

NOMBRES COMPLEXES, et isométries de \mathbb{C}^2

AUTEUR : Cohen Mario.
Maîtrise ES Sciences.

Deuxième version: Novembre 2011.

I-Introduction.

Dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , un vecteur $\vec{U}(x, y)$ a pour affixe le nombre complexe

$$z = x + iy .$$

L'addition vectorielle dans \mathbb{C}^2 correspond à l'addition des des nombres complexes.

Une autre similarité entre le plan des réels et celui des complexes est que la norme $\|\vec{U}\|$ du vecteur \vec{U} est égale au module de son affixe z .

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \text{ et } |z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 .$$

Une Isométrie peut donc être considérée comme une fonction $I(z)$ de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui préserve les distances $|I(z_1) - I(z_2)| = |z_1 - z_2| \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Des exemples d'isométries dans le plan des réels, sont les translations de vecteur non nul d'affixe v $I(z) = z + v$, ou les rotations autour de l'origine d'angle θ qui transforme z en

$$I(z) = e^{i\theta} z. e^{i\theta} \text{ est le nombre complexe égal à } \cos(\theta) + i \sin(\theta) \text{ avec } |e^{i\theta}| = 1 .$$

Si $\theta = 90$ degrés la rotation $I(z) = iz$ envoie $\gamma \in \mathbb{C}$ dans $i\gamma$ qui est l'affixe d'un vecteur orthogonal au vecteur d'affixe γ . On déduit que l'ensemble $\{\gamma, i\gamma\}$ est une base orthogonale de \mathbb{C}^2 pour tout complexe $\gamma \in \mathbb{C}$.

une autre propriété importante de \mathbb{C} est que le module des nombres complexes est compatible avec la multiplication, la division et l'opération du conjugué.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ et } |\bar{z}| = |z| .$$

Pour toutes ces raisons, nous pouvons déterminer les isométries du plan, en utilisant les nombres complexes.

Au paragraphe II, nous établirons les formules des toutes les isométries de \mathbb{R}^2 .

Nous justifierons, les caractéristiques géométriques de chaque isométrie et prouverons le type d'équation qui lui correspond au paragraphe III.

Nous terminerons le présent exposé, en décrivant une méthode pour déterminer la droite de réflexion et le vecteur de translation, pour les symétries axiales ou glissées.

II) Equations générales des isométries du plan.

Considerons les fonctions :

$$h_1, h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, h_1(z) = \alpha z + \beta, h_2(z) = \alpha \bar{z} + \beta \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \text{ et } \beta \text{ quelconque.}$$

Ces fonctions sont des isométries :

$$\begin{aligned} |h_1(z_1) - h_1(z_2)| &= |\alpha(z_1 - z_2)| = |\alpha| \cdot |z_1 - z_2| = 1 \cdot |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2| \\ |h_2(z_1) - h_2(z_2)| &= |\alpha(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)| = |\alpha| \cdot |\overline{z_1 - z_2}| = 1 \cdot |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

Nous allons prouver que toute isométrie a pour équation soit $h_1(z)$ ou $h_2(z)$.

Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2 :

Toute isométrie du plan qui laisse fixe 0,1 et i est l'isométrie identité.

Preuve : soit f une isométrie laissant fixe 0,1,i : $f(0) = 0, f(1) = 1$ et $f(i) = i$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z) - f(0)| = |z - 0| = |z| \\ |f(z) - 1| &= |f(z) - f(1)| = |z - 1| \\ |f(z) - i| &= |f(z) - f(i)| = |z - i|. \end{aligned}$$

Géométriquement z et $f(z)$ se trouvent à égales distances des trois points O, A et B d'affixes respectives O(0), A(1) et B(i). Donc z et $f(z)$ sont confondus avec le point de rencontre de médiatrices des segments OA et OB. On déduit que $f(z) = z$.

Etablissons la preuve algébrique de cette affirmation, en élevant au carré chacune des identités du début on obtient :

$$f(z) \cdot \overline{f(z)} = z \cdot \bar{z} \quad (f(z) - 1) \cdot \overline{(f(z) - 1)} = (z - 1) \cdot \overline{(z - 1)} \quad (f(z) - i) \cdot \overline{(f(z) - i)} = (z - i) \cdot \overline{(z - i)}$$

Effectuons les produits des parenthèses pour la deuxième et la troisième égalité on trouve :

$$f(z) \cdot \overline{f(z)} - \overline{f(z)} - f(z) + 1 = z \cdot \overline{z} - \overline{z} - z + 1$$

$$f(z) \cdot \overline{f(z)} - if(z) + if(z) + 1 = z \cdot \overline{z} - iz + iz + 1$$

Comme $f(z) \cdot \overline{f(z)} = z \cdot \overline{z}$ en simplifiant $f(z) + \overline{f(z)} = z + \overline{z}$ et $f(z) - \overline{f(z)} = z - \overline{z}$.

Les nombres complexes z et $f(z)$ ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, ce qui prouve que $f(z) = z$.

Théorème 1.2.

Toute isométrie du plan est donnée par une des deux équations :

$$h(z) = \alpha z + \beta \text{ ou } h(z) = \alpha \overline{z} + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1, \beta \text{ quelconque.}$$

Démonstration :

Soit h une isométrie quelconque de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Définissons

$$h(0) = \beta \text{ et } h(1) - h(0) = \alpha$$

Considérons maintenant la fonction définie par $k(z) = \frac{h(z) - \beta}{\alpha} = \frac{h(z) - h(0)}{h(1) - h(0)}$.

Nous affirmons que $k(z)$ est une isométrie qui laisse fixe 0 et 1 parce que :

$$|k(z_1) - k(z_2)| = \left| \frac{h(z_1) - h(z_2)}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|} |h(z_1) - h(z_2)| = |z_1 - z_2| \quad (|\alpha| = 1)$$

$$k(0) = \frac{\beta - \beta}{\alpha} = 0 \quad k(1) = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Trouvons la valeur $k(i)$. Comme $k(z)$ laisse fixe 0 et 1 nous déduisons que :

$$|k(i)| = |i| = 1 \quad |k(i) - 1| = |i - 1| = \sqrt{2}$$

$k(i)$ se trouve donc sur le cercle unité et sur le cercle centré en 1 et de rayon égale à $\sqrt{2}$. Si

$k(i) = x_0 + iy_0$ le couple (x_0, y_0) est solution du système :

$x^2 + y^2 = 1$ et $(x-1)^2 + y^2 = 2$. Les solutions sont $(0,1)$ ou $(0,-1)$, les valeurs possibles de $k(i)$ sont donc i ou $-i$.

Si $k(i) = i$, par le Lemme 1.2 $k(z)$ est l'identité donc $k(z) = z$.

Si $k(i) = -i$ alors $\overline{k(z)}$ est une isométrie qui laisse fixe $0,1$ et i donc

$$\overline{k(z)} = z \Rightarrow k(z) = \bar{z}.$$

On a donc de la définition de : $k(z)$

$$z = \frac{h(z) - \beta}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \bar{z} = \frac{h(z) - \beta}{\alpha} \text{ ce qui prouve le théorème 1.2.}$$

Corollaire : toute isométrie est inversible .

Toute isométrie du plan est de la forme :

$$h(z) = \alpha z + \beta \quad \text{ou} \quad h(z) = \alpha \bar{z} + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1, \beta \text{ quelconque, d'après le théorème 1.2.}$$

$$\text{En passant à l'inverse, on obtient suivant le cas : } h^{-1}(z) = \frac{1}{\alpha} \cdot z - \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ou} \quad h^{-1}(z) = \frac{1}{\alpha} \cdot \bar{z} - \frac{\bar{\beta}}{\alpha}$$

avec $\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|} = 1$. Dans chaque cas l'inverse est donc une isométrie, car son équation

correspond à une des formes générales des isométries.

Nous verrons que les différentes isométries du plan se classent en cinq catégories :

L'isométrie identité, les translations, rotations, réflexions et les symétries glissées.

Une symétrie glissée est par définition, la composition d'une réflexion par une translation, de vecteur parallèle à la droite de réflexion.

Le tableau suivant illustre les relations que nous allons prouver, entre le type d'isométrie du plan et son équation dans \mathbb{C} .

TABLEAU DES ISOMETRIES DE \mathbb{C}

Dans ce tableau $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = 1$ et $\gamma^2 = \alpha$

Isométrie	Equation	Points fixes.
Identité	$h(z) = z$	\mathbb{C}
Translation	$h(z) = z + \beta \quad \beta \neq 0$	\emptyset
Rotation	$h(z) = \alpha z + \beta \quad \alpha = 1$	$z_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha}$
Réflexion	$h(z) = \alpha \bar{z} + \beta \quad \alpha = 1, \frac{\beta^2}{\alpha} \leq 0$	droite $\frac{\beta}{2} + \gamma$
Symétrie glissée	$h(z) = \alpha \bar{z} + \beta \quad \alpha = 1, \frac{\beta^2}{\alpha}$ n'est pas ≤ 0	\emptyset

Soit $h_1, h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_1(z) = \alpha z + \beta$, $h_2(z) = \alpha \bar{z} + \beta$, pour prouver le type d'isométrie représentée par ces deux équations nous devons examiner l'existence et la nature de leurs points fixes. Un point z_0 est dit un point fixe d'une isométrie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si $f(z_0) = z_0$.

Par exemple pour l'identité tout point du plan est un point fixe, pour la réflexion nous savons que chaque point de la droite de réflexion reste fixe. Une rotation a un seul point fixe qui est le centre de la rotation.

La translation de vecteur non nul n'a pas de point fixe, tout comme la symétrie glissée.

Dans le cas de ces deux isométries, elles ne sont donc pas discernables par leurs points fixes, mais le seront comme nous allons voir par la forme de leur équation.

Considérons les points fixes de l'équation générale

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, h(z) = \alpha z + \beta \quad |\alpha| = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Si $\alpha = 1$ alors $h(z) = z + \beta$ est une translation et ne possède pas de point fixe pour $\beta \neq 0$.

Quand $\beta = 0$, elle se réduit à l'isométrie identité et dans ce cas tous les points du plan sont des points fixes.

Si $|\alpha| = 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\alpha \neq 1$, $h(z) = \alpha z + \beta$ possède le seul point fixe $z_0 = \frac{\beta}{1 - \alpha}$.

Nous savons que la seule isométrie qui possède un seul point fixe est la rotation. Réécrivons $h(z)$ de façon équivalente.

$h(z) = \alpha z + (1 - \alpha)z_0 \Rightarrow h(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$ Nous allons montrer que c'est l'équation d'une rotation autour de z_0 .

Nous savons que $r(z) = \alpha z$ avec $|\alpha| = 1$ est une rotation autour de l'origine O . Considérons

$(t_{z_0} \circ r \circ t_{z_0}^{-1})$ avec $t_{z_0} = z + z_0$. C'est une isométrie car t_{z_0} est inversible et la composition de deux isométries est une isométrie. On vérifie que $(t_{z_0} \circ r \circ t_{z_0}^{-1})$ a pour point fixe $t_{z_0}(0) = z_0$. Comme aussi $h(z) = (t_{z_0} \circ r \circ t_{z_0}^{-1})(z) = \alpha(z - z_0) + z_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, nous déduisons que $h(z)$ est une rotation autour de z_0 , de même angle que la rotation $r(z) = \alpha z$ autour de O .

Ceci prouve les trois premières équations du tableau des isométries.

Pour les deux dernières équations du tableau, considérons l'existence des points fixes pour

l'équation $h(z) = \alpha \bar{z} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. C'est à dire que nous cherchons précisément, les solutions de $z = \alpha \bar{z} + \beta$, $z \in \mathbb{C}$. Notons que l'équation $z = \bar{z}$ a tout nombre réel comme point fixe tandis que $z = \bar{z} + 3$ n'a aucun point fixe.

Nous prouverons donc que :

$h(z) = \alpha \bar{z} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, soit possède tous les points d'une droite comme points fixes et c'est l'équation, d'une réflexion par rapport à cette droite. Soit qu'elle n'a aucun point fixe et représente dans ce cas, une symétrie glissée.

Soit z_0 un point fixe de $h(z) \Rightarrow z_0 = \alpha \overline{z_0} + \beta$. Posons :

$g_\alpha(z) = z - \alpha \overline{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$. On vérifie que z_0 est un point fixe de $h(z)$, si l'image de z_0 par g_α est

égale à β car $g_\alpha(z_0) = z_0 - \alpha \overline{z_0} = \beta$

g_α est une transformation \mathbb{C} -linéaire sur \mathbb{C} car

$$g_\alpha(z_1 + z_2) = g_\alpha(z_1) + g_\alpha(z_2) \quad \forall z_1, \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad g_\alpha(cz) = c g_\alpha(z) \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

nous allons démontrer que le Noyau(g_α) et $\text{Im}(g_\alpha)$ sont différents du vecteur nul et qu'ils sont de dimension 1.

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma^2 = \alpha$ et reportons nous à la base orthogonale de \mathbb{C}^2 définie par $\{\gamma, i\gamma\}$,

comme $|\gamma^2| = |\gamma|^2 = |\alpha| = 1$ donc $\gamma \cdot \overline{\gamma} = 1$ et $\overline{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ ceci entraîne que :

$$g_\alpha(\gamma) = \gamma - \alpha \overline{\gamma} = \gamma - \gamma^2 \cdot \frac{1}{\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad g_\alpha(i\gamma) = i\gamma + \gamma^2 \left(+ \frac{i}{\gamma}\right) = 2i \neq 0$$

Donc $\text{Noyau}(g_\alpha) = \mathbb{C} \cdot \gamma$ et $\text{Im}(g_\alpha) = \mathbb{C} \cdot i\gamma$.

Si $\beta \in \text{Im}(g_\alpha)$ on peut trouver un réel c tel que $\beta = ci\gamma$ ce qui est équivalent à $\frac{\beta^2}{\alpha} = -c^2$ ou $\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 0$.

Si cette condition est vérifiée :

$$\alpha \overline{\beta} = \alpha \overline{ci\gamma} = -\alpha ci\overline{\gamma} = -ci \frac{\alpha}{\gamma} = -ci\gamma = -\beta$$

$\frac{\beta}{2}$ est alors un point fixe de $h(z)$ parce que $h\left(\frac{\beta}{2}\right) = \alpha \cdot \frac{\overline{\beta}}{2} + \beta = -\frac{\beta}{2} + \beta = \frac{\beta}{2}$.

Comme chaque fois que $h(z)$ possède un point fixe, $\frac{\beta}{2}$ est aussi un point fixe, l'ensemble des

points fixes de $h(z)$ est $\frac{\beta}{2} + \text{Noyau}(g_\alpha)$ qui est la droite $\frac{\beta}{2} + \mathbb{C} \cdot \gamma$.

En effet tout point M d'affixe $\frac{\beta}{2} + c\gamma, c \in \mathbb{R}$ de cette droite, reste fixe par $h(z)$.

$$h\left(\frac{\beta}{2} + c\gamma\right) = \alpha \overline{\left(\frac{\beta}{2} + c\gamma\right)} + \beta = -\frac{\beta}{2} + c\alpha\bar{\gamma} + \beta = \frac{\beta}{2} + c\gamma$$

Il nous reste à démontrer que $h(z)$ est une réflexion par rapport à la droite. On peut réécrire

$$h(z) = \alpha \bar{z} + \beta \quad \text{comme : } h(z) = \alpha \overline{\left(z - \frac{\beta}{2}\right)} + \frac{\beta}{2}. \text{ Car } \alpha \bar{\beta} = -\beta$$

Pour prouver que $h(z)$ est une réflexion par rapport à la droite $\frac{\beta}{2} + \mathbb{R}\gamma$, il suffit de prouver que

$k(z) = \alpha \bar{z}$ est une réflexion par rapport à $\mathbb{R}\gamma$. Une telle réflexion par rapport à la base $\{\gamma, i\gamma\}$

transforme le point $z = a\gamma + ib\gamma$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ dans l'image $k(z) = a\gamma - ib\gamma = (a - ib)\gamma$ mais

$\bar{z} = a\bar{\gamma} - ib\bar{\gamma} = (a - ib)\bar{\gamma}$ et donc $k(z) = \frac{\bar{z}}{\gamma} \cdot \gamma = \bar{z} \cdot \gamma \cdot \gamma = \alpha \bar{z}$. Ce qui prouve que $k(z) = \alpha \bar{z}$ est une

Réflexion par rapport à $\mathbb{R}\gamma$.

Maintenant si $t_{\frac{\beta}{2}}(z) = z + \frac{\beta}{2}$ est la translation de vecteur $\frac{\beta}{2}$, l'isométrie

$t_{\frac{\beta}{2}} \circ k \circ t_{\frac{\beta}{2}}^{-1}(z) = \alpha \overline{\left(z - \frac{\beta}{2}\right)} + \frac{\beta}{2}$ est égale à $h(z)$ et laisse fixe les points de la droite

$t_{\frac{\beta}{2}}(\mathbb{R}\gamma) = \frac{\beta}{2} + \mathbb{R}\gamma$. $h(z) = \alpha \overline{\left(z - \frac{\beta}{2}\right)} + \frac{\beta}{2}$ est bien une réflexion par rapport à la droite $\frac{\beta}{2} + \mathbb{R}\gamma$

Cas où il n'y a pas de point fixe pour $h(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = 1$.

Nous pouvons affirmer que $\beta \notin \text{Im}(g_\alpha)$, et β s'écrit par rapport à la base $\{\gamma, i\gamma\}$

$\beta = a\gamma + ib\gamma$ $a \neq 0 \Rightarrow h(z) = (\alpha \bar{z} + ib\gamma) + a\gamma$, $h(z)$ est dans ce cas exactement égale à la

composition de la réflexion $k(z) = \alpha \bar{z} + ib\gamma$ de droite $\frac{ib\gamma}{2} + \mathbb{R}\gamma$ car $\frac{(ib\gamma)^2}{\alpha} = -b^2 \leq 0$ et de

la translation $t_{a\gamma}(z) = z + a\gamma$ de vecteur $a\gamma$ parallèle à $\frac{ib\gamma}{2} + \square \gamma$. Nous déduisons que

$h(z) = t_{a\gamma} \circ k(z), z \in c$. est par définition une symétrie glissée.

Ceci complète les preuves pour les équations du tableau des isométries donné à la page 7.

Nous finirons cette section, avec deux résultats qui caractérisent les isométries .

Définition :soit f et g deux isométries ,l'isométrie obtenue par $g \circ f \circ g^{-1}$ est appelée le conjugué de f par g.

Théorème 3.1.

Le conjugué d'une isometrie est une isométrie de même type

D'abord le conjugué de l'isométrie h par g $g \circ h \circ g^{-1}$ est une isométrie car g est inversible et la composition de deux isométries est une superbe isométrie.

Nous pouvons vérifier aussi que h laisse fixe x_0 si et seulement si $g \circ h \circ g^{-1}$ laisse fixe $g(x_0)$.

On déduit que les conjugués transforment les points fixes en points fixes.

Les isométries transforment un point en un point et une droite en une autre droite et les conjugués sont des isométries, qui portent des points fixes dans des points fixes.

Par conséquent,les rotations ont pour conjugués des rotations et les réflexions ont pour conjugués des réflexions.

Pour une translation $t(z) = z + c$ et une isométrie $g_1(z) = \alpha z + \beta$ ou $g_2(z) = \alpha \bar{z} + \beta$

avec $\alpha, \beta \in \square$ et $|\alpha| = 1$. Nous pouvons prouver par opération directe, que $g_1 \circ t \circ g_1^{-1}(z) = z + \alpha c$ ou

$g_2 \circ t \circ g_2^{-1}(z) = z + \alpha \bar{c}$. Le conjugué d'une translation par une isométrie est donc une translation.

Une symétrie glissée,n'est pas une translation et n'a pas de point fixe.D'après ce que nous savons sur le conjugué ,le conjugué d'une symétrie glissée est une isométrie, qui n'est pas une translation et qui ne possède pas de point fixe,c'est donc une autre symétrie glissée.

Théorème 3.2.

Toute isométrie de \mathbb{C}^2 est la composition d'au plus deux réflexions, excepté la symétrie glissée qui est exactement la composition de trois réflexions.

Nous prouverons le théorème pour l'identité, la translation, la rotation et la similitude glissée

L'isométrie identité est le carré de n'importe quelle réflexion de la forme, $r(z) = \alpha \bar{z}$ en effet

$$r^2(z) = \overline{\alpha(\alpha \bar{z})} = \overline{\alpha \cdot \bar{\alpha} z} = |\alpha|^2 \cdot z = z.$$

Une translation $t_c(z) = z + c$ peut s'écrire comme le produit des réflexions $s_2 \circ s_1(z) = t_c(z)$ avec

$$s_1(z) = \left(-\frac{c}{\bar{c}}\right) \bar{z} \text{ et } s_2(z) = \left(-\frac{c}{c}\right) z + c.$$

Pour la rotation autour de l'origine O $h(z) = \alpha z$ soient les réflexions $k(z) = \bar{z}$ et $L(z) = \overline{\alpha z}$ on vérifie que $h(z) = k \circ L(z)$ est la composition de deux réflexions.

.Pour une rotation arbitraire $f(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$ on a $f(z) = t_{z_0} \circ h \circ t_{z_0}^{-1}(z)$ avec $t_{z_0} = z + z_0$, $f(z)$ est donc le conjugué de la rotation $h(z)$ autour de O , par la translation t_{z_0} , mais

$$h(z) = k \circ L(z). \text{ Donc } f(z) = t_{z_0} \circ (k \circ L) \circ t_{z_0}^{-1}(z) = (t_{z_0} \circ k \circ t_{z_0}^{-1}) \circ (t_{z_0} \circ L \circ t_{z_0}^{-1})(z).$$

Par le théorème 3.1 $f(z)$ étant la composition des deux conjugués de réflexion est aussi la composition de deux réflexions. Toute rotation est donc la composition de deux réflexions.

Le lecteur vérifiera aisément que pour toutes les réflexions qui ont été définies jusqu'ici

$$\text{on a la condition } \frac{\beta^2}{\alpha} \leq 0.$$

La symétrie glissée qui est la composition d'une réflexion et d'une rotation est donc la composition de trois réflexions. Ce nombre de réflexions ne peut être réduit à deux.

La composition de deux réflexions étant donnée par $\alpha_1(\alpha_2 \bar{z} + \beta_2) + \beta_1$ qui est de la forme $\alpha_1 \overline{\alpha_2 z} + \alpha_1 \overline{\beta_2} + \beta_1$. Ce n'est donc pas l'équation d'une symétrie glissée.

V) Détermination de la droite de réflexion et du vecteur de translation pour les isométries

$$h(z) = \alpha \bar{z} \quad \alpha, \in \mathbb{C} \quad |\alpha| = 1$$

Nous avons prouvé à la page 10, que cette équation est une réflexion par rapport à la droite d'équation polaire $\rho = \gamma$, passant par l'origine des coordonnées O.

Or si θ est l'angle que fait l'axe des abscisses avec la droite de réflexion, l'équation polaire de cette droite est $\rho = e^{i\theta}$ avec $m = \tan(\theta)$. $\rho = \gamma$ et $\rho = e^{i\theta}$ étant donc, deux équations polaires de la même droite, leurs vecteurs directeurs unitaires sont égaux. On déduit que $\gamma = e^{i\theta}$ et $\alpha = e^{i2\theta}$.

L'équation d'une réflexion par rapport à la droite $y=mx$ est donc de la forme :

$$h(z) = e^{i2\theta} \bar{z} \quad \text{avec } m = \tan(\theta).$$

Si la droite de réflexion ne passe pas par l'origine des coordonnées, soit $p = ik$ l'affixe de l'ordonnée à l'origine. Considérons le conjugué $k(z)$ de la réflexion $h(z)$ par la translation $t_p = z + p$. Par le théorème 3.1 c'est est une réflexion de la forme

$$k(z) = t_p \circ h \circ t_p^{-1}(z) = e^{i2\theta} \overline{(z - ik)} + ik \quad \text{qui a comme points fixes la droite } t_p(\rho = e^{i\theta}) = \rho = e^{i\theta} + p$$

d'équation $y = \tan(\theta)x + k$

Transformons cette équation générale $k(z)$ en une forme plus linéaire.

$$k(z) = e^{i2\theta} \overline{(z - ik)} + ik \Rightarrow k(z) = e^{i2\theta} \bar{z} + ik(e^{i2\theta} + 1) = e^{i2\theta} \bar{z} + ie^{i\theta} k(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{comme } k(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ est}$$

un réel n égale à $2k \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ donc l'écriture simplifiée de $k(z)$ est $k(z) = e^{i2\theta} \bar{z} + nie^{i\theta}$, $n \in \mathbb{R}$

Si $k(z) = e^{i2\theta} \bar{z} + b$, $b \neq nie^{i\theta}$ dans ce cas, il existe un nombre complexe $c = c_1 + ic_2$ avec $c_1 \neq 0$ tel

que $c = \frac{b}{e^{i\theta}}$ et $b = c_1 e^{i\theta} + c_2 i e^{i\theta}$ donc $k(z) = (e^{i2\theta} \bar{z} + ic_2 e^{i\theta}) + c_1 e^{i\theta}$. $k(z)$, est exactement

la composition de la réflexion $r(z) = e^{i2\theta} \bar{z} + ic_2 e^{i\theta}$ de droite de réflexion parallèle à $y = \tan(\theta)x$

par la translation de vecteur $c_2 e^{i\theta}$ parallèle aussi à cette même droite.

Pour $b \neq nie^{i\theta}$ nous obtenons ainsi une belle symétrie glissée.

Conclusion : une application complexe de la forme $h(z) = e^{i2\theta} \bar{z} + b$ $b \in \mathbb{C}$ est géométriquement, une réflexion par rapport à une droite parallèle à $y = \tan(\theta)x$

si $b = nie^{i2\theta}$ $n \in \mathbb{R}$, ou une symétrie glissée de droite et de vecteur parallèle à $y = \tan(\theta)x$, si

$b \neq nie^{i2\theta}$ $n \in \mathbb{R}$

Toute cette théorie est bien belle, mais ne remplace pas des bons exemples.

Exemple de réflexion :

Soit l'application complexe $f(z) = -\bar{z} + 1 + i$. C'est soit une réflexion ou une symétrie

glissée. Pour nous prononcer faisant apparaître $\alpha = e^{i2\theta}$.

$f(z) = -\bar{z} + 1 + i \Rightarrow f(z) = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \bar{z} + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ car $-i$ et $1+i$ ont pour forme exponentielle complexe

respective $e^{i(-\frac{\pi}{2})}$ et $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Poursuivons $f(z) = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \bar{z} + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow f(z) = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \bar{z} + \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}$ ce qui

donne $f(z) = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \bar{z} + \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{2})} e^{i(-\frac{\pi}{4})} = e^{i(-2\frac{\pi}{4})} \bar{z} + i\sqrt{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})}$.

Cette application étant de la forme $e^{i2\theta} \bar{z} + nie^{i\theta}$ par ce que nous avons établi, c'est une réflexion

Par rapport à la droite $y = \tan(-\frac{\pi}{4})x + p \Rightarrow y = -x + p$.

Comme $f(0) = 1 + i$ et que la droite de réflexion est la médiatrice du segment d'extrémités $(0,0)$ et $(1,1)$, donc $(0,5 ; 0,5)$ est un point de cette droite, ce qui donne 1 pour valeur de p .

La transformation donnée est donc une réflexion de droite $y = -x + 1$

Exemple de symétrie glissée. Soit la transformation complexe : $g(z) = \bar{z} + 3 + 2i$.

$g(z) = \bar{z} + 3 + 2i \Rightarrow g(z) = \bar{z} + 2i + 3$ $g(z) = e^{i0} \bar{z} + 2ie^{i0} + 3$.

La transformation est la composition de la réflexion $e^{i\theta}\bar{z} + 2ie^{i\theta}$ de droite horizontale $y = p$ car $\tan(\theta) = 0$, et de la translation de vecteur horizontal 3. C'est donc une symétrie glissée.

En plus, la réflexion $e^{i\theta}\bar{z} + 2ie^{i\theta}$ transforme le point d'affixe 0 en point d'affixe $2i$, (0,1) est donc un point de la droite $y = p$, l'équation de la droite de réflexion est $y = 1$.