



**HAL**  
open science

## Méthode de l'écart à la réciprocité

Andrei Constantinescu, Huy Duong Bui, Stéphane Andrieux

► **To cite this version:**

Andrei Constantinescu, Huy Duong Bui, Stéphane Andrieux. Méthode de l'écart à la réciprocité. Francois Hild et Michel Grediac. Mesures de champs et identification en mécanique des solides, Lavoisier, pp.383-398, 2011. hal-00647821

**HAL Id: hal-00647821**

**<https://hal.science/hal-00647821v1>**

Submitted on 6 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Table des matières

<b>Chapitre 13. Méthode d'Ecart à la Réciprocité</b> . . . . .	383
Stéphane ANDRIEUX, Huy Duong BUI , Andrei CONSTANTINESCU	
13.1.Introduction . . . . .	383
13.2.La méthode d'écart à la réciprocity . . . . .	385
13.2.1.Définition de l'écart à la réciprocity . . . . .	387
13.2.2.Propriété fondamentale de l'écart à la réciprocity . . . . .	387
13.3.Identification de fissures en électrostatique . . . . .	388
13.3.1. Formules d'identification pour le plan de fissure(s) . . . . .	390
13.3.2.Identification complète des fissures . . . . .	392
13.4.Identification en thermo-élasticité avec mesures de déplacement . . . . .	393
13.5.Conclusions et perspectives . . . . .	397
13.6.Bibliographie . . . . .	398



## Chapitre 13

# Méthode d'Ecart à la Réciprocité

### 13.1. Introduction

La classe de problèmes étudiée dans ce chapitre réunit l'ensemble des situations d'identification (sources, fissures, voire conditions aux limites ou paramètres physiques sur des surfaces intérieures au solide) pour lesquelles on dispose de données surabondantes sur la surface extérieure du solide. Pour un opérateur mathématique donné représentant la physique du phénomène que l'on utilise, qu'il s'agisse de conduction thermique ou électrique ou encore d'élasticité par exemple, on désigne par données surabondantes un couple de champs dont l'un seulement peut être utilisé pour formuler le problème direct. Ce problème direct est le problème usuel qui consiste à déterminer le champ solution à l'intérieur du solide à partir de la connaissance de sa géométrie, des sources éventuellement présentes et plus généralement des « chargements ». C'est ainsi que disposer à la fois des efforts appliqués et des déplacements en surface constitue une situation de données surabondantes en mécanique, de même que de disposer du flux de chaleur et de la température en thermique. De façon générale, on dispose donc de la donnée du champ « primal » qui décrit le phénomène et de la donnée correspondant aux « conditions aux limites naturelles » pour l'opérateur en jeu (conditions de Dirichlet et de Neuman pour prendre le vocabulaire mathématique associé au Laplacien).

Une approche classique de ce type de problèmes d'identification consiste à paramétrer les inconnues ou les éléments recherchés (fissures, inclusions, etc.) par un vecteur  $\boldsymbol{x}$ , à choisir l'une des données surabondantes comme « entrée » (par exemple le flux ou les efforts) et construire *via* la résolution du problème direct, un champ  $u(\boldsymbol{x})$

dont on observe la valeur sur le bord du domaine, c'est-à-dire pour lequel on compare la « sortie » à l'autre donnée dont on dispose. Pour les comparer, on utilise dans la quasi-totalité des cas une fonction d'erreur au sens des moindres carrés  $MC(u - u^m)$ . L'algorithme d'identification devient donc un algorithme de minimisation :

$$\arg \min_{\mathbf{x}} MC[u(\mathbf{x}) - u^m] \quad (13.1)$$

Cette méthode nécessite de nombreuses résolutions du problème direct et ne permet pas en général d'obtenir des résultats d'identifiabilité, c'est-à-dire de déterminer si les données dont on dispose sont suffisantes pour identifier de façon unique les éléments que l'on recherche.

Lorsque l'on dispose de données surabondantes sur l'ensemble de la surface extérieure du solide, on peut utiliser une autre approche, baptisée écart à la réciprocité, qui permet :

- en général, et *sans aucune résolution de problèmes directs*, d'obtenir une infinité d'informations sur les éléments que l'on cherche à identifier ;
- dans certains cas particuliers, d'*identifier explicitement* ces éléments.

La méthode repose sur une idée très simple : lorsque l'opérateur qui décrit la physique en jeu est *symétrique* (conduction stationnaire, élasticité linéaire, etc.) il existe une propriété dite de réciprocité qui prend différents noms selon la physique en question : réciprocité de Maxwell-Betti en élastostatique, de Rayleigh en élastodynamique harmonique, etc.. Cette propriété exprime de façon générale que pour un même solide soumis à deux « chargements » distincts  $C_1$  et  $C_2$ , et présentant des réponses distinctes  $R_1$  et  $R_2$ , le « travail » des sollicitations liées au chargement  $C_1$  dans la réponse  $R_2$  égale celui de la sollicitation liée à  $C_2$  dans la réponse  $R_1$ . C'est cette propriété qui conduit par exemple à la symétrie des matrices de « rigidité » dans les méthodes par éléments finis. L'idée de la méthode d'écart à la réciprocité est d'écrire la relation de réciprocité entre le champ réel dans le solide réel et tout champ à l'équilibre dans un solide fictif ne présentant aucun des éléments recherchés (pas de fissures, d'inclusions, de sources, etc.). Bien entendu la propriété de réciprocité n'est pas vérifiée, et la valeur de cet écart (scalaire) permet d'accéder à une sorte de « différence » entre le domaine réel et le domaine sain ou sans sources. Pour chaque champ à l'équilibre dans le solide sain, et on en connaît en général une infinité sous forme analytique dans le cas d'un solide homogène, on obtient ainsi une information par un calcul très simple d'intégrale sur le bord du solide. C'est l'exploitation judicieuse de ces informations qui permet d'obtenir dans certains cas des résultats d'identifiabilité théorique et fournit une méthode pratique d'identification, souvent traduite par des formules explicites comme dans le cas des fissures planes par exemple.

Après avoir précisé dans un cadre abstrait la méthode d'écart à la réciprocité, on étudie dans ce chapitre trois exemples d'identification : l'identification de fissures planes, puis de sources en thermique et enfin de fissures planes en thermo-élasticité, en n'utilisant que des mesures de champs de déplacement.

### 13.2. La méthode d'écart à la réciprocité

La démonstration du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti en élasticité, s'appuie sur la propriété de symétrie de la forme bilinéaire  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  intervenant dans la formulation faible du problème d'équilibre élastique du solide  $\Omega$  (avec frontière  $\partial\Omega$  et une normale extérieure  $\mathbf{n}$ ) considéré :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V}^2 \quad (13.2)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varepsilon[\mathbf{u}] : \mathbf{A} : \varepsilon[\mathbf{v}] d\Omega \quad (13.3)$$

où  $\mathbf{A}$  est le tenseur de rigidité élastique et  $\mathcal{V}$  l'espace des champs de déplacements d'énergie finie. De la même façon, tout opérateur représentant une équation de la physique et possédant cette symétrie accédera ainsi à une propriété similaire à celle de Maxwell-Betti. La liste suivante en indique pour quelques exemples l'opérateur bilinéaire et l'opérateur des conditions aux limites naturelles  $\sigma$  :

– élastodynamique harmonique à pulsation fixée :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varepsilon[\mathbf{u}] : \mathbf{A} : \varepsilon[\mathbf{v}] d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (13.4)$$

$$\sigma[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{A} : \varepsilon[\mathbf{u}]) \cdot \mathbf{n} \quad (13.5)$$

où  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sont des champs réels et virtuels de déplacement.  $\varepsilon$  est l'opérateur des déformations,  $\sigma$  l'opérateur des contraintes et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la facette considérée.

– conduction thermique ou électrique :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla v d\Omega \quad (13.6)$$

$$\sigma[u] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{k} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} \quad (13.7)$$

où  $u, v$  sont des champs réels et virtuels du potentiel thermique respectivement électrique et  $\sigma$  est l'opérateur flux ;

– acoustique harmonique (équation d'Helmholtz) :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla v d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} u \cdot v d\Omega \quad (13.8)$$

$$\sigma[u] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{k} \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} \quad (13.9)$$

où  $u, v$  sont des champs réels et virtuels du potentiel acoustique,  $\sigma$  est l'opérateur flux acoustique.

Le cas général est donc celui où le problème admet une formulation faible du type :  $a(u, v) = l(v)$ , dans laquelle  $l(v)$  est la forme linéaire du « travail » des sollicitations surfaciques, associée aux conditions aux limites naturelles du problème étudié ou volumique (sources, forces de volume, etc.) et  $a$  une forme bilinéaire symétrique.

La propriété de réciprocité exprime que pour deux formes linéaires différentes  $l^1$  et  $l^2$ , et si l'on note  $u^1$  et  $u^2$  les solutions des problèmes :

$$a(u^i, v) = l^i(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad i = 1, 2 \quad (13.10)$$

on a alors :

$$l^1(u^2) = l^2(u^1) \quad (13.11)$$

Les termes de bord font intervenir l'opérateur  $\sigma$  des conditions aux limites naturelles associé à la forme linéaire  $a$ , défini par l'équation :

$$\forall u \in \mathcal{V} : \quad a(u, v) = \int_{\partial\Omega} (\sigma[u] \cdot \mathbf{n}) \cdot v \, ds \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (13.12)$$

L'expression de l'opérateur  $\sigma$  pour différents modèles physiques est précisé dans la liste précédente.

Dans ce formalisme général, les problèmes d'identification auxquels on s'intéresse peuvent s'écrire de la façon suivante :

*L'essai réalisé ou la sollicitation appliquée conduit à un champ  $u$  dans le solide qui vérifie :*

$$a_0(u, w) + a_1(u, w) = l(w) + \int_{\partial\Omega_{ext}} f \cdot w \, ds \quad \forall w \in V \quad (13.13)$$

*expression dans laquelle la forme linéaire  $l$  (sources ou conditions sur les surfaces intérieures) et la forme bilinéaire  $a_1$  (caractéristiques physiques, inclusions etc..) sont inconnues. On dispose en revanche par mesures de champs de la valeur de  $u = U$  sur la totalité du bord du domaine. A partir des données surabondantes de bord  $(U, f)$ , il s'agit de déterminer  $l$  et  $a_1$ .*

### 13.2.1. Définition de l'écart à la réciprocité

L'écart à la réciprocité est la forme linéaire définie sur l'espace des champs d'énergie finie :

$$\mathcal{R} = \int_{\partial\Omega_{ext}} (f \cdot v - U\sigma_0[v] \cdot \mathbf{n}) ds \quad (13.14)$$

Cette forme linéaire ne fait intervenir que les quantités connues et se calcule par une intégration sur le bord extérieur du domaine.

Aucune résolution d'un quelconque problème « direct » n'est nécessaire.

L'intérêt de cette définition réside dans la propriété fondamentale de l'écart à la réciprocité, propriété qui fait intervenir non pas tous les champs  $v$  de  $\mathcal{V}$ , mais ceux qui sont « à l'équilibre » pour la forme bilinéaire connue  $a_0$ , sans sollicitation autre que des sollicitations surfaciques sur le bord extérieur du domaine. Cet espace est noté :  $\mathcal{V}_{a_0}^{eq}$  et se caractérise donc par :

$$\mathcal{V}_{a_0}^{eq} = \left\{ v \in \mathcal{V} \mid a_0(v, w) = \int_{\partial\Omega_{ext}} (\sigma_0[v] \cdot \mathbf{n}) \cdot w ds \quad \forall w \in \mathcal{V} \right\} \quad (13.15)$$

### 13.2.2. Propriété fondamentale de l'écart à la réciprocité

Pour tout champ de l'espace, l'écart à la réciprocité s'exprime également par :

$$\mathcal{R}(v) = \ell(v) - a_1(u, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_{a_0}^{eq} \quad (13.16)$$

La démonstration de cette propriété est immédiate. En effet, en prenant respectivement comme champ test  $w = u$  dans la caractérisation de  $v$ , et  $w = v$  dans la condition d'équilibre de  $u$ , il vient :

$$a_0(v, u) = \int_{\partial\Omega_{ext}} (\sigma_0[v] \cdot \mathbf{n}) \cdot u ds \quad (13.17)$$

et :

$$a_0(u, v) + a_1(u, v) = \ell(v) + \int_{\partial\Omega_{ext}} f \cdot v ds \quad (13.18)$$



On obtient l'égalité voulue par différence, en exploitant la symétrie de la forme bilinéaire  $a_0$ , bien sûr essentielle ici.

Pour chaque champ  $v$  de l'espace, on dispose donc en calculant  $(v)$  via sa définition, c'est-à-dire par une intégration sur le bord du domaine, d'une information sur les deux inconnues que sont  $\ell$  et  $a_1$ . Le principe de la méthode d'écart à la réciprocité est d'exploiter cette égalité, en choisissant judicieusement les champs  $v$ . Deux types de résultats peuvent être obtenus : des résultats théoriques d'identifiabilité d'une part, et des méthodes constructives d'identification totale ou partielle d'autre part. Les premiers répondent à la question suivante : pour un jeu de données surabondantes, existe-t-il un unique couple  $(\ell, a_1)$ , c'est-à-dire un unique ensemble de sources, de fissures, d'inclusions pour lequel la réponse du solide coïncide avec les données de bord mesurées ? Les seconds fournissent des méthodologies qui permettent de caractériser concrètement (éventuellement partiellement seulement) les inclusions, fissures, sources, etc., que renferme le solide.

On donne dans la suite de ce chapitre des exemples de tels résultats. Il faut noter que lorsqu'il est possible de construire analytiquement les champs auxiliaires  $v$  nécessaires à l'exploitation de l'écart à la réciprocité (et c'est le cas assez souvent), alors aucune résolution de problème direct n'est nécessaire. Les calculs se limitent à des intégrations sur la surface du solide. Cette spécificité fait de la méthode d'écart à la réciprocité une technique d'identification extrêmement rapide et efficace. En contrepartie de ses deux grandes limitations, il faut souligner la nécessité de disposer de données sur la totalité du bord du solide d'une part, et l'absence de méthode systématique de choix des champs  $v$  « judicieux » d'autre part.

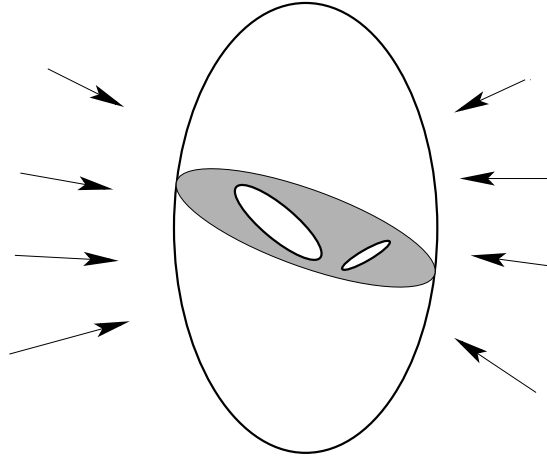
Quelques propositions pour pallier ces deux limitations ont été formulées mais elles sortent du cadre de ce chapitre.

### 13.3. Identification de fissures en électrostatique

Dans le cas de fissures planes, il est possible d'établir des formules donnant l'expression de la normale au plan renfermant une ou plusieurs fissures, et même de déterminer complètement ce plan. Prenons l'exemple de la conduction thermique (ou électrique) stationnaire.

Si le solide est à l'équilibre, pour un flux de chaleur imposé ou connu (*via* une condition d'échange par exemple) égal à  $f$  sur la surface extérieure, on aura les équations suivantes où  $k$  désigne la conductivité du milieu et le  $T$  champ de température :

$$\operatorname{div}(k\nabla T) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad k\nabla T \cdot \mathbf{n} = f \quad \text{sur } \partial\Omega_{ext} \quad (13.19)$$



**Figure 13.1.** Fissures planes à l'intérieur d'un solide

Dans ce cas la frontière  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$  est formée de la frontière extérieure du solide  $\partial\Omega_{ext}$  et  $\Gamma$  l'ensemble des lèvres des fissures  $\Gamma_j, j = 1, N$  (voir 13.1).

Sur les fissures  $\Gamma_j, j = 1, N$ , on suppose que règne une condition de type résistance de contact (non-linéaire), c'est-à-dire une condition (inconnue) qui relie le flux normal à la fissure à la discontinuité de température  $[[T]]$  entre les lèvres de la fissure.

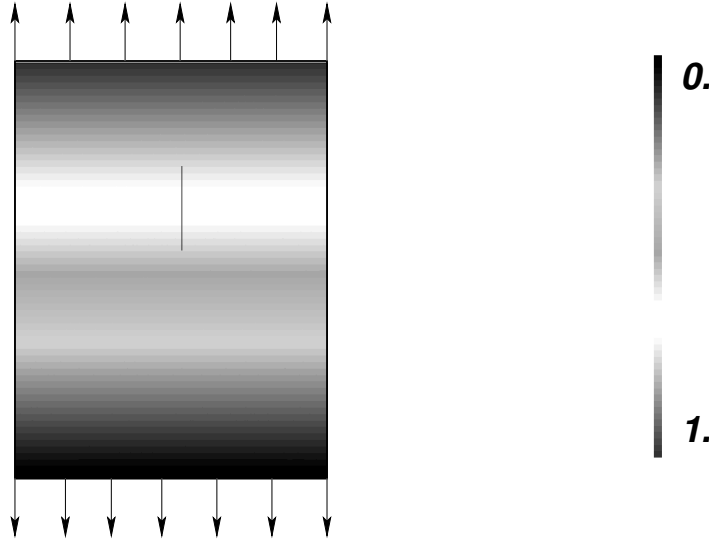
$$k\nabla T \cdot \mathbf{N}_j = r_j ([[T]]) \text{ sur } \Gamma_j, \quad \forall j = 1, \text{ etc.}, N \quad (13.20)$$

Enfin, on connaît par mesure la température  $T^m$  sur la surface extérieure du solide. Pour ces équations, l'écart à la réciprocité s'écrit :

$$\mathcal{R}(v) \int_{\Omega_{ext}} [f \cdot v - (k\nabla v \cdot \mathbf{n}) \cdot T^m] ds \quad (13.21)$$

On peut alors facilement établir la propriété fondamentale de l'écart à la réciprocité :

$$\mathcal{R}(v) = \sum_{j=1, N} \nabla v \cdot \mathbf{N}_j [[T]] ds \quad \forall v \text{ tel que } \operatorname{div} k\nabla v = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (13.22)$$



**Figure 13.2.** Exemple de sollicitation non-identifiante pour des fissures planes.  
Les niveaux de gris représentent les isovaleurs du potentiel  $u$

### 13.3.1. Formules d'identification pour le plan de fissure(s)

Si les fissures sont toutes situées dans un même plan  $\Pi$  de normale  $N$ , alors en choisissant comme champs auxiliaires des fonctions  $v$  linéaires, plus précisément les projections du point courant de l'espace  $\boldsymbol{x}$  sur les différents axes de coordonnées, on obtient :

$$x_i(\boldsymbol{x}) = x_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.23)$$

on aboutit aux formules suivantes de détermination de la normale et de la moyenne de la discontinuité de température sur les fissures :

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{L}}{\|\boldsymbol{L}\|} \quad \boldsymbol{L} = \mathcal{R}(x_i)\boldsymbol{e}_i \quad i = 1, 3 \quad (13.24)$$

et :

$$\left\| \sum_{j=1}^N \boldsymbol{e}_j \int_{\Gamma_i} \llbracket T \rrbracket ds \right\| = \frac{1}{k} \|\boldsymbol{L}\| \quad (13.25)$$

De même, on peut déterminer complètement le plan  $\Pi$  en utilisant des champs quadratiques, mais il faut prendre garde au fait que tous ne sont pas harmoniques et ne peuvent donc pas être utilisés car ils ne satisfont pas la propriété d'équilibre dans le domaine sans fissures. En effet, en effectuant un changement de repère  $x_k, k = 1, 2, 3$  dont la coordonnée  $x_3$  est dirigée selon la normale  $\mathbf{N}$  qui vient d'être déterminée, l'équation du plan  $\Pi$  est maintenant donnée par  $x_3 + C = 0$ . La constante  $C$  s'obtient en utilisant le champ auxiliaire :

$$v(\mathbf{x}) = x_2^2 - x_3^2 \quad (13.26)$$

Comme la normale de la fissure est orientée suivant  $x_3$  on obtient

$$\nabla v \cdot \mathbf{N} = -2x_3$$

L'intégration de l'équation (13.22) sur le plan de la fissure défini par  $x_3 + C = 0$ , ceci pour le champs  $v$  particulier défini ci-dessus, conduit à la valeur suivante :

$$C = \frac{1}{2\|\mathbf{L}\|} \mathcal{R}(x_2^2 - x_3^2) \quad (13.27)$$

Ces formules montrent qu'une seule mesure permet d'identifier le plan refermant les fissures, et que cette détermination ne nécessite que quatre calculs très simples :

(i-iii) pour  $i=1,2,3$  :

$$\mathcal{R}(x_i) = \int_{\Omega_{ext}} [f x_i - k n_i T^m] ds$$

(iv)

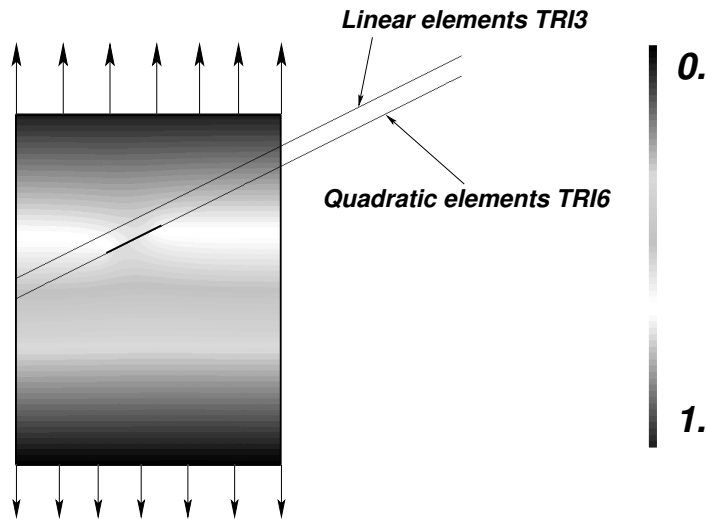
$$\mathcal{R}(x_2^2 - x_3^2) = \int_{\Omega_{ext}} [f(x_2^2 - x_3^2) - k(x_2 n_2 - x_3 n_3) T^m] ds$$

Une illustration d'une identification de plan de fissure est présentée sur la figure 13.3. On remarque une meilleure précision pour la position du plan en utilisant des élément quadratiques dans le calcul de la température  $T$  et des champs auxiliaires. L'erreur observée pour les éléments linéaires provient directement de l'erreur d'approximation des champs quadratiques avec ce type d'éléments.

On notera la condition d'identifiabilité :

$$\int_{\Gamma} \llbracket T \rrbracket ds \neq 0 \quad (13.28)$$

qui s'interprète simplement par l'exigence que la sollicitation appliquée au solide « excite » les fissures en moyenne. Les fissures ne sont discernables que si elles sont le siège d'une discontinuité de température (puisque l'absence de source impose la continuité du flux de chaleur), lorsque la sollicitation ne conduit pas à ces discontinuités, l'essai n'est pas pertinent. La figure 13.2 montre une telle situation.

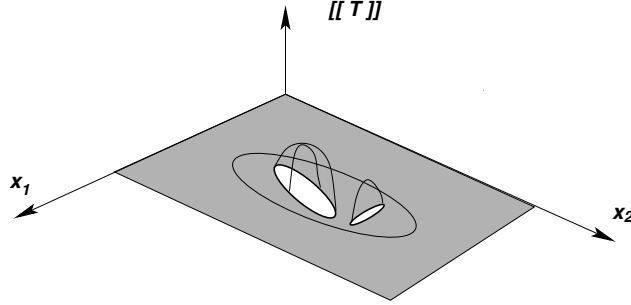


**Figure 13.3.** Exemple d'identification de position du plan de la fissure pour des reconstructions utilisant des éléments finis linéaires ou quadratiques dans le calcul de la température  $T$  et de la fonction adjointe  $v$

### 13.3.2. Identification complète des fissures

Une fois le plan de fissure déterminé, il est possible de choisir les champs auxiliaires pour identifier complètement les fissures, c'est-à-dire pour déterminer leur position et leur forme dans le plan. Pour cela, on reconstruit la décomposition en série de Fourier des discontinuités de température dans le plan  $\Pi$  en s'appuyant sur un résultat mathématique qui assure que le support des fissures coïncide avec le support des discontinuités : en d'autres termes, il est physiquement impossible que la discontinuité de température s'annule sur une partie finie du domaine occupé par les fissures (voir schéma sur la figure 13.4).

En étendant le saut des températures  $[[T]]$  par zéro hors des fissures dans un rectangle  $R = [0, L] \times [0, H]$  contenant l'intersection du plan  $\Pi$  avec le solide, et avec



**Figure 13.4.** Extension par zéro de la discontinuité de température  $[[T]]$  dans un rectangle  $R$  contenant l'intersection du plan  $P$  et du solide

les fonctions auxiliaires suivantes complétées des fonctions similaires comportant les combinaisons de fonctions sinus et cosinus  $w_{pq}^{cc}, w_{pq}^{cs}, w_{pq}^{sc}$  on obtient :

$$w_{pq}^{ss}(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{pq}}} \sin\left(\rho\pi \frac{X_1}{L}\right) \sin\left(\rho\pi \frac{X_2}{H}\right) \sinh\left(\sqrt{\lambda_{pq}} X_3\right)$$

$$\lambda_{pq} = \pi^2 \left( \frac{p^2}{L^2} + \frac{q^2}{H^2} \right)$$

L'écart à la réciprocité qui s'écrit pour les premières fonctions par exemple :

$$\mathcal{R}(w_{pq}^{ss}) = \int_R [[T]] \sin\left(\rho\pi \frac{X_1}{L}\right) \sin\left(\rho\pi \frac{X_2}{H}\right) dX_1 dX_2 \quad (13.29)$$

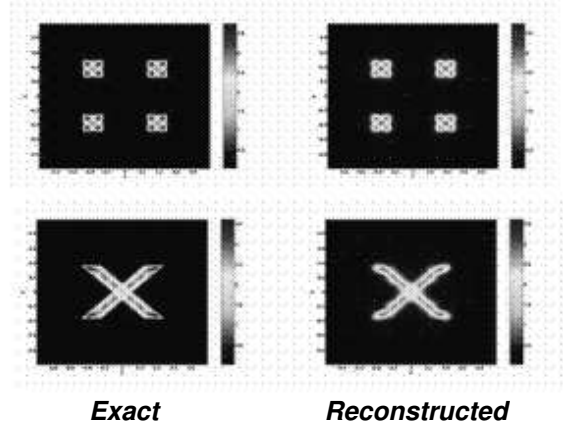
permet de déterminer les composantes de Fourier de  $[[T]]$ .

Des résultats similaires ont été obtenus avec l'opérateur de Lamé, c'est-à-dire en exploitant le champ de déplacement élastique [AND 92] dans le solide avec l'opérateur de Helmholtz [BEN 05]. Le résultat d'une telle identification est montré sur la figure 13.5.

### 13.4. Identification en thermo-élasticité avec mesures de déplacement

On considère un solide élastique isotrope et homogène soumis à une sollicitation thermique uniquement. La relation contrainte-déformation s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha T \mathbf{I}_2) \quad \mathbf{A} \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 + \frac{E}{1 + \nu} \mathbf{I}_4 \quad (13.30)$$



**Figure 13.5.** Fissures multiples et fissures non convexes : saut des champs originaux et reconstruits (Ben Abda et al., 2005)

où  $\alpha$  est le coefficient de dilation thermique linéaire,  $E$  le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $T$  l'écart à la température de référence du matériau.  $\mathbf{I}_2$  et  $\mathbf{I}_4$  représentent les tenseurs unité d'ordre 2 et respectivement 4.

Un cas expérimental intéressant est celui d'une sollicitation thermique quelconque imposée (et non mesurée) sur un solide libre de tout chargement, pour lequel on se borne à relever *seulement* le champ de déplacement  $\mathbf{u}^r$  en surface.

Les équations d'équilibre thermo-élastique et d'évolution thermique sont les suivantes dans le cadre des petites perturbations et en négligeant les effets d'inertie mécanique :

	Evolution thermique	Equilibre thermo-élastique
dans $\Omega \setminus \Gamma$	$\rho c \dot{T} - \text{div } k \nabla T = s$	$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$
sur $\Gamma$	$k \nabla T \cdot \mathbf{N} = r_T(\llbracket T \rrbracket)$	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = r(\llbracket u \rrbracket)$
sur $\partial\Omega$	$k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \Phi$	$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$
sur $\partial\Omega$		$\mathbf{u} = \mathbf{u}^D$
dans $\Omega \setminus \Gamma$	$T = T^0$	

La source de chaleur  $s$ , le flux surfacique  $\varphi$  et la température initiale  $T_0$  ne sont pas connus, de même que la résistance thermique  $r_T$  sur les fissures ou la rigidité de

contact  $r$ . L'écart à la réciprocity mécanique est défini à chaque instant  $t \in (0, D)$  de façon usuelle pour des champs de déplacements réguliers par la formule :

$$\mathcal{R}_t(v) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^r \cdot (\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(v)) \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (13.31)$$

dans laquelle on a tenu compte de la condition de surface libre au bord du solide.

Pour des champs de déplacement auxiliaires  $v$ , à l'équilibre dans le solide et à divergence nulle, son interprétation dans le cadre thermo-élastique est donnée pour par la propriété suivante :

$$\mathcal{R}_t(v) = \int_{\Gamma} \llbracket u \rrbracket \cdot (\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(v)) \cdot \mathbf{N} \, ds \quad (13.32)$$

pour tous les champs auxiliaires de l'espace :

$$\mathcal{V}_{div} = \left\{ v \mid \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(v) : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(w) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(v)) \cdot \mathbf{n} \, ds \, \forall w \text{ avec } \operatorname{div} w = 0 \right\}$$

Grâce à la condition de divergence nulle sur les champs auxiliaires, il est donc possible de n'exploiter que les champs de déplacement mesurés à la surface du solide sans aucune autre information sur le chargement ou l'état thermique de la structure.

En définissant les champs à divergence nulle suivants :

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{x}) = 2(3x_i \mathbf{e}_i - \mathbf{x}) \quad i = 1, 3 \quad (13.33)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = 2(x_3 x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 x_3 \mathbf{e}_2 + x_2 x_1 \mathbf{e}_3) \quad (13.34)$$

et pour des fissures contenues dans un plan, les composantes du tenseur

$$\hat{\mathbf{R}} = \operatorname{dev} \mathbf{R} = \mathbf{R} - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{R}) \mathbf{I}_2 \quad (13.35)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} (\mathbf{N} \otimes \mathbf{U} + \mathbf{U} \otimes \mathbf{N}) \quad (13.36)$$

$$\mathbf{U} = \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \, ds \quad (13.37)$$

sont données par les écarts la réciprocity suivants :



– si  $i \neq j$  alors pour  $k$  différent des deux indices  $i$  et  $j$  on écrit :

$$\hat{R}_{ij} = \frac{1}{8\mu} \mathcal{R}_t(\mathbf{w}, k) \quad k \neq j \quad k \neq i$$

– si  $i = j$  alors :

$$\hat{R}_{ii} = \frac{1}{12\mu} \mathcal{R}_t(\mathbf{v}_i) \quad (\text{sans sommation})$$

La question qui se pose maintenant est la détermination du vecteur normal  $\mathbf{N}$  et du vecteur intégrale du saut de déplacement  $\mathbf{U}$  à partir de la connaissance de  $\hat{\mathbf{R}}$ . Dans la suite on notera les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) ordonnées par valeurs décroissantes et les directions principales normées correspondantes ( $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ ).

On est nécessairement dans l'un des deux cas suivants :  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{U}$  sont (i) colinéaires ou (ii) ne le sont pas.

Si  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{U}$  sont colinéaires :

$$\mathbf{U} = U\mathbf{N}$$

alors nécessairement  $\mathbf{N} = \mathbf{g}_1$ . Comme :  $\mathbf{R} = U\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}$ , les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}$  sont liées à  $U$  par les relations suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}U \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{3}U$$

si  $U > 0$ .

Si  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{U}$  ne sont pas colinéaires, on note :

$$\mathbf{U} = U\mathbf{d}_u$$

Alors on peut facilement montrer que  $\mathbf{u} \times \mathbf{N}$  est colinéaire avec  $\mathbf{g}_3$ . Ensuite il en résulte que nécessairement :

$$\mathbf{N} = n_1\mathbf{g}_1 + n_3\mathbf{g}_3 \quad \mathbf{d}_u = n_1\mathbf{g}_1 - n_3\mathbf{g}_3$$

Une discussion sur l'ordre des valeurs propres (Andrieux et Bui, 2006), et l'hypothèse que  $U$  soit positif conduisent alors à la relation suivante pour les directions 1 et 3 :

$$n_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}} \quad n_3 = \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}}$$

Il est important de remarquer que l'on ne peut pas distinguer les directions  $N$  et  $U$ . Dans une application pratique, il faut tenir compte de la constance de  $N$  au cours du temps tandis que  $u$  varie en général avec le chargement.

Enfin, l'amplitude du saut du déplacement  $U$  est donné par :

$$U = \left\| \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket ds \right\| = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_3}$$

Une fois la normale connue (en employant les formules précédentes à deux instants différents) on effectue un changement de coordonnées : le vecteur  $E_3$  est pris parallèle à la normale au plan  $\Pi$  défini par  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 + C = 0$ . On identifie la constante localisant le plan affine renfermant les fissures à l'aide du résultat suivant :

$$C = -\frac{1}{6\mu \int_{\Gamma} \llbracket u_x \rrbracket ds} \mathcal{R}_t(\mathbf{h}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{h} = 3(x_3^2 - x_2^2)\mathbf{e}_1 \quad (13.38)$$

### 13.5. Conclusions et perspectives

La technique de l'écart à la réciprocité présente un grand avantage : celui de la simplicité. Un certain nombre de problèmes d'identification ont été résolus d'un point de vue théorique ou numérique. L'identification de fissures planes à partir des différents familles des champs adjoints a été discuté dans les cas suivants :

- en diffusion *électrique* ou *thermique stationnaire* (équation de la diffusion avec potentiel scalaire) dans [AND 92, AND 99, AND 96];
- en *thermique transitoire* dans [BEN 01];
- en *acoustique transitoire* (équation de propagation avec potentiel scalaire) dans [BUI 99];
- en *élasticité statique* (équation de diffusion avec potentiel vectoriel) dans [BAN 97, BAN 99];
- en *élastodynamique* (équation de propagation avec potentiel vectoriel) dans [BUI 04, BUI 05];
- en *thermo-élasticité* dans [AND 06];
- en *visco-élasticité dynamique* avec une loi de comportement de type Zehner (équation de Helmholtz) dans [BUI 10];
- en *dispersion acoustique* (équation de Helmholtz avec potentiel scalaire) [COL 05, BEN 05];

L'inconvénient de la méthode, comme d'ailleurs pour un certain nombre des problèmes inverses, est l'obligation de connaître les champs mesurés sur la frontière complète du domaine. La recherche de moyens adaptés pour contourner cette difficulté reste un problème ouvert pour les années à venir.

### 13.6. Bibliographie

- [AND 92] ANDRIEUX S., BEN ABDA A., « Identification des fissures planes par une donnée de bord unique : un procédé direct de localisation et d'identification », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Série I)*, vol. 315, p. 1323-1328, 1992.
- [AND 96] ANDRIEUX S., BEN ABDA A., « Identification of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formulae », *Inverse Problems*, vol. 12, n° 5, p. 553-563, 1996.
- [AND 99] ANDRIEUX S., BEN ABDA A., BUI H.D., « Reciprocity principle and crack identification », *Inverse Problems*, vol. 15, n° 1, p. 59-65, 1999.
- [AND 06] ANDRIEUX S., BUI H.D., « Écart à la réciprocité et identification de fissures en thermo-élasticité isotrope transitoire », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Série I)*, vol. 334, n° 4, p. 225-229, 2006.
- [BAN 97] BANNOUR T., BEN ABDA A., JAOUA M., « A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks », *Inverse Problems*, vol. 13, n° 4, p. 899-917, 1997.
- [BAN 99] BANNOUR T., BEN ABDA A., JAOUA M., « Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements », *Inverse Problems*, vol. 15, n° 1, p. 67-77, 1999.
- [BEN 01] BEN ABDA A., BUI H.D., « Reciprocity principles and crack identification in transient thermal problems », *Inverse and Ill Posed Problems*, vol. 9, n° 1, p. 1-6, 2001.
- [BEN 05] BEN ABDA A., DELBARY F., HADDART H., « On the use of the reciprocity-gap functional in inverse scattering from planar cracks », *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 15, n° 10, p. 1553-1574, 2005.
- [BUI 99] BUI H.D., CONSTANTINESCU A., MAIGRE H., « Diffraction acoustique inverse de fissure plane : solution explicite pour un solide borné », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (série II)*, vol. 327, p. 971-976, 1999.
- [BUI 04] BUI H., CONSTANTINESCU A., MAIGRE H., « Numerical identification of planar cracks in elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap », *Inverse Problems*, vol. 20, p. 993-1001, 2004.
- [BUI 05] BUI H.D., CONSTANTINESCU A., MAIGRE H., « An exact inversion formula for determining a planar fault from boundary measurements », *Inverse and Ill Posed Problems*, vol. 13, n° 6, p. 553-565, 2005.
- [BUI 10] BUI H.D., CHAILLAT S., CONSTANTINESCU A., GRASSO, E., « Identification of a planar crack in Zener type viscoelasticity », *Annals of Solid and Structural Mechanics*, vol. 1, p. 3-8, 2010,
- [COL 05] COLTON D., HADDAR H., « An application of the reciprocity gap functional to inverse scattering theory », *Inverse Problems*, vol. 21, n° 1, p. 383-398, 2005.