



**HAL**  
open science

## Validation du modèle DDM multicouches homogénéisé pour le carton ondulé à travers un test de flexion à trois points.

N. Talbi, R. Ayad, Z. Aboura, Samir Allaoui

### ► To cite this version:

N. Talbi, R. Ayad, Z. Aboura, Samir Allaoui. Validation du modèle DDM multicouches homogénéisé pour le carton ondulé à travers un test de flexion à trois points.. 20ème Congrès Canadien de Mécanique Appliquée, May 2005, Montréal, Canada. hal-00634682

**HAL Id: hal-00634682**

**<https://hal.science/hal-00634682>**

Submitted on 24 Oct 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Validation du modèle DDM multicouches homogénéisé pour le carton ondulé à travers un test de flexion à trois points.

Nabil Talbi<sup>1</sup>, Rezak AYAD<sup>1</sup>, Zoheir Aboura<sup>2</sup>, Samir Allaoui<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Groupe Mécanique Matériaux et Structures GMMS EA 2617

ESIEC, Université de Reims, Esp. Roland Garros BP 1029 51686 Reims, France

<sup>2</sup>L3M. IUT de Tremblay en France Paris 8 – Rue de la Râperie 93290 Tremblays-en-France

<sup>3</sup>U.T.C Centre de Recherche Royallieu B.P 20 529 F - 60205 Compiègne Cedex

Contact: [rezak.ayad@univ-reims.fr](mailto:rezak.ayad@univ-reims.fr) et [nabil.talbi@univ-reims.fr](mailto:nabil.talbi@univ-reims.fr)

## 1. Présentation de l'élément DMTS

Le nouvel élément de coque DMTS (*Diskrete Mindlin Triangle for Shells*) possède 3 nœuds et 6 ddl par nœud : les déplacements  $U_i, V_i, W_i$  selon les axes globaux  $X, Y, Z$  et les rotations  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  autour des axes globaux  $X, Y, Z$ . Il est obtenu en superposant l'élément de membrane classique CST (*Constant Strain Triangle*) et l'élément de plaque en flexion/CT DDMT (*Displacement Discrete Mindlin Triangle*) [3], [2]. Il permet la modélisation de coques minces ou épaisses de formes arbitraires

## 2. Formulation de la matrice de rigidité élémentaire

Les matrices de rigidité de flexion  $[k_f]$  et de CT  $[k_c]$  de l'élément de coque DMTS sont celles de l'élément de plaque en déplacement DDMT, proposé par Katili [Kat93] et que nous avons obtenu en utilisant une procédure d'équivalence avec le modèle mixte modifié MiSP3+/M [1], [2]. Cet élément ne peut être utilisé pour modéliser des plaques orthotropes mono ou multicouches. Il est nécessaire d'intervenir au niveau du bord élémentaire pour modifier les hypothèses discrètes de Mindlin, utilisées pour éliminer localement les rotations  $\Delta\beta_{sk}$ , qui sont initialement définies aux nœuds milieu des cotés. Les matrices  $[k_f]$ ,  $[k_c]$  et la matrice de membrane de l'élément CST s'écrivent

$$\begin{aligned} [k_f] &= \int_{A^e} [B_f]^T [H_f] [B_f] dA \\ [k_c] &= \int_{A^e} [B_c]^T [H_c] [B_c] dA \\ [k_m] &= \int_{A^e} [B_m]^T [H_m] [B_m] dA \end{aligned} \quad (1)$$

Le couplage membrane-flexion n'est pas pris en compte. Les matrices  $[B_f]$  et  $[B_c]$  des équations (1) sont différentes de celles obtenues pour le cas isotrope. Elles sont données en fonction des paramètres liés à l'orthotropie, obtenus en modifiant deux hypothèses discrètes de Mindlin. La matrice  $[B_m]$  est constante. L'intégration exacte des trois matrices de rigidité nécessite respectivement un point de Hammer pour  $[k_m]$  et trois points pour  $[k_f]$  et  $[k_c]$ . Le passage du repère local au repère global fait intervenir la matrice de passage  $[T]$ , la matrice de rigidité globale s'écrit :

$$\begin{aligned} [k]_{glob} &= [T]^T [k]_{loc} [T] \\ [k]_{loc} &= [k_m] + [k_f] + [k_c] + [k_{\theta z}] \\ [k_{\theta z}] & \text{(matrice de rigidité fictive)} \end{aligned} \quad (2)$$

## 3. Modèle DMTS multicouches avec modifications des hypothèses discrètes de Mindlin

### 3.1. Matrice de comportement dans le domaine de calcul

Dans le domaine élémentaire de calcul de la coque stratifiée, les matrices de comportement intervenant dans l'expression de la matrice de rigidité (2) sont obtenues en utilisant la méthode classique de stratification. Ainsi, pour une coque à  $n$  couches orthotropes et dont la stratification est symétrique par rapport à la surface moyenne ( $z=0$ ), les matrices  $[H_m]$ ,  $[H_f]$  et  $[H_c]$  s'écrivent ( $[H]_i$  est la matrice de comportement de la couche  $i$ ) :

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{h/2} [H] dz = \sum_{i=1}^n [H]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (3)$$

$$[H_f] = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [H] dz = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [H]_i (z_{i+1}^3 - z_i^3)$$

$$[\bar{H}_c] = \int_{-h/2}^{h/2} [G] dz = \sum_{i=1}^n [G]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (4)$$

$$[H_c] = \begin{bmatrix} k_{11} \bar{H}_{c11} & k_{12} \bar{H}_{c12} \\ \text{sym.} & k_{22} \bar{H}_{c22} \end{bmatrix}$$

La matrice  $[H_c]$  est corrigée en introduisant des facteurs de correction de cisaillement transversal.

### 3.2. Hypothèses discrètes modifiées de Mindlin. Une approche originale

Cette partie, très importante, complète la formulation de la matrice de rigidité du nouvel élément DMTS, en y apportant une modification dans la définition des deux opérateurs  $[B_f]$  et  $[B_c]$ , établis pour le calcul, dans le cas homogène isotrope, de la matrice de rigidité de l'élément de plaque DDMT. L'introduction de l'hypothèse modifiée suivante de Mindlin est nécessaire pour prendre en compte le caractère multicouche des plaques ou des coques stratifiées :

$$\int_{\mathcal{J}} \left( \gamma_s - \langle H_{ck11}^{inv} \ H_{ck12}^{inv} \rangle \begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix} \right) ds = 0 \quad (5)$$

(hypothèse mécanique)

$H_{ck11}^{inv}$  et  $H_{ck12}^{inv}$  sont deux termes de comportement en

CT de la matrice inverse  $[H_{ck}]^{-1}$ , avec

$$\begin{aligned} [H_{ck}] &= [P_k] [H_c] [P_k]^{-1} \\ [P_k] &= [P_k]^{-1} = \begin{bmatrix} c_k & s_k \\ s_k & -c_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{cases} c_k = \cos \alpha_k \\ c_k = \sin \alpha_k \text{ (figure 1)} \end{cases}$$

En utilisant à la fois la loi de comportement en flexion  $\{M\} = [H] \{\chi\}$ , une interpolation quadratique pour  $\beta_s$  et

linéaire pour  $\beta_n$ , et les relations d'équilibre suivantes (figure 1) :

$$T_s = M_{s,s} + M_{sn,n} \quad \text{et} \quad T_n = M_{sn,s} + M_{n,n} \quad (7)$$

l'équation (5) s'écrit en terme du facteur d'influence du CT pour une coque multicouche  $\phi_k^{mc}$  :

$$\gamma_{sk} = -\phi_k^{mc} \Delta \beta_{sk}$$

$$\phi_k^{mc} = 8 \left( H_{f11} \frac{H_{ck11}^{inv}}{L_k^2} + H_{f13} \frac{H_{ck12}^{inv}}{L_k^2} \right) \quad (8)$$

(mc : multicouches)

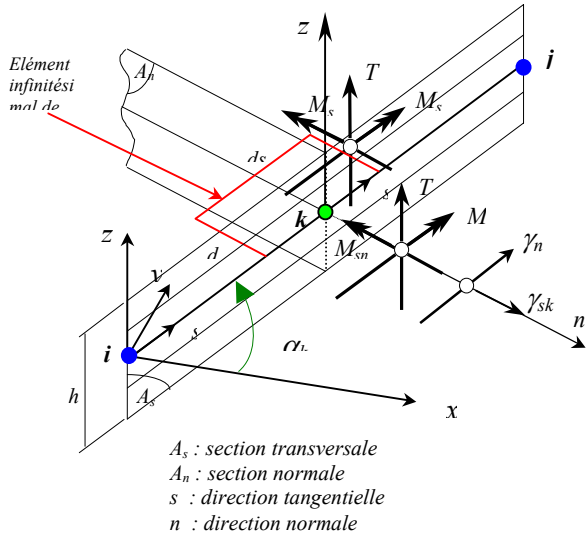


Figure 1 Hypothèses de Mindlin sur le côté  $ij$  d'un élément fini multicouches

Ces modifications conduisent à des expressions modifiées des courbures et des déformations de CT :

$$\{\chi\} = [B_f^{mc}] \{u_n\} \quad \text{et} \quad \{\gamma\} = [B_c^{mc}] \{u_n\} \quad (9)$$

La matrice de rigidité élémentaire finale de l'élément multicouches DMTS devient :

$$[k]_{loc} = [k_m^{mc}] + [k_f^{mc}] + [k_c^{mc}] + [k_{\alpha}] \quad (10)$$

$$[k_m^{mc}] = \int_{A^e} [B_m^{mc}]^T [H_m] [B_m^{mc}] dA$$

$$[k_f^{mc}] = \int_{A^e} [B_f^{mc}]^T [H_f] [B_f^{mc}] dA \quad (11)$$

$$[k_c^{mc}] = \int_{A^e} [B_c^{mc}]^T [H_c] [B_c^{mc}] dA$$

#### 4. Validation numérique de l'élément DMTS sur une structure sandwich en carton ondulé, soumise à une flexion à trois points.

Une modélisation 3D serait trop onéreuse tant sur le plan éléments que CPU. L'idée est d'homogénéiser la structure en carton ondulé [4] et de la considérer comme une plaque orthotrope.

Des essais expérimentaux de flexion à trois points, de plaques en carton ondulé, ont été réalisés dans le sens CD et MD.

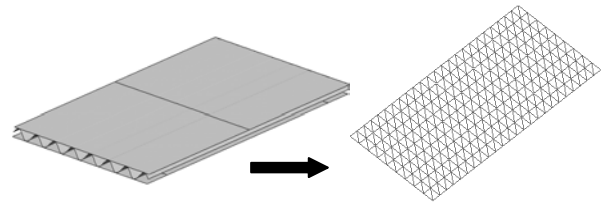


Figure 2 Modélisation d'une structure carton ondulé en une plaque orthotrope.

Une plaque de largeur (60 mm), d'épaisseur (4.1 mm) et d'élanement  $L/h = 20$  ( $L$  : longueur entre appuis et  $h$  : épaisseur) et dont les appuis sont placés à 20 mm des deux bords, a servi de valeur référence pour tester le comportement de notre élément en structure épaisse. Cette dernière a été discrétisée par 16 éléments selon la longueur et 9 selon la largeur.

Tableau 1 – Caractéristiques des peaux.

Peaux	$h$	$E_{(CD)}$	$E_{(MD)}$	$\nu_{xy}$	$\nu_{yx}$
Supérieure	0.235	4514.53	1895.83	0.282	0.215
Ondulée	0.19	4458.60	1944.50	0.277	0.115
Inférieure	0.235	4703.75	1854.30	0.358	0.088

Tableau 2 – Valeurs homogénéisées de la structure carton.

$h$	$E_{(CD)}$	$E_{(MD)}$	$\nu_{xy(MD)}$	$G_{xy(MD)}$
4.1	719.4456	390.5284	0.2406	203.1114

Un calcul dans le sens CD de la pente moyenne expérimentale  $\Delta_{exp}$  et numérique  $\Delta_{num}$ , découlant d'un calcul élément fini de plaque orthotrope via l'élément DMTS, montre une erreur de 11.75% (voir tableau 3).

Tableau 3 – Pente en fonction de l'élanement.

$L/h$	$\Delta_{exp}$	$\Delta_{num} = P/W_{num}$	Erreur en %
20	22.798	20.118	11.75

#### Références

- [1] R. Ayad, N. Talbi et A. Rigolot, 'Un nouvel élément fini de coque triangulaire à 3 nœuds pour les coques composites multicouches', 6<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, Giens - France 2003.
- [2] R. Ayad, 'Contribution à la modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non-newtoniens. Application à des matériaux d'emballage', Thèse HDR, Université de Reims, novembre 2002
- [3] I. Katili, 'A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields. Part I: An extended DKT element for thick-plate bending analysis', IJNME, Vol. 36, 1859-1883 (1993)
- [4] Z. Aboura, N. Talbi, S. Allaoui & M.L Benzeggagh, Elastic behavior of corrugated cardboard: Experiments and Modeling, Composite Structures 63 (2004) 53-62.