



**HAL**  
open science

## Christopher A. Sims et la représentation VAR

Jean-Baptiste Gossé, Cyriac Guillaumin

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Gossé, Cyriac Guillaumin. Christopher A. Sims et la représentation VAR. 2011. hal-00642920

**HAL Id: hal-00642920**

**<https://hal.science/hal-00642920>**

Preprint submitted on 19 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Christopher A. Sims et la représentation VAR

Jean-Baptiste Gossé\*

Cyriac Guillaumin\*\*

Résumé : le 10 octobre 2011, l'Académie Royale des Sciences de Suède a attribué le prix Nobel d'économie à Thomas Sargent et Christopher Sims « pour leurs recherches empiriques sur la cause et l'effet en macroéconomie ». Cet article se propose de présenter les travaux pour lesquels Sims a été primé. Pour commencer, nous retraçons son parcours académique. Nous présentons ensuite de façon synthétique les travaux qui ont valu à Sims d'être récompensé. Face aux insuffisances des modèles macroéconométriques d'inspiration keynésienne, Sims (1980) émet la fameuse *critique de Sims* et propose une modélisation multivariée dont les seules restrictions sont le choix des variables sélectionnées et le nombre de retards intégrés. Nous proposons en conclusion un panorama des nombreuses recherches suscitées par les travaux pionniers de Sims.

Mots-clefs : Sims, processus VAR.

Classification JEL : C01, C32, C5.

Abstract: On October 10th, 2011 the Royal Swedish Academy of Sciences awarded the Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel to Thomas Sargent and Christopher Sims “for their empirical research on cause and effect in the macroeconomy”. In this article we present the contribution for which Sims was awarded. We first present his academic cursus. Then, we summarise his key contributions. In order to overcome the limitations of Keynesian Macroeconometric models, Sims (1980) made the famous *Sims critique* and proposed a multivariate model where the only restrictions are the selection of variables and the choice of the number of lags. We conclude with an outlook of the academic researches generated by the Sims' pioneering work.

Keywords: Sims, VAR process.

JEL Classification: C01, C32, C5.

---

\* CEPN, université Paris 13. Courriel : gosse@univ-paris13.fr.

\*\* CREG, université de Grenoble. Courriel : cyriac.guillaumin@upmf-grenoble.fr.

## 1. Introduction

Le 10 octobre 2011, l'Académie Royale des Sciences de Suède a attribué le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel à Thomas Sargent et Christopher Sims « pour leurs recherches empiriques sur la cause et l'effet en macroéconomie ». Selon les termes employés par l'Académie Royale suédoise, « une des tâches principales du macroéconomiste est d'expliquer comment les agrégats macroéconomiques [...] se comportent au fil du temps », c'est-à-dire comment ces variables sont affectées par « la politique économique et les modifications de l'environnement économique ». Ainsi, le jury a décidé de récompenser Thomas J. Sargent et Christopher A. Sims dont « les recherches ont été indispensables à ce travail ».

Comment le PIB et l'inflation sont affectés par une augmentation temporaire des taux d'intérêt ou une baisse d'impôts ? Que se passe-t-il si une banque centrale modifie de façon permanente son objectif d'inflation ou si un gouvernement modifie son objectif d'équilibre budgétaire ? Tel est le type de questions auxquelles les lauréats ont apporté une réponse.

Les recherches de Christopher Sims ont porté plus particulièrement sur la façon dont les chocs économiques – tels que la flambée des prix du pétrole, ou la forte baisse de la consommation des ménages – agissent sur l'économie. Sims est donc à la fois un macroéconomiste et un économètre car il travaille aussi bien sur les modèles théoriques que sur leurs applications empiriques.

Les travaux pour lesquels Christopher Sims a été primé remontent au tout début des années 1980, lorsqu'il introduit la représentation *VAR* (*Vectorial Autoregressive*, processus autorégressif vectoriel) qui a donné lieu par la suite à de nombreuses applications et à de nombreux prolongements de la part d'économistes parmi les plus influents, notamment Olivier Blanchard et Ben Bernanke qui occupent aujourd'hui, respectivement, les fonctions de chef économiste au Fonds monétaire international et de président de la Réserve fédérale des États-Unis<sup>1</sup>.

Cet article revient sur les principales contributions de Christopher Sims qui lui ont valu l'attribution de ce prix. Pour commencer, nous retraçons son parcours académique (section 2). Puis, nous présentons de façon synthétique les travaux pour lesquels Christopher Sims a été récompensé (section 3). Enfin, nous proposons un aperçu des recherches suscitées par les travaux pionniers de Christopher Sims (section 4).

---

<sup>1</sup> Voir, par exemple, Bernanke (1986), Blanchard (1989) et Blanchard et Quah (1989).

## 2. Parcours académique

Christopher Albert Sims (Chris comme aiment le surnommer certains de ses collègues et amis) est né le 21 octobre 1942 à Washington D.C. Son parcours universitaire débute par l'étude des mathématiques à Harvard où il obtient son diplôme (B.A.) en 1963 avec la mention *magna cum laude*. Il passe ensuite une année, entre septembre 1963 et juin 1964, à étudier l'économie à Berkeley. Puis, il revient à Harvard pour préparer et obtenir un doctorat en économie (1968) portant sur la dynamique de l'évolution de la productivité à l'aide d'une approche théorique et empirique (*The Dynamics of Productivity Change: A Theoretical and Empirical Study*).

L'obtention de son doctorat permet à Christopher Sims d'enseigner à Harvard, à l'université du Minnesota, à Yale et, enfin, à Princeton, où il est titulaire de la Chaire Harold B. Helms et professeur d'économie depuis 1999. Outre ses enseignements, auxquels il accorde une très grande importance<sup>2</sup>, ses recherches ont conduit Sims à collaborer avec les plus prestigieuses institutions parmi lesquelles la Cowles Foundation, le NBER, le FMI ainsi que plusieurs Réserves fédérales américaines (Atlanta, Mineapolis, New York et Philadelphie). Ses recherches ont été publiées dans les revues les plus influentes telles que l'*American Economic Review*, *Econometrica*, le *Journal of Business and Economic Statistics*, le *Journal of Economic Literature*, le *Journal of Economic Perspectives*, le *Journal of Econometrics*, le *Journal of Monetary Economics*, le *Journal of Money, Credit and Banking*, *Macroeconomic Dynamics*, le *Journal of Political Economy* ou encore les *Brookings Papers on Economic Activity*.

Par ailleurs, Christopher Sims est un économiste reconnu par la communauté scientifique, puisqu'il est membre de l'Académie des Sciences Américaines depuis 1989, qu'il fut président de l'Econometric Society en 1995 et qu'il préside l'American Economic Association depuis 2011.

## 3. La représentation VAR

« Méfiez-vous des *a priori* théoriques. Laissez parler les données » (Sims, 1996). Cette phrase pourrait, à elle seule, résumer les travaux pour lesquels Sims a été récompensé.

Nous sommes au milieu des années 1970 et le premier choc pétrolier marque définitivement la fin des Trente glorieuses. Dans le même temps, on observe un certain essoufflement des politiques basées sur un arbitrage inflation-chômage (politiques dites de *Stop and Go*) héritées

---

<sup>2</sup> Sur sa page personnelle, Sims met à disposition des étudiants un grand nombre de ressources pédagogiques (support de cours, programmes économétriques, exercices, annales...).

des travaux pionniers de Phillips (1958). Le débat académique, initié par Friedman (1968) lors de son discours en tant que nouveau président de l'American Economic Association, fait rage. Les monétaristes, dont Friedman est le chef de file – et, par la suite, les auteurs de la Nouvelle Economie Classique, dont Lucas, Kydland, Prescott, Barro ou Sargent<sup>3</sup> – rejettent en masse les modèles keynésiens et remettent en cause leur capacité à corriger les déséquilibres macroéconomiques.

La modélisation économétrique des années 1970 reposait alors sur une multitude d'équations structurelles reliées entre elles par des variables figurant dans plusieurs équations. Il s'agissait de modèles à équations simultanées<sup>4</sup>. Au regard de la période, ces modèles ont donné des résultats très médiocres, notamment en termes de prévisions et ont suscité un grand nombre de critiques au sujet de la simultanéité des relations et de l'exogénéité des variables<sup>5</sup>.

Sims (1980) propose alors une modélisation multivariée dont les seules restrictions sont le choix des variables sélectionnées et le nombre de retards intégrés. Cet article est le point de départ de sa critique des modèles macroéconométriques (la critique de Sims, 1980), notamment ceux d'inspiration keynésienne.

Pour Sims (1980), les modèles macroéconométriques keynésiens souffrent de nombreuses insuffisances parmi lesquelles :

- une restriction *a priori* sur les paramètres trop forte par rapport à ce que la théorie prédit, autrement dit l'exogénéité de certaines variables est postulée sans être formellement testée ;
- une absence de tests sur la structure causale, c'est-à-dire que le choix des formes fonctionnelles (restrictions, exclusion de variables, structure de retards) relève de décisions arbitraires ;
- un traitement inadéquat des anticipations des agents.

La représentation<sup>6</sup> VAR constitue une alternative à ce type de modèles. Cette nouvelle représentation repose toutefois sur l'hypothèse que l'évolution de l'économie peut être bien approchée par la description du comportement dynamique d'un vecteur de  $N$  variables dépendant linéairement du passé.

---

<sup>3</sup> Il n'est pas inutile de souligner que la plupart des auteurs de la Nouvelle Economie Classique sont, comme Friedman, issus de l'université de Chicago. Par ailleurs, outre Friedman, en 1976, Lucas (1995), Kydland et Prescott (co-lauréat en 2004) et Sargent (co-lauréat en 2011) ont obtenu le prix Nobel d'économie.

<sup>4</sup> Il faut noter que Lawrence R. Klein est reconnu comme l'un des spécialistes de ce type de modélisation. Ces travaux, notamment le célèbre modèle Klein-Goldberger, furent récompensés par le prix Nobel d'économie en 1980. Pour une présentation détaillée de ce modèle, se reporter, par exemple, à Howrey (1971), Duo (1993) ou De Vroey et Malgrange (2010).

<sup>5</sup> Cette notion d'exogénéité est abordée dès la fin des années 1960 par Granger (1969) puis par Sims (1972).

<sup>6</sup> Nous employons tour à tour le terme de « représentation VAR » ou de « processus VAR ».

### 3.1. Un exemple à deux variables

Considérons deux processus stationnaires<sup>7</sup>  $y_{1,t}$  et  $y_{2,t}$ . Chacun de ces processus est fonction de ses propres valeurs passées, mais aussi des valeurs passées et présentes de l'autre processus. Si nous notons  $p$  le nombre de retards, le processus  $VAR(p)$  décrivant la dynamique des deux processus s'écrit :

$$y_{1,t} = a_1 + \sum_{i=1}^p b_{1,i} y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^p c_{1,i} y_{2,t-i} - d_1 y_{2,t} + \varepsilon_{1,t} \quad (1)$$

$$y_{2,t} = a_2 + \sum_{i=1}^p b_{2,i} y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^p c_{2,i} y_{1,t-i} - d_2 y_{1,t} + \varepsilon_{2,t} \quad (2)$$

où  $\varepsilon_{1,t}$  et  $\varepsilon_{2,t}$  sont des bruits blancs non corrélés.

Le processus  $VAR(p)$  décrit par les relations (1) et (2) peut également s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$BY_t = A_0 + \sum_{i=1}^p A_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (3)$$

$$\text{avec : } B = \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ d_2 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} b_{1,i} & c_{1,i} \\ b_{2,i} & c_{2,i} \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, p \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix}$$

La représentation matricielle de ce  $VAR(p)$ , comme celle donnée par les relations (1) et (2), est qualifiée de représentation structurelle dans laquelle le niveau de  $y_{1,t}$  (respectivement  $y_{2,t}$ ) est directement influencé par celui de  $y_{2,t}$  (respectivement  $y_{1,t}$ ). La représentation structurelle n'est donc pas utilisable en soi. C'est pourquoi on a l'habitude de travailler à partir de la forme réduite de la représentation  $VAR(p)$ . Cette représentation est obtenue en multipliant chacun des termes de la représentation donnée par l'équation (3) par l'inverse de la matrice  $B^8$ , notée  $B^{-1}$ . Le modèle (3) s'écrit alors :

$$B^{-1}BY_t = B^{-1}A_0 + \sum_{i=1}^p B^{-1}A_i Y_{t-i} + B^{-1}\varepsilon_t$$

$$Y_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} + v_t \quad (4)$$

<sup>7</sup> Pour une définition de la stationnarité, se reporter, par exemple, à Hamilton (1994) ou Lardic et Mignon (2002).

<sup>8</sup> Cela suppose que la matrice  $B$  est inversible.

$$\text{avec : } \Phi_0 = B^{-1}A_0 \quad \Phi_i = B^{-1}A_i \quad \forall i = 1, \dots, p \quad v_t = B^{-1}\varepsilon_t$$

A partir de l'équation (4), nous remarquons que :

- le niveau de  $y_{1,t}$  (respectivement  $y_{2,t}$ ) ne dépend plus directement de  $y_{2,t}$  (respectivement  $y_{1,t}$ ) mais de ses valeurs passées ;
- les innovations de la forme réduite ( $v_{1,t}$  et  $v_{2,t}$ ) sont fonctions des innovations structurelles ( $\varepsilon_{1,t}$  et  $\varepsilon_{2,t}$ ) même si ces dernières respectent les propriétés d'un bruit blanc.

### 3.2. Généralisation à $n$ variables : représentation générale

A partir de l'exemple à deux variables, on peut généraliser la représentation d'un processus  $VAR(p)$  à  $N$  variables. Un processus  $VAR(p)$  à  $N$  variables s'écrit sous forme matricielle :

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (5)$$

$$\text{avec : } Y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{Nt} \end{bmatrix} \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ \vdots \\ a_N^0 \end{bmatrix} \quad \Phi_p = \begin{bmatrix} a_{1p}^1 & a_{1p}^2 & \dots & a_{1p}^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{Np}^1 & a_{Np}^2 & \dots & a_{Np}^N \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{Nt} \end{bmatrix}$$

Ainsi, l'équation (5) peut se réécrire :

$$Y_t (I - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p) = \Phi_0 + \varepsilon_t \quad (6)$$

que l'on peut, à son tour, réécrire de la façon suivante :

$$\Phi(L)Y_t = \Phi_0 + \varepsilon_t \quad (7)$$

avec  $I$  la matrice identité,  $L$  l'opérateur retard,  $\Phi(L) = I - \sum_{i=1}^p \Phi_i L^i$  et où  $\varepsilon_t$  satisfait les propriétés d'un bruit blanc.

Il est donc potentiellement possible d'estimer des modèles comportant un grand nombre d'équations. La taille du modèle est en fait conditionnée par le nombre d'observations disponibles et le nombre de retards intégrés dans l'estimation. Il appartient au modélisateur d'effectuer un arbitrage afin de préserver le degré de liberté et de réaliser une estimation de bonne qualité.

### 3.3. Estimation, validation et prévision

#### 3.3.1. Estimation d'un processus VAR

L'estimation d'un processus  $VAR(p)$  peut se faire par :

- la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) ;
- la méthode du maximum de vraisemblance.

Cependant, la méthode des MCO n'est plus valide dès lors qu'il existe des contraintes sur les paramètres (Lardic et Mignon, 2002). De plus, la méthode du maximum de vraisemblance est la principale méthode utilisée (Hamilton, 1994). Nous présentons brièvement cette méthode<sup>9</sup>.

Considérons un processus  $VAR(p)$  :

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (8)$$

où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc de matrice de variance-covariance  $\Omega$ .

La vraisemblance conditionnellement à toutes les valeurs passées du processus s'écrit :

$$L(Y_1, \dots, Y_T) = \prod_{t=1}^T L(Y_t | Y_{t-1}) \quad (9)$$

où  $Y_{t-1}$  désigne la mémoire du processus  $Y_t$  jusqu'à la date  $t-1$  y compris.

La vraisemblance du processus  $VAR(p)$  s'écrit alors :

$$L(Y_1, \dots, Y_T) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{\det \Omega}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \dots - \Phi_p Y_{t-p})' \Omega^{-1} (Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \dots - \Phi_p Y_{t-p}) \right] \quad (10)$$

La log-vraisemblance du processus  $VAR(p)$ , quant à elle, s'écrit :

$$\log L(Y_1, \dots, Y_T) = -\frac{TN}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log \Omega - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' \Omega^{-1} \varepsilon_t \quad (11)$$

La maximisation de cette log-vraisemblance permet alors d'obtenir les estimations des paramètres  $\Phi_1, \dots, \Phi_p$  et de la matrice de variance-covariance  $\Omega$ .

#### 3.3.2. Le choix des retards

Le choix du nombre  $p$  optimal de retards est une étape déterminante dans le processus d'estimation. En effet, un nombre insuffisant de retards fait perdre de l'information au processus étudié (sa mémoire n'est alors pas assez longue) tandis qu'un nombre trop

---

<sup>9</sup> Pour plus de détails, voir, par exemple, Hamilton (1994).



important de retards augmente le nombre de paramètres à estimer et réduit donc d'autant le degré de liberté du processus.

Les méthodes utilisées pour les processus *AR* (test du Cusum...<sup>10</sup>) peuvent être appliquées à condition d'être correctement adaptées à la forme vectorielle. Cependant, la littérature économique a tendance à privilégier des critères d'information. Une procédure couramment utilisée consiste à estimer le processus  $VAR(p)$  pour des retards allant de 0 à  $h_{\max}$ , où  $h_{\max}$  est le nombre maximum de retards inclus en se fondant sur une théorie économique, un article académique de référence ou même parfois une simple intuition économique. On retient alors le nombre  $p$  de retards qui minimise les critères *AIC* et *SC*<sup>11</sup> définis comme suit :

$$AIC(p) = \ln[\det \hat{\Omega}] + 2 \frac{k^2 p}{T} \quad (12)$$

$$SC(p) = \ln[\det \hat{\Omega}] + \frac{k^2 p \ln(T)}{T} \quad (13)$$

où  $T$  est le nombre d'observation,  $k$  le nombre de variables du système et  $\hat{\Omega}$  un estimateur de la matrice de variance-covariance des résidus du modèle.

L'approche bayésienne (Doan et *alii*, 1984 ; Sims, 1989) a permis d'apporter une réponse différente au problème du choix du nombre optimal de retards. Habituellement, pour améliorer le degré de liberté d'une régression, on réduit le nombre de paramètres. Dans un processus *VAR*, cela revient, bien souvent, à réduire le nombre de retards. L'approche bayésienne apporte une réponse différente au problème du choix du nombre optimal de retards en spécifiant des restrictions « floues » sur les coefficients plutôt qu'une spécification « rigide » (Doan, 2010). Ainsi, dans le cadre des processus *BVAR* (*Bayesian VAR*), les paramètres du modèle sont considérés comme des variables aléatoires auxquelles l'analyste affecte des distributions *a priori* afin de pouvoir procéder aux estimations. Bien entendu, les résultats ne sont pas insensibles au choix de la distribution. Dans nombre d'études, les auteurs utilisent le « Minnesota prior » (Litterman, 1986 ; Doan et *alii*, 1986) qui permet notamment de poser que les coefficients sur les retards plus éloignés sont davantage susceptibles d'être proches de zéro que ceux sur les retards plus courts.

---

<sup>10</sup> Voir, pour une synthèse, Lardic et Mignon (2002), Greene (2005) ou Lütkepohl et Krätzig (2009).

<sup>11</sup> Ces critères sont les plus utilisés mais il en existe d'autres (Deniau et *alii*, 1992). Le lecteur intéressé peut également se reporter à Bruneau et De Bandt (1999) ou Bruneau et Jondeau (1999) pour le choix d'un critère par rapport à un autre en cas de divergence sur le nombre de retards optimal  $p$ .

### 3.3.3. La prévision

L'apport essentiel des processus  $VAR$  est de permettre une meilleure prévision en comparaison des modèles macroéconométriques.

Considérons le cas d'un processus  $VAR(p)$  estimé :

$$Y_t = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 Y_{t-1} + \hat{\Phi}_2 Y_{t-2} + \dots + \hat{\Phi}_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (14)$$

Le nombre de retards optimal  $p$  a été choisi comme indiqué ci-dessus et les paramètres  $\hat{\Phi}_0, \hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_p$  ont été estimés ainsi que la matrice de variance-covariance associée au terme  $\varepsilon_t$ .

La prévision du processus  $VAR(p)$  à un horizon  $h$  décrit par la relation (14) s'écrit alors :

$$E[Y_{T+h} | Y_T] = \hat{\Phi}_0 + \hat{\Phi}_1 Y_T + \dots + \hat{\Phi}_p Y_{T-p+h} \quad (15)$$

Conformément aux travaux initiaux de Sims (1980), les prévisions réalisées à partir de processus  $VAR$  apparaissent comme une alternative sérieuse aux modèles de prévisions jusqu'alors utilisés. En effet, Litterman (1986) montre que cette nouvelle technique statistique peu coûteuse et facilement reproductible permet de produire une qualité de prévision équivalente aux modèles existants. Ainsi, comme le notent Stock et Watson (2001), les processus  $VAR$  sont devenus aujourd'hui « une référence pour juger les nouveaux systèmes de prévision », en particulier pour évaluer les qualités prédictives des modèles d'équilibre général intertemporels stochastiques (Collard et Fève, 2008).

## 3.4. Causalité et Chocs

### 3.4.1. La causalité

Une des questions posées par Sims (1980) avec les processus  $VAR$  est de savoir s'il existe une relation de causalité entre les différentes variables du système. Il existe plusieurs définitions de la causalité :

- causalité au sens de Granger (1969) ;
- causalité au sens de Pierce et Haugh (1977) ;
- causalité au sens de Sims (1980).

Même si la causalité au sens de Granger (1969) est la plus fréquemment utilisée, nous choisissons de présenter celle de Sims (1980). La spécification retenue par Sims (1980) repose sur l'idée que si les valeurs futures de  $y_{1,t}$  permettent d'expliquer les valeurs présentes de  $y_{2,t}$ , on peut en déduire que  $y_{2,t}$  est la cause de  $y_{1,t}$ .

Considérons un processus  $VAR(p)$  avec deux variables :

$$y_{1,t} = a_1^0 + \sum_{i=1}^p a_{1,i}^1 y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^p a_{1,i}^2 y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^p b_i^2 y_{2,t-i} + \varepsilon_{1,t} \quad (16)$$

$$y_{2,t} = a_2^0 + \sum_{i=1}^p a_{2,i}^1 y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^p a_{2,i}^2 y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^p b_i^1 y_{1,t-i} + \varepsilon_{2,t} \quad (17)$$

Dès lors :

- $y_{1,t}$  ne cause pas  $y_{2,t}$  si l'hypothèse nulle :  $b_1^2 = b_2^2 = \dots = b_p^2 = 0$  est acceptée ;
- $y_{2,t}$  ne cause pas  $y_{1,t}$  si l'hypothèse nulle :  $b_1^1 = b_2^1 = \dots = b_p^1 = 0$  est acceptée.

Pour examiner cette hypothèse, il faut utiliser un test de Fischer « classique » de nullité des coefficients.

La notion de causalité a également permis d'énoncer la condition d'exogénéité et ses différentes formes : faible, forte ou stricte. Ces travaux ont, notamment, été développés par Engle et *alii* (1983)<sup>12</sup>.

### 3.4.2. L'identification des chocs

La méthode de décomposition des chocs initialement préconisée par Sims (1980) repose sur la décomposition de Cholesky qui suit un schéma récursif. Le caractère a-théorique de la méthodologie  $VAR$  souhaitée par Sims (1980) n'est finalement que partielle, puisque le modélisateur doit ordonner les équations de son système de la variable la plus exogène à la variable la plus endogène. Ainsi, les résultats dépendent ici de l'ordre des variables qui est retenu.

Les processus  $SVAR$  (processus  $VAR$  structurel) permettent ensuite d'introduire une méthode d'identification dans laquelle les restrictions sur les interactions entre variables sont non-récursives. Dans ce cas, le schéma d'identification repose sur des restrictions issues de la théorie économique. Dans un premier temps, les contraintes portent sur les interactions de court terme (Bernanke, 1986 ; Sims, 1986), puis les travaux de Blanchard et Quah (1989) permettent de fixer les restrictions sur les éléments de la matrice des variances de long terme. Gali (1992) propose quant à lui un schéma d'identification combinant contraintes de court et long termes. Enfin, plus récemment, une série d'articles (Faust, 1998 ; Canova et De Nicolò, 2002 ; Uhlig, 2005) propose une nouvelle méthode d'identification ayant recours à des

---

<sup>12</sup> Pour une synthèse, se reporter, par exemple, à Rault et Pradel (2003).

restrictions sur les signes des réponses. Dans ce cas, le modélisateur suppose, théorie économique à l'appui, que certaines réponses aux chocs doivent avoir un signe spécifique.

### 3.4.3. L'analyse des chocs

Les processus *VAR* permettent d'analyser les effets de la politique économique grâce à la simulation de chocs aléatoires (on peut également employer le terme de choc d'une innovation) sur les valeurs présentes et passées des variables endogènes. Dès lors, un choc sur la *ième* variable peut affecter directement cette *ième* variable, mais également les autres variables du processus au travers de la dynamique de la représentation *VAR*. Il faut néanmoins préciser qu'une telle analyse s'effectue toujours *ceteris paribus* (toutes choses égales par ailleurs).

Pour analyser des chocs d'un processus *VAR*, il convient au préalable de réécrire ce processus sous la forme moyenne mobile : la représentation *VMA* (*Vector Moving Average*). Etant donné que tout processus stationnaire admet une représentation sous forme moyenne mobile infinie (Lardic et Mignon, 2002), il est possible de réécrire le processus *VAR* sous cette forme. Pour cela, considérons le processus *VAR* stationnaire et centré (absence de constante)<sup>13</sup> suivant :

$$\Phi(L)Y_t = \varepsilon_t \quad (18)$$

Nous savons qu'un tel processus peut également s'écrire :

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (19)$$

L'équation (19) peut se réécrire de la manière suivante :

$$Y_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (20)$$

Selon le théorème de Wold<sup>14</sup>, ce processus *VAR* admet une représentation sous forme de moyenne mobile vectorielle infinie, notée *VMA*( $\infty$ ) :

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \Psi(L)\varepsilon_t \quad (21)$$

avec  $\Psi(L) = \sum_{j \geq 0} \psi_j L^j$  et  $\psi_0 = I$ .

Le terme  $\varepsilon_t$  de l'équation (21) représente le vecteur des innovations (ou des chocs) du processus.

<sup>13</sup> L'hypothèse d'absence de constante est posée afin de faciliter la démonstration. Elle ne change pas le résultat.

<sup>14</sup> Selon ce théorème, tout processus stationnaire peut s'exprimer comme une somme pondérée de bruits blancs.

L'équation (21) permet alors, *via* la dynamique du processus *VAR*, de déterminer l'effet des chocs sur les variables endogènes à l'aide des multiplicateurs dynamiques  $\psi_j$ . Ces multiplicateurs se calculent comme suit :

$$\psi_{ij,s} = \frac{\partial Y_{i,t+s}}{\partial \varepsilon_{j,s}} \quad (22)$$

$\psi_{ij,s}$  détermine ainsi l'impact d'un choc  $\varepsilon_j$  à la date  $t$  sur la variable  $Y_i$  pour les  $s$  périodes suivant le choc.

L'étude des fonctions de réponse aux chocs est bien souvent complétée par une analyse de la décomposition de la variance de l'erreur de prévision. Le modélisateur peut alors déterminer la contribution de chaque innovation (choc) à la variance totale de l'erreur de prévision du processus *VAR*. Afin de ne pas alourdir le propos, nous choisissons de ne pas présenter une telle décomposition et nous invitons le lecteur intéressé par un tel développement à se reporter à Hamilton (1994), Canova (2005) ou Lütkepohl (2007).

#### **4. Conclusion**

La représentation *VAR*, initialement proposée par Sims (1980), peut aujourd'hui apparaître à certains comme un peu ancienne. Toutefois, elle a connu un nombre considérable de développements et d'applications au cours des dernières décennies qui lui ont assuré un succès croissant. Tout d'abord, la méthodologie a été perfectionnée à l'aide de nouvelles méthodes d'identification des chocs et par le recours aux méthodes bayésiennes. Par ailleurs, les modèles vectoriels à correction d'erreur (*VECM*), très populaires ces dernières années, reposent sur la représentation *VAR*. Ainsi, la contribution de Sims a permis indirectement de prolonger l'étude de la cointégration au cas multivarié (Johansen, 1988, 1991 ; Johansen et Juselius, 1990). De plus, les processus *VAR* se révèlent particulièrement utiles pour étudier l'impact des chocs macroéconomiques – ainsi que leurs canaux de transmission – ce qui explique qu'un très grand nombre de travaux empiriques y ait eu recours pour étudier l'effet des politiques économiques. Enfin, la représentation *VAR* constitue toujours une référence importante lorsqu'il s'agit d'évaluer les performances des modèles macroéconométriques, en particulier celles des modèles d'équilibre général dynamiques stochastiques (Fève, 2006 ; Collard et Fève, 2008). Ainsi, la méthodologie *VAR* a apporté une contribution essentielle à la recherche empirique en macroéconomie et elle est, aujourd'hui, devenue une référence incontournable en matière d'analyse et de prévision macroéconomiques.

## Références

- Bernanke, B., 1986, « Alternative explanations of the money-income correlation », *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, vol. 25 (1), pp. 49-99.
- Blanchard, O., 1989, « A Traditional Interpretation of Macroeconomic Fluctuations », *American Economic Review*, vol. 79 (5), pp. 1146-1164.
- Blanchard, O. et Quah, D., 1989, « The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances », *American Economic Review*, vol. 79 (4), pp. 655-673.
- Bruneau, C. et De Bandt, O., 1999, « La modélisation VAR structurel : application à la politique monétaire en France », *Economie et Prévision*, 137, pp. 67-94.
- Bruneau, C. et Jondeau, E., 1999, « Long-Run causality, with Application to International Links between Long-Term Interest Rates », *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 61 (4), pp. 545-568.
- Canova, F., et De Nicolò, G., 2002, « Monetary Disturbances Matter for Business Fluctuations in the G-7 », *Journal of Monetary Economics*, vol. 49 (6), pp. 1131-1159.
- Canova, F., 2005, *Methods for Applied Macroeconomic Research*, Princeton University Press.
- Collard, F. et Fève, P., 2008, « Modèles VAR ou DGSE : que choisir ? », *Economie et Prévision*, 183-184, pp. 153-174.
- Deniau, G., Fiori, G., Mathis A., 1992, « Sélection du nombre de retards dans un modèle VAR, conséquences éventuelles du choix des critères », *Économie et Prévision*, 106, 61-69.
- Duo, Q., 1993, *The formation of econometrics: a historical perspective*, Oxford University Press.
- De Vroey, M. et Malgrange, P., 2010, « From the Keynesian Revolution to the Klein-Goldberger Model: Klein and the Dynamization of Keynesian Theory », *Discussion paper 2010-19*, Institut de Recherches Economiques et Sociales de l'Université catholique de Louvain.
- Doan, T., 2010, *RATS User's Guide, Version 8*, Estima, Evanston, IL.
- Doan, T., Litterman, R. et Sims, C. A., 1984, « Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions », *Econometric Reviews*, vol. 3 (1), pp. 1-100.
- Engle, R., Hendry, D. et Richard, J.-F., 1983, « Exogeneity », *Econometrica*, vol. 51 (2), pp. 277-304.
- Faust, J., 1998, « The Robustness of Identified VAR Conclusions about Money », *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, vol. 49 (1), pp. 207-244.

- Fève, P., 2006, « La modélisation macro-économétrique dynamique », *Revue d'Economie Politique*, vol. 116 (2), pp. 147-197.
- Friedman, M., 1968, « The Role of Monetary Policy », *American Economic Review*, vol. 58 (1), pp. 1-17.
- Gali, J., 1992, « How Well Does the IS-LM Model Fit Postwar U.S. Data? », *Quarterly Journal of Economics*, vol. 107 (2), pp. 709-735.
- Granger, C., 1969, « Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods », *Econometrica*, vol. 37 (3), pp. 424-438.
- Greene, W., 2005, *Econométrie*, Pearson.
- Hamilton, J., 1994, *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Howrey, E. P., 1971, « Stochastic properties of the Klein-Goldberger model », *Econometrica*, vol. 39 (1), pp. 73-87.
- Johansen, S., 1988, « Statistical Analysis of Cointegration Vectors », *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 12 (2-3), pp. 231-254.
- Johansen, S., 1991, « Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models », *Econometrica*, vol. 59 (6), pp. 1551-1580.
- Johansen, S. et Juselius, K., 1990, « Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration with Applications to the Demand for Money », *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 52 (2), pp. 169-210.
- Lardic, S. et Mignon, V., 2002, *Econométrie des séries temporelles macroéconomiques et financières*, Economica.
- Lütkepohl, H., 2007, *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer.
- Lütkepohl, H. et Kräzig, M., 2009, *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press.
- Phillips, A., 1958, « The Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957 », *Economica*, vol. 26 (104), pp. 299-315.
- Pierce, D. et Haugh, L., 1977, « Causality in temporal systems: Characterization and a survey », *Journal of Econometrics*, vol. 5 (3), pp. 265-293.
- Rault, C. et Pradel, J., 2003, « Exogeneity in VAR-ECM models with purely exogenous long-run paths », *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 66 (1), pp. 629-653.
- Sims, C. A., 1972, « Money, Income, and Causality », *American Economic Review*, vol. 62 (4), pp. 540-552.
- Sims, C. A., 1980, « Macroeconomics and Reality », *Econometrica*, vol. 48 (1), pp. 1-48.

Sims, C. A., 1986, « Are Forecasting Models Usable for Policy Analysis? », *Minneapolis Federal Reserve Bank Quarterly Review*, vol. 10 (1), pp. 2-16.

Sims, C. A., 1989, « A nine variable probabilistic macroeconomic forecasting model », *Discussion paper 14*, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Sims, C. A., 1996, « Macroeconomics and Methodology », *Journal of Economic Perspectives*, vol. 10 (1), pp. 105-120.

Stock, J. H., et Watson, M. W., 2001, « Vector Autoregressions », *Journal of Economic Perspectives*, vol. 15 (4), pp. 101-115.

Uhlig, H., 2005, « What Are the Effects of Monetary Policy on Output? Results from an Agnostic Identification Procedure », *Journal of Monetary Economics*, vol. 52 (2), pp. 381-419.