



**HAL**  
open science

# Chaos dans les ventes de biens à la mode et implication pour le contrôle de gestion

Adrien Bonache, Karen Moris

► **To cite this version:**

Adrien Bonache, Karen Moris. Chaos dans les ventes de biens à la mode et implication pour le contrôle de gestion. Comptabilités, économie et société, May 2011, Montpellier, France. pp.cd-rom. hal-00646789

**HAL Id: hal-00646789**

**<https://hal.science/hal-00646789>**

Submitted on 30 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ***Chaos dans les ventes de biens à la mode et implication pour le contrôle de gestion***

Adrien B. Bonache, Attaché temporaire d'enseignement et de recherche à l'IAE de Dijon, MRM-COST Université Montpellier 2, [bonache@ens-cachan.fr](mailto:bonache@ens-cachan.fr)

Karen Moris, Iae de Dijon, LEG- FARGO, [karenmoris@yahoo.fr](mailto:karenmoris@yahoo.fr)

**Résumé :** *Objectif* – Ce compte rendu vise à montrer que le contrôle de gestion devrait abandonner le contrôle cybernétique pour certaines activités de vente de biens.

*Canevas de l'étude* – En reprenant les articles de Hofstede (1978) et Sutherland (1975), il apparaît que les activités de vente de biens peuvent être contrôlées par un contrôle cybernétique de type programmation/planification/prévision. Si les ventes de biens à la mode avaient un comportement linéaire comme dans le modèle de Miller *et al.* (1993) leurs prévisions seraient possibles et l'utilisation du contrôle cybernétique serait utile. Mais deux autres modèles montrent que ces ventes peuvent avoir un comportement chaotique (Granovetter et Soong, 1986 ; Nakayama et Nakamura, 2004). Dans ces deux modèles, les ventes pourraient être imprévisibles au-delà du court terme. La présence d'un comportement chaotique pour ce type de ventes a donc été testée.

*Données et méthodes* – Des séries longues de ventes de consoles de jeux vidéo, issues de la base de données du site [www.vgchartz.com](http://www.vgchartz.com), ont été utilisées. Pour tester la présence de non-linéarités, le test BDS a été mobilisé après avoir stationnarisé et blanchi les séries. Puis, pour tester la présence de chaos dans ces séries de ventes, l'exposant maximum de Lyapunov et la dimension de corrélation ont été calculés.

*Résultats* – Les ventes de consoles de jeux vidéo au Japon sont chaotiques. Leur horizon de prévisibilité est donc limité à quelques semaines.

*Conclusion* – La présence de chaos et donc d'un horizon de prévisibilité limité remet en cause la possibilité de prévoir ces ventes sur un horizon d'un an et, partant, les processus de contrôle du type programmation/planification/prévision.

Mots clés : contrôle cybernétique, contrôle politique, budget, chaos

## **Abstract :**

*Objective* – This article aims at showing that management control should drop cybernetic control for some activities of good sales.

*Study design* – Reviewing Sutherland's (1975) and Hofstede's (1978) articles, it seems that activities of good sales can be controlled by a cybernetic control, like program-planning-budgeting systems. If sales of fashion goods were linear, like Miller *et al.*'s (1993) model, their forecasting would be possible and useful. However, two other models show that these sales could be chaotic (Granovetter and Soong ; Nakayama and Nakamura, 2004). In these models, the sales of fashion goods could be unpredictable beyond short intervals. The presence of chaotic patterns in this type of sales was thus tested.

*Data and methods* – The long time series of video game hardware sales, from the data base of the [www.vgchartz.com](http://www.vgchartz.com) Internet website, were used. To test the presence of non-linearity, Brock *et al.*'s (1996) test was used after having stationnarized and removed linear dependencies. Then, to test the presence of chaotic patterns in these sales, the Lyapunov largest exponent and the correlation dimension were estimated.

*Results* – The Japanese sales of video game hardware are chaotic. Their predictability horizons are limited to 6-9 weeks.

*Conclusion* – The presence of chaos and thus of limited predictability horizon call into question the possibility to predict these sales for one year and, as a conclusion, the cybernetic control process, like program-planning-budgeting systems.

Key words : cybernetic control, political control, budget, chaos

# 1. Introduction

« *Ja, mach' nur einen Plan !*

*Sei nur ein grosses Licht!*

*Und mach' dann noch'nen Zweiten Plan,*

*Geh'n tun sie beide nicht*” (Brecht, 1928 : acte III, scène 1) <sup>1</sup>

Cette citation de l'opéra de Quat'sous montre que le contrôle basé sur la planification ou la prévision peut ne pas donner de résultats. Pour commencer sa critique du contrôle de gestion basé sur l'analogie cybernétique, Hofstede (1978 : 450) reprend aussi cette citation de Brecht et, suivant Anthony et al. (1972 : 5), définit le contrôle de gestion comme « le processus par lequel les managers s'assurent que les ressources sont obtenues et utilisées efficacement et de manière efficiente en vue d'atteindre les buts de l'organisation ». Dans la suite de son article, Hofstede (1978) critique cette vision cybernétique du contrôle visant à concevoir une organisation comme un système pouvant être contrôlé par une simple boucle rétroactive, comme si les systèmes sociaux pouvaient s'apparenter à des automates.

Suivant Sutherland (1975), il est possible de contrôler les phénomènes faiblement stochastiques<sup>2</sup>, c'est-à-dire prévisibles à quelques erreurs près, avec ce type de contrôle cybernétique. Les phénomènes fortement stochastiques<sup>3</sup> ou indéterminés<sup>4</sup> ne peuvent être contrôlés avec une simple boucle rétroactive. Partant de ces principes, Hofstede admet que l'on peut appliquer un contrôle de type cybernétique sans division du travail, c'est-à-dire un contrôle homéostatique, pour des activités prévisibles à quelques erreurs près : la production et la vente de biens.

Pour des activités de vente de biens, l'application de ce type de contrôle suppose notamment que les ventes futures soient prévisibles. Si l'on ne peut pas élaborer un budget des ventes, « point de départ obligatoire du processus budgétaire » (Malo et Mathé, 2002 : 93), il est difficile de mettre en œuvre un contrôle de type cybernétique (ou homéostatique) reposant sur la possibilité de fixer un objectif (Hofstede, 1978 : 451 ; Bouquin, 2005).

Ces réflexions soulèvent une question à laquelle nous tentons de répondre : Existe-t-il des secteurs d'activité où les ventes de biens ne sont pas prévisibles à quelques erreurs près ? Cette question est intéressante car les activités de vente de biens sont dites prévisibles à quelques erreurs près par Hofstede (1978), alors que sa position pourrait être discutée pour certains secteurs d'activité.

---

<sup>1</sup> Une traduction possible pourrait être « Mais oui, fais seulement un plan ! Sois seulement un grand génie ! Et, fais en suite encore un autre, ils vont " foirer " tous les deux ».

<sup>2</sup> « Pour toute condition initiale, le phénomène peut prendre un nombre d'états limités et proches » (Sutherland, 1975 : 193)

<sup>3</sup> « Pour toute condition initiale, le phénomène peut prendre un nombre d'états limités et divers » (Sutherland, 1975 : 193)

<sup>4</sup> « Pour toute condition initiale, il n'y a pas d'état prédéterminé du phénomène ayant une probabilité d'occurrence significative » » (Sutherland, 1975 : 193)

Pour discuter la position d'Hofstede, on peut rappeler un débat concernant les ventes de biens à la mode. Les ventes de biens à la mode se caractérisent par l'existence d'un effet bandwagon : « le fait que la demande pour un produit d'un consommateur est accrue du fait que les autres consommateurs achètent aussi ce bien » (Leibenstein, 1950 : 189). « Ces effets d'imitation surviennent souvent avec les jouets d'enfants (poupées Barbie ou consoles de jeux Sega, par exemple) » (Pindyck et Rubinfeld, 2005 : 136). Une fois caractérisées ces ventes et illustré ce type de produits, les termes du débat sont rappelés afin de préciser l'hypothèse testée.

Selon certains auteurs, les ventes de biens à la mode seraient prévisibles à quelques erreurs près. D'après Miller et al. (1993), les ventes de biens à la mode peuvent répondre à une modélisation déterministe linéaire : la demande d'aujourd'hui est une fonction linéaire des demandes passées. Si les ventes de biens à la mode se comportaient en moyenne comme ce modèle, elles seraient prévisibles à quelques erreurs près. Un contrôle de type cybernétique aurait alors une certaine utilité pour maîtriser ces ventes et pour élaborer un budget et des objectifs de production. Dans le cas de ventes ne se comportant pas comme un modèle linéaire, la question de l'utilité de ce type de contrôle se pose.

Dans la littérature, on trouve deux modèles non linéaires pour rendre compte du comportement de ce type de ventes (Granovetter et Soong, 1986 ; Nakayama et Nakamura, 2004). Une série de ventes simulée avec ces modèles peut se comporter comme une variable aléatoire, évoluant au hasard, disons comme le résultat d'un jeu de pile ou face (Lurçat, 2007 : 21-45 ; Sinai, 1992). De plus, dans ces modèles, les ventes de biens à la mode peuvent avoir un comportement instable : une erreur, même petite, concernant l'état actuel des ventes ne permet pas de prévoir les ventes au-delà du court terme. On dit qu'il y a sensibilité aux conditions initiales car les trajectoires de ventes prévues à partir de deux estimations initiales peu différentes ont tendance à s'écarter exponentiellement.

Le taux de divergence de deux trajectoires initialement proches permet de mesurer l'exposant de Lyapunov : une mesure du caractère chaotique d'un phénomène. Si les ventes d'un bien à la mode quelconque présentaient un tel comportement, elles seraient imprévisibles au-delà d'un certain horizon temporel égal à l'inverse de l'exposant de Lyapunov.

Le but de ce papier est de montrer, sur un cas précis, qu'il est possible que certaines ventes de produits peuvent être indéterminées même si elles sont déterministes. Même si cela va à l'encontre de la position d'Hofstede (1978), des systèmes déterministes non linéaires peuvent avoir un comportement en apparence totalement aléatoire : on dit alors qu'il y a chaos déterministe. Pour atteindre ce but et répondre à la question de recherche<sup>5</sup>, l'hypothèse suivante est testée :

*Hypothèse : Les ventes de biens à la mode sont chaotiques*

Le deuxième point précise les données et méthodes utilisées pour tester cette hypothèse. Puis, dans le troisième point, les résultats obtenus sont présentés. Pour juger de l'apport des résultats, le quatrième point les discute.

---

<sup>5</sup>La question de recherche est la suivante : Existe-t-il des secteurs d'activité où les ventes de biens ne sont pas prévisibles à quelques erreurs près ?

## 2. Données et méthodes

### 2.1. Justification des données utilisées

Pour tester la présence de chaos dans les ventes de biens à la mode, premièrement, il faut s'assurer que l'on a des séries de ventes de biens à la mode. Pour justifier le choix du type de biens retenu, on s'est appuyé sur la littérature. Les effets de mode surviennent souvent pour des achats de jouets d'enfants : poupées et consoles de jeux vidéo (Pindyck et Rubinfeld, 2005 : 136).

Secondement, il faut s'assurer de la disponibilité et de l'accessibilité de séries de ventes pour ce type de produits. Des séries de ventes de poupées n'étant pas disponibles, ce sont les données de ventes hebdomadaires de consoles de jeux vidéo du site Internet [www.vgchartz.com](http://www.vgchartz.com) qui ont été utilisées pour tester la présence de chaos dans les ventes de biens à la mode.

Avant d'utiliser cette base de données, nous nous sommes renseignés sur la qualité de la collecte organisée par les exploitants du site. Cette base de données est constituée à partir de sondages hebdomadaires d'un échantillon de revendeurs de consoles de jeux vidéo sélectionnés aléatoirement dans plusieurs pays. Puis, les données obtenues, par sondage aléatoire pour chaque type de consoles vendues dans chaque pays, sont recoupées avec des estimations faites par les fabricants de consoles de jeux vidéo (informations obtenues sur le site et après échange de courriels avec un exploitant du site Internet). La procédure de collecte semble satisfaisante. De plus, pour nous assurer de la qualité du résultat de cette collecte, suivant Varian (1972), nous avons fait un test d'adéquation à la loi de Benford<sup>6</sup> de cette base de données. Un test d'adéquation à cette loi permet de contrôler l'absence de biais dans la base de données. Quel que soit le test d'adéquation retenu, les résultats montrent la qualité de la base de données<sup>7</sup>.

Par ailleurs, pour tester la présence de chaos et obtenir des résultats fiables<sup>8</sup>, nous avons retenu des séries de ventes de consoles de jeux vidéo longues, c'est-à-dire comprenant plus de 400 points : ventes de PlayStation 2, de Game-Boy, de Super Nintendo et de Play Station. Ces séries ne sont disponibles que pour un seul pays : le Japon. La méthode décrite ensuite n'a donc été appliquée qu'aux séries longues japonaises de ventes de consoles de jeux vidéo.

---

<sup>6</sup> La loi de Benford est une distribution telle que la fréquence d'apparition d'une valeur « d » en première position d'un nombre est  $\ln(1+1/d)/\ln(10)$ .

<sup>7</sup> Voici les principaux résultats : statistiques du chi-deux (8) = 1,53 (*p-value*=0,9921), de Kolmogorov-Smirnov = 0,1111 (*p-value*=1) et de Cramer-Von Mises = 0,0277 (*p-value* =1).

<sup>8</sup> Les tests de détection de non linéarités et de chaos requièrent un grand nombre de points sur les séries étudiées pour donner des résultats fiables (Ramsey et Yuan, 1989; Lin, 1997).

## 2.2. Méthode de détection de chaos

Après avoir justifié les données utilisées pour tester la présence de chaos dans les ventes de biens à la mode, présentons leur traitement. Ce traitement est proche de celui décrit par Benincà et al. (2008). Dans un premier point, nous montrerons comment les données ont été stationnarisées (2.2.1). Cette stationnarisation est nécessaire pour ne pas rejeter à tort l'hypothèse de linéarité des séries étudiées. Dans un deuxième point, nous présenterons le test de Brock et al. (1996), son utilité et ses conditions pour tester la présence de non-linéarités dans les ventes stationnarisées (2.2.2.). Dans troisième point, nous détaillerons notre procédure pour tester la présence de chaos (2.2.3.).

### 2.2.1. Stationnarité des séries

D'abord, nous avons testé la stationnarité des séries étudiées en utilisant les tests de Kwiatkowski et al. (1992) et de Dickey et Fuller (1981) avec le logiciel Gretl<sup>®</sup> (Gretl version française 1.8.5). Il s'avère qu'elles ne sont pas stationnaires.

Pour éviter une acceptation de l'hypothèse de non-linéarité des séries étudiées due à la non-stationnarité des séries (Hsieh, 1991), nous avons préalablement « stationnarisé » les ventes étudiées. De plus, la non-stationnarité de la variance peut biaiser l'estimation de l'exposant maximum de Lyapunov, un « détecteur » de chaos (Benincà et al., 2008 : 5, *supplementary information*). Pour stationnariser des séries dont la variance évolue au fil du temps, la transformation de Box-Cox peut être utilisée. L'utilisation de cette transformation suppose un choix d'un type de transformation.

Pour choisir une transformation adéquate, suivant les indications de Mills (1990 : 48), sur un tableur Open.Office<sup>®</sup> (version 2.4.1-1 Ubuntu 2.4), nous avons scindé les séries étudiées en sections, contenant de quatre à douze observations. Pour chaque section, nous avons calculé l'étendue (différence entre le volume hebdomadaire maximal de ventes et celui minimal) et la médiane. Puis, nous avons représenté graphiquement ces sections sur un orthant positif (médiane en abscisses, étendue en ordonnées) pour examiner la relation entre l'étendue et la médiane.

Lorsque l'étendue est indépendante de la médiane (le nuage de points est horizontal), il n'est pas nécessaire d'utiliser une transformation de Box-Cox pour « stationnariser » la série étudiée. Lorsque la relation entre la médiane et l'étendue est parallèle à la première bissectrice, une transformation logarithmique permet de « stationnariser » la série ainsi représentée. Lorsque l'étendue augmente moins que proportionnellement que la médiane, il faut utiliser une transformation de Box-Cox avec  $\lambda$  compris entre 0 et 1 pour « stationnariser » la série. Enfin, lorsque l'étendue augmente plus que proportionnellement que la médiane, il faut utiliser une transformation de Box-Cox avec  $\lambda$  compris entre 0 et -1 pour « stationnariser » la série.

Pour nous assurer que la transformation retenue permet de « stationnariser » la série, nous avons réalisé cette représentation pour des sections contenant quatre, huit et douze observations. Les résultats obtenus sont équivoques. Ainsi, nous avons tracé la série transformée avec différentes valeurs de  $\lambda$  pour observer sa stationnarité. Cette procédure plus intuitive permet de s'assurer que la variance de la série transformée est stable dans le temps.

Puis, après transformation de Box-Cox, pour retirer la présence de tendance dans chaque série et donc la « stationnariser », nous avons utilisé le filtre des moyennes mobiles simples sur 52 observations (les ventes sont hebdomadaires et il y a 52 semaines dans une année). La transformation de Box-Cox permettant de réduire les évolutions de la variance au fil du temps et non celle de la moyenne, cette opération supplémentaire est nécessaire pour « stationnariser » chaque série de ventes étudiée. Enfin, après transformation de Box-Cox et retrait de la tendance, chaque série a été centrée et réduite. Cela permet d'avoir des séries de ventes de consoles de moyenne nulle et de variance unitaire afin d'éviter de biaiser les tests de détection de chaos réalisés (Benincà et al., 2008 : 5, supplementary information).

Après ces transformations, des tests de Kwiatkowski et al. (1992) et de Dickey et Fuller (1981) ont été à nouveau réalisés pour nous assurer de la stationnarité des séries transformées. Cela permet d'éviter d'accepter à tort l'hypothèse de présence de non-linéarités avec le test de Brock, Dechert et Scheinkman (test BDS) (Hsieh, 1991).

### 2.2.2. Test de non-linéarité des séries

Puis, pour tester la présence de non-linéarités, le test BDS (Brock *et al.*, 1996) a été utilisé sur les séries « stationnalisées » après opération de blanchiment (retrait de l'éventuelle dépendance linéaire). Le test BDS a été mis en œuvre avec le paquet tseries du logiciel R® 2.10.1 (Hornik, 2008). L'opération de blanchiment a été réalisée sur Gretl® en estimant pour différents retards un modèle auto-régressif pour chaque série. Les résidus du modèle auto-régressif ayant simultanément les critères d'Akaike, de Schwartz et d'Hannan-Quinn les plus bas ont été retenus comme série blanchie. Cette opération de blanchiment permet au test BDS de tester l'hypothèse de linéarité d'une série. Après avoir mis en avant ces quelques précisions, nous allons décrire le test BDS pour en comprendre les conclusions.

Ce test s'appuie sur l'intégrale de corrélation. L'intégrale de corrélation  $c(\varepsilon, m, n)$  mesure la probabilité que deux points d'une série ( $x_i^m$  et  $x_j^m$ ), dans l'espace des phases reconstruit avec une dimension  $m$  du plongement, soient proches, selon une distance inférieure à une quantité  $\varepsilon$  donnée. La formule de l'intégrale de corrélation pour la chronique  $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  est :

$$c(\varepsilon, m, n) = \frac{1}{n_m(n_m - 1)} \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} I(x_i^m, x_j^m, \varepsilon)$$

où  $n_m = n - m + 1$ ,  $i \neq j$ ,  $m > 1$ ,  $\varepsilon$  un paramètre arbitrairement choisi représentant la distance maximale pour que deux points soient définis comme « proches ». Enfin,  $I(\cdot)$  est une fonction d'Heaviside prenant la valeur unité si et seulement si la distance euclidienne entre  $x_i^m$  et  $x_j^m$  est inférieure à  $\varepsilon$ , sinon sa valeur est nulle. Expliqué de façon didactique, il s'agit de réaliser un tableau de comparaisons de la distance entre tous les points de la série un à un. Lorsque la distance entre deux points est inférieure à un epsilon donné, alors on inscrit dans la case correspondante au croisement de ces deux points la valeur 1. Autrement, nous y inscrivons la valeur 0. Enfin, une moyenne de ces valeurs est établie : c'est l'intégrale de corrélation.

Le test de Brock et al. (1996) considère que si  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $C_m(\varepsilon, m, n) \rightarrow (C_1(\varepsilon, 1, n))^m$  et  $n^{1/2} \cdot [C_m(\varepsilon, m, n) - (C_1(\varepsilon, 1, n))^m] \rightarrow N(0, \sigma_m^2)$ . Autrement dit, lorsque la longueur de la chronique devient indénombrable, alors  $C_m(\varepsilon)$  tend vers  $(C_1(\varepsilon))^m$ . De surcroît, le numérateur

de la statistique de Brock *et al.* (BDS) converge vers une loi normale centrée  $N(0, \sigma^2)$ . La statistique du test BDS est :

$$n^{1/2} \cdot [C_m(\varepsilon, m, n) - (C_1(\varepsilon, 1, n))^m] / \sigma_m^2$$

Si  $W$  est inférieur au fractile d'ordre 0,99 de la loi normale standard, alors on admet que les  $x_t$  sont identiquement et indépendamment distribués. Maintenant le test expliqué, présentons en les limites.

Il ne faut pas croire, de manière hâtive, que ce test permet de conclure à la présence de chaos dans une série. Il permet de tester l'hypothèse de distribution indépendante et identique des termes d'une série et ne peut servir à la détection de chaos. En cas de rejet de cette hypothèse, ce test permet aussi de conclure sur la non-linéarité d'une série, au préalable « stationnarisée » et dont on a supprimé toutes les dépendances linéaires (blanchiment).

La présence de non-linéarités dans ces séries ne signifie pas qu'elles sont chaotiques. La présence de non-linéarités peut aussi venir de la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle (Hsieh, 1991). Pour tester alors la présence de chaos, il est possible de trianguler deux mesures :

- une estimation de la dimension fractale : la dimension de corrélation. Cette estimation est basée sur l'idée qu'un processus chaotique de dimension  $m$  ne remplit pas un espace de dimension  $m+1$ , contrairement à un processus aléatoire ;
- une estimation de l'exposant maximum de Lyapunov qui permet d'observer s'il y a sensibilité aux conditions initiales dans une série. Cette mesure part de l'idée que deux points initialement très proches dans la série ont des trajectoires divergeant exponentiellement.

### 2.2.3. Tests de détection de chaos

Ainsi, pour tester la présence de chaos, nous avons d'abord estimé la dimension de corrélation (Grassberger et Procaccia, 1983) avec le logiciel Visual Recurrence Analysis® (VRA version 4.9) et ensuite réalisé une estimation robuste au bruit de l'exposant maximum de Lyapunov (Liu *et al.*, 2005).

Cette dernière estimation a été obtenue en utilisant le résultat de l'algorithme de Rosenstein *et al.* (2003), mis en œuvre avec le logiciel Tisean® 3.0.1 (Kantz et Schreiber, 2004). Suivant Liu *et al.* (2005), pour estimer l'exposant maximum de Lyapunov malgré la présence de bruit dans les séries, une régression non linéaire a été effectuée avec les programmes nls2 et nlm sur le logiciel R® 2.10.1 (Hornik, 2008).

Pour calculer la dimension de plongement et l'exposant maximum de Lyapunov, il convient de fixer le délai optimal. Suivant Rosenstein *et al.* (1993), ce délai est celui au-delà duquel la fonction d'auto-corrélation baisse sous  $1-1/e$  (c'est-à-dire 63 %). La fonction d'auto-corrélation, calculée sous Gretl®, fait apparaître un délai optimal de 1 pour les ventes de consoles étudiées stationnarisées. De plus, pour calculer l'exposant de Lyapunov, il convient d'estimer la dimension de plongement. Celle-ci a été calculée sur R® avec le paquet fNonlinear. Cette estimation correspond à la dimension de plongement à partir de laquelle le nombre de faux plus proches voisins (c'est-à-dire des observations initialement proches dans

l'espace des phases car proches dans le temps) est nul. Enfin, pour éviter que l'estimation de l'exposant maximum de Lyapunov ne soit biaisée par la prise en compte de faux voisins, nous avons utilisé une fenêtre de Theiler : une solution pour éviter ce type de biais. Une fenêtre de Theiler retire les points proches dans le temps (les faux voisins), de l'ensemble des observations utilisées pour estimer l'exposant maximum de Lyapunov. La taille de cette fenêtre a été fixée en utilisant un graphique appelé « schéma de séparation espace-temps » (Provenzale *et al.*, 1992). Le schéma de séparation espace-temps montre comment la distance temporelle entre deux observations affecte leur distance spatiale dans l'espace de plongement. Par visualisation du schéma de séparation espace-temps, réalisé sur  $\mathbb{R}^n$  avec le paquet fNonlinear, nous avons fixé une taille de la fenêtre de Theiler pour éliminer les faux voisins. Après avoir fixé ces trois valeurs permettant de calculer l'exposant maximal de Lyapunov, nous avons estimé ce dernier.

Pour estimer l'exposant maximum de Lyapunov, pour plusieurs raisons, nous avons privilégié l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993) à celui de Wolf *et al.* (1985), bien que ce dernier est plus courant en gestion. Premièrement, l'algorithme de Wolf *et al.* (1985) est basé sur l'hypothèse d'une divergence exponentielle et ne permet donc pas de tester cette hypothèse de sensibilité aux conditions initiales. Deuxièmement, cet algorithme laisse à la discrétion de l'utilisateur le choix de l'écart initial (proximité entre deux points) et du laps de temps entre deux mesures de la divergence entre deux trajectoires. Ces choix peuvent jouer sur le résultat final (Dingwell, 2006). Si l'utilisateur veut montrer que le résultat n'est pas sensible à ces choix, il est obligé de faire de nombreux calculs et de présenter dans son article des tableaux importants et difficilement lisibles. Enfin, ce test est trop sensible à la présence de bruit (Liu *et al.*, 2005) et à la longueur de la série étudiée (Rosenstein *et al.*, 1993).

L'estimation de l'exposant maximum de Lyapunov  $\lambda$  s'interprète de la façon suivante :

- Lorsque  $\lambda < 0$ , le système attire vers un point fixe stable, ou vers une orbite (un attracteur périodique stable). Une valeur négative de l'exposant signifie qu'on se trouve en présence d'un système dit dissipatif ou non conservatif. Plus l'exposant est négatif, plus le système est dit à grande stabilité. Un processus stochastique stationnaire évolue autour de sa moyenne. Il est donc stable, puisque les trajectoires évoluent toujours à proximité l'une de l'autre autour de la moyenne du processus stochastique. Dans ce cadre, des prévisions sont possibles même à long terme avec des erreurs d'estimations de l'état actuel des trajectoires ;
- Lorsque  $\lambda = 0$ , un système avec un tel exposant est « conservatif » : le système montre une « stabilité au sens de Lyapunov » ;
- Lorsque  $\lambda > 0$ , dans ce cas l'orbite est instable et chaotique. Des points, au départ très proches, ont des trajectoires divergeant exponentiellement. La représentation graphique de l'évolution temporelle d'un tel cas de figure est semblable à un nuage de points sans aucune trajectoire distincte (Vialar, 2005). En revanche, la représentation de la valeur d'une variable de la dynamique en  $t$  par rapport à sa valeur après un délai peut faire apparaître un certain ordre : l'attracteur étrange. La dimension de cet attracteur peut être estimée avec la dimension de corrélation.

À partir de l'intégrale de corrélation (cf. 3.2.2.2.), on peut définir la dimension de corrélation  $d_c$  en remarquant que, pour des petites valeurs de  $\varepsilon$ ,  $c(\varepsilon, m, n)$  croît exponentiellement (Grassberger et Procaccia, 1983), soit :

$$\frac{\ln c(\varepsilon, m, n)}{\ln(\varepsilon)} \rightarrow d_m$$

Alors, un calcul donne  $\ln c(\varepsilon, m, n) \approx dm \cdot \ln(\varepsilon)$ ,  $\ln c(\varepsilon, m, n) \approx \ln \varepsilon^{dm}$  et  $c(\varepsilon, m, n) \approx \varepsilon^{dm}$ . Il semble donc que l'intégrale de corrélation  $c(\cdot)$  évolue comme  $\varepsilon^{dm}$ . Quand on augmente la dimension de plongement  $m$ , on obtient pour différents  $m$  une dimension  $dm$ . On s'aperçoit alors que  $dm$  converge vers une valeur  $d_c$  appelée dimension de corrélation :

$$d_c = \frac{\delta \ln c(\varepsilon, m, n)}{\delta \ln(\varepsilon)}$$

En pratique, il semble souhaitable de suivre la procédure suivante (Bourbonnais et Terraza, 2008) :

- 1) prendre des dimensions de plongement  $m$  de plus en plus grandes  $m = 1, \dots, 10$  ;
- 2) pour chaque  $m$ , calculer l'intégrale de corrélation  $c(\varepsilon, m, n)$  ;
- 3) par les moindres carrés ordinaires, estimer le modèle  $\ln[c(\varepsilon, m, n)] = k + p_i \cdot \ln(\varepsilon) + u_i$  où  $p_i$  est une estimation de la dimension de corrélation  $d_c$  (avec  $u_i$  une erreur indépendamment et identiquement distribuée et  $k$  une constante).

Une fois présenté ce second test de détection de chaos, voyons comment l'interpréter.

- lorsque  $dm \rightarrow +\infty$ , compte tenu de ce que l'on vient de voir, si la courbe des estimateurs  $p_i$  évolue linéairement avec  $m$ , on en conclut que le processus  $x_t$  est stochastique. Il n'y a pas d'attracteur étrange ;

- lorsque  $dm \rightarrow d_c$ , en revanche, la courbe des  $p_i$  sature au-delà d'une valeur notée  $m^*$ . Cette convergence signifie qu'une structure, sous-jacente à  $x_t$ , déterministe pourrait exister. Si  $d_c$  est un entier naturel, le système est déterministe mais non chaotique car l'attracteur n'est pas étrange. Si  $d_c$  n'est pas un entier naturel, le système est chaotique : l'attracteur est étrange.

Une fois présentée l'interprétation de ce test de détection de chaos, nous détaillons ses limites pour l'analyse de séries de ventes.

Pour des séries de ventes, l'estimation de la dimension de corrélation ne peut suffire pour s'assurer de la présence de chaos pour deux raisons :

- Premièrement, la présence d'hétéroscédasticité conditionnelle dans une série peut amener à trouver une dimension de corrélation finie (Scheinkman et LeBaron, 1989) ;

- Deuxièmement, nous utilisons des séries comprenant moins de 800 points. Avec un nombre d'observations aussi réduit, il est difficile d'appliquer une méthode préconisée, en science de la nature, pour des séries comprenant un grand nombre de points (100 000 points ou plus). Le faible nombre d'observations biaise les résultats de cette estimation en faveur de la présence de chaos (Ramsey et Yuan, 1989).

Ainsi, l'estimation de la dimension de corrélation n'est utilisée que pour faire un tri. Compte tenu des observations de Ramsey et Yuan (1989), si la dimension de corrélation est infinie alors on peut rejeter l'hypothèse de présence de chaos dans les séries. En revanche, si la dimension de corrélation est finie, puisque les séries sont courtes, il n'est pas possible de conclure avec ce test à la présence d'un attracteur étrange et donc de chaos déterministe.

### **3. Résultats**

L'objet de l'article est de montrer qu'il existe des secteurs d'activité où les ventes futures peuvent être indéterminées. Pour ce faire, nous avons appliqué la méthode décrite précédemment à des ventes de biens à la mode : les ventes de consoles de jeux vidéo. L'objet de ce point 3. est de présenter le résultat de ces tests de détection de non-linéarités et de chaos. Pour ce faire, dans un premier temps, les séries étudiées et leur stationnarisation seront décrites (3.1.). Dans un second temps, les résultats des tests de détection de non-linéarités et de chaos seront détaillés (3.2.).

#### **3.1. Description des séries et de leur stationnarisation**

Pour justifier la transformation des ventes étudiées, nous présenterons les statistiques descriptives des séries brutes de ventes et leur non-stationnarité (3.1.1.). Cela justifiera l'emploi des transformations utilisées décrites au point 2. et dont nous présenterons le résultat (3.1.2.).

##### *3.1.1. Descriptions des séries*

Le développement qui suit a pour but de donner un aperçu des séries étudiées afin de justifier leur stationnarisation. Pour ce faire, leurs statistiques descriptives sont mises en avant (3.1.1.1.) avant de présenter l'évolution de ces séries dans le temps (3.1.1.2.). Pour confirmer l'utilité d'une stationnarisation des séries étudiées, le test de Dickey-Fuller (1981) augmenté et celui de Kwiatkowski et al. (1992) ont été réalisés (3.1.1.3.).

##### **3.1.1.1. Statistiques descriptives**

Dans le tableau 1 (page suivante), il apparaît que les séries étudiées de ventes de consoles de jeux vidéo ne sont a priori pas normalement distribuées. La statistique de Jarque et Bera, synthétisant les informations concernant l'asymétrie (skewness) et l'aplatissement (kurtosis) de la distribution de chaque série de ventes étudiée, dépasse le fractile d'ordre 0,99 d'une loi du chi-deux à deux degrés de liberté ( $\chi^2_{99\%}(2)=9,21$ ). Le coefficient d'asymétrie nous informe que chaque série présente des valeurs extrêmes (« pics »), ce qui peut justifier l'utilisation d'une transformation de Box-Cox avec  $|\lambda| < 1$  (Mills, 1990 ; Benincà et al., 2008). L'étendue (maximum, minimum) donne aussi des informations sur l'asymétrie de cette distribution. Par exemple, pour les ventes de Game Boy (GB), il a été vendu 19 consoles au minimum et 482221 consoles au maximum au cours d'une semaine au Japon.

Ces statistiques descriptives sont utiles pour justifier l'usage d'une transformation. Afin de stationnariser les ventes de consoles de jeux vidéo étudiées, pour compléter ces statistiques descriptives, dans le point suivant, les séries de ventes de consoles de jeux vidéo sont tracées.

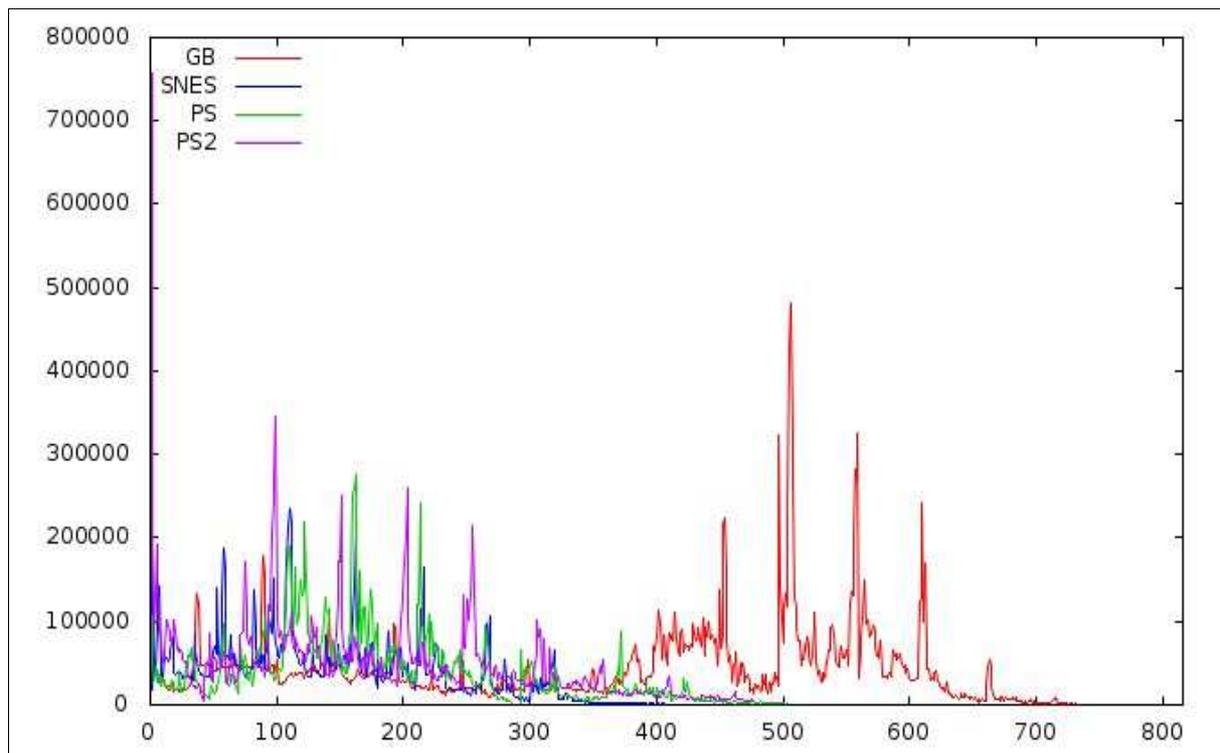
<b>Consoles</b>	<b>GB</b>	<b>PS</b>	<b>PS2</b>	<b>SNES</b>
<b>Moyenne</b>	39323	33356	48158	34436
<b>Ecart-type</b>	45360	40434	53561	38497
<b>Skewness</b>	4,1442***	2,27752***	6,1684***	2,0357***
<b>Excess kurtosis</b>	26,592***	7,2926***	66,887***	5,8247***
<b>Minimum</b>	19	0	3637	38
<b>Maximum</b>	482221	276284	756662	235417
<b>Statistique de Jarque-Bera</b>	25731***	1788,72***	91749,6***	1020,59***
<b>Nombre d'observations</b>	796	581	476	485

**Tableau 1 : Statistiques descriptives des séries de ventes de consoles de jeux vidéo**

Ce tableau présente les statistiques descriptives des séries de ventes de consoles de jeux vidéo. Les ventes étudiées sont celles de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. Skewness et kurtosis sont respectivement les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement de Pearson. En s'appuyant sur ces deux coefficients, la statistique de Jarque-Bera permet de tester la normalité de la distribution des séries de ventes. \*\*\* rend compte d'une probabilité critique, associée à l'hypothèse d'une distribution normale standard de la série, inférieure à 1 %.

### 3.1.1.2. Tracé des séries étudiées

La figure 1 représente l'évolution des quatre séries de ventes hebdomadaires de consoles de jeux vidéo étudiées. Nous pouvons confirmer la présence de « pics » et donc d'une asymétrie de la distribution de chaque série de ventes. Cela peut justifier l'utilisation d'une transformation de Box-Cox pour rendre stationnaires les séries étudiées.



**Figure 1 : Tracé des séries de ventes de consoles de jeux vidéo**

Cette figure présente les évolutions temporelles des séries de ventes de consoles de jeux vidéo. Les ventes étudiées sont celles de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. L'axe des abscisses rend compte du temps (en semaine) depuis le lancement de chaque console sur le marché japonais. L'axe des ordonnées rend compte du volume de ventes hebdomadaires.

Il apparaît aussi sur cette figure 1 (page précédente) que la variance des ventes de consoles hebdomadaires n'est pas stable dans le temps. Il semble donc nécessaire d'utiliser une

transformation de Box-Cox pour réduire la non-stationnarité en variance de chaque série. De plus, ces séries de ventes n'ont pas une moyenne stable dans le temps. Par exemple, en fin de cycle les ventes de chaque console semble décroître.

Pour pouvoir mettre en œuvre des tests de détection de non-linéarités et de chaos sur ces séries, nous devons préalablement nous assurer de leur stationnarité. Le rejet de l'hypothèse nulle du test de Brock *et al.* (1996) (test BDS<sup>9</sup>) peut venir du fait que les séries sont non stationnaires, c'est-à-dire que leur espérance, leur variance et leur covariance sont dépendantes du temps. Ainsi, pour nous assurer de la non-stationnarité des ventes, deux tests ont été réalisés : les tests de Dickey et Fuller (1981) augmenté et de Kwiatkowski *et al.* (1992).

### 3.1.1.3. Tests de la stationnarité des ventes

Le tableau 2 résume les résultats d'un test de Kwiatkowski *et al.* (1992) réalisé sur les ventes étudiées. Nous pouvons remarquer que les séries de ventes de Game Boy, Super Nintendo et Play Station ne sont pas stationnaires. Pour confirmer le résultat de ce test de stationnarité (l'hypothèse nulle du test de Kwiatkowski *et al.* est la stationnarité de la série étudiée), nous avons réalisé un test de non-stationnarité : celui de Dickey et Fuller augmenté (tableau 3, page suivante).

	n	l4	l12	$\eta_{\mu,l4}$	$\eta_{\tau,l4}$	$\eta_{\mu,l12}$	$\eta_{\tau,l12}$
<b>GB</b>	796	6	20	0,82***	0,77***	0,38*	0,37***
<b>SNES</b>	485	5	17	5,12***	0,20**	2,17***	0,13**
<b>PS</b>	580	6	18	4,04***	0,48***	1,79***	0,24***
<b>PS2</b>	476	5	17	3,07***	0,10	1,66***	0,07

**Tableau 2 : Résultats d'un test de Kwiatkowski *et al.* sur les ventes de consoles**

Ce tableau présente les statistiques de tests de Kwiatkowski *et al.* sans la tendance ( $\eta_{\mu}$ ) et avec la tendance ( $\eta_{\tau}$ ) arrondies au centième près. l4 et l12 correspondent aux valeurs du paramètre de troncature suggérées par Schwert (1989). Les ventes étudiées sont celles de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. n rend compte du nombre de points compris dans les séries de ventes étudiées. \*, \*\*, \*\*\* rendent compte d'une probabilité critique, associée à l'hypothèse de stationnarité de la série, inférieure respectivement à 10 %, 5 % et 1 %.

Pour les ventes de Super Nintendo, Play Station et Play Station 2, en suivant la stratégie de tests de Terraza et Bourbonnais, nous pouvons admettre que ces séries sont non stationnaires avec le modèle 3 (un modèle comprenant une constante et une tendance). Premièrement, l'estimation de la racine p indique que l'on peut rejeter l'hypothèse de la présence d'une racine unitaire pour une erreur de première espèce de 5 % :  $\rho-1(\text{SNES})=0,05$ , p-value<0,01 ;  $\rho-1(\text{PS})=-0,1$ , p-value<0,05 ;  $\rho-1(\text{PS2})=-0,22$ , p-value<0,01. Secondement, le test de l'absence de tendance (b=0) rejette l'hypothèse de nullité de la pente de la tendance : b(SNES)=-37,45, p-value<0,01 ; b(PS)=-16,58, p-value<0,01 ; b(PS2)=-33,34, p-value<0,01. En somme, d'après la stratégie de tests adoptée, ce modèle 3 permet de conclure que ces trois séries ne sont pas stationnaires notamment à cause d'une tendance.

	Modèle 3			Modèle 2		Modèle 1
	b	c	$\rho-1$	c	$\rho-1$	$\rho-1$
<b>GB</b>	-2,97 (-0,78)	5418,23*** (2,58)	-0,11*** (-4,44)	4129,37*** (3,20)	-0,11*** (-4,38)	inutile
<b>SNES</b>	-37,45*** (-3,84)	15966,7*** (4,19)	0,05*** (4,71)	inutile	inutile	inutile
<b>PS</b>	-16,58*** (-2,67)	8311,87*** (3,01)	-0,10*** (-3,42)	inutile	inutile	inutile
<b>PS2</b>	-33,34*** (-3,28)	17796,3*** (4,17)	-0,22*** (-4,98)	inutile	inutile	inutile
<b>St(GB)</b>	-0,00 (-0,05)	0,02 (0,25)	-0,41*** (-4,14)			

<sup>9</sup> L'hypothèse nulle d'un test BDS est la suivante : les valeurs de la série sont indépendamment et identiquement distribuées.

### Tableau 3 : Résultats d'un test ADF sur les ventes de consoles

Ce tableau présente les statistiques d'un test de Dickey-Fuller augmenté avec la tendance temporelle (modèle 3 avec estimations de la pente  $b$  de la tendance et de la constante  $c$ ) et sans la tendance (modèle 2 avec estimation de la constante  $c$ ) arrondies au centième près.  $\rho$  correspond à l'estimation de la valeur de la racine. L'ordre de délai maximal,  $p_{max}$ , correspond à valeur 112 du paramètre de troncature suggérée par Schwert (1989). L'ordre de délai est ensuite fixé par une procédure ascendante. Les ventes étudiées sont celles de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. \*, \*\*, \*\*\* rendent compte d'une probabilité critique, associée à l'hypothèse de stationnarité de la série, inférieure respectivement à 10 %, 5 % et 1 %. La mention inutile signifie que la stratégie de tests de Terraza et Bourbonnais (2008) ne nécessite pas l'utilisation de ce modèle pour décider de la non-stationnarité de la série.

Pour les ventes de Game Boy, le modèle 3 ne semble pas être le bon modèle pour conclure d'après la stratégie de test de Terraza et Bourbonnais (2008). Le test de l'absence de tendance ( $b=0$ ) ne permet pas de rejeter l'hypothèse de nullité de la pente de la tendance :  $b(GB)=-2,97$ ,  $p\text{-value}>0,1$ . Ainsi, le modèle 2 (un modèle avec constante et sans tendance) est celui qui permet de conclure. Premièrement, l'estimation de la racine  $\rho$  indique que l'on peut rejeter l'hypothèse de la présence d'une racine unitaire pour une erreur de première espèce de 1 % :  $\rho-1(GB)=-0,11$  ;  $p\text{-value}<0,01$ . Secondement, le test de l'absence d'une constante ( $c=0$ ) rejette l'hypothèse de nullité de la constante :  $c(GB)=4129,37$ ,  $p\text{-value}<0,01$ . En somme, d'après la stratégie de tests adoptée, ce modèle 2 permet de conclure que la série des ventes de Game Boy n'est pas stationnaire notamment à cause de la présence d'une constante.

Somme toute, nous venons de justifier tout au long de ce développement qu'il est nécessaire de transformer les séries étudiées avant de réaliser des tests de détections de non-linéarités et de chaos. Les statistiques descriptives ont fait apparaître l'existence d'asymétrie dans la distribution des ventes (3.1.1.1.) et l'inspection graphique des séries étudiées a mis en avant l'existence de non-stationnarité en variance et en moyenne (3.1.1.2.). Les tests de Kwiatkowski *et al.* (1992) et de Dickey et Fuller (1981) augmentés ont montré, au niveau statistique, que la non-stationnarité des séries étudiées est significative. Dans le point suivant, les transformations entreprises sont décrites ainsi que leurs résultats en termes de stationnarité des séries transformées.

#### 3.1.2. Transformation des séries et stationnarité des séries transformées

Pour choisir la transformation de Box-Cox permettant de retirer la non-stationnarité en variance observée, il convient d'inspecter pour chaque série la relation entre médiane et étendue (3.1.2.1.). Nous verrons alors que les résultats en découlant sont sensibles à la longueur des sections avec lesquelles nous découpons chaque série. Nous décrirons alors les séries stationnalisées avec une procédure plus intuitive décrite au point 2. Enfin, nous montrerons que les séries transformées sont stationnalisées en réalisant sur celles-ci les tests de Kwiatkowski *et al.* (1992) et de Dickey et Fuller (1981) augmenté.

##### 3.1.2.1. Le choix d'une transformation de Box-Cox

Pour choisir une transformation de Box-Cox afin de réduire les modifications de la variance dans le temps, Mills (1990 : 48) préconise l'inspection de la relation entre l'étendue et la médiane de sections de points d'une série à stationnariser. Lorsque la relation étendue-médiane croît plus vite que la première bissectrice, une transformation de Box-Cox avec  $\lambda < 0$  est souhaitable. Lorsque cette relation est parallèle à la première bissectrice, une transformation logarithmique ( $\lambda = 0$ ) permet de stationnariser en variance la série étudiée.

Enfin, si cette relation croît moins vite que la première bissectrice, il convient de choisir une transformation avec  $\lambda > 0$ .

En examinant la figure 2 (page suivante), il est possible d'observer que les conclusions que nous pouvons tirer d'une telle représentation sont sensibles à la longueur des sections des séries. Pour des sections de douze points, la conclusion est qu'il faut utiliser une transformation de Box-Cox avec  $\lambda < 0$  quelle que soit la série de ventes de consoles de jeux vidéo étudiées. En revanche, pour des sections de quatre points, il semblerait qu'il faille utiliser une transformation de Box-Cox avec  $\lambda = 0$ , pour les ventes de Play Station 2 et de Game Boy, et avec  $\lambda > 0$ , pour les ventes de Play Station et de Super Nintendo.

En somme, le résultat de cette technique semble trop sensible pour qu'elle puisse servir à décider une valeur de  $\lambda$  et donc une transformation de Box-Cox permettant de stationnariser la variance de chaque série de ventes. Ainsi, cela justifie l'utilisation d'une procédure plus intuitive visant à modifier la valeur de  $\lambda$  progressivement pour observer le résultat de la procédure de stationnarisation associée et pour retenir le résultat le plus satisfaisant en termes de stationnarité de la variance.

### 3.1.2.2. Résultats de la procédure de stationnarisation

Nous avons appliqué la procédure de stationnarisation décrite au point 2 : transformation de Box-Cox, retrait de la tendance avec un filtre de moyennes mobiles simples et, enfin, centrage et réduction pour normaliser la série. Cette procédure est présentée, pour les quatre séries étudiées, par la figure 3 (deux pages plus loin).

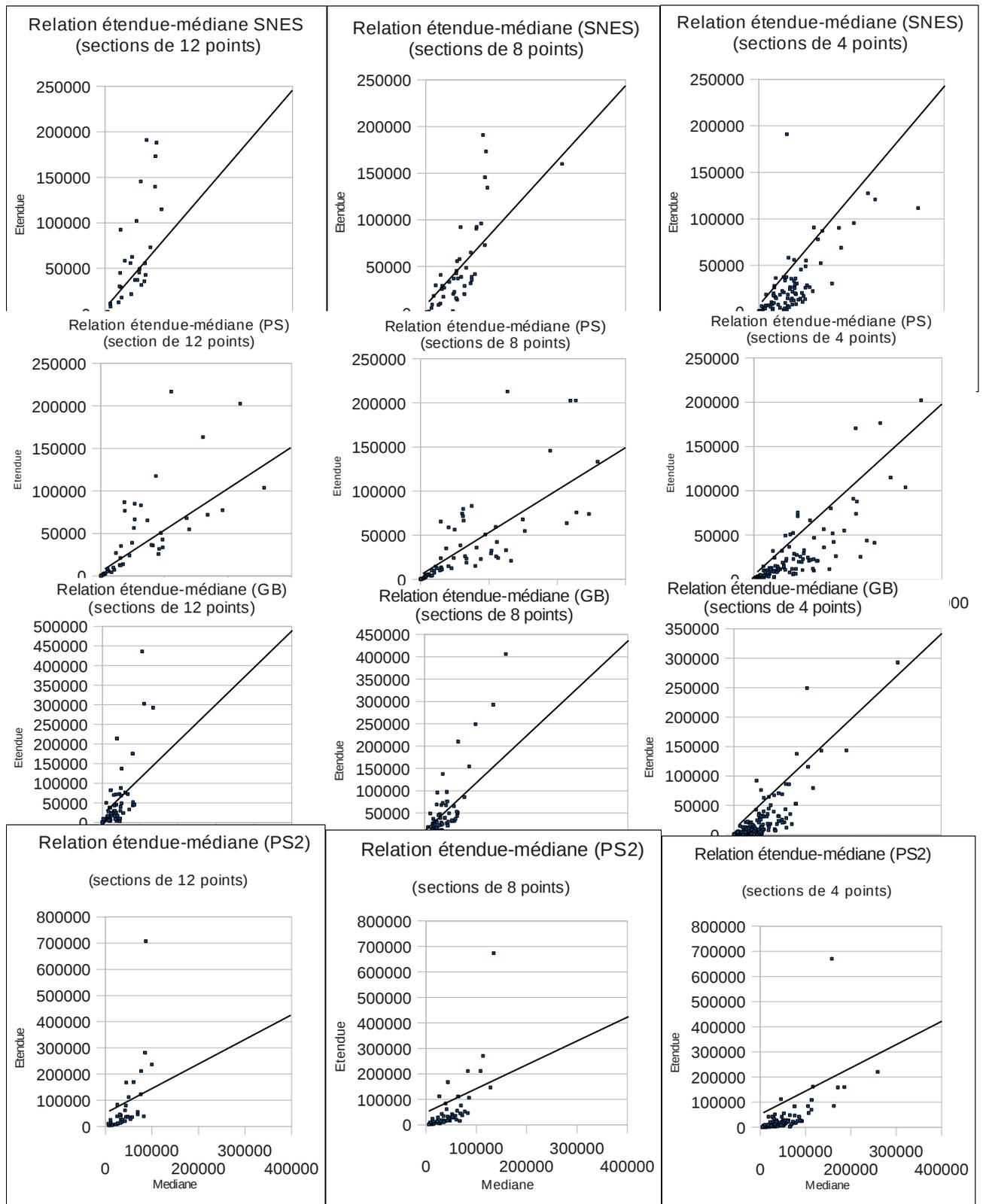


Figure 2 : Relation étendue-

médiane pour les ventes de consoles de jeux vidéo

Cette figure présente les relations étendue-médiane pour les séries de ventes de consoles de jeux vidéo et pour différents découpages des séries en sections de 12 (à gauche), 8 (au centre) et 4 (à droite) points. De haut en bas, il s'agit des relations étendue-médiane pour les ventes de Super Nintendo (SNES), Play Station (PS), Game Boy (GB) et Play Station 2 (PS2) au Japon. La première bissectrice est la ligne en trait plein.

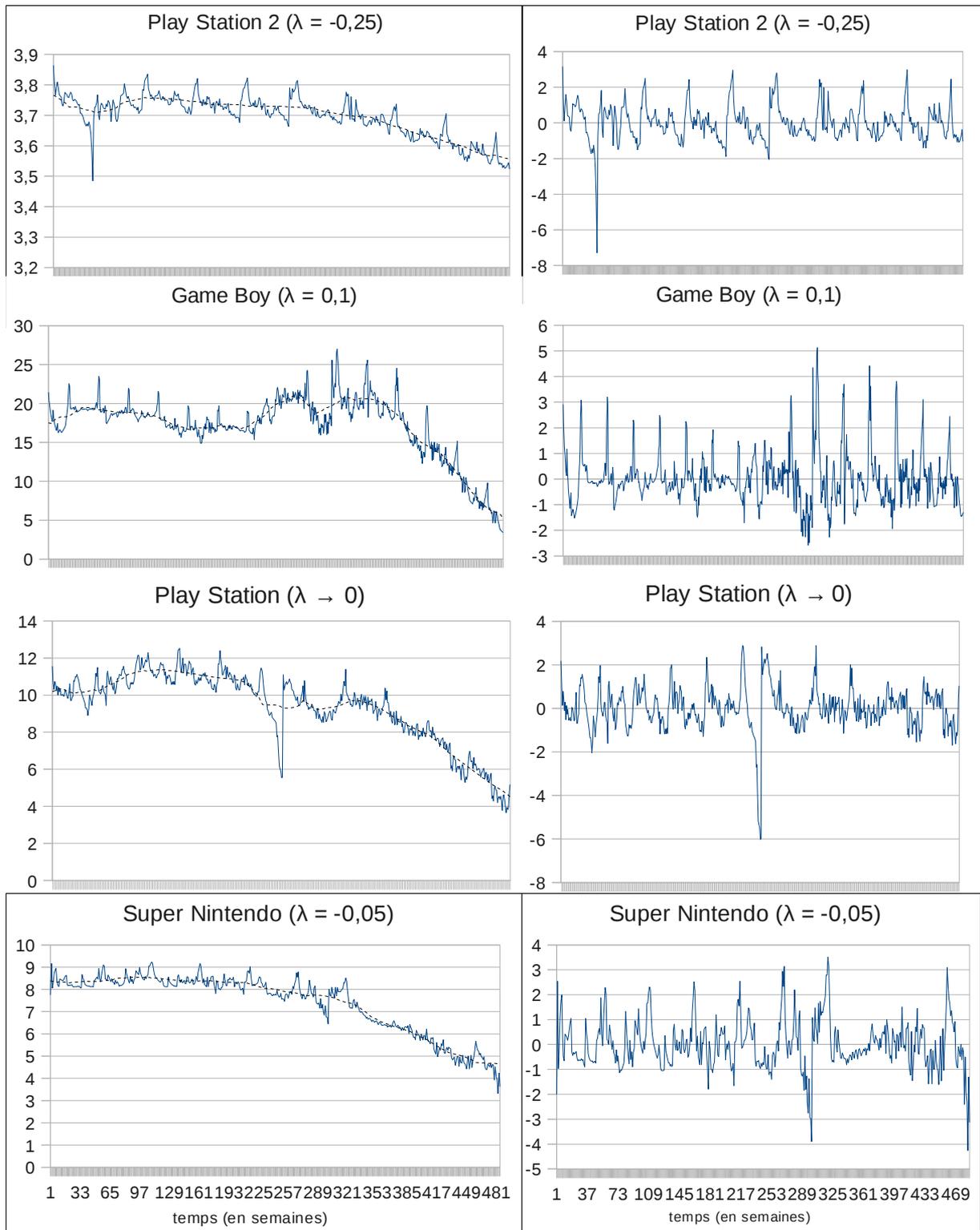


Figure 3 : Stationnarisation des ventes de consoles de jeux vidéo

Cette figure présente la procédure de stationnarisation réalisée : après avoir appliqué une transformation de Box-Cox adéquate (série représentée en trait plein à gauche), nous avons appliqué un filtre des moyennes mobiles simples pour retirer la tendance (représentée en pointillés à gauche), puis la courbe (représentée en trait plein à droite) a été obtenue en réduisant et en centrant le résultat de ce filtrage. De haut en bas, il s'agit des résultats de cette procédure pour les ventes de PlayStation 2, Game Boy, PlayStation et Super Nintendo au Japon.  $\lambda$  est le paramètre de la transformation de Box-Cox permettant de stationnariser au mieux la série.

Sur la figure 3 (page précédente), après transformation, retrait de la tendance et normalisation, il apparaît que les séries sont convenablement stationnarisées. Les évolutions de la variance et de la moyenne semblent relativement stabilisées pour chaque série étudiée. Pour vérifier la stationnarité des séries après application de cette procédure, nous avons réalisé les tests de Kwiatkowski *et al.* (1992) et de Dickey et Fuller (1981) augmenté.

### 3.1.2.3. Confirmation de la stationnarisation des séries

Le tableau 4 indique que l'on peut considérer, d'après le test de Kwiatkowski *et al.* (1992), que notre procédure a permis de stationnariser les séries étudiées de ventes de consoles de jeux vidéo. La statistique de test avec tendance,  $\eta_{\tau}$ , est inférieure à sa valeur critique 0,119 (pour une erreur de première espèce de 10 %) pour chaque série stationnarisée. Par exemple, pour la série stationnarisée des ventes de Game Boy, cette statistique de test est de 0,02 et donc inférieure à sa valeur critique. Nous notons, cependant, pour les ventes de Super Nintendo (SNES) de la non-stationnarité due à la baisse des ventes en fin de cycle. Cela peut aussi être détecté sur le graphique en bas à droite de la figure 3 (page précédente).

	n	I4	I12	$\eta_{\mu,14}$	$\eta_{\tau,14}$	$\eta_{\mu,112}$	$\eta_{\tau,112}$
<b>St(GB)</b>	796	6	20	0,03	0,02	0,02	0,02
<b>St(SNES)</b>	485	5	17	0,06	0,04	0,05	0,03
<b>St(PS)</b>	580	6	18	0,03	0,02	0,02	0,02
<b>St(PS2)</b>	476	5	17	0,04*	0,02	0,04*	0,02

**Tableau 4 : Résultats d'un test de Kwiatkowski *et al.* sur les ventes stationnarisées**

Ce tableau présente les statistiques de tests de Kwiatkowski *et al.* sans la tendance ( $\eta_{\mu}$ ) et avec la tendance ( $\eta_{\tau}$ ) arrondies au centième près. I4 et I12 correspondent aux valeurs du paramètre de troncature suggérées par Schwert (1989). Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. n rend compte du nombre de points compris dans les séries de ventes étudiées. St(.) dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les séries de ventes étudiées. \*, \*\*, \*\*\* rendent compte d'une probabilité critique, associée à l'hypothèse de stationnarité de la série, inférieure respectivement à 10 %, 5 % et 1 %.

Le tableau 5 (page suivante) synthétise les résultats d'un test de Dickey et Fuller (1981) augmenté réalisé sur chaque série stationnarisée. En suivant la stratégie de test de Bourbonnais et Terraza (2008), il apparaît que le modèle 3 (avec tendance et constante) n'est pas le bon modèle pour se prononcer sur la stationnarité de chaque série : l'hypothèse de présence d'une racine unitaire ( $\rho=1$ ) est rejetée ( $p\text{-value}<0,01$ ) et celle de l'absence d'une tendance déterministe ( $b=0$ ) n'est pas rejetée ( $p\text{-value}>0,1$ ). Le modèle 2 (avec constante seulement) ne permet pas de conclure en termes de stationnarité des séries stationnarisées car l'hypothèse de présence d'une racine unitaire ( $\rho=1$ ) est rejetée ( $p\text{-value}<0,01$ ) et celle de l'absence de nullité de la constante ( $c=0$ ) n'est pas rejetée ( $p\text{-value}>0,1$ ). Finalement, le modèle 1, sans tendance et sans constante, permet de conclure sur la stationnarité des séries stationnarisées.

	Modèle 3				Modèle 2			Modèle 1	
	b	c	$\rho-1$		c	$\rho-1$		$\rho-1$	
<b>St(GB)</b>	-0,00 (- 0,35)	0,02 (0,35)	-0,41*** (-8,14)	<b>St(GB)</b>	0,00 (0,08)	-0,41*** (- 8,15)	<b>St(GB)</b>	-0,41*** (- 8,16)	
<b>St(SNES)</b>	-0,00 (- 0,36)	0,02 (0,25)	-0,40*** (-6,13)	<b>St(SNES)</b>	-0,00 (- 0,14)	-0,40*** (- 6,14)	<b>St(SNES)</b>	-0,40*** (- 6,16)	
<b>St(PS)</b>	-0,00 (- 0,10)	0,01 (0,15)	-0,39*** (-6,72)	<b>St(PS)</b>	0,00 (0,13)	-0,39*** (- 6,73)	<b>St(PS)</b>	-0,39*** (- 6,73)	
<b>St(PS2)</b>	-0,00 (- 0,10)	-0,01 (- 0,03)	-0,38*** (-6,57)	<b>St(PS2)</b>	-0,01 (- 0,24)	-0,38*** (- 6,58)	<b>St(PS2)</b>	-0,38*** (- 6,58)	

**Tableau 5 : Résultats d'un test ADF sur les ventes de consoles stationnarisées**

Ce tableau présente les statistiques d'un test de Dickey-Fuller augmenté avec la tendance temporelle (modèle 3 avec estimations de la pente b de la tendance et de la constante c) et sans la tendance (modèle 2 avec estimation de la constante c) arrondies au centième près. p correspond à l'estimation de la valeur de la racine unitaire. L'ordre de délai maximal, pmax, correspond à la valeur 112 du paramètre de troncature suggérée par Schwert (1989). L'ordre de délai est ensuite fixé par une procédure ascendante. Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. St(.) dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les séries de ventes étudiées. \*, \*\*, \*\*\* rendent compte d'une probabilité critique, associée à l'hypothèse de stationnarité de la série, inférieure respectivement à 10 %, 5 % et 1 %.

D'après le modèle 1 et si nous suivons la stratégie de tests de Terraza et Bourbonnais (2008), nous pouvons rejeter l'hypothèse de présence d'une racine unitaire, pour une erreur de première espèce de 1 %. Par exemple, pour la série stationnarisée de ventes de Game Boy -St(GB), l'estimation de la racine unitaire moins un ( $\rho-1$ ) est de -0,41 ( $p$ -value<0,01). Nous pouvons donc admettre que la série stationnarisée de ventes de Game Boy est stationnaire. La même conclusion peut être réalisée, à partir du tableau 5, pour les autres séries étudiées stationnarisées.

En somme, les résultats des tests de stationnarité de Kwiatkowski *et al.* (1992) et de non-stationnarité de Dickey et Fuller (1981) permettent d'admettre que les séries ont été convenablement stationnarisées. Cela a permis d'éviter d'accepter à tort l'hypothèse de non-linéarité des séries étudiées avec le test de Brock *et al.* (1996) (test BDS).

Cependant, pour éviter d'accepter à tort cette hypothèse avec ce test, les séries stationnarisées doivent être blanchies. Autrement dit, nous devons retirer toute dépendance linéaire pour pouvoir conclure en la présence de non-linéarités avec le test BDS.

### 3.2. Résultats de tests de détection de non-linéarités et de chaos

Le but du développement qui suit est de montrer que les ventes étudiées présentent un comportement chaotique. Pour ce faire, nous présenterons les résultats du test BDS, sur séries stationnarisées et blanchies, permettant de montrer que ces ventes ont un comportement non linéaire (3.2.1.). Ce test ne permet pas de montrer qu'il y a présence de chaos dans les ventes. Ainsi, il est nécessaire de tester si la cause de cette non-linéarité vient de la présence de chaos déterministe dans les séries de ventes de consoles étudiées. Les résultats d'un premier test de détection de chaos est présenté pour observer s'il existe un attracteur de dimension non entière : l'estimation de la dimension de corrélation (3.2.2.). Ce premier test n'est pas fiable lorsque les séries étudiées sont courtes (Hsieh, 1991) : en cas de dimension de corrélation infinie, il permet cependant d'exclure certaines séries. Les résultats d'un second test, robuste à la

présence de bruit et fiable sur série courte, sont ensuite mis en avant : l'estimation de l'exposant de Lyapunov avec la méthode de Liu *et al.* (2005). Cela permet de voir s'il y a sensibilité aux conditions initiales et d'estimer l'horizon de prévisibilité pour les séries de ventes de consoles étudiées (3.2.3.).

### 3.2.1. Détection de non-linéarités avec le test BDS

Comme nous l'avons mis en avant dans le point 2., le test BDS permet de tester si la série étudiée est identiquement et indépendamment distribuée. Il permet de détecter la présence de non-linéarités (objectif de ce point 3.2.1.), que si nous avons préalablement retiré toute dépendance linéaire présente dans la série étudiée. Ainsi, le résultat du retrait de la dépendance linéaire de chaque série étudiée stationnarisée est d'abord présenté (3.2.1.1.). Puis, le résultat du test BDS est présenté pour ces séries blanchies et stationnarisées afin de voir la présence de non-linéarités (3.2.1.2.).

#### 3.2.1.1. Retrait de la dépendance linéaire dans les séries de ventes stationnarisées

<i>Ventes de Game Boy stationnarisées</i>	<i>AIC</i>	<i>SIC</i>	<i>HQC</i>
<i>AR(1)</i>	<b>1523,04</b>	<b>1532,4</b>	<b>1526,64</b>
<i>AR(2)</i>	1525,01	1539,05	1530,4
<i>AR(3)</i>	1524,74	1543,46	1531,93
<i>AR(4)</i>	1526,04	1549,43	1535,03
<i>Ventes de Super Nintendo stationnarisées</i>	<i>AIC</i>	<i>SIC</i>	<i>HQC</i>
<i>AR(1)</i>	1063,43	1071,8	1066,72
<i>AR(2)</i>	<b>1051,69</b>	<b>1064,24</b>	<b>1056,62</b>
<i>AR(3)</i>	1053,48	1070,22	1060,06
<i>AR(4)</i>	1055,48	1076,4	1063,7
<i>Ventes de Play Station stationnarisées</i>	<i>AIC</i>	<i>SIC</i>	<i>HQC</i>
<i>AR(1)</i>	<b>1093,67</b>	<b>1102,4</b>	<b>1097,07</b>
<i>AR(2)</i>	1094,33	1107,42	1099,44
<i>AR(3)</i>	1095,39	1112,84	1102,2
<i>AR(4)</i>	1095,08	1116,89	1103,58
<i>Ventes de Play Station 2 stationnarisées</i>	<i>AIC</i>	<i>SIC</i>	<i>HQC</i>
<i>AR(1)</i>	<b>937,447</b>	<b>945,778</b>	<b>940,723</b>
<i>AR(2)</i>	939,243	951,74	944,157
<i>AR(3)</i>	941,218	957,88	947,77
<i>AR(4)</i>	940,579	961,406	948,769

**Tableau 6 : Critères de comparaison de différents AR(p) sur les séries stationnarisées**

Ce tableau présente les valeurs des critères d'Akaike (AIC), Schwartz (SIC) et de Hannan-Quinn (HQC) pour différents modèles autorégressifs d'ordre p (AR(p)). Le modèle optimal pour blanchir une série est celui pour lequel les trois critères sont les plus faibles (valeurs en gras).

Pour blanchir (c'est-à-dire retirer la dépendance linéaire existante) les séries étudiées stationnarisées, nous avons utilisé une triangulation du critère d'information d'Akaike, des critères bayésiens de Schwartz et d'Hannan-Quinn. Le critère de maximisation du coefficient de détermination n'a pas été retenu car il présente l'inconvénient de ne pas arbitrer entre la perte de degré de liberté du modèle et l'amélioration de l'ajustement qui en est issu. Les critères utilisés ici sont préférables puisque nous cherchons à comparer des modèles avec un nombre différent de retards.

Nous avons calculé ces trois critères pour toutes les séries stationnarisées étudiées (tableau 6, page précédente). Les critères convergent dans le choix d'un modèle auto-régressif pour blanchir les séries stationnarisées étudiées.

Par exemple, pour les ventes de Game Boy stationnarisées, les critères d'Akaike, de Schwartz et d'Hannan-Quinn sont plus faibles pour un modèle autorégressif d'ordre 1. Ainsi, afin de tester la présence de non-linéarités dans les ventes de Game Boy stationnarisées avec le test BDS, il convient de prendre les résidus du modèle autorégressif d'ordre 1.

En somme, pour tester la présence de non-linéarités dans les ventes de Game Boy, Play Station et Play Station 2, nous avons réalisé les tests de Brock *et al.* (test BDS) sur les résidus respectivement d'un modèle autorégressif d'ordre 1. Pour ce faire sur les ventes de Super Nintendo, nous avons effectué un test BDS sur les résidus d'un modèle autorégressif d'ordre 2 de ces ventes stationnarisées.

### 3.2.1.2. Résultats du test de Brock et al. sur les séries blanchies et stationnarisées

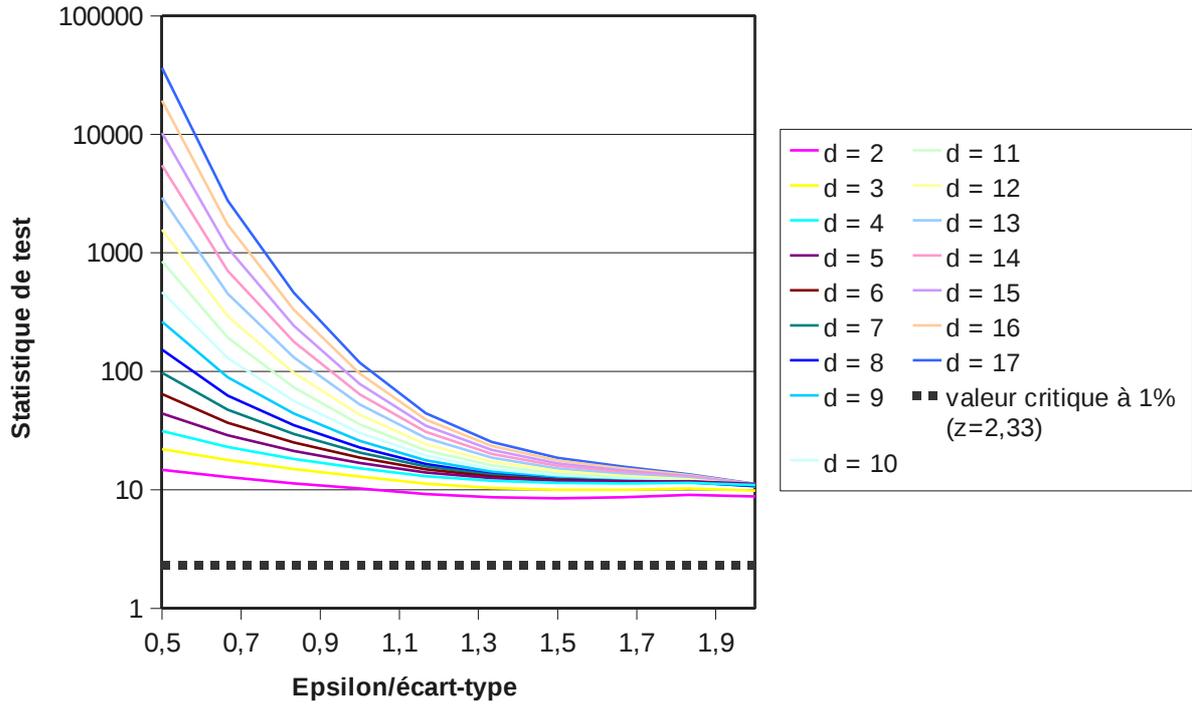
Le test de Brock, Dechert et Scheinkman (test BDS) permet de tester l'hypothèse selon laquelle la série est indépendamment et identiquement distribuée. Pour éviter un rejet de cette hypothèse due à la non-stationnarité des séries de ventes étudiées, nous avons préalablement stationnarisé les séries avec la procédure de Benincà *et al.* (2008).

Pour tester la non-linéarité de la série, le test BDS doit être utilisé sur des séries blanchies, c'est-à-dire dont nous avons retiré toute dépendance linéaire. Il s'agit de prendre les résidus d'un modèle autorégressif d'ordre  $p$ , minimisant les critères d'Akaike, de Schwartz et d'Hannan-Quinn. Pour les séries stationnarisées et blanchies de ventes de consoles étudiées, les résultats du test BDS sont présentés sur la figure 4 (pages suivantes).

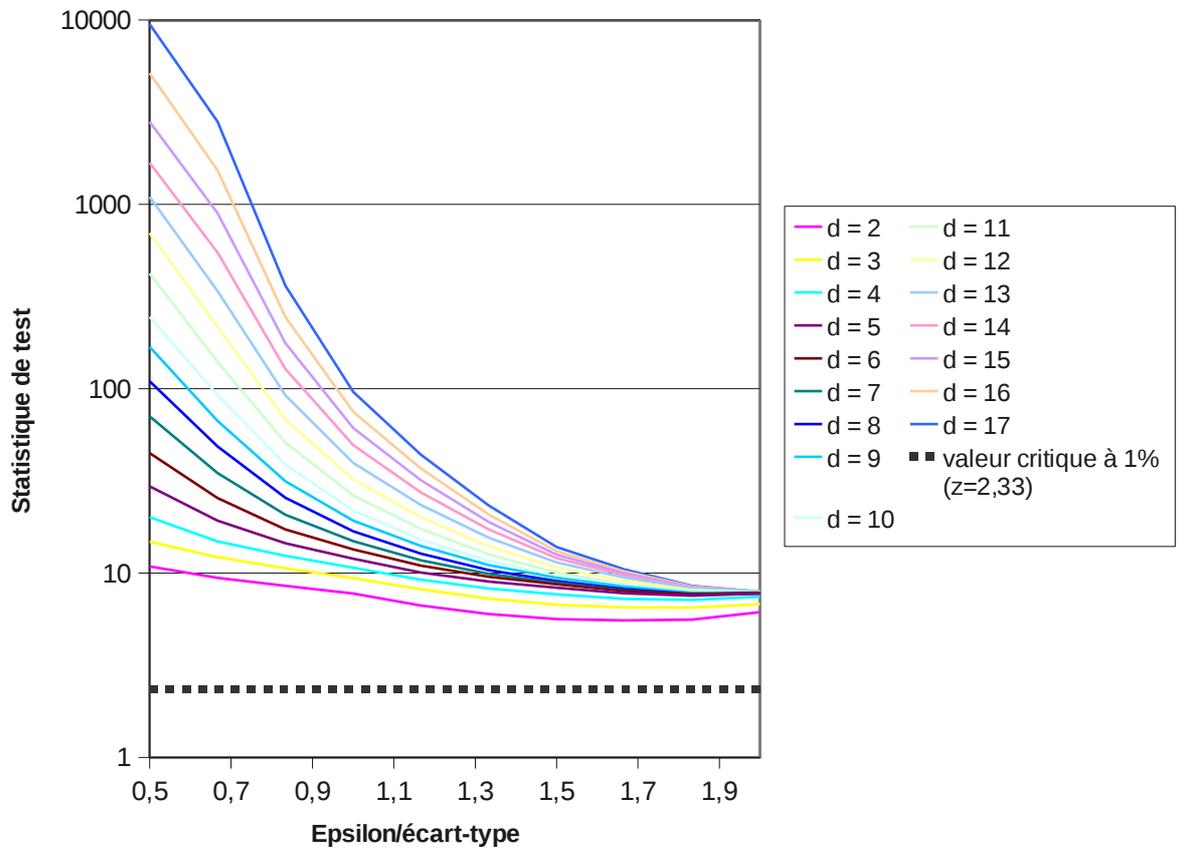
#### Figure 4 : Résultats du test de BDS pour les ventes stationnarisées et blanchies

Cette figure présente les résultats graphiques du test de Brock, Dechert et Scheinkman (1996) – test BDS. La statistique du test BDS est calculée pour les résidus d'une estimation d'un modèle autorégressif  $AR(p)$ , avec  $p$  minimisant simultanément les critères d'Akaike, de Schwartz et d'Hannan-Quinn pour chaque série de ventes de consoles de jeux vidéo préalablement stationnarisée. Chaque série est alors dite blanchie. Pour les séries stationnarisées de ventes de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Game Boy (GB), la statistique du test BDS est calculée avec les résidus d'un modèle  $AR(1)$ . Pour la série stationnarisée des ventes de Super Nintendo (SNES), cette statistique de test a été obtenue à partir des résidus d'un modèle  $AR(2)$ . Pour limiter le rejet à tort de l'hypothèse nulle (série linéaire), il est souhaitable d'utiliser ce test en prenant des écarts  $e$  entre deux valeurs de la série compris entre 0,5 et 2 fois l'écart type  $s$  de la série (Lin, 1997). L'axe des abscisses est le rapport ( $e/s$ ) entre cet écart  $e$  et l'écart type  $s$  de la série préalablement stationnarisée et blanchie. L'axe des ordonnées indique les valeurs prises par la statistique BDS pour ces différents rapports. Pour que la statistique BDS soit normalement distribuée, il faut que la dimension de plongement  $d$  soit telle que le rapport entre le nombre d'observations et  $d$  soit supérieur ou égal à 200 (Lin, 1997). Suivant Lin (1997), pour les séries blanchies de ventes de PS, PS2 et SNES, il ne faudrait considérer que les résultats pour  $d=2$ . Pour la série blanchie de ventes de GB, nous pouvons considérer les résultats obtenus pour  $d=2$ ,  $d=3$  et  $d=4$ . Cependant, d'après Brock *et al.* (1996), cela dépend du calcul de la dimension de corrélation (*cf.* point 2.2.) : si  $m$  est la dimension de corrélation arrondie à l'unité supérieure, nous devons calculer la statistique de test BDS pour  $d$  allant de 2 à  $2m+1$ .

### Ventes de GB stationnarisées et blanchies avec AR(1)



### Ventes de SNES stationnarisées et blanchies avec un AR(2)





Quelles que soient les valeurs des paramètres utilisés pour le calcul d'un test BDS, retenues en fonction des recommandations de la littérature (Lin, 1997 ; Brock et al., 1996), la statistique BDS est supérieure au fractile d'ordre 99 % de la loi normale standard :  $Z_{99\%}=2,32$ . Puisque nous avons calculé cette statistique sur les résidus d'un ajustement autorégressif des séries de ventes de consoles, les résultats de ce test montrent la présence de non-linéarités dans les séries étudiées<sup>10</sup>.

### 3.2.2. Calcul de la dimension de corrélation

Le test BDS s'appuie sur l'intégrale de corrélation pour tester l'hypothèse de distribution indépendante et identique, d'une série non blanchie, et l'hypothèse de linéarité, d'une série blanchie. Il n'est donc pas possible de conclure concernant la présence de chaos à l'issue de ce test.

On peut, en utilisant l'intégrale de corrélation, estimer aussi la dimension de corrélation d'une série (point 2.). Cette estimation peut servir de test de détection de chaos : il y a du chaos déterministe si celle-ci est finie et non entière (un nombre à virgule).

Pour estimer la dimension de corrélation, il convient d'abord de calculer le délai optimal (3.2.2.1). Puis, les résultats de l'estimation de la dimension de corrélation sont présentés pour chaque série (3.2.2.2.)

#### 3.2.2.1. Détermination du délai optimal

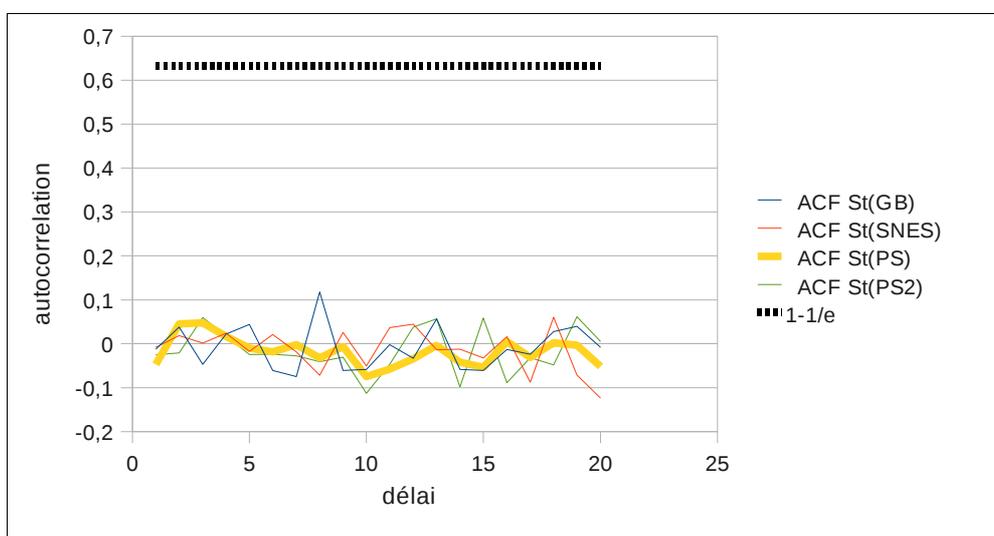


Figure 5 : Fonction d'autocorrélation pour les ventes stationnarisées

Cette figure représente la valeur de la fonction d'autocorrélation pour différents délais et permet, d'après Rosenstein *et al.* (1993), de déterminer le délai optimal. Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. St(.) dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les séries de ventes étudiées.  $1-1/e$  est la valeur permettant de déterminer le délai optimal : celui pour lequel la fonction d'autocorrélation commence à être inférieure à  $1-1/e$ .

Pour déterminer le délai optimal, comme indiqué au point 2., nous avons suivi Rosenstein *et al.* (1993). Ces auteurs conseillent de fixer le délai optimal comme celui à partir duquel la

<sup>10</sup>Le test BDS permet de tester qu'une série est indépendamment et identiquement distribuée. Lorsqu'il est utilisé sur une série blanchie, dont nous avons retiré la dépendance linéaire, il permet de tester la présence de non-linéarités.

fonction d'autocorrélation tombe en dessous de  $1-1/e$ , c'est-à-dire environ 63 %. La figure 5 montre que l'on peut raisonnablement fixer ce délai optimal à  $t=1$  pour toutes les séries stationnarisées étudiées : dès un retard unitaire, la fonction d'autocorrélation est inférieure à  $1-1/e$ .

Maintenant déterminé le délai optimal, il est possible d'estimer la dimension de corrélation.

### 3.2.2.2. Estimation de la dimension de corrélation

À l'aide du logiciel VRA<sup>®</sup>, nous avons calculé avec la dimension de corrélation pour plusieurs dimensions de plongement :  $m = 1, \dots, 20$ . Cela a été fait en utilisant la meilleure résolution (« max radius »), comme conseillé par l'aide du logiciel. La figure 6 montre l'estimation de la dimension de corrélation pour différentes valeurs de la dimension de plongement.

Sur la figure 6, il apparaît que la dimension de corrélation semble finie, puisque la dimension de corrélation ne croit pas dans les mêmes proportions que la dimension de plongement. Ces résultats montrent la présence de chaos dans les séries étudiées : la dimension de corrélation est finie et non entière.

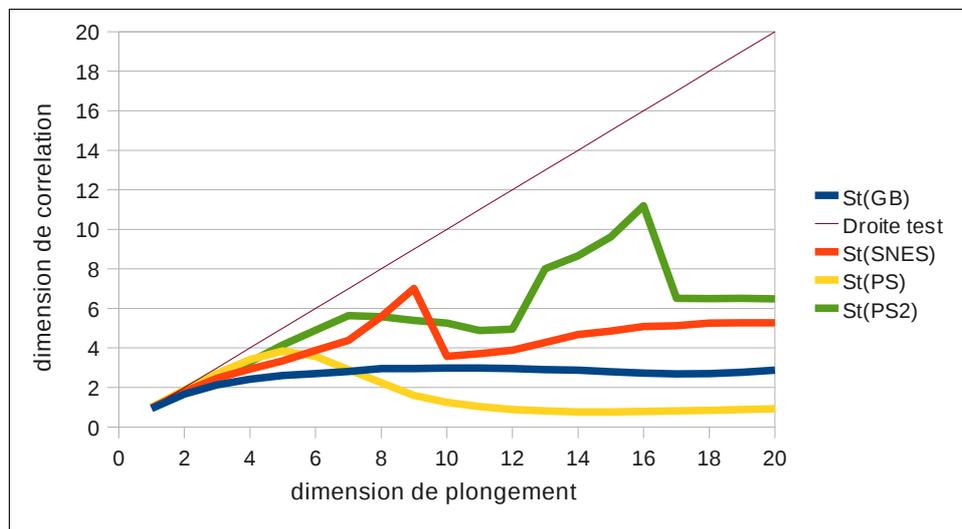


Figure 6 : Estimation de la dimension de corrélation pour les ventes stationnarisées

Cette figure rend compte de l'estimation de la dimension de corrélation pour différentes dimensions de plongement obtenue avec l'algorithme de Grassberger et Procaccia (1983). La première bissectrice permet de distinguer une série aléatoire d'une série déterministe. Si les séries étudiées ont une dimension de corrélation finie, c'est-à-dire convergente et inférieure à la première bissectrice, et non entière alors nous pouvons admettre qu'elles sont chaotiques. Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. St(.) dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les séries de ventes étudiées.

On peut estimer les dimensions de corrélation pour chaque série, en retenant celle pour une dimension de plongement optimale (cf. 3.2.3.2. ci-dessous) :

- 2,81 pour la série stationnarisée des ventes de Game Boy ;
- 3,35 pour la série stationnarisée des ventes de Super Nintendo ;
- 3,84 pour la série stationnarisée des ventes Play Station ;
- 4,16 pour la série stationnarisée des ventes Play Station 2.

Cependant, pour des séries aussi courtes, l'estimation de la dimension de corrélation ne peut suffire pour nous assurer de la présence de chaos. Nous utilisons des séries comprenant à peine plus de 400 points (ventes de Play Station 2, Super Nintendo), de près de 600 points (ventes de Play Station) et d'environ 800 points (ventes de Game Boy). Avec un nombre d'observations réduit, il est difficile d'appliquer une méthode préconisée, en science de la nature, pour des séries comprenant un grand nombre de points (100 000 points ou plus). Le faible nombre d'observations peut biaiser les résultats de cette estimation en faveur de la présence de chaos (Ramsey et Yuan, 1989). Ainsi, ce test ne peut être utilisé que pour retirer certaines séries. Nous ne pouvons conclure qu'il y a présence de chaos avec cette estimation. Cela légitime l'utilisation d'une estimation de l'exposant maximum de Lyapunov robuste au bruit et à la faible taille des séries : celle utilisant l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993) proposée par Liu *et al.* (2005).

### 3.2.3. Estimation robuste de l'exposant maximum de Lyapunov

Pour calculer l'exposant maximum de Lyapunov (3.2.3.3), il convient de trouver la dimension de plongement au-delà de laquelle le nombre de faux plus proches voisins est nul : la dimension de plongement optimale (3.2.3.2.). Pour ce faire, il est recommandé de s'assurer que l'on a diminué le nombre de valeurs proches dans l'espace car proche dans le temps, c'est-à-dire les faux voisins, en déterminant une fenêtre de Theiler (3.2.3.1.)

#### 3.2.3.1. Détermination de la fenêtre de Theiler

La fenêtre de Theiler permet de s'assurer que l'on ne considère pas deux points comme proches dans une représentation graphique pour la seule raison qu'ils sont aussi proches temporellement. Pour supprimer cette proximité temporelle, nous évitons de faire des calculs en prenant des points qui se suivent d'un laps de temps trop court. Ce laps de temps, c'est la fenêtre de Theiler. Nous pouvons fixer cette fenêtre en inspectant le schéma de séparation espace-temps.

La fenêtre de Theiler est le laps de temps au-delà duquel la séparation dans le temps de deux points d'une série n'a plus d'influence sur leur proximité sur un graphique. Autrement dit, c'est le laps de temps où les courbes du schéma de séparation espace-temps sont stables. Une fois donnée l'interprétation graphique du schéma de séparation espace-temps, la figure 7 (pages suivantes) peut être inspectée.

Il apparaît que la fenêtre de Theiler doit être fixée à un laps de temps de dix semaines pour les ventes stationnarisées de Game boy, Super Nintendo et Play Station. Au-delà de ce laps de temps, la proximité temporelle ne joue plus sur la probabilité que deux points soient proches d'une certaine distance. Graphiquement, les courbes d'iso-probabilité sont stables au-delà d'un laps de 10 semaines. Pour les séries de ventes de Play Station stationnarisées, il paraît raisonnable de fixer une fenêtre de Theiler de cinq semaines. De plus, l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993) ne fonctionne pas au-delà de cette fenêtre de Theiler sur le logiciel TISEAN®.

Maintenant que la fenêtre de Theiler est fixée, il est possible de calculer la dimension de plongement optimale, c'est-à-dire celle au-delà de laquelle le nombre de faux plus proches voisins peut être considéré comme nul.

### Figure 7 : Détermination de la fenêtre de Theiler avec le schéma de séparation espace-temps

Cette figure représente la probabilité que deux points proches d'un certain laps de temps (en semaines) soient proches d'une certaine distance. Chaque ligne représente une même probabilité : de bas en haut, la probabilité est de  $1/10$ ,  $1/20$ , ...,  $1/90$ ,  $1$ . Lorsque la proximité temporelle (laps de temps) joue sur la probabilité que deux points soient proches d'une certaine distance, ces points doivent être exclus des calculs qui suivent grâce à la fenêtre de Theiler. La fenêtre de Theiler correspond au laps de temps (ligne horizontale) à partir duquel le laps de temps ne joue plus sur la distance : les courbes d'iso-probabilité sont stables au-delà de ce laps de temps. Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon.  $St(\cdot)$  dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les ventes.

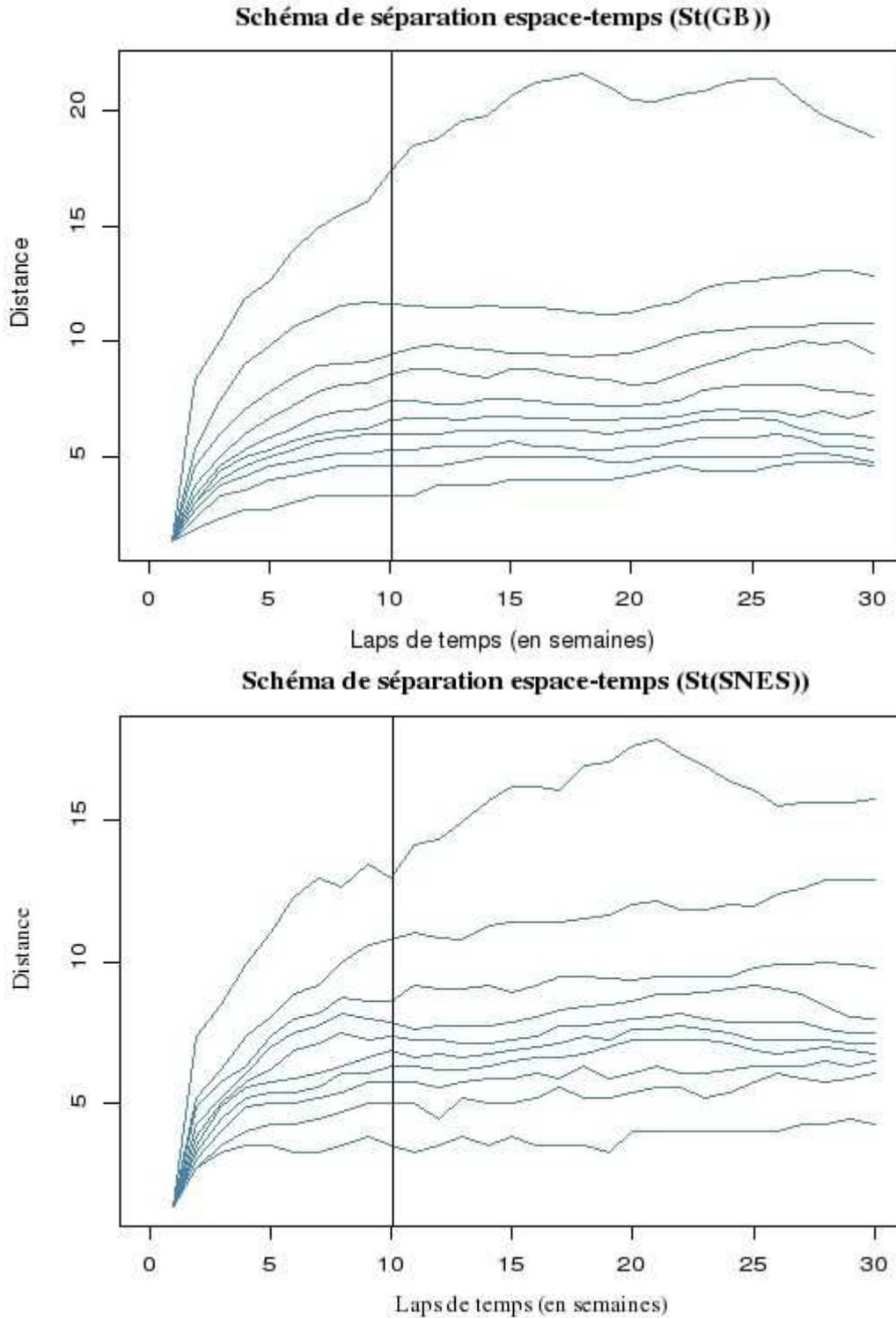
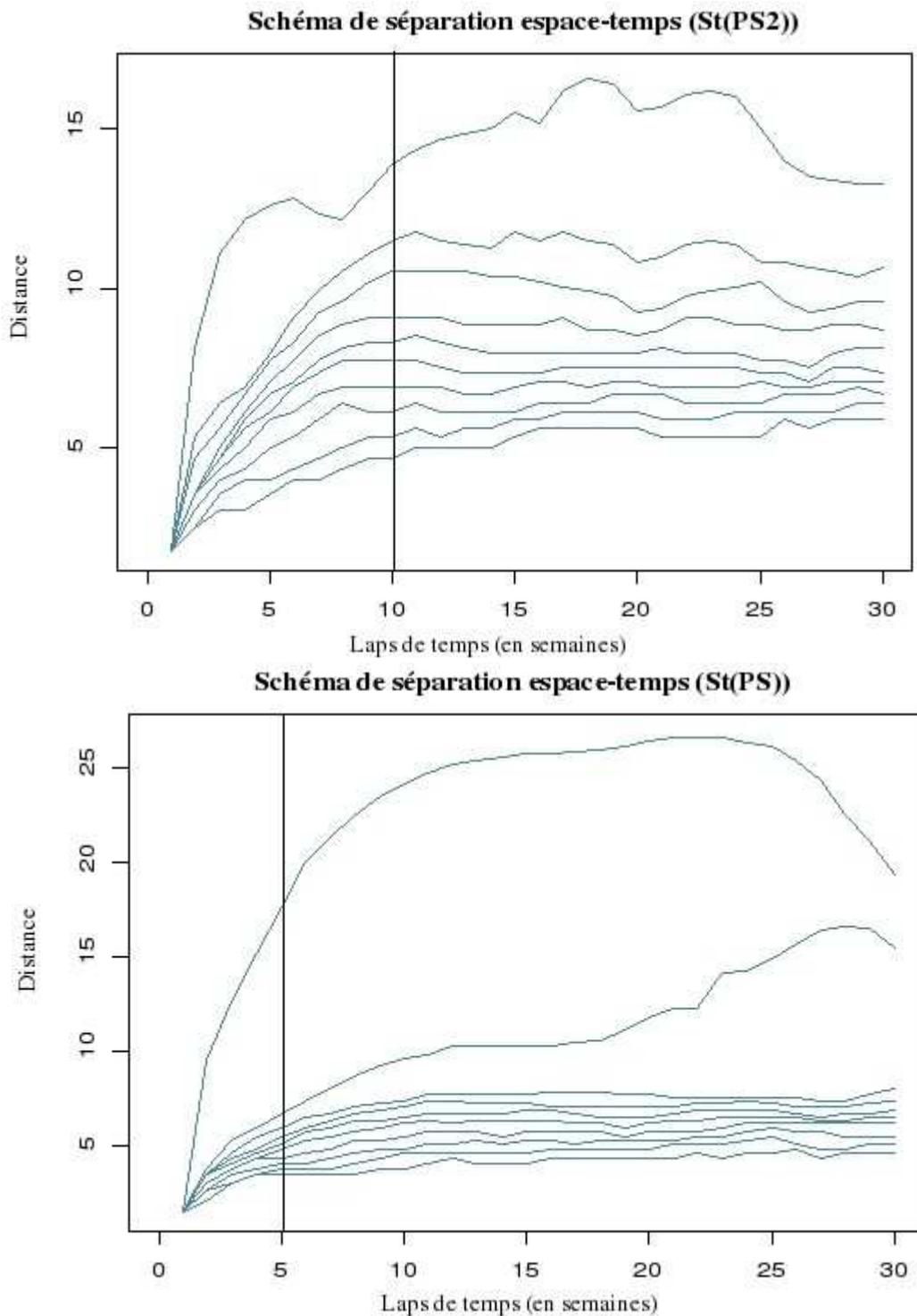


Figure 7 – Suite



### 3.2.3.2. Détermination de la dimension de plongement optimale

Pour calculer la dimension de plongement optimale afin de calculer l'exposant maximum de Lyapunov, la fraction de faux plus proches voisins a été calculée avec le programme indiqué au point 2. : le résultat graphique obtenu apparaît sur la figure 8 (page suivante).

Après inspection de la figure 8, pour estimer l'exposant maximum de Lyapunov et détecter la présence de chaos dans les séries stationnarisées de ventes de consoles de jeux vidéo, nous prendrons comme estimation de la dimension de plongement optimale  $m = 7$ , pour les ventes de Game Boy, et  $m = 5$ , pour celles de Play Station et Super Nintendo et Play Station 2. Ces dimensions de plongement sont optimales : au-delà de ces dimensions de plongement la fraction de faux plus proches voisins est nulle pour une série donnée.

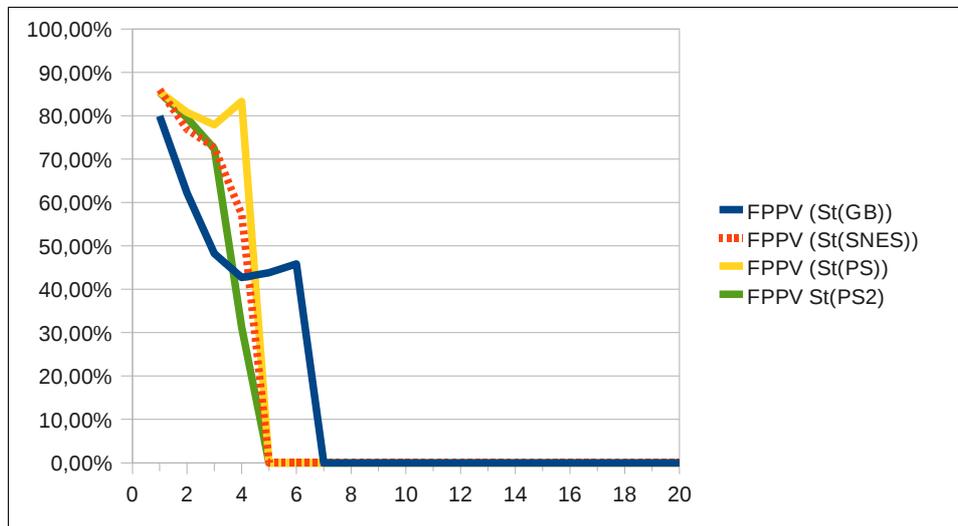


Figure 8 : Nombre de plus proches voisins pour les ventes stationnarisées

Cette figure représente la fraction de faux plus proches voisins (en ordonnées) pour différentes dimensions de plongement (en abscisses). FPPV signifie faux plus proches voisins. St(.) dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les séries de ventes étudiées. La dimension de plongement au-delà de laquelle la fraction de faux plus proches voisins est nulle est la dimension de plongement qu'il faut retenir pour estimer l'exposant maximum de Lyapunov. Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon.

### 3.2.3.3. Détection robuste de chaos dans les ventes de consoles

Une fois calculés le délai optimal (3.2.2.1.), la fenêtre de Theiler (3.2.3.1.) et la dimension de plongement optimale (3.2.3.2.), nous pouvons estimer l'exposant de Lyapunov avec l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993). Cet algorithme est robuste à la faible taille des données. En présence de bruit, il est possible d'estimer l'exposant maximum de Lyapunov avec la régression non linéaire proposée par Liu *et al.* (2005) à partir du résultat de l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993).

Les résultats obtenus avec l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993) apparaissent sur la figure 9 (page suivante). Nous notons l'absence de portion croissante linéaire qui peut provenir de la présence de bruit dans les données de ventes étudiées. Cela ne serait pas surprenant puisqu'il s'agit d'une collecte par sondage aléatoire qui peut être entachée d'erreurs d'estimation des ventes. Ce risque justifie l'utilisation de la régression non linéaire de Liu *et al.* (2005) pour estimer l'exposant de Lyapunov, plutôt qu'une régression linéaire de la partie croissante que l'on observe sur la figure 9 (page suivante).

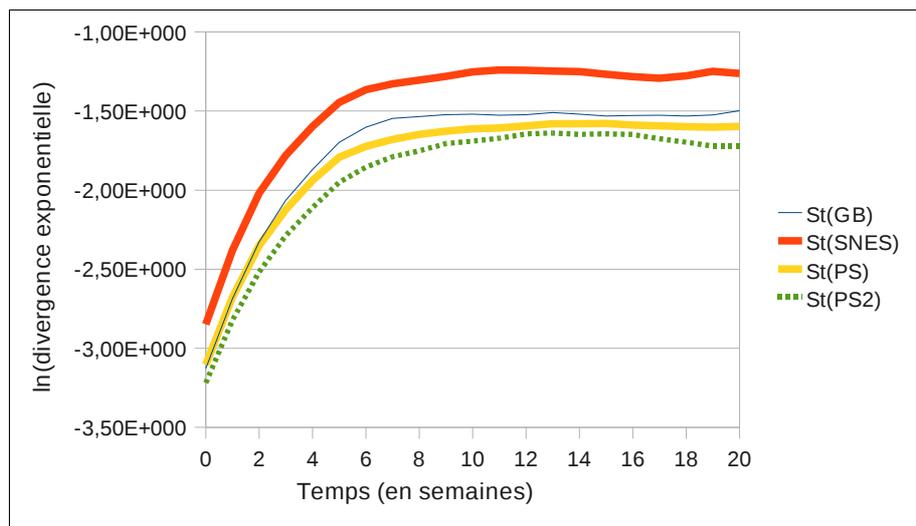


Figure 9 : Résultats de l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993) sur les ventes stationnarisées

Cette figure présente le résultat, pour chaque série de ventes stationnarisée, obtenu avec l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993).  $St(.)$  dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les séries de ventes étudiées. Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon.

Pour faire une régression non linéaire de Liu *et al.* afin d'estimer l'exposant maximum de Lyapunov et son degré de signification (l'hypothèse nulle étant la nullité de l'exposant), dans un premier temps, nous avons utilisé un algorithme de brute-force. Cela permet d'éviter d'obtenir un minimum local au lieu d'un minimum global avec l'algorithme de Newton-Gauss. Puis, dans un second temps, en utilisant l'algorithme de Newton-Gauss, nous avons estimé trois paramètres du modèle non linéaire de Liu *et al.* (2005) : la constante, l'exposant maximum de Lyapunov et le niveau de bruit présent dans la série. Puis, suivant Smyth (2002), nous avons calculé une statistique de Fisher pour calculer une probabilité critique associée à l'hypothèse de nullité de l'exposant de Lyapunov. Cette probabilité critique permet de déterminer si l'exposant de Lyapunov est significativement non nul. Les résultats de ces calculs pour chaque série sont résumés dans le tableau 7.

	<i>Constante</i>	<i>Niveau de bruit</i>	<i>Exposant maximum de Lyapunov</i>	<i>P-value</i>
<i>St(GB)</i>	-3,1	1,78	0,1611455***	0,001
<i>St(SNES)</i>	-2,81	1,75	0,1587826***	0,002
<i>St(PS)</i>	-3,06	1,68	0,1469196***	0,002
<i>St(PS2)</i>	-3,19	1,63	0,1408065***	0,001

Tableau 7 : Estimations de l'exposant maximum de Lyapunov robuste au bruit

Ce tableau représente les estimations des paramètres du modèle non linéaire de Liu *et al.* (2005) permettant de calculer l'exposant maximum de Lyapunov et le niveau de bruit contaminant les séries étudiées. Cette estimation est faite à partir des six premiers points du résultat de l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993) pour chaque série stationnarisée.  $St(.)$  dénote que la procédure de stationnarisation a été appliquée sur les séries de ventes étudiées. Les ventes étudiées sont celles stationnarisées de Game Boy (GB), de Play Station (PS), de Play Station 2 (PS2) et de Super Nintendo (SNES) au Japon. \*\*\* rend compte d'une probabilité critique (p-value), associée à l'hypothèse de nullité de l'exposant maximum de Lyapunov, inférieure à 1 %. La probabilité critique est arrondie au millième, alors que le niveau de bruit et la constante le sont au centième.

Il apparaît dans le tableau 7 (page précédente) qu'il y a présence d'un phénomène de sensibilité aux conditions initiales dans les séries stationnarisées. Pour toutes les séries de ventes étudiées, l'exposant de Lyapunov est positif (exposant  $> 0$ ) et significatif ( $p$ -value  $< 0,01$ ). C'est une preuve significative de chaos.

Suivant Benincà *et al.* (2008), nous pouvons alors utiliser le résultat de l'algorithme de Rosenstein *et al.* (1993) pour déterminer l'horizon de prévisibilité pour chaque série de ventes stationnarisée. Cet horizon peut être considéré comme le délai (en semaines, en l'occurrence) au-delà duquel le logarithme de la divergence exponentiel est stable. Cette information peut se lire sur la figure 9 (page précédente).

Pour déterminer l'horizon de prévisibilité de chaque série étudiée, nous avons fixé qu'il s'agit du délai au-delà duquel la courbe du logarithme de la divergence exponentielle dépasse 95 % de sa valeur maximale (valeur minimale + 95 % x (valeur maximale – valeur minimale)). Nous trouvons alors, par interpolation linéaire, un horizon de prévisibilité de 6,4 semaines pour la série stationnarisée des ventes de Game Boy, de 7,28 semaines pour les ventes stationnarisées de Super Nintendo et 7,76 semaines pour celles de Play Station et de 8,73 semaines pour la série stationnarisée de ventes de Play Station 2.

#### **4. Discussions des résultats**

Les résultats étant présentés, nous discutons de leurs implications au regard de l'hypothèse et de la question de recherche.

Au regard de nos résultats, le débat entre Miller *et al.* (1993), et Granovetter et Soong (1986), ainsi que Nakayama et Nakamura (2004)<sup>11</sup>, doit être tranché avec précaution. Les résultats du test BDS montrent que l'on peut rejeter l'hypothèse nulle d'une distribution IID des séries blanchies et stationnarisées de ventes de consoles étudiées. Puisque ce rejet a lieu sur des séries dont les dépendances linéaires ont été retirées (elles sont blanchies), on peut considérer qu'il y a présence de non linéarités dans les séries. Ainsi, les résultats du test BDS montrent que les modèles linéaires ne sont pas assez riches pour rendre compte des ventes de consoles de jeux vidéo étudiées.

De plus, si les ventes de certains biens était gouverné par des processus chaotiques, les méthodes linéaires traditionnelles de prévision ne fonctionneraient pas (Hsieh, 1991 : 1845) à court et long termes. En revanche, il serait possible de faire des prévisions de court terme avec des modèles non linéaires. L'estimation de l'exposant de Lyapunov étant significativement positif, on peut considérer que les ventes étudiées sont chaotiques. Cela permet de répondre à notre question : il existe des activités de ventes de biens qui ne sont pas prévisibles à quelques erreurs près. De plus, cela permet de ne pas rejeter l'hypothèse formulée en introduction : les ventes de biens à la mode sont chaotiques.

L'horizon de prévisibilité est donc limité à quelques semaines : de 6 à 9 semaines suivant les ventes. On peut alors se demander s'il est possible d'appliquer un contrôle de type cybernétique dans les organisations vendant les consoles de jeux vidéo en question. En effet,

---

<sup>11</sup>Rappelons que, selon Miller *et al.* (1993), les ventes de biens à la mode peuvent être représentée avec un modèle linéaire, alors que, selon Granovetter et Soong (1986) et Nakayama et Nakamura (2004), elles peuvent être représentées avec un modèle non linéaire.

le processus budgétaire requiert bien souvent des prévisions de ventes à plus de 6 semaines. Dans ce cadre, quel type de contrôle peut-on mettre en œuvre ?

Face à des ventes chaotiques, les commerciaux pourraient pratiquer localement (c'est-à-dire au niveau de leurs « centres opérationnels ») une prévision des ventes sur quelques semaines. Ils peuvent notamment avoir recours à la méthode du plus proche voisin. Cette méthode est « un outil simple mais utile pour prévoir les systèmes chaotiques. (...) [C]ette technique prend l'observation passée qui ressemble le plus à l'état actuel [des ventes] et elle retourne l'observation suivant le plus proche voisin en tant que prévision pour demain » (Guégan et Leroux, 2009 : 8). Puisque ces prévisions se feraient localement, il y aurait alors un contrôle cybernétique sans division du travail : contrôle homéostatique. Ces prévisions locales de court terme ne permettraient pas de concevoir un budget annuel pour l'entreprise mais pourraient accroître la qualité des prévisions, tout comme les groupes semi-autonomes, décrits par Hofstede (1978 : 454), ont accrus la qualité et la productivité de leur atelier.

Cependant, la prévision de ventes chaotiques suppose une connaissance précise des ventes de consoles de jeux vidéo. Au regard de la taille des observations que l'on peut obtenir et de la qualité des données, il est difficile d'envisager que cela soit possible. On peut alors considérer que la présence de chaos, même si elle laisse l'espoir de faire des prévisions de court terme, pousse à considérer les ventes étudiées comme des phénomènes indéterminés. Dans ce cadre, suivant Hofstede (1978), on pourrait encourager les praticiens à contrôler politiquement ces ventes. « Les situations non cybernétiques sont par essence politique ; les décisions sont basées sur la négociation et le jugement. » (Hofstede, 1978 : 459) Ce type de contrôle des ventes peut s'apparenter à ce qu'ont observé Lynn et al. (1999). Ces auteurs ont montré que les biens innovants qui ont connu un grand succès sont issus d'entreprises utilisant des techniques particulières pour faire des prévisions de ventes. Pour ce faire, ces entreprises mobilisent notamment des avis de membres de l'organisation ou d'un expert interne, ou réalisent un brainstorming.

## Références

- Anthony, R.N., Dearden, J., Vancil, R.F. (1972). *Management Control Systems: Text, Cases and Readings*. New York: Irwin Professional Publishing.
- Benincà, E., Huisman, J., Heerkloss, R., Jöhnk, K.D., Branco, P., Van Nes, E.H., Scheffer, M., Ellner, S.P. (2008). Chaos in a long-term experiment with a plankton community. *Nature* 451 (7180): 822-825, Nature Publishing Group.
- Broock, W.A., Scheinkman, J.A., Dechert, W.D., LeBaron, B. (1996). A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Reviews* 15 (3): 197-235, Taylor & Francis.
- Dickey, D.A., Fuller, W.A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* 49(4): 1057-1072, JSTOR.
- Dingwell, J.B. (2009). Lyapunov exponents. In *Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering*. New York: Wiley.
- Granovetter, M., Soong, R. (1986). Threshold models of interpersonal effects in consumer demand. *Journal of Economic Behavior and Organization* 7(1): 83-99, Elsevier.
- Guegan, D., Leroux, J. (2009). Forecasting chaotic systems: The role of local Lyapunov exponents. *Chaos, Solitons & Fractals* 41(5): 2401-2404, Elsevier.

- Hofstede, G. (1978). The poverty of management control philosophy. *Academy of Management Review* 3(3): 450-461, JSTOR.
- Hornik, K. (2008). The R FAQ. <http://CRAN.R-project.org/doc/FAQ/R-FAQ.html>
- Hsieh, D.A. (1991). Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets. *Journal of Finance* 46(5): 1839-1877, JSTOR.
- Kantz, H., Schreiber, T. (2004). *Nonlinear time series analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics* 54(1-3): 159-178, Elsevier.
- Leibenstein, H. (1950). Bandwagon, snob, and Veblen effects in the theory of consumers' demand. *The Quarterly Journal of Economics*, 64(2): 183-207, JSTOR.
- Lin, K. (1997). The ABC's of BDS. *Journal of Computational Intelligence in Finance* 5: 23-26, Citeseer.
- Liu, H.F., Dai, Z.H., Li, W.F., Gong, X., Yu, Z.H. (2005). Noise robust estimates of the largest Lyapunov exponent. *Physics Letters A* 341 (1-4): 119-127, Elsevier.
- Lurçat, F. (2007). *Le chaos*. 2ème édition, Que sais-je ?, Paris: Presse Universitaire Française.
- Lynn, G.S., Schnaars, S.P., Skov, R.B. (1999). A survey of new product forecasting practices in industrial high technology and low technology businesses. *Industrial Marketing Management* 28(6): 565-571, Elsevier.
- Malo, J.L., Mathé, J.C. (2002). *L'essentiel du contrôle de gestion*. Paris: Édition d'organisation.
- Miller C.M., McIntyre S.H., Mantrala M.K. (1993). Toward formalizing fashion theory. *Journal of Marketing Research* 30, pp. 142-157, JSTOR.
- Mills, T.C. (1990), *Time Series Techniques for Economists*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Nakayama S. et Nakamura Y. (2004). A fashion model with social interaction. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 337 (3-4): 625-634, Elsevier.
- Pindyck, R., Rubinfeld, D., Sollogoub, M. (2005). *Microéconomie*. 6ème édition, Baume-les-Dames: Pearson.
- Ramsey, J.B., Yuan, H.J. (1989). Bias and error bars in dimension calculations and their evaluation in some simple models. *Physics Letters A* 134(5): 287-297, Elsevier.
- Rosenstein, M.T., Collins, J.J., De Luca, C.J. (1993). A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 65 (1-2): 117-134, Elsevier.
- Scheinkman, J.A., LeBaron, B. (1989). Nonlinear dynamics and stock returns. *Journal of Business* 62(3): 311-337, JSTOR.
- Sinaï, Y.G. (1992). L'aléatoire du non aléatoire. In *Chaos et Déterminisme* (Eds, Dahan Dalmedico, A., Chabert, J.L., Chemla, K.). Paris: Seuil, pp.68-87.
- Smyth, G.K. (2002). Nonlinear regression. In *Encyclopedia of Environmetrics* 3 (Eds, A. H. El-Shaarawi, W. W. Piegorisch). Chichester: John Wiley & Son, 1405-1411.
- Sutherland, J.W. (1975). System theoretic limits on the cybernetic paradigm. *Behavioral Science* 20(3): 191-200, John Wiley & Son.
- Terraza, M., Bourbonnais, R. (2008). *Analyse des séries Temporelles*. Paris: Dunod.
- Varian, H. (1972). Benford's law. *The American Statistician* 26(3): 65-66, ASA.

Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16(3): 285-317, Elsevier.