 2) sont comparables à la solution exacte avec un choc incident et une discontinuité de contact beaucoup plus étendus, en revanche, l'éventail de détente est plus satisfaisant avec une dissipation au niveau de la "tête" d'expansion. Les schémas explicites de Van Leer et de Liou-Steffen présentent une meilleure résolution notamment au niveau des discontinuités (choc et discontinuité de contact).

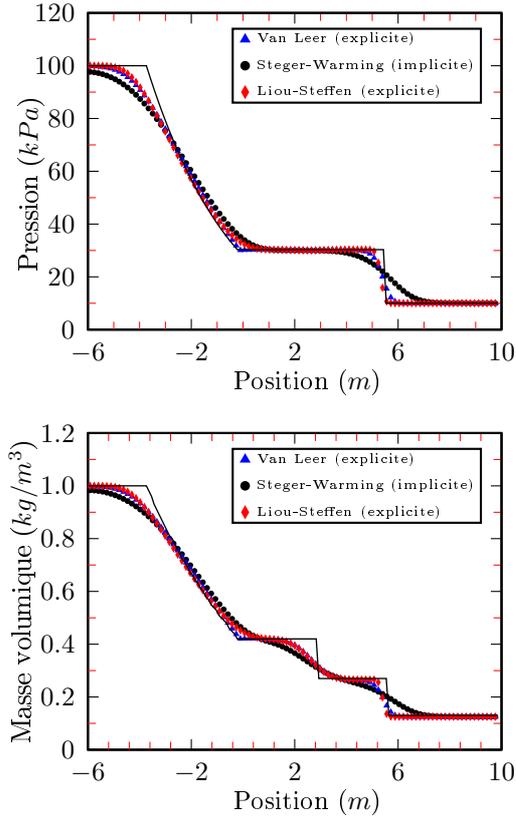


FIG. 2 – Schémas FVS appliqués au test 1, avec $x_0 = 0$, les solutions numériques (symboles) et exactes (trait) sont comparées à l'instant $t = 0.01$ s.

3.2.2 Test 2

En utilisant un nombre de CFL de 0.4 à l'instant $t = 0.01$ s, qui correspond à 52 itérations en implicite

pour le schéma de Steger-Warming et un CFL de 0.8 (85 itérations) en explicite pour Van Leer, on constate ici que la version implicite converge plus rapidement vers la solution stationnaire.

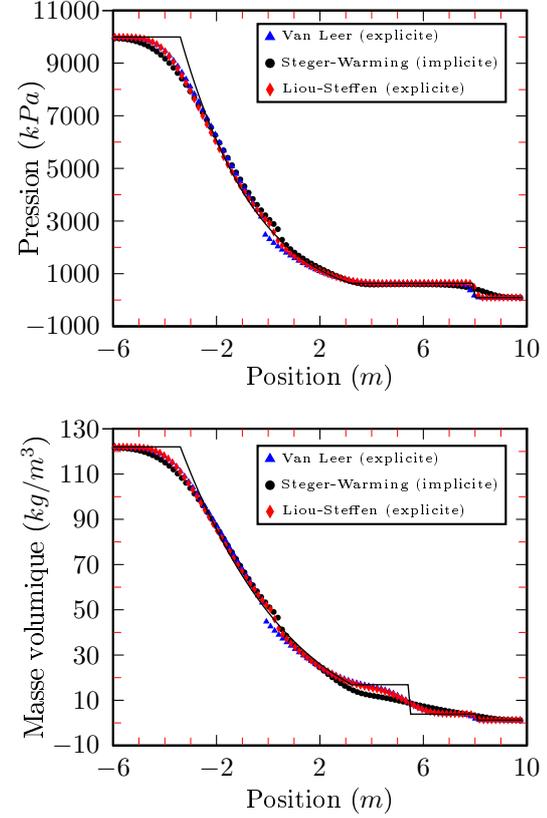


FIG. 3 – Schémas FVS appliqués au test 2, avec $x_0 = 0$, les solutions numériques (symboles) et exactes (trait) sont comparées à l'instant $t = 0.01$ s.

Dans la solution du test 2 (figure 3), l'éventail d'expansion contient un point sonique $u - a = 0$ à $x = 0$, ce qui génère une légère détente au niveau du choc donc un rapport de pression assez faible et qui est de 6.5374, ce qui indique qu'un rapport de pression initial élevé ne traduit forcément pas un choc important. En second lieu, le choc contient un point sonique de compression $u + a = 0$, qui apparemment ne pose aucun problème aux schémas numériques utilisés. En comparaison avec le schéma implicite de Steger et

Warming, les résultats de Van Leer et de Liou-Steffen sont plus précis et pratiquement identiques sauf au point sonique, où le schéma de Liou-Steffen se rapproche plus de la solution exacte. Les plus grandes différences du schéma implicite de Steger-Warming par rapport aux schémas explicites sont visibles au niveau du choc incident où la dissipation est plus importante.

3.2.3 Test 3

Le test 3 est purement théorique, il permet d'évaluer la méthode numérique en terme de précision et de robustesse, les résultats obtenus à l'instant $t = 0.009s$ comportent un choc incident assez important qui traverse le tube avec un nombre de Mach de 198, une surface de séparation et un éventail de détente (figure 4). On constate pour ce test que les versions explicites convergent plus rapidement vers la solution, et en particulier celle de Liou-Steffen (48 itérations). En faisant varier le CFL du calcul implicite, on n'arrive pas à dépasser la vitesse de convergence des versions explicites. La résolution du système principal à chaque pas en temps semble être plus sévère. On note donc une instabilité à cause du pas de temps puisque l'on obtient des résultats que lorsque le nombre de CFL se trouve réduit à 0.09, ce qui correspond à un Δt global de 0.288×10^{-5} . Dans ce cas, le calcul implicite n'apporte pas d'avantage par rapport au schéma explicite.

Les solutions numériques montrent une légère perte de monotonie à proximité du choc qui apparaît dans les résultats de pression, ainsi qu'une sous-estimation de la densité. En comparaison avec le schéma implicite de Steger-Warming, on peut dire que les schémas explicites sont plus précis, particulièrement au point sonique.

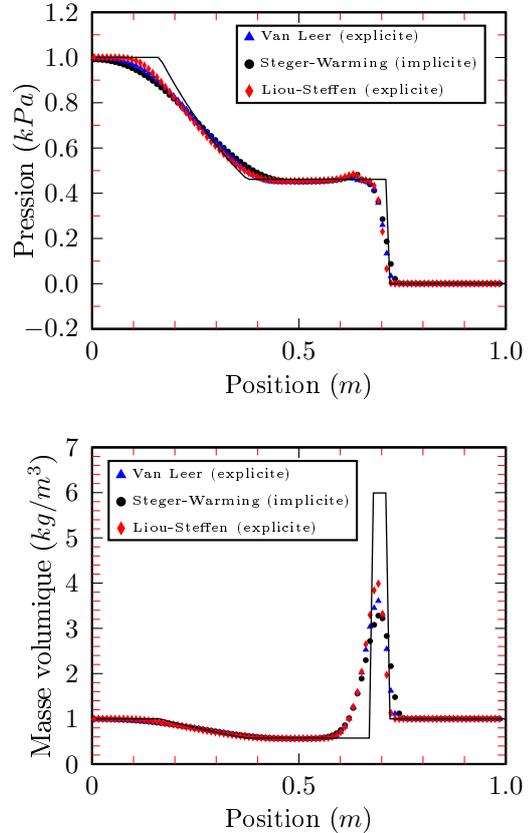


FIG. 4 – Schémas FVS appliqués au test 3, avec $x_0 = 0.5$, les solutions numériques (symboles) et exactes (trait) sont comparées à l'instant $t = 0.009 s$.

3.3 Augmentation de la précision en raffinant le maillage

Jusqu'ici, la façon d'obtenir des résultats adaptés pour représenter la propagation des ondes du système d'Euler a été discutée. Pour cela, on a considéré une approche spatiale du premier ordre, ce qui constitue une erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x)$, donc une méthode assez dissipative. Pour augmenter la précision, nous avons augmenté le nombre de nœuds à $N = 2000$ afin de permettre une meilleure distinction des résultats après un temps de calcul assez long.

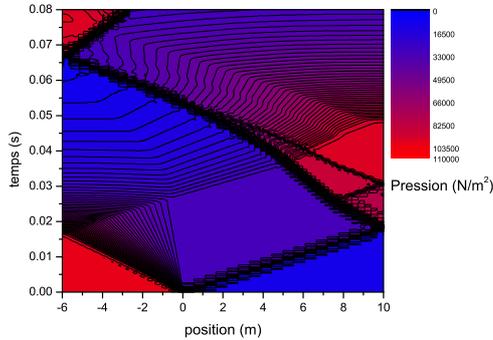


FIG. 5 – Test 1 : répartition des pressions dans le tube en fonction du temps. Les résultats sont obtenus avec le schéma implicite de Steger et Warming pour un Δt global de 0.354×10^{-3} .

3.3.1 Test1

Les figures 5 à 7 montrent une amélioration visible de la représentation des discontinuités. La réflexion des ondes de détente a été distinguée et son influence sur le choc réfléchi a été démontrée. De même, l'influence des ondes réfléchies sur la discontinuité de contact a été clairement mise en évidence numériquement. La position des ondes est facilement repérée à chaque instant. La figure 6 qui montre la répartition de la vitesse est exemplaire pour la représentation numérique des ondes. On constate d'abord la monotonie des résultats obtenus avec le schéma implicite qui génère une très bonne résolution de l'éventail de détente. De plus, l'intensité du choc réfléchi est très prononcée juste au niveau de la paroi où on est capable de donner les valeurs de référence analytiques.

L'interaction entre le choc réfléchi et la surface de contact est très bien reproduite par les résultats numériques. On peut clairement distinguer la réfraction normale du choc réfléchi provoquée par sa rencontre avec la surface de séparation (figure 7). Une partie du choc réfléchi est transmise à travers la discontinuité de contact, où la vitesse du choc transmis est légèrement ralentie. On constate aussi la formation d'une

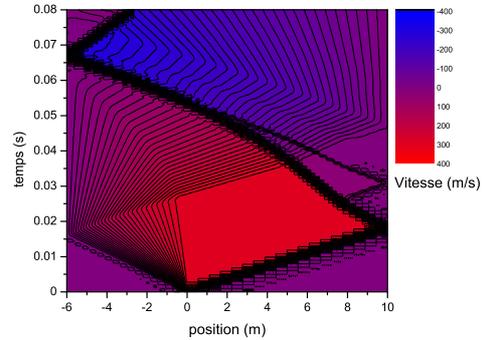


FIG. 6 – Test 1 : répartition des vitesses dans le tube en fonction du temps.

onde de choc produite par la réfraction qui se déplace vers la droite, à partir du point d'interaction. Le comportement de ces ondes qui sont une particularité du phénomène de la réfraction normale prévue par la théorie du tube à choc, a donc été clairement mis en évidence numériquement. Ceci peut être constaté pour les résultats obtenus par chacun des trois schémas FVS.

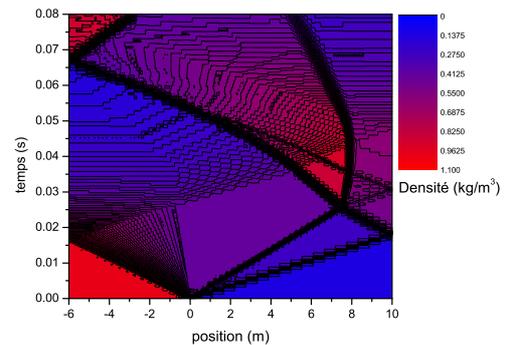


FIG. 7 – Test 1 : répartition des densités dans le tube en fonction du temps.

4 Conclusion

En se basant sur les résultats des cas tests, nous pouvons conclure que la formulation mathématique utilisée pour la résolution du système hyperbolique d'Euler est robuste, et permet de calculer des chocs forts et des détentes fortes sans oscillations, dans un fluide parfait compressible. Le choix d'une méthode implicite nous a permis la construction d'un algorithme à faible coût de calcul se comportant de manière très satisfaisante dans la plupart des tests, avec une très bonne prédiction des chocs incidents et réfléchis, notamment une parfaite distribution de pression. Cependant, la capture de façon précise de la discontinuité de contact montre qu'une décomposition de flux génère une viscosité numérique (un défaut souvent constaté dans la littérature).

Si on observe les résultats du test 3, on constate que le schéma sur-estime la pression au point sonique (le cas où la vitesse caractéristique s'annule) juste avant le choc, en revanche la masse volumique est sous-estimée en ce même point. Ces deux observations sont liées. On note aussi le point faible de la méthode implicite du premier ordre qui a tendance à être trop diffusive et à étaler les chocs sur un grand nombre de nœuds, surtout dans les cas où il s'agit de chocs relativement faibles.

Références

- [1] E.f. Toro. *Riemann Solver and Numerical Methods of Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1997.
- [2] Culbert.B. Laney. *Computational Gasdynamics*. Cambridge University Press, UK, 1998.
- [3] M. Uhlmann. *Etude de modèles de fermeture au second ordre et contribution à la résolution numérique des écoulements turbulents compressibles*. Thèse, Ecole Central de Lyon, 1997.
- [4] J.L. Steger and R.F. Warming. "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with applications to finite-difference methods". *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, 1981.
- [5] B. Van Leer. "Flux-vector splitting for the Euler equations". *Eighth International Conference of Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Vol. 170, 1982.
- [6] B. Van Leer. *Flux-Vector Splitting for the Euler Equations*. Technical Report ICASE 82-30, NASA Langley Research Center, USA, 1982.

- [7] Christophe Corre. *Schémas implicites "Méthodes numériques avancées pour l'aérodynamique"*. 2006.
- [8] *Maple 8*. Waterloo Maple Software and the University of Waterloo, 1981-2002.
- [9] C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1*. Springer, Berlin, 1991.
- [10] K.A. Hoffmann and S.T. Chiang. *Computational Fluid Dynamics Volume II*. Engineering Education System, Wichita, Kansas, USA, 2000.
- [11] H.C. Beam, R.F. Warming, and H.C. Yee. "Stability Analysis of Numerical Boundary Conditions and Implicit Finite Difference Approximation for Hyperbolic Equations". *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, 1982.
- [12] T.J. Chung. *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, UK, 2002.
- [13] G.A. Sod. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws. *J.Comput. Phys.*, 27 :1-31, 1978.
- [14] M-S. Liou and C.J. Steffen. "A new flux splitting scheme". *Journal of Computational Physics*, Vol. 107, 1993.
- [15] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 90. The Art of Scientific Computing Second Edition*. Acrobat Edition www.ulib.org, 1997.