



HAL
open science

Algèbres de greffes

Anthony Mansuy

► **To cite this version:**

| Anthony Mansuy. Algèbres de greffes. 2011. hal-00634565v2

HAL Id: hal-00634565

<https://hal.science/hal-00634565v2>

Preprint submitted on 14 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algèbres de greffes

Anthony Mansuy

*Laboratoire de Mathématiques, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail : anthony.mansuy@univ-reims.fr*

Résumé. Pour étudier certains ensembles de probabilités, appelés moyennes induites par J. Ecalle, F. Menous introduit deux opérateurs de greffes B^+ et B^- . À partir de ces deux opérateurs, nous construisons des algèbres de Hopf d'arbres enracinés et ordonnés \mathcal{B}^i , $i \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{B}^∞ et \mathcal{B} vérifiant les relations d'inclusions $\mathcal{B}^1 \subseteq \dots \mathcal{B}^i \subseteq \mathcal{B}^{i+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^\infty \subseteq \mathcal{B}$. On munit \mathcal{B} d'une structure de bialgèbre dupliciale dendriforme et on en déduit que \mathcal{B} est colibre et auto-duale. Nous introduisons enfin la notion d'algèbre bigreffe et démontrons que \mathcal{B} est engendrée comme algèbre bigreffe par l'élément \bullet_1 .

Abstract. In order to study some sets of probabilities, called induced averages by J. Ecalle, F. Menous introduces two grafting operators B^+ and B^- . With these two operators, we construct Hopf algebras of rooted and ordered trees \mathcal{B}^i , $i \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{B}^∞ and \mathcal{B} satisfying the inclusion relations $\mathcal{B}^1 \subseteq \dots \mathcal{B}^i \subseteq \mathcal{B}^{i+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^\infty \subseteq \mathcal{B}$. We endow \mathcal{B} with a structure of duplicial dendriform bialgebra and we deduce that \mathcal{B} is cofree and self-dual. Finally, we introduce the notion of bigraft algebra and we prove that \mathcal{B} is generated as bigraft algebra by the element \bullet_1 .

Keywords. Planar rooted trees, Hopf algebra of ordered forests, Duplicial dendriform bialgebra.

AMS Classification. 05C05, 16W30.

Table des matières

1	Les algèbres de Hopf \mathcal{B}^i	4
1.1	Construction et étude de \mathcal{G}	4
1.2	L'algèbre de Hopf \mathcal{B}^∞	11
1.3	La sous-algèbre de Hopf \mathcal{B}^1	14
1.4	Généralisation de l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^1	15
2	L'algèbre de Hopf \mathcal{B}	17
2.1	Construction de \mathcal{B} et premières propriétés	17
2.2	Coliberté de \mathcal{B}	21
2.3	Structure d'algèbre bigreffe de \mathcal{B}	25
2.3.1	Algèbre de greffes à gauche	25
2.3.2	Algèbre de greffes à droite	28
2.3.3	Algèbre bigreffe	31

Introduction

L'algèbre de Hopf des arbres enracinés de A. Connes et D. Kreimer est décrite dans [1] dans le contexte des théories de champs quantiques : elle est utilisée lors de la procédure de

Renormalisation. Cette algèbre de Hopf est engendrée par l'ensemble des arbres enracinés, et le coproduit est donné par les coupes admissibles. D'autres algèbres de Hopf d'arbres sont obtenues à partir de celle-ci en ajoutant une structure supplémentaire aux arbres enracinés. Par exemple, avec des données planaires en plus, on obtient l'algèbre de Hopf des arbres plans \mathcal{H}_{PR} ainsi que sa version décorée \mathcal{H}_{PR}^D [2, 3, 6]; en munissant les sommets d'un ordre total, on obtient l'algèbre de Hopf des arbres ordonnés \mathcal{H}_o . Dans cet article, nous nous intéressons à différentes sous-algèbres de Hopf de \mathcal{H}_o , dont la construction a été inspirée par les travaux de F. Menous.

Dans [9], F. Menous étudie certains ensembles de probabilités, appelés moyennes induites par J. Ecalle, associés à une variable aléatoire sur \mathbb{R} . Une moyenne est un ensemble de "poids" indexés par des mots sur l'alphabet à deux éléments $\{+, -\}$. Pour un mot $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ donné ($\varepsilon_i = \pm$), le poids est simplement la probabilité d'appartenir à $\mathbb{R}^{\varepsilon_1}$ au temps 1, à $\mathbb{R}^{\varepsilon_2}$ au temps 2, ..., à $\mathbb{R}^{\varepsilon_n}$ au temps n . F. Menous prouve dans [9] qu'un tel coefficient peut être décomposé en une somme de coefficients élémentaires qui sont indexés par des arbres et des forêts ordonnés. Pour cela, il construit par récurrence, avec un formalisme proche de celui du calcul moulien, un ensemble de forêts ordonnées. C'est cet ensemble, noté \mathcal{G} , qu'on se propose d'étudier ici.

Pour cela, nous définissons deux opérateurs de greffes B^+ et B^- , à partir desquels nous proposons une construction de l'ensemble \mathcal{G} , ce qui permet de définir l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}^\infty = \mathbb{K}[\mathcal{G}]$. Une étude combinatoire de \mathcal{G} permet de construire un "dévissage" de l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^∞ de sorte qu'on a les inclusions $\mathcal{B}^1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^i \subseteq \mathcal{B}^{i+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^\infty$, où \mathcal{B}^i est une algèbre de Hopf pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

En généralisant la construction de F. Menous, nous définissons une algèbre de Hopf $\mathcal{B} = \mathbb{K}[\mathcal{T}]$ à partir d'un ensemble d'arbres ordonnés \mathcal{T} construit avec les opérateurs B^+ et B^- . Par des raisonnements proches de ceux utilisés dans [5], on démontre la coliberté et l'auto-dualité de \mathcal{B} . On s'attache ensuite à munir \mathcal{B} d'une structure d'algèbre de greffes à gauche, d'algèbre de greffes à droite qui sont des quotients d'algèbres diptères (voir [7]). Cela nous amène naturellement à la notion d'algèbre bigreffe, et on démontre que \mathcal{B} est engendrée comme algèbre bigreffe par l'unique arbre de degré 1.

Le texte est organisé comme suit : dans la première partie, nous construisons, avec des opérateurs de greffes B^+ et B^- , un ensemble \mathcal{G} d'arbres ordonnés et nous exhibons différentes propriétés combinatoires de \mathcal{G} . À partir de cet ensemble, nous définissons l'algèbre \mathcal{B}^∞ , nous démontrons que c'est une algèbre de Hopf et nous calculons sa série formelle. On construit ensuite des sous-algèbres \mathcal{B}^i de \mathcal{B}^∞ , pour $i \in \mathbb{N}^*$, et on démontre que ce sont des algèbres de Hopf. Dans la seconde partie, nous définissons l'algèbre \mathcal{B} à partir d'un ensemble \mathcal{T} lui aussi construit avec les opérateurs de greffes B^+ et B^- . On munit \mathcal{B} d'une structure de bialgèbre dupliciale dendriforme (voir [4, 5, 8]) et cela nous permet de montrer la coliberté et l'auto-dualité de \mathcal{B} . Nous définissons enfin les algèbres de greffes à gauche, les algèbres de greffes à droite et les algèbres bigreffes et on démontre que \mathcal{B} est engendrée comme algèbre bigreffe par l'élément \bullet_1 .

Remerciements. J'aimerais remercier mon directeur de thèse, Loïc Foissy, qui m'a proposé d'étudier ces opérateurs de greffes et soutenu dans mes recherches.

NOTATIONS ET RAPPELS

Tout les espaces vectoriels et les algèbres sont définis sur un corps \mathbb{K} . Étant donné un ensemble X , nous noterons par $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel engendré par X . Pour tout espaces vectoriels V et W , $V \otimes W$ désignera le produit tensoriel de V par W sur \mathbb{K} .

Nous rappelons brièvement la construction de l'algèbre de Hopf des arbres enracinés plans [2, 6], qui généralise celle de Connes-Kreimer des arbres enracinés [1]. Un *arbre enraciné* est un graphe fini sans boucle avec un sommet particulier appelé la *racine* [11]. Une *forêt enracinée* est un graphe fini F dont toutes les composantes connexes sont des arbres enracinés. L'ensemble des sommets d'une forêt enracinée F est noté $V(F)$. Le *degré* d'une forêt F est le nombre, noté $|F|$,

Si F est non vide, on pose $\tilde{\Delta}(F) = \Delta(F) - (F \otimes 1 + 1 \otimes F)$.

Nous aurons besoin d'une version décorée de cette algèbre de Hopf. Si \mathcal{D} est un ensemble non vide, une *forêt plane décorée* est un couple (F, d) , où F est une forêt enracinée plane et $d : V(F) \rightarrow \mathcal{D}$ une application. L'algèbre des forêts planes décorées $\mathcal{H}_{PR}^{\mathcal{D}}$ est encore une algèbre de Hopf. Nous donnons ci-dessous les arbres plans décorés de degré ≤ 4 :

$$\bullet_a, a \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{1}_a^b, (a, b) \in \mathcal{D}^2, \quad {}^c\mathbf{V}_a^b, \mathbf{1}_a^c, (a, b, c) \in \mathcal{D}^3,$$

$${}^d\mathbf{V}_a^c, {}^c\mathbf{V}_a^d, {}^d\mathbf{V}_a^b, {}^d\mathbf{V}_a^c, \mathbf{1}_a^d, (a, b, c, d) \in \mathcal{D}^4.$$

Rappelons aussi la notion de forêt ordonnée. Une *forêt ordonnée* est une forêt enracinée avec un ordre total sur l'ensemble de ces sommets. Notons \mathcal{H}_o le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les forêts ordonnées. Si F et G sont deux forêts ordonnées, alors la forêt ordonnée FG est aussi une forêt ordonnée avec, pour tout $v \in F$, $w \in G$, $v < w$. Cela définit un produit non commutatif sur l'ensemble des forêts ordonnées, qui s'étend linéairement à \mathcal{H}_o . Par exemple, $(\mathbf{1}_1^2) \times (\bullet_1 {}^2\mathbf{V}_4^3) = \mathbf{1}_1^2 \bullet_3 {}^4\mathbf{V}_6^5$. Voici les forêts ordonnées de degré ≤ 3 :

$$1, \bullet_1, \bullet_1 \bullet_2, \mathbf{1}_1^2, \mathbf{1}_2^1, \bullet_1 \bullet_2 \bullet_3, \bullet_1 \mathbf{1}_2^3, \bullet_1 \mathbf{1}_3^2, \mathbf{1}_1^3 \bullet_2, \bullet_2 \mathbf{1}_3^1, \mathbf{1}_1^2 \bullet_3, \mathbf{1}_2^1 \bullet_3, {}^2\mathbf{V}_1^3, {}^1\mathbf{V}_2^3, {}^1\mathbf{V}_3^2, \mathbf{1}_1^3, \mathbf{1}_1^2, \mathbf{1}_2^3, \mathbf{1}_2^1, \mathbf{1}_3^2, \mathbf{1}_3^1, \mathbf{1}_3^3.$$

Si F est une forêt ordonnée, alors toute sous-forêt de F est aussi ordonnée. On peut donc définir un coproduit sur \mathcal{H}_o comme suit : pour toute forêt ordonnée F ,

$$\Delta(F) = \sum_{v \models V(F)} \text{Lea}_v(F) \otimes \text{Roo}_v(F). \quad (1)$$

Par exemple,

$$\Delta \left(\begin{array}{c} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{V}_2^3 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{V}_2^3 \end{array} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{array}{c} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{V}_2^3 \end{array} + \bullet_1 \otimes {}^3\mathbf{V}_1^2 + \mathbf{1}_2^1 \otimes \mathbf{1}_1^2 + \bullet_1 \otimes \mathbf{1}_2^3 + \bullet_1 \bullet_2 \otimes \mathbf{1}_1^2 + \mathbf{1}_3^1 \bullet_2 \otimes \bullet_1.$$

Les forêts planes sont ordonnées, en numérotant les sommets suivant l'ordre défini plus haut. Réciproquement, les forêts ordonnées sont planes. Il suffit de supprimer l'indexation des sommets.

1 Les algèbres de Hopf \mathcal{B}^i

1.1 Construction et étude de \mathcal{G}

Commençons par introduire deux opérateurs de greffes B^+ et B^- qui sont utilisés dans tout ce qui suit. Pour cela, considérons une suite de m arbres ordonnés non vides T_1, \dots, T_m dont la somme des degrés est notée n . On pose :

1. $B^-(T_1, \dots, T_m)$ l'arbre ordonné de degré $n+1$ obtenu comme suit : on considère T_1, \dots, T_m comme la suite des sous-arbres d'un arbre enraciné ayant pour racine le sommet indexé par $n+1$. De plus, on conviendra que $B^-(1)$ est égale à l'arbre \bullet_1 , où 1 désigne l'arbre vide.
2. $B^+(T_1, \dots, T_m)$ l'arbre ordonné de degré $n+1$ construit en greffant le sommet indexé par $n+1$ comme le fils le plus à droite de la racine de T_1 et en considérant alors T_2, \dots, T_m comme la suite des sous-arbres issus du sommet indexé par $n+1$. En particulier, on notera $B^+(T_1) = B^+(T_1, 1)$ l'arbre obtenu en greffant le sommet indexé par $|T_1|+1$ comme le fils le plus à droite de la racine de T_1 . De plus, on conviendra que $B^+(1)$ est égale à l'arbre \bullet_1 .

Note. Les opérateurs B^+ et B^- sont différents de ceux introduits dans [1] par A. Connes et D. Kreimer

Exemples. $B^-(\mathbf{1}_1^2, \cdot_1) = \mathbf{1}_4^3$, $B^+(\mathbf{1}_3^2) = B^+(\mathbf{1}_3^2, 1) = \mathbf{1}_3^4$, $B^+(\mathbf{1}_1^2, \cdot_1) = \mathbf{2}_1^3$.

Pour toute suite $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{+, -\}^n$, avec $n \geq 1$, on définit par récurrence un ensemble $\mathcal{G}^{(\underline{\varepsilon})}$ qui correspond à un ensemble de forêts ordonnées de degré n .

Si $\underline{n} = 1$, $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1)}$, pour ε_1 quelconque, est l'ensemble réduit à un seul élément, la forêt de degré 1, l'unique sommet étant évidemment indexé par 1.

Si $\underline{n} \geq 2$, considérons l'ensemble $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$ déjà construit.

1. Si $\varepsilon_n = -$, les éléments F de $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}$ sont obtenus par la transformation suivante. On prend un élément $F' = T_1 \dots T_m$ de $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$, avec $m \geq 1$, et on considère T_1, \dots, T_m comme la suite des sous-arbres d'un arbre enraciné ayant pour racine le sommet indexé par n . Cela donne ainsi naissance à une nouvelle forêt ordonnée de degré n , avec un seul arbre, égale à $B^-(T_1, \dots, T_m)$.
2. Si $\varepsilon_n = +$, alors comme précédemment on considère un élément F' de $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$. Nous avons alors plusieurs possibilités pour ajouter un nouveau sommet indexé par n . Notons encore $F' = T_1 \dots T_m$, où T_1, \dots, T_m est la suite des arbres qui composent la forêt F' et $m \geq 1$. On peut alors faire l'une des transformations suivantes pour obtenir un élément de $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)}$.
 - (a) Concaténer l'unique arbre de degré 1 indexé par n à la forêt $T_1 \dots T_m$ sur la droite. Cela donne la forêt ordonnée de degré n égale à $T_1 \dots T_m \cdot n$.
 - (b) Pour $1 \leq i \leq m$, greffer le sommet indexé par n comme le fils le plus à droite de la racine de T_i et considérer alors T_{i+1}, \dots, T_m comme la suite des sous-arbres issus du sommet indexé par n . On obtient alors la forêt ordonnée de degré n égale à $T_1 \dots T_{i-1} B^+(T_i, \dots, T_m)$.

Voici une illustration de cette construction pour $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(+)} = \mathcal{G}^{(-)} &= \{\cdot_1\} \\
\mathcal{G}^{(+,+)} = \mathcal{G}^{(-,+)} &= \{\cdot_1 \cdot 2, \mathbf{1}_1^2\} \\
\mathcal{G}^{(+,-)} = \mathcal{G}^{(-,-)} &= \{\mathbf{1}_2^1\} \\
\mathcal{G}^{(+,+,+)} = \mathcal{G}^{(-,+,+)} &= \{\cdot_1 \cdot 2 \cdot 3, \cdot_1 \mathbf{1}_3^2, \mathbf{1}_3^2, \mathbf{1}_1^2 \cdot 3, \mathbf{2}_1^3\} \\
\mathcal{G}^{(+,-,+)} = \mathcal{G}^{(-,-,+)} &= \{\mathbf{1}_2^1 \cdot 3, \mathbf{1}_2^3\} \\
\mathcal{G}^{(+,+, -)} = \mathcal{G}^{(-,+, -)} &= \{\mathbf{1}_3^2, \mathbf{1}_3^2\} \\
\mathcal{G}^{(+,-, -)} = \mathcal{G}^{(-,-, -)} &= \{\mathbf{1}_3^1\} \\
\mathcal{G}^{(+,+,+,+)} = \mathcal{G}^{(-,+,+,+)} &= \{\cdot_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \cdot_1 \cdot 2 \mathbf{1}_4^3, \cdot_1 \mathbf{1}_4^3, \mathbf{2}_1^3, \cdot_1 \mathbf{1}_2^3 \cdot 4, \cdot_1 \mathbf{3}_2^4, \mathbf{1}_4^3, \\
&\quad \mathbf{1}_3^2 \cdot 4, \mathbf{3}_1^4, \mathbf{1}_1^2 \cdot 3 \cdot 4, \mathbf{1}_1^2 \mathbf{1}_4^3, \mathbf{2}_1^3 \cdot 4, \mathbf{2}_1^3 \cdot 4, \mathbf{2}_1^3 \cdot 4\} \\
\mathcal{G}^{(+,-,+,+)} = \mathcal{G}^{(-,-,+,+)} &= \{\mathbf{1}_2^1 \cdot 3 \cdot 4, \mathbf{1}_2^1 \mathbf{1}_4^3, \mathbf{1}_2^3, \mathbf{1}_2^3 \cdot 4, \mathbf{1}_2^3 \cdot 4\} \\
\mathcal{G}^{(+,+, -, +)} = \mathcal{G}^{(-,+, -, +)} &= \{\mathbf{1}_3^2 \cdot 4, \mathbf{1}_3^2 \cdot 4, \mathbf{1}_3^2 \cdot 4, \mathbf{1}_3^2 \cdot 4\} \\
\mathcal{G}^{(+,-, -, +)} = \mathcal{G}^{(-,-, -, +)} &= \{\mathbf{1}_3^1 \cdot 4, \mathbf{2}_1^4\} \\
\mathcal{G}^{(+,+,+, -)} = \mathcal{G}^{(-,+,+, -)} &= \{\mathbf{1}_4^3, \mathbf{1}_4^3, \mathbf{1}_4^3, \mathbf{1}_4^3, \mathbf{2}_1^3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(+,-,+,-)} &= \mathcal{G}^{(-,-,+,-)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}^{(+,+,+,-)} &= \mathcal{G}^{(-,+,+,-)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ \end{array} \right\} \\ \mathcal{G}^{(+,-,-,-)} &= \mathcal{G}^{(-,-,-,-)} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ \end{array} \right\}\end{aligned}$$

Dans la suite, étant donné $\underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^n$ avec $n \geq 1$, on identifiera toujours les deux ensembles $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})}$ et $\mathcal{G}^{(-,\underline{\varepsilon})}$ (et les deux ensembles $\mathcal{G}^{(+)}$ et $\mathcal{G}^{(-)}$). On préférera, suivant les cas, dire qu'une forêt appartient à $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})}$ ou à $\mathcal{G}^{(-,\underline{\varepsilon})}$.

Pour $n \geq 2$, considérons un élément F de $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$. Notons $S_{\varepsilon_n}(F)$ l'ensemble des forêts construites à partir de F par les méthodes de construction ci-dessus, suivant la valeur de ε_n . Alors,

$$\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)} = \bigcup_{F \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}} S_{\varepsilon_n}(F). \quad (2)$$

Le lemme suivant sera utile dans la suite :

Lemme 1 Soient $\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}' \in \bigcup_{n \geq 1} \{+, -\}^n$, avec $\underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}'$. Alors $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} \cap \mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon}')} = \emptyset$.

Preuve. Soient $\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}' \in \bigcup_{n \geq 1} \{+, -\}^n$, avec $\underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}'$. Tout d'abord, supposons que la suite $\underline{\varepsilon}$ est de longueur n et que la suite $\underline{\varepsilon}'$ est de longueur n' , avec $n \neq n'$. Comme les éléments de $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})}$ sont de degré $n+1$ et ceux de $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon}')}$ sont de degré $n'+1$, $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} \cap \mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon}')} = \emptyset$.

Supposons maintenant que les suites $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\varepsilon}'$ sont de même longueur $n \geq 1$ et raisonnons par récurrence sur n . Le résultat est trivial pour $n = 1$. Supposons $n \geq 2$. On distingue alors deux cas :

1. Si $\varepsilon_n \neq \varepsilon'_n$, par exemple $\varepsilon_n = -$ et $\varepsilon'_n = +$. Les éléments de $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})}$ sont tous des arbres dont la racine est indexée par $n+1$. L'ensemble $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon}')}$ est constitué d'arbres et de forêts (de longueur ≥ 2). Par construction, les arbres de $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon}')}$ sont de la forme $B^+(T_1, \dots, T_m)$, avec $m \geq 1$ et $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}^{(+,\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1})}$. En particulier, la racine de ces arbres est indexée par un entier $< n+1$. Donc $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} \cap \mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon}')} = \emptyset$.
2. Si $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$, comme $\underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}'$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \neq \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}$. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} \cap \mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon}')} \neq \emptyset$. Alors il existe une forêt $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}^{(+,\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}$ et une forêt $T'_1 \dots T'_l \in \mathcal{G}^{(+,\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1})}$ telles que $S_{\varepsilon_n}(T_1 \dots T_m) \cap S_{\varepsilon'_n}(T'_1 \dots T'_l) \neq \emptyset$. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{G}^{(+,\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})} \cap \mathcal{G}^{(+,\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1})} = \emptyset$, donc $T_1 \dots T_m \neq T'_1 \dots T'_l$. Or
 - (a) si $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = -$, $S_-(T_1 \dots T_m) = \{B^-(T_1, \dots, T_m)\}$, $S_-(T'_1 \dots T'_l) = \{B^-(T'_1, \dots, T'_l)\}$. Donc $B^-(T_1, \dots, T_m) = B^-(T'_1, \dots, T'_l)$ et, nécessairement, $m = l$ et $T_1 \dots T_m = T'_1 \dots T'_l$. On aboutit donc à une contradiction.
 - (b) si $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = +$, alors

$$\begin{aligned}S_+(T_1 \dots T_m) &= \{B^+(T_1, \dots, T_m), T_1 B^+(T_2, \dots, T_m), \dots, T_1 \dots T_{m-1} B^+(T_m), \\ &\quad T_1 \dots T_m \bullet_{n+1}\} \\ S_+(T'_1 \dots T'_l) &= \{B^+(T'_1, \dots, T'_l), T'_1 B^+(T'_2, \dots, T'_l), \dots, T'_1 \dots T'_{l-1} B^+(T'_l), \\ &\quad T'_1 \dots T'_l \bullet_{n+1}\}.\end{aligned}$$

Alors il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, l\}$ tels que $T_1 \dots T_{i-1} B^+(T_i, \dots, T_m) = T'_1 \dots T'_{j-1} B^+(T'_j, \dots, T'_l)$. Nécessairement, on doit avoir $i = j$, $T_1 = T'_1, \dots, T_{i-1} = T'_{i-1}$ et $B^+(T_i, \dots, T_m) = B^+(T'_i, \dots, T'_l)$. Or cette dernière égalité implique que $m = l$ et $T_i = T'_i, \dots, T_m = T'_m$. Ici encore, cela contredit $T_1 \dots T_m \neq T'_1 \dots T'_l$.

Par récurrence, le résultat est ainsi démontré. \square

En reprenant la preuve précédente, remarquons que dans l'égalité (2) l'union est disjointe. De plus, dans chaque ensemble $S_{\varepsilon_n}(F)$, toutes les forêts sont distinctes car elles ne sont pas de même longueur. Ainsi, pour tout $\underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^n$, avec $n \geq 1$, les éléments de $\mathcal{G}^{(\underline{\varepsilon})}$ sont tous distincts.

Considérons les ensembles suivants :

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^n, n \geq 1} \mathcal{G}^{(\underline{\varepsilon})} \text{ et } \mathcal{G}^0 = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^{n \text{ fois}}}.$$

D'après le lemme 1, les deux unions précédentes sont disjointes (à l'identification près des ensembles $\mathcal{G}^{(+, \underline{\varepsilon})}$ et $\mathcal{G}^{(-, \underline{\varepsilon})}$) et il n'y a donc pas de redondances dans la construction des forêts appartenant à \mathcal{G} .

Remarquons que \mathcal{G} n'est pas stable pour l'opération de concaténation. Par exemple, les arbres $\mathbf{1}_1^+$ et $\mathbf{1}_2^+$ appartiennent à \mathcal{G} mais la forêt $\mathbf{1}_1^+ \mathbf{1}_2^+ \notin \mathcal{G}$. Cela est dû au fait que l'arbre de droite qui compose la forêt $\mathbf{1}_1^+ \mathbf{1}_2^+$ a été construit avec un B^- ($\mathbf{1}_2^+ \in \mathcal{G}^{(+, -)}$). Plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 2 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. La forêt $T_1 \dots T_m$ appartient à \mathcal{G} .
2. $T_1 \in \mathcal{G}$ et $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$.

En particulier, pour toute forêt $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}$, T_1, \dots, T_m appartiennent à \mathcal{G} .

Preuve. Démontrons tout d'abord le sens direct. Soit une forêt $T_1 \dots T_m$ appartenant à \mathcal{G} et notons $n = |T_1| + \dots + |T_m|$ son degré. D'après le lemme 1, il existe un unique $\underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^n$ tel que $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}^{(\underline{\varepsilon})}$. Soit i le plus grand indice tel que $\varepsilon_i = -$. Par construction, les éléments appartenant à $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)}$ sont des arbres de la forme B^- de l'arbre vide si $i = 1$ ou B^- d'une suite d'arbres G_1, \dots, G_k telle que $G_1 \dots G_k \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1})}$ si $i \geq 2$. T_1 contient donc un sous-arbre $B^-(G_1, \dots, G_k)$ ($B^-(1)$ si $i = 1$) appartenant à $\mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)}$. Autrement dit, $\exists l \geq 0$ tel que

$$T_1 = \overbrace{B^+ \dots B^+}^{l \text{ fois}}(B^-(G_1, \dots, G_k), \dots).$$

Ainsi, $|T_1| \geq i$. Par ailleurs, remarquons que si $F_1 F_2 \in \mathcal{G}^{(\underline{\varepsilon})}$, alors $F_1 \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{|F_1|})}$ et $F_2 \in \mathcal{G}^{(\varepsilon_{|F_1|+1}, \dots, \varepsilon_{|F_1|+|F_2|})}$. Ainsi, $T_1 \in \mathcal{G}$ et $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$.

Réciproquement, montrons que si $T_1 \in \mathcal{G}$ et $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$, alors $T_1 T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}$ par récurrence sur $|F|$, où $F = T_2 \dots T_m$. Si $|F| = 1$, c'est-à-dire $F = \cdot_1$, alors $T_1 F = T_1 \cdot_{|T_1|+1}$, et par construction de \mathcal{G} , $T_1 F \in \mathcal{G}$. Soit $n \geq 1$ et supposons le résultat vérifié pour tout F tel que $|F| \leq n$. Considérons $F = T_2 \dots T_m$ de degré $n + 1$, avec $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$. Si $|T_m| = 1$, par hypothèse de récurrence $T_1 T_2 \dots T_{m-1} \in \mathcal{G}$ et comme pour l'initialisation $T_1 T_2 \dots T_{m-1} \cdot_{|T_1|+n+1} \in \mathcal{G}$. Sinon, comme $T_m \in \mathcal{G}^0$, il existe $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}^0$ tel que $T_m = B^+(G_1, \dots, G_k)$, avec $G_1 \dots G_k$ une forêt de degré $|T_m| - 1$. Par hypothèse de récurrence, $T_1 \dots T_{m-1} G_1 \dots G_k \in \mathcal{G}$, donc $T_1 F = T_1 T_2 \dots T_{m-1} B^+(G_1, \dots, G_k)$ appartient bien à \mathcal{G} . \square

D'après le lemme précédent, \mathcal{G} est stable par concaténation à gauche par des éléments de \mathcal{G}^0 . Pour \mathcal{G}^0 , on a le

Lemme 3 $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ est un monoïde libre pour l'opération de concaténation.

Preuve. En effet, si $T_1 T_2 \in \mathcal{G}^0$, $T_1 T_2 \in \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^{|T_1|+|T_2| \text{ fois}}}$, donc $T_1 \in \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^{|T_1| \text{ fois}}} \subseteq \mathcal{G}^0$ et $T_2 \in \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +)}^{|T_2| \text{ fois}}} \subseteq \mathcal{G}^0$.

Réciproquement, supposons que $T_1, T_2 \in \mathcal{G}^0$ et raisonnons par récurrence sur le degré de T_2 . Si $|T_2| = 1$, $T_2 = \cdot_1$ et alors $T_1 T_2 \in \mathcal{G}^0$ par construction de \mathcal{G}^0 . Supposons $|T_2| \geq 2$. Comme $T_2 \in \mathcal{G}^0$, il existe $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}^0$ tels que $T_2 = B^+(G_1, \dots, G_k)$. Alors la forêt $T_1 G_1 \dots G_k \in \mathcal{G}^0$ par hypothèse de récurrence, et donc $T_1 T_2 = T_1 B^+(G_1, \dots, G_k) \in \mathcal{G}^0$, par construction de \mathcal{G}^0 . \square

Remarque. Posons $\Delta_{\mathbf{l}}(F) = \sum_{\mathbf{v} \models V(F) \text{ et } \text{root}(F) \in \text{Roo}_{\mathbf{v}}(F)} \text{Lea}_{\mathbf{v}}(F) \otimes \text{Roo}_{\mathbf{v}}(F)$ pour toute forêt non vide F , où $\text{root}(F)$ est la racine de l'arbre le plus à gauche de la forêt F . Soient T_1, \dots, T_m m arbres non vides, $m \geq 1$. Alors, en étudiant les coupes admissibles :

$$\begin{aligned} \Delta(B^-(T_1, \dots, T_m)) &= (Id \otimes B^-) \circ \Delta(T_1 \dots T_m) + B^-(T_1 \dots T_m) \otimes 1, \\ \Delta(B^+(T_1, \dots, T_m)) &= (Id \otimes B^+) \circ \Delta_{\mathbf{l}}(T_1 \dots T_m) + B^+(T_1, \dots, T_m) \otimes 1 \\ &\quad + \Delta_{\mathbf{l}}(T_1) \cdot (B^-(T_2, \dots, T_m) \otimes 1). \end{aligned}$$

Lemme 4 Soit T un arbre appartenant à $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Alors, pour toute coupe admissible $\mathbf{v} \models V(T)$, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$.

Preuve. Il suffit de montrer que, pour toute coupe simple $\mathbf{v} \models V(T)$ et pour tout arbre $T \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. On raisonne par récurrence sur le degré n de $T \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$, le résultat étant trivial si $n = 0, 1, 2$.

Supposons $n \geq 3$. Comme $T \in \mathcal{G}^0$, il existe $m \geq 1$, $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$, tels que $T = B^+(T_1, \dots, T_m)$. Soit $\mathbf{v} \models V(T)$ une coupe simple de T . Il y a trois cas possibles :

1. Si $\mathbf{v} \models V(T_1)$, par hypothèse de récurrence, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Si $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) = 1$, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = 1$. Si $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) \neq 1$, alors, avec le lemme 3, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}^0$, donc $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^+(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0$.
2. Si $\mathbf{v} \models V(T_i)$, avec $i \geq 2$ (on inclut ici le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre le sommet indexé par n et la racine de T_i). Par hypothèse de récurrence, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Avec le lemme 3, $T_1 \dots \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m \in \mathcal{G}^0$, et ainsi $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^+(T_1, \dots, \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0$.
3. Enfin, si on coupe l'arête joignant la racine de T (qui est aussi la racine de T_1) et le sommet indexé par n , alors $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = T_1 \in \mathcal{G}^0$.

Ainsi, dans tous les cas, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}^0$, et on peut conclure par le principe de récurrence. \square

Remarque. Par contre, étant donné un arbre T appartenant à \mathcal{G}^0 , il existe certaines coupes $\mathbf{v} \models V(T)$ telles que $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) \notin \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Par exemple, considérons $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$, avec $m \geq 2$, et $T = B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0$. Alors, si on réalise la coupe simple $\mathbf{v} \models V(T)$ consistant à couper l'arête joignant la racine de T (qui est aussi la racine de T_1) et le sommet indexé par $|T|$, $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{\overbrace{(\dots, -)}^{|T|}}$ et donc $\notin \mathcal{G}^0$ en utilisant le lemme 1.

Rappelons (voir [1]) que l'on peut définir sur \mathcal{H}_{PR} un opérateur de greffe $B : \mathcal{H}_{PR} \rightarrow \mathcal{H}_{PR}$ qui, étant donnée une suite de m arbres plans non vides T_1, \dots, T_m , associe l'arbre $B(T_1, \dots, T_m)$ obtenu en considérant T_1, \dots, T_m comme la suite des sous-arbres ayant une racine commune (avec la convention $B(1) = \cdot$). Par exemple, $B(\cdot, \dagger) = \begin{array}{c} \downarrow \\ \vee \end{array}$.

Soit T un arbre enraciné plan non vide $\in \mathcal{H}_{PR}$. Une question naturelle est de savoir de combien de façons on peut indexer les sommets de T pour obtenir un élément de \mathcal{G}^0 ou de \mathcal{G} .

Dans le cas de \mathcal{G}^0 , il n'y a qu'une seule et unique indexation possible. En effet, considérons un arbre plan T . Si T est de degré 1, le résultat est trivial. Sinon, $T = B(T_1, \dots, T_m)$ avec T_1, \dots, T_m m arbres non vides $\in \mathcal{H}_{PR}$ et $m \geq 1$. Par hypothèse de récurrence, il y a une unique indexation de $B(T_1, \dots, T_{m-1})$ en un élément noté G de \mathcal{G}^0 . Si $T_m = \bullet$, comme le descendant le plus à droite de la racine de T doit nécessairement être indexé par $|T|$, $B^+(G)$ est l'unique arbre de \mathcal{G}^0 tel que l'arbre plan associé (en supprimant l'indexation) soit T . Sinon, $T_m = B(T_{m,1}, \dots, T_{m,k})$. Avec l'hypothèse de récurrence, $\forall 1 \leq i \leq k$, l'arbre plan $T_{m,i}$ a une unique indexation en un élément noté G_i de \mathcal{G}^0 . Alors, $B^+(G, G_1, \dots, G_k) \in \mathcal{G}^0$, et c'est par construction l'unique arbre de \mathcal{G}^0 tel que l'arbre plan associé soit T . On définit ainsi une bijection entre les arbres de \mathcal{H}_{PR} et les arbres de \mathcal{G}^0 .

Pour le cas plus complexe de \mathcal{G} , on a la

Proposition 5 *Soit un arbre plan $T \in \mathcal{H}_{PR}$. Rappelons que, si v est un sommet de T , f_v désigne la fertilité de v et $h(v)$ la hauteur de v . Notons l_T la feuille la plus à gauche de T . Alors, il y a*

$$1 + \sum_{i=0}^{h(l_T)-1} \prod_{l_T \rightarrow v \text{ et } h(v) \leq i} f_v$$

façons d'indexer T pour obtenir un élément de \mathcal{G} .

Preuve. Rappelons que si T est un arbre non vide de \mathcal{G} , $B^+(T, 1) = B^+(T)$ est l'arbre construit en greffant le sommet indexé par $|T| + 1$ comme le fils le plus à droite de la racine de T . En particulier, on ne cherchera pas dans cette preuve à simplifier un produit d'arbres en supprimant les éventuels arbres vides.

Raisonnons par récurrence sur $k = h(l_T)$ la hauteur de l_T . Pour éviter d'alourdir les notations, on notera indifféremment un arbre appartenant à \mathcal{H}_{PR} et l'arbre (ou les arbres) obtenu après indexation des sommets appartenant à \mathcal{G} .

Si $k = 0$, T est l'arbre plan réduit à sa racine, il y a donc une unique façon de le numéroter, en \bullet_1 . Ceci démontre la formule au rang 0.

Si $k = 1$, $T = B(\bullet, T_1, \dots, T_n)$, avec $T_1 = B(T_{1,1}, \dots, T_{1,m_1}), \dots, T_n = B(T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n})$ (si $T_i = \bullet$, $T_i = B(T_{i,1})$ avec $T_{i,1} = 1$). Il y a alors deux cas possibles pour l'indexation de T :

1. Si l'indice de la racine de T est plus petit que l'indice de son descendant direct le plus à gauche. Alors,

$$T = B^+(\dots B^+(B^+(\bullet_1, 1), T_{1,1}, \dots, T_{1,m_1}), \dots), T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n}),$$

avec, d'après le lemme 2, $T_{1,1}, \dots, T_{n,m_n} \in \mathcal{G}^0$, et donc une unique façon d'indexer les sommets de $T_{1,1}, \dots, T_{n,m_n}$. Ainsi T appartient à $\mathcal{G}^0 \subseteq \mathcal{G}$ et il y a, dans ce cas, une seule façon de numéroter les sommets de T .

2. Si l'indice de la racine de T est plus grand que l'indice de son descendant direct le plus à gauche. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\overbrace{B^+(\dots B^+}^{n-i \text{ fois}}(B^+(\bullet_1, T_1, \dots, T_i), T_{i+1,1}, \dots, T_{i+1,m_{i+1}}), \dots), T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n}) \in \mathcal{G}.$$

où, toujours avec le lemme 2, on doit avoir $T_1, \dots, T_i, T_{i+1,1}, \dots, T_{n,m_n} \in \mathcal{G}^0$ et il y a donc une unique façon d'indexer leurs sommets. Ainsi, cela fait n façons de numéroter les sommets de T dans ce cas.

Au final, il y a $1+n$ façons d'indexer T pour obtenir un élément de \mathcal{G} . Le cas $k=1$ est démontré car n est égal à la fertilité de la racine de T .

Si $k \geq 2$, $T = B(T_1, \dots, T_n)$, avec $T_1 = B(T_{1,1}, \dots, T_{1,m_1}), \dots, T_n = B(T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n})$ (si $T_i = \cdot$, $T_i = B(T_{i,1})$ avec $T_{i,1} = 1$). Il y a deux cas possibles pour indexer les sommets de T :

1. Si l'indice de la racine de T est plus petit que l'indice de son descendant direct le plus à gauche. Alors, pour que $T \in \mathcal{G}$,

$$T = B^+(\dots B^+(B^+(\cdot, T_{1,1}, \dots, T_{1,m_1}), \dots), T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n}).$$

Avec le lemme 2, on doit avoir $T_{1,1}, \dots, T_{n,m_n} \in \mathcal{G}^0$, et il y a une unique façon d'indexer leurs sommets. On a ainsi une unique façon de numéroter T dans ce cas.

2. Si l'indice de la racine de T est plus grand que l'indice de son descendant direct le plus à gauche. Deux sous-cas sont possibles :

- (a) Si l'indice de la racine de T_1 est plus petit que l'indice de son descendant direct le plus à gauche, c'est-à-dire si $T_1 = B^+(\dots B^+(\cdot, \dots), \dots)$, alors $T_1 \in \mathcal{G}^0$ (avec le lemme 2), et il y a une seule possibilité d'indexer T_1 . Pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(T_1, \dots, T_i), T_{i+1,1}, \dots, T_{i+1,m_{i+1}}), \dots), T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n})}^{n-i \text{ fois}} \in \mathcal{G}.$$

D'après le lemme 2, $T_2, \dots, T_i, T_{i+1,1}, \dots, T_{n,m_n} \in \mathcal{G}^0$, donc il y a une unique façon de les indexer. On a ainsi n possibilités pour indexer T dans ce cas.

- (b) Si l'indice de la racine de T_1 est plus grande que l'indice de son descendant direct le plus à gauche, c'est-à-dire si

$$T_1 = \overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(T_{1,1}, \dots, T_{1,i}), \dots), \dots)}^{m_1-i \text{ fois}},$$

pour un $1 \leq i \leq m_1$. Par hypothèse de récurrence, il y a $1 + \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{l_T \rightarrow v \text{ et } 2 \leq h(v) \leq i} f_v$

façons de numéroter $T_{1,1}$ pour obtenir un élément de \mathcal{G} . Toujours avec le lemme 2, il y a une unique façon de numéroter $T_{1,2}, \dots, T_{1,m_1}$ car on doit nécessairement avoir

après indexation $T_{1,2}, \dots, T_{1,m_1} \in \mathcal{G}^0$. Cela donne $m_1 \left(1 + \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{l_T \rightarrow v \text{ et } 2 \leq h(v) \leq i} f_v \right)$

possibilités pour indexer T_1 . Comme l'indice de la racine de T doit être plus grande que l'indice de son descendant directe le plus à gauche, pour que $T \in \mathcal{G}$, on doit avoir

$$T = B^+(\dots B^+(B^-(T_1, \dots, T_i), T_{i+1,1}, \dots, T_{i+1,m_{i+1}}), \dots), T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n}),$$

où $1 \leq i \leq n$. D'après le lemme 2, $T_2, \dots, T_i, T_{i+1,1}, \dots, T_{n,m_n} \in \mathcal{G}^0$ ont une unique

indexation possible. Ainsi, dans ce cas, il y a $nm_1 \left(1 + \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{l_T \rightarrow v \text{ et } 2 \leq h(v) \leq i} f_v \right)$ pos-

sibilités d'indexer T .

En tout, cela fait bien

$$1 + \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{l_T \rightarrow v \text{ et } h(v) \leq i} f_v$$

possibilités pour indexer les sommets de T . Le principe de récurrence permet de conclure. \square

Dans le cas des échelles, il existe un résultat plus précis :

Corollaire 6 *Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe une unique échelle (de degré n) dans chaque sous-ensemble $\mathcal{G}(\overbrace{+, \dots, +}^{i \text{ fois}}, \overbrace{-, \dots, -}^{n-i \text{ fois}})$.*

Preuve. Raisonnons par récurrence sur n . Le résultat étant trivial pour $n = 1, 2$, supposons $n \geq 3$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe une unique échelle T_i de degré $n-1$ dans chaque sous-ensemble $\mathcal{G}(\overbrace{+, \dots, +}^{i \text{ fois}}, \overbrace{-, \dots, -}^{n-1-i \text{ fois}})$. En réalisant un B^- , on construit $n-1$ échelles $E_i = B^-(T_i)$ de degré n , et $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $E_i \in \mathcal{G}(\overbrace{+, \dots, +}^{i \text{ fois}}, \overbrace{-, \dots, -}^{n-i \text{ fois}})$. De plus, toujours par hypothèse de récurrence, il existe une unique échelle T de degré $n-2$ appartenant à \mathcal{G}^0 . Alors, $\cdot_1 T \in \mathcal{G}^0$, en utilisant le lemme 3, et donc $E_n = B^+(\cdot_1 T) \in \mathcal{G}^0$ et c'est par construction une échelle.

Donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $E_i \in \mathcal{G}(\overbrace{+, \dots, +}^{i \text{ fois}}, \overbrace{-, \dots, -}^{n-i \text{ fois}})$. D'après le lemme 1, les échelles E_i sont toutes distinctes. Comme il existe exactement n échelles de degré n dans \mathcal{G} (d'après la proposition 5), il y a donc une unique échelle dans chaque sous-ensemble $\mathcal{G}(\overbrace{+, \dots, +}^{i \text{ fois}}, \overbrace{-, \dots, -}^{n-i \text{ fois}})$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Le résultat est ainsi démontré au rang n et on conclut par le principe de récurrence. \square

1.2 L'algèbre de Hopf \mathcal{B}^∞

Notons $\mathcal{B}^\infty = \mathbb{K}[\mathcal{G} \cup \{1\}]$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{G} \cup \{1\}$. D'après le lemme 2, \mathcal{B}^∞ est engendrée librement par les arbres appartenant à \mathcal{G} .

Nous avons le résultat remarquable suivant :

Proposition 7 *L'algèbre \mathcal{B}^∞ est une algèbre de Hopf.*

Preuve. Il suffit de montrer que, en réalisant une coupe simple d'un arbre appartenant à \mathcal{G} , la branche et le tronc appartiennent respectivement à \mathcal{G} et $\mathcal{G} \cup \{1\}$. En effet, si ce résultat est démontré, on aura alors le résultat pour une coupe admissible quelconque puisque \mathcal{B}^∞ est engendrée par $\mathcal{G} \cup \{1\}$ comme algèbre. Travaillons par récurrence sur le degré des arbres. Le résultat est trivial pour $n = 2, 3$. Au rang $n \geq 4$, considérons un arbre $T \in \mathcal{G}$ de degré n , et $\mathbf{v} \models V(T)$ une coupe simple. Il y a deux cas possibles :

1. Si l'arbre est de la forme $T = B^-(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}(\dots, -)$. Par construction, la forêt $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}$ et, avec le lemme 2, $T_1 \in \mathcal{G}$ et $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$. Si \mathbf{v} est la coupe totale, le résultat est trivial. Sinon, comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_i)$ (on inclut ici le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre la racine de T et celle de T_i). Par récurrence, $Lea_{\mathbf{v}}(T_i)$ appartient à \mathcal{G} , car $T_i \in \mathcal{G}$. De même, par récurrence, $Roo_{\mathbf{v}}(T_i)$ appartient à $\mathcal{G} \cup \{1\}$. Alors la forêt $T_1 \dots Roo_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m \in \mathcal{G} \cup \{1\}$ car :

- (a) si $i = 1$, $Roo_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G} \cup \{1\}$ et comme $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$, $Roo_{\mathbf{v}}(T_1)T_2 \dots T_m \in \mathcal{G} \cup \{1\}$ en utilisant le lemme 2.
- (b) si $i \geq 2$, $T_i \in \mathcal{G}^0$ donc, d'après le lemme 4, $Roo_{\mathbf{v}}(T_i)$ appartient à $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Ainsi, toujours avec le lemme 2, la forêt $T_1 \dots Roo_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m$ appartient à \mathcal{G} .

Donc $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}$ et $Roo_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_1, \dots, Roo_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{G} \cup \{1\}$.

2. Si l'arbre est de la forme $T = B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(\dots,+)}$. Par construction, la forêt $T_1 \dots T_m \in \mathcal{G}$, donc $T_1 \in \mathcal{G}$ et $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$. Si \mathbf{v} est la coupe simple correspondant à couper l'arête joignant la racine de T (qui est la racine de T_1) et le sommet indexé par n joignant les racines communes de T_2, \dots, T_m , alors $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = T_1 \in \mathcal{G}$ et $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}$. Le résultat est donc vérifié dans ce cas. Sinon, comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_i)$ (si $i \geq 2$, le cas de la coupe totale correspond à couper l'arête entre le sommet de T indexé par n et la racine de T_i). Il y a alors deux cas à distinguer :

- (a) Si $i = 1$, c'est-à-dire si $\mathbf{v} \models V(T_1)$. Si \mathbf{v} est totale, alors $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = T$ et $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = 1$ et le résultat est trivial. Sinon, par récurrence, $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}$, et $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1)$ étant un arbre non vide $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}$. Ainsi, avec le lemme 2, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1)T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}$. D'où $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^+(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m)$ et $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = \text{Lea}_{\mathbf{v}}(T_1)$ appartiennent à \mathcal{G} .
- (b) Si $i \geq 2$, c'est-à-dire si $\mathbf{v} \models V(T_i)$, toujours par récurrence, $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}$ et avec le lemme 4, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Donc la forêt $T_1 \dots \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m \in \mathcal{G}$. Ainsi $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^+(T_1, \dots, \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m)$ et $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = \text{Lea}_{\mathbf{v}}(T_i)$ sont des éléments de \mathcal{G} .

Dans tous les cas, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G} \cup \{1\}$, $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{G}$.

Par récurrence, le résultat est démontré. \square

Proposition 8 *La série formelle de l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^∞ est donnée par la formule :*

$$F_{\mathcal{B}^\infty}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + \frac{1}{2}.$$

Preuve. Pour calculer la série formelle de l'algèbre \mathcal{B}^∞ , nous introduisons quelques notations. Posons $f_{i,j}^{\mathcal{B}^\infty}$ le nombre de forêts de longueur i et de degré j , et $f_j^{\mathcal{B}^\infty}$ le nombre de forêts de degré j . En particulier, $f_j^{\mathcal{B}^\infty} = \sum_{1 \leq i \leq j} f_{i,j}^{\mathcal{B}^\infty}$. Par construction de \mathcal{B}^∞ , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{1,1}^{\mathcal{B}^\infty} &= 1 \\ f_{k,1}^{\mathcal{B}^\infty} &= 0 \text{ si } k \geq 2 \\ f_{1,n}^{\mathcal{B}^\infty} &= 2f_{n-1}^{\mathcal{B}^\infty} \\ f_{k,n}^{\mathcal{B}^\infty} &= f_{k-1,n-1}^{\mathcal{B}^\infty} + \dots + f_{n-1,n-1}^{\mathcal{B}^\infty} \text{ si } k \geq 2, n \geq 2. \end{aligned}$$

Posons $F(x) = \sum_{i \geq 1} f_i^{\mathcal{B}^\infty} x^i$ et, pour $k \geq 1$, $F_k(x) = \sum_{i \geq 1} f_{k,i}^{\mathcal{B}^\infty} x^i$. Comme $f_{k,i}^{\mathcal{B}^\infty} = 0$ si $i < k$, $F_k(x) = \sum_{i \geq k} f_{k,i}^{\mathcal{B}^\infty} x^i$. Alors,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k \geq 1} F_k(x) \\ F_1(x) &= 2xF(x) + x \\ F_k(x) &= x \left(\sum_{i \geq k-1} F_i(x) \right) = x \left(F(x) - F_1(x) - \dots - F_{k-2}(x) \right) \text{ si } k \geq 2. \end{aligned}$$

Par différence, on obtient pour tout $l \geq 1$:

$$F_{l+2} - F_{l+1} + xF_l = 0.$$

Il existe donc $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[[x, x^{-1}]]$ tels que $\forall l \geq 1$,

$$F_l(x) = A(x) \left(\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2} \right)^l + B(x) \left(\frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2} \right)^l,$$

d'où

$$F(x) = A(x) \frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2} + B(x) \frac{1-2x+\sqrt{1-4x}}{2}. \quad (3)$$

En faisant $l = 1, 2$, nous avons les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} A(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} F(x) + \frac{1}{2} + \frac{1-2x}{2\sqrt{1-4x}} \\ B(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} F(x) + \frac{1}{2} + \frac{1-2x}{2\sqrt{1-4x}} \end{cases} \quad (4)$$

Montrons que $B(x) = 0$. Si $B(x) \neq 0$, $B(x) = a_k x^k + \dots$, $a_k \neq 0$. De plus,

$$F_l(x) = A(x) \left(\underbrace{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}_{=x+\dots} \right)^l + B(x) \left(\underbrace{\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}}_{=1+\dots} \right)^l,$$

donc, si $l > k$,

$$\begin{aligned} A(x) \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \right)^l &= \mathcal{O}(x^l) \\ B(x) \left(\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \right)^l &= a_k x^k + \dots \end{aligned}$$

D'où $F_l(x) = a_k x^k + \dots$. Or $F_l(x) = \sum_{i \geq l} f_{l,i}^{\mathcal{B}^\infty} x^i$, donc $F_l(x) = \mathcal{O}(x^l)$, et $a_k = 0$.

Ainsi $B(x) = 0$, et avec (3) et (4),

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1-4x-\sqrt{1-4x}}{2(4x-1)} = \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} - \frac{1}{2} \\ A(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} \end{aligned}$$

Au passage, on obtient la formule pour les F_k :

$$F_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \right)^{k-1}.$$

Finalement la série formelle de \mathcal{B}^∞ est donnée par :

$$F_{\mathcal{B}^\infty}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + \frac{1}{2}.$$

□

Ainsi, pour tout $k \geq 1$, $f_{1,k}^{\mathcal{B}^\infty} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!}$ et $f_k^{\mathcal{B}^\infty} = \frac{(2k)!}{2(k!)^2}$. Voici quelques valeurs numériques :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^\infty}$	1	2	6	20	70	252	924	3432
$f_k^{\mathcal{B}^\infty}$	1	3	10	35	126	462	1716	6435

Ce sont les séquences A000984 et A001700 de [10].

1.3 La sous-algèbre de Hopf \mathcal{B}^1

Muni de la concaténation, l'ensemble $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$, constitué de l'arbre vide et de tous les arbres construits uniquement avec des B^+ , est un monoïde. Notons \mathcal{B}^0 l'algèbre unitaire engendrée par ce monoïde. Si T est un arbre appartenant à \mathcal{G}^0 , il existe certaines coupes $\mathbf{v} \models V(T)$ telles que $Lea_{\mathbf{v}}(T) \notin \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$ (voir la remarque qui suit le lemme 4). \mathcal{B}^0 n'est donc pas une cogèbre. Par contre, d'après le lemme 4, \mathcal{B}^0 est un comodule à droite de l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^∞ .

Remarquons que \mathcal{B}^0 est isomorphe en tant qu'algèbre à l'algèbre (de Hopf) des arbres enracinés plans \mathcal{H}_{PR} . En effet, on a vu au paragraphe qui précède la proposition 5 que les arbres de \mathcal{G}^0 sont en bijection avec ceux de \mathcal{H}_{PR} . Cette bijection s'étend en un isomorphisme d'algèbres graduées de \mathcal{H}_{PR} dans \mathcal{B}^0 . En particulier, ces deux algèbres ont la même série formelle :

$$F_{\mathcal{B}^0}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = F_{\mathcal{H}_{PR}}(x).$$

Considérons maintenant l'ensemble

$$\mathcal{G}^1 = \bigcup_{n \geq 1, \varepsilon_n \in \{+, -\}} \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +, \varepsilon_n)}^{n-1 \text{ fois}}}.$$

et notons \mathcal{B}^1 l'algèbre $\mathbb{K}[\mathcal{G}^1 \cup \{1\}]$. Alors :

Proposition 9 *L'algèbre \mathcal{B}^1 est une algèbre de Hopf.*

Preuve. Il suffit de montrer que, étant donné un arbre appartenant à \mathcal{G}^1 , la branche et le tronc de cet arbre, après avoir réalisé une coupe simple, appartiennent respectivement à \mathcal{G}^1 et $\mathcal{G}^1 \cup \{1\}$. On travaille par récurrence sur le degré n des arbres de \mathcal{B}^1 . Ceci est évident pour $n \leq 3$, en le vérifiant rapidement à la main.

Au rang $n \geq 4$. Considérons un arbre $T \in \mathcal{G}^1$ de degré n et $\mathbf{v} \models V(T)$ une coupe simple. Il y a deux cas :

1. Si T est de la forme $B^-(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(+, \dots, +, -)}$, avec $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$. Si \mathbf{v} est la coupe totale, le résultat est trivial. Sinon, comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_i)$ (on inclut le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre la racine de T et celle de T_i). Comme $T_i \in \mathcal{G}^0$, par récurrence, $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^1$. D'autre part, avec le lemme 4, T_i appartenant à \mathcal{G}^0 , $Roov_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Donc la forêt $T_1 \dots Roov_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m$ appartient à $\mathcal{G}^0 \cup \{1\}$, et $Roov_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_1, \dots, Roov_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{G}^1$. Le résultat est ainsi démontré si T est de la forme $B^-(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(+, \dots, +, -)}$.
2. Si T est de la forme $B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(+, \dots, +)}$, avec $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$. Si \mathbf{v} est la coupe simple correspondant à couper l'arête joignant la racine de T (qui est la racine de T_1) et le sommet indexé par n joignant les racines communes de T_2, \dots, T_m , alors $Roov_{\mathbf{v}}(T) = T_1 \in \mathcal{G}^0$ et $Lea_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^1$. Le résultat est donc démontré dans ce cas. Sinon, comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_i)$ (on inclut le cas de la coupe totale qui, si $i \geq 2$, correspond à couper l'arête entre le sommet de T indexé par n et la racine de T_i). Il y a alors deux cas :
 - (a) Si $i = 1$, c'est-à-dire si $\mathbf{v} \models V(T_1)$. Si \mathbf{v} est la coupe totale, alors $Lea_{\mathbf{v}}(T) = T$ et $Roov_{\mathbf{v}}(T) = 1$ et le résultat est établi. Sinon, par récurrence, $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}^1$. Avec le lemme 4, comme $Roov_{\mathbf{v}}(T_1)$ est différent de l'arbre vide, $Roov_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}^0$, donc $Roov_{\mathbf{v}}(T_1)T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}^0$. Et ainsi $Roov_{\mathbf{v}}(T) = B^+(Roov_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0 \subseteq \mathcal{G}^1 \cup \{1\}$.

- (b) Si $i \geq 2$. Par récurrence, comme $T_i \in \mathcal{G}^0$, $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^1$. D'autre part, avec le lemme 4, $Roov_{\mathbf{v}}(T_i) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Donc la forêt $T_1 \dots Roov_{\mathbf{v}}(T_i) \dots T_m$ appartient à \mathcal{G}^0 , et $Roov_{\mathbf{v}}(T) = B^+(T_1, \dots, Roov_{\mathbf{v}}(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{G}^0 \subseteq \mathcal{G}^1 \cup \{1\}$.

Ceci démontre la stabilité de \mathcal{B}^1 par coupe simple, et donc par coupe admissible, car \mathcal{B}^1 est stable pour le produit. Ainsi \mathcal{B}^1 est bien une algèbre de Hopf. \square

Remarque. On peut voir en reprenant cette démonstration que l'algèbre \mathcal{B}^0 est même un comodule à droite de l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^1 .

1.4 Généralisation de l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^1

En utilisant le même modèle que pour la construction de l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^1 , nous allons à présent construire une infinité d'algèbres de Hopf \mathcal{B}^i , pour $i \geq 2$, telles qu'on ait les relations d'inclusions suivantes :

$$\mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{B}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^i \subseteq \mathcal{B}^{i+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^\infty.$$

Pour cela, posons, quelque soit $i \geq 2$,

$$\mathcal{G}^i = \bigcup_{n \geq 1, (\varepsilon_{n-i+1}, \dots, \varepsilon_n) \in \{+, -\}^i} \mathcal{G}^{\overbrace{(+, \dots, +, \varepsilon_{n-i+1}, \dots, \varepsilon_n)}^{n-i \text{ fois}}}.$$

et $\mathcal{B}^i = \mathbb{K}[\mathcal{G}^i \cup \{1\}]$. Remarquons que $\mathcal{G}^i \subseteq \mathcal{G}^{i+1}$, $\forall i \geq 1$. Comme annoncé, on a alors le résultat suivant :

Proposition 10 *Pour tout $i \geq 1$, l'algèbre \mathcal{B}^i est une algèbre de Hopf.*

Preuve. Travaillons par récurrence sur $i \geq 1$. Le cas $i = 1$ ayant déjà été démontré, supposons $i \geq 2$.

Il faut montrer que \mathcal{B}^i est stable par coupe simple. Pour cela, faisons une récurrence sur le degré n des arbres de \mathcal{G}^i . Ceci est clair pour $n \leq 3$ et découle directement du fait que \mathcal{B}^∞ est une algèbre de Hopf.

Au rang $n \geq 4$. Considérons un arbre $T \in \mathcal{G}^i$ de degré n et $\mathbf{v} \models V(T)$ une coupe simple. Ici encore, il faut distinguer deux cas :

1. Si T est de la forme $B^-(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(\dots-)}$. D'après le lemme 2, $T_1 \in \mathcal{G}$ et $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$. Comme $T \in \mathcal{G}^i$, la forêt $T_1 \dots T_m$ appartient à \mathcal{G}^{i-1} . En posant $k = |T_2| + \dots + |T_m|$, $T_1 \in \mathcal{G}^{i-1-k}$. Supposons \mathbf{v} différent de la coupe totale, le résultat étant trivial dans ce cas. Comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_j)$ (on inclut le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre la racine de T et celle de T_j). Comme $T_j \in \mathcal{G}^i$, par récurrence, $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_j) \in \mathcal{G}^i$. Pour $Roov_{\mathbf{v}}(T)$, on doit alors différencier deux sous-cas :
 - (a) Si $j = 1$. T_1 appartient à \mathcal{G}^{i-1-k} . Par récurrence, $Roov_{\mathbf{v}}(T_1)$ est un arbre appartenant à $\mathcal{G}^{i-1-k} \cup \{1\}$. D'après le lemme 2, la forêt $Roov_{\mathbf{v}}(T_1)T_2 \dots T_m$ appartient à $\mathcal{G}^{i-1} \cup \{1\}$. Donc $Roov_{\mathbf{v}}(T) = B^-(Roov_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^i$.
 - (b) Si $j \geq 2$. Par le lemme 4, $Roov_{\mathbf{v}}(T_j) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Notons l la somme $|T_2| + \dots + |Roov_{\mathbf{v}}(T_j)| + \dots + |T_m|$. Alors $l \leq k$ et la forêt $T_1 \dots Roov_{\mathbf{v}}(T_j) \dots T_m$ appartient à $\mathcal{G}^{i-1+l-k} \subseteq \mathcal{G}^{i-1}$. Et ainsi $Roov_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_1, \dots, Roov_{\mathbf{v}}(T_j), \dots, T_m) \in \mathcal{G}^i$.

Ceci termine la démonstration dans le premier cas.

2. Si T est de la forme $B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^{(\dots+)}$. Avec le même raisonnement que dans le premier cas, en notant $k = |T_2| + \dots + |T_m|$, $T_1 \in \mathcal{G}^{i-1-k}$ et $T_2, \dots, T_m \in \mathcal{G}^0$. Si \mathbf{v} est la coupe simple correspondant à couper l'arête joignant la racine de T (qui est la racine de T_1) et le sommet indexé par n joignant les racines communes de T_2, \dots, T_m , alors $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = T_1 \in \mathcal{G}^{i-1-k} \subseteq \mathcal{G}^i$ et $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^1 \subseteq \mathcal{G}^i$. Le résultat est donc démontré dans ce cas. Sinon, comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_j)$ (on inclut le cas de la coupe totale qui, si $j \geq 2$, correspond à couper l'arête entre le sommet de T indexé par n et la racine de T_j). Il y a alors deux sous-cas :

- (a) Si $j = 1$. Dans le cas où \mathbf{v} est la coupe totale, $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = T$ et $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = 1$ et le résultat est trivial. Sinon, par récurrence, comme T_1 appartient à \mathcal{G}^{i-1-k} , $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = \text{Lea}_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{G}^{i-1-k} \subseteq \mathcal{G}^i$ et $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1)$ est un arbre appartenant à \mathcal{G}^{i-1-k} . Avec le lemme 2, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1)T_2 \dots T_m \in \mathcal{G}^{i-1}$. Donc $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^+(\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_1), T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{G}^i$.
- (b) Si $j \geq 2$. Comme $T_j \in \mathcal{G}^0$, par la proposition 9, $\text{Lea}_{\mathbf{v}}(T) = \text{Lea}_{\mathbf{v}}(T_j) \in \mathcal{G}^1 \subseteq \mathcal{G}^i$. Par le lemme 4, $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_j) \in \mathcal{G}^0 \cup \{1\}$. Si on note l la somme $|T_2| + \dots + |\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_j)| + \dots + |T_m|$, alors $l \leq k$ et la forêt $T_1 \dots \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_j) \dots T_m$ appartient à $\mathcal{G}^{i-1+l-k} \subseteq \mathcal{G}^{i-1}$. Ainsi $\text{Roo}_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_1, \dots, \text{Roo}_{\mathbf{v}}(T_j), \dots, T_m) \in \mathcal{G}^i$.

Le deuxième cas est donc démontré.

Nous avons ainsi obtenu, par le principe de récurrence, le résultat annoncé. \square

Remarque. En reprenant la démonstration, on a, pour tout $i \geq 2$, $\tilde{\Delta}(\mathcal{B}^i) \subseteq \mathcal{B}^i \otimes \mathcal{B}^{i-1}$.

Il est alors possible de calculer le nombre d'arbres de degré k de \mathcal{B}^i :

Proposition 11 Soit $k \geq 1$. Notons, pour tout $i \geq 1$, $f_{1,k}^{\mathcal{B}^i}$ le nombre d'arbres de \mathcal{B}^i de degré k . Rappelons que $f_{1,k}^{\mathcal{B}^\infty}$ désigne le nombre d'arbres de \mathcal{B}^∞ de degré k , et $f_k^{\mathcal{B}^0}$ le nombre de forêts de \mathcal{B}^0 de degré k . Alors, pour tout $k \geq 1$, $i \geq 1$,

$$f_{1,k}^{\mathcal{B}^i} = \begin{cases} f_{1,k}^{\mathcal{B}^\infty} & \text{si } k \leq i+1, \\ f_{1,k}^{\mathcal{B}^\infty} - \sum_{1 \leq j \leq k-i-1} f_j^{\mathcal{B}^0} f_{1,k-j}^{\mathcal{B}^\infty} & \text{si } k \geq i+2. \end{cases}$$

Preuve. Fixons $i \in \mathbb{N}^*$. La formule est évidente pour $k \leq i+1$ (en utilisant l'identification $\mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} = \mathcal{G}^{(-,\underline{\varepsilon})}$ lorsque $k = i+1$). Supposons $k \geq i+1$. Notons A^k l'ensemble

$$\left\{ \underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^k \mid \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{k-i} = + \right\} \subseteq \{+, -\}^k.$$

Le complémentaire dans $\{+, -\}^k$ de A^k est $\bigcup_{0 \leq j \leq k-i-1} A_j^k$ (l'union étant disjointe) où

$$A_j^k = \left\{ \underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^k \mid \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_j = + \text{ et } \varepsilon_{j+1} = - \right\} \subseteq \{+, -\}^k.$$

D'après le lemme 1, pour tout $0 \leq j \leq k-i-1$, les ensembles $\left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} \mid \underline{\varepsilon} \in A_j^k \right\}$ sont disjoints. De plus

$$\begin{aligned} \text{card} \left(\left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} \mid \underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^k \right\} \right) &= f_{1,k+1}^{\mathcal{B}^\infty}, \\ \text{card} \left(\left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\underline{\varepsilon})} \mid \underline{\varepsilon} \in A_j^k \right\} \right) &= f_{j+1}^{\mathcal{B}^0} f_{1,k-j}^{\mathcal{B}^\infty}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f_{1,k+1}^{\mathcal{B}^i} &= \text{card} \left(\left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\varepsilon)} \mid \underline{\varepsilon} \in A^k \right\} \right) \\
&= \text{card} \left(\left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\varepsilon)} \mid \underline{\varepsilon} \in \{+, -\}^k \right\} \right) \\
&\quad - \text{card} \left(\left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\varepsilon)} \mid \underline{\varepsilon} \in \bigcup_{0 \leq j \leq k-i-1} A_j^k \right\} \right) \\
&= f_{1,k+1}^{\mathcal{B}^\infty} - \text{card} \left(\bigcup_{0 \leq j \leq k-i-1} \left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\varepsilon)} \mid \underline{\varepsilon} \in A_j^k \right\} \right) \\
&= f_{1,k+1}^{\mathcal{B}^\infty} - \sum_{0 \leq j \leq k-i-1} \text{card} \left(\left\{ \text{arbre de } \mathcal{G}^{(+,\varepsilon)} \mid \underline{\varepsilon} \in A_j^k \right\} \right) \\
&= f_{1,k+1}^{\mathcal{B}^\infty} - \sum_{0 \leq j \leq k-i-1} f_{j+1}^{\mathcal{B}^0} f_{1,k-j}^{\mathcal{B}^\infty}.
\end{aligned}$$

□

Voici quelques valeurs numériques :

1. Pour les arbres :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^0}$	1	1	2	5	14	42	132	429
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^1}$	1	2	4	10	28	84	264	858
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^2}$	1	2	6	14	38	112	348	1122
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^3}$	1	2	6	20	50	142	432	1374
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^4}$	1	2	6	20	70	182	532	1654
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^5}$	1	2	6	20	70	252	672	2004
$f_{1,k}^{\mathcal{B}^6}$	1	2	6	20	70	252	924	2508

2. Pour les forêts :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_k^{\mathcal{B}^0}$	1	2	5	14	42	132	429	1430
$f_k^{\mathcal{B}^1}$	1	3	9	29	97	333	1165	4135
$f_k^{\mathcal{B}^2}$	1	3	11	37	129	461	1669	6107
$f_k^{\mathcal{B}^3}$	1	3	11	43	153	557	2065	7739
$f_k^{\mathcal{B}^4}$	1	3	11	43	173	637	2385	9059
$f_k^{\mathcal{B}^5}$	1	3	11	43	173	707	2665	10179
$f_k^{\mathcal{B}^6}$	1	3	11	43	173	707	2917	11187

2 L'algèbre de Hopf \mathcal{B}

2.1 Construction de \mathcal{B} et premières propriétés

A partir d'une construction similaire à celle décrite dans la partie 1.1, nous allons définir une nouvelle algèbre notée \mathcal{B} contenant l'algèbre de Hopf \mathcal{B}^∞ . Pour cela, on construit inductivement un ensemble d'arbres $\mathcal{T}^{(n,\varepsilon)}$ de degré $n \geq 1$, pour $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Si $n = 1$, $\mathcal{T}^{(1,\varepsilon)}$, pour ε quelconque, est l'ensemble réduit à un seul élément, l'unique arbre de degré 1.

Si $n \geq 2$, supposons les ensembles $\mathcal{T}^{(k,\varepsilon)}$ construits, pour tout $1 \leq k \leq n-1$.

1. Si $\varepsilon = -$, les arbres T de $\mathcal{T}^{(n,-)}$ sont construits comme suit. On prend une forêt $F = T_1 \dots T_m$ de degré $n-1$ construite à partir de $m \geq 1$ arbres appartenant à l'ensemble

$\bigcup_{1 \leq k \leq n-1, \varepsilon \in \{+, -\}} \mathcal{T}^{(k, \varepsilon)}$ et on considère T_1, \dots, T_m comme la suite des sous-arbres d'un arbre enraciné ayant pour racine le sommet indexé par n . Cela donne ainsi naissance à un nouvel arbre ordonné $T = B^-(T_1, \dots, T_m)$ de degré n .

2. Si $\varepsilon = +$, on construit alors les arbres T de $\mathcal{T}^{(n, +)}$ par la transformation suivante. On prend une forêt $F = T_1 \dots T_m$ de degré $n - 1$ avec $T_1, \dots, T_m \in \bigcup_{1 \leq k \leq n-1, \varepsilon \in \{+, -\}} \mathcal{T}^{(k, \varepsilon)}$ et $m \geq 1$. On construit alors T en greffant le sommet indexé par n comme le fils le plus à droite de la racine de T_1 et en considérant T_2, \dots, T_m comme la suite des sous-arbres issus du sommet indexé par n . Cela donne un nouvel arbre ordonné $T = B^+(T_1, \dots, T_m)$ de degré n .

Considérons un arbre T construit à partir des instructions précédentes, de degré n . Soit le sommet indexé par n est la racine et $T \in \mathcal{T}^{(n, -)}$, soit le sommet indexé par n est le fils le plus à droite de la racine et $T \in \mathcal{T}^{(n, +)}$. De plus, deux arbres de $\mathcal{T}^{(n, -)}$ (resp. $\mathcal{T}^{(n, +)}$) sont égaux si et seulement si les forêts à partir desquelles ils sont construits sont égales. Ainsi, les arbres construits avec les instructions précédentes sont tous distincts. En particulier, $\text{card}(\mathcal{T}^{(n, +)}) = \text{card}(\mathcal{T}^{(n, -)})$, $\forall n \geq 1$.

On pose alors \mathcal{T} l'ensemble $\bigcup_{n \geq 1, \varepsilon \in \{+, -\}} \mathcal{T}^{(n, \varepsilon)}$, l'union étant disjointe (on identifie $\mathcal{T}^{(1, -)}$ et $\mathcal{T}^{(1, +)}$). Voici une illustration pour $n = 1, 2, 3$ et 4 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{(1, -)} = \mathcal{T}^{(1, +)} &= \{\bullet_1\} \\
\mathcal{T}^{(2, +)} &= \{\mathbf{1}_1^2\} \\
\mathcal{T}^{(2, -)} &= \{\mathbf{1}_2^1\} \\
\mathcal{T}^{(3, +)} &= \{{}^2\mathbf{V}_1^3, {}^1\mathbf{V}_2^3, \mathbf{1}_3^2\} \\
\mathcal{T}^{(3, -)} &= \{\mathbf{1}_3^2, \mathbf{1}_3^1, {}^1\mathbf{V}_3^2\} \\
\mathcal{T}^{(4, +)} &= \{{}^2\mathbf{V}_1^4, {}^1\mathbf{V}_3^4, {}^1\mathbf{V}_2^4, {}^2\mathbf{V}_3^4, {}^1\mathbf{V}_3^4, {}^2\mathbf{V}_1^4, {}^2\mathbf{V}_1^4, \mathbf{1}_4^3, {}^1\mathbf{V}_2^4, \mathbf{1}_4^3, {}^2\mathbf{V}_1^4, \mathbf{Y}_4^3\} \\
\mathcal{T}^{(4, -)} &= \{\mathbf{Y}_4^3, \mathbf{1}_4^2, \mathbf{Y}_2^3, \mathbf{1}_4^2, \mathbf{Y}_4^3, \mathbf{1}_4^2, {}^2\mathbf{V}_3^3, {}^1\mathbf{V}_2^3, {}^2\mathbf{V}_4^3, {}^1\mathbf{V}_3^3, {}^1\mathbf{V}_4^3\}
\end{aligned}$$

Soit T un arbre enraciné plan non vide $\in \mathcal{H}_{PR}$. Ici aussi il est possible de dénombrer le nombre de façons d'indexer les sommets de T pour obtenir un élément de \mathcal{T} :

Proposition 12 *Soit T un arbre plan. On définit pour chaque sommet v de T , un entier a_v par récurrence sur la hauteur :*

1. Si v est une feuille, $a_v = 1$.
2. Sinon,

$$a_v = \prod_{v' \rightarrow v} a_{v'} + \sum_{v' \rightarrow v} \left(\prod_{v'' \rightarrow v \text{ tq } v'' < v'} a_{v''} \right) \left(\prod_{v'' \rightarrow w \rightarrow v \text{ tq } v' \leq w} a_{v''} \right),$$

l'ordre sur les sommets de T étant celui défini dans l'introduction.

Alors, il y a $a_{\text{racine}(T)}$ façons d'indexer les sommets de T pour obtenir un élément de \mathcal{T} .

Preuve. Pour éviter d'alourdir les notations, on notera indifféremment un arbre appartenant à \mathcal{H}_{PR} et l'arbre (ou les arbres) obtenu après indexation des sommets appartenant à \mathcal{T} .

Par récurrence sur le degré k de $T \in \mathcal{T}$. Si $k = 1$, c'est trivial. Supposons $k \geq 2$ et le résultat vérifié au rang inférieur. On utilise les mêmes notations que pour la démonstration de la proposition 5 : $T = B(T_1, \dots, T_n)$, avec $T_1 = B(T_{1,1}, \dots, T_{1,m_1}), \dots, T_n = B(T_{n,1}, \dots, T_{n,m_n})$ (si

$T_i = \bullet$, $T_i = B(T_{i,1})$ avec $T_{i,1} = 1$). Comme dans la preuve de la proposition 5, on ne cherchera pas ici à simplifier un produit d'arbres en supprimant les éventuels arbres vides. Il y a $n + 1$ situations possibles au niveau de la racine de T : pour $1 \leq i \leq n$,

$$\overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(T_1, \dots, T_i), T_{i+1,1}, \dots, T_{i+1, m_{i+1}}), \dots), T_{n,1}, \dots, T_{n, m_n})}^{n-i \text{ fois}} \in \mathcal{T},$$

et $B^+(\dots B^+(\bullet, T_{1,1}, \dots, T_{1, m_1}), \dots), T_{n,1}, \dots, T_{n, m_n}) \in \mathcal{T}$. Pour deux valeurs distinctes de i , l'indexation des sommets de T sera différente. Fixons un $0 \leq i \leq n$. Par hypothèse de récurrence, il y a $a_{\text{racine}(T_j)}$ façons d'indexer T_j en un élément de \mathcal{T} , pour $1 \leq j \leq i$; et $a_{\text{racine}(T_{j,l})}$ façons d'indexer $T_{j,l}$ en un élément de \mathcal{T} , pour $i + 1 \leq j \leq n$ et $1 \leq l \leq m_j$ (si $T_{j,l}$ est différent de l'arbre vide). Au total, il y a bien

$$a_{\text{racine}(T)} = \prod_{v' \rightarrow r} a_{v'} + \sum_{v' \rightarrow r} \left(\prod_{v'' \rightarrow r \text{ tq } v'' < v'} a_{v''} \right) \left(\prod_{v'' \rightarrow w \rightarrow r \text{ tq } v' \leq w} a_{v''} \right)$$

façons d'indexer les sommets de T pour obtenir un élément de \mathcal{T} . \square

Définissons l'algèbre \mathcal{B} comme l'algèbre librement engendrée par l'ensemble $\mathcal{T} \cup \{1\}$. On a alors la propriété remarquable suivante :

Proposition 13 *L'algèbre \mathcal{B} est une algèbre de Hopf.*

Preuve. Montrons que, en réalisant une coupe simple d'un arbre appartenant à \mathcal{T} , la branche et le tronc appartiennent respectivement à \mathcal{T} et $\mathcal{T} \cup \{1\}$. On travaille par récurrence sur le degré des arbres. Le résultat est trivial pour $n = 1, 2$ et 3 . Au rang $n \geq 4$. Considérons un arbre $T \in \mathcal{T}$ de degré n et $\mathbf{v} \models V(T)$ une coupe simple. Il y a deux cas :

1. Si l'arbre est de la forme $T = B^-(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{T}^{(n,-)}$, avec $m \geq 1$. Par construction, $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$. Si \mathbf{v} est la coupe totale, le résultat est évident. Sinon, comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_i)$ (on inclut le cas de la coupe totale qui correspond à couper l'arête entre la racine de T et celle de T_i). Par récurrence, comme $T_i \in \mathcal{T}$, $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i)$ appartient à \mathcal{T} . De même, par récurrence $Roov(T_i)$ appartient à $\mathcal{T} \cup \{1\}$ donc la forêt $T_1 \dots Roov(T_i) \dots T_m$ est constituée d'arbres appartenant à $\mathcal{T} \cup \{1\}$ et ainsi $Roov(T) = B^-(T_1, \dots, Roov(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{T}$.
2. Si l'arbre est de la forme $T = B^+(T_1, \dots, T_m) \in \mathcal{T}^{(n,+)}$, avec $m \geq 1$. Comme précédemment, $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$. Alors :
 - (a) Si \mathbf{v} est la coupe simple correspondant à couper l'arête joignant la racine de T (qui est la racine de T_1) et le sommet indexé par n joignant les racines communes de T_2, \dots, T_m , alors $Roov(T) = T_1 \in \mathcal{T}$ et $Lea_{\mathbf{v}}(T) = B^-(T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{T}$. Le résultat est donc démontré dans ce cas.
 - (b) Sinon, comme \mathbf{v} est une coupe simple de T , il existe un unique $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\mathbf{v} \models V(T_i)$ (on inclut le cas de la coupe totale qui, si $i \geq 2$, correspond à couper l'arête entre le sommet de T indexé par n et la racine de T_j). Deux cas sont à distinguer :
 - i. Si $i = 1$. Si $\mathbf{v} \models V(T_1)$ est la coupe totale, alors $Roov(T) = 1$ et $Lea_{\mathbf{v}}(T) = T$ et le résultat est trivial. Sinon, par récurrence, $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_1) \in \mathcal{T}$ et $Roov(T_1) \in \mathcal{T}$, donc $Roov(T) = B^+(Roov(T_1), T_2, \dots, T_m) \in \mathcal{T}$.
 - ii. Si $i \geq 2$. Par récurrence, $Lea_{\mathbf{v}}(T) = Lea_{\mathbf{v}}(T_i)$ appartient à \mathcal{T} et $Roov(T_i)$ appartient à $\mathcal{T} \cup \{1\}$. Donc $Roov(T) = B^+(T_1, \dots, Roov(T_i), \dots, T_m) \in \mathcal{T}$.

Ainsi, dans tous les cas, $Roov(T) \in \mathcal{T} \cup \{1\}$ et $Lea_{\mathbf{v}}(T) \in \mathcal{T}$, et on peut conclure par le principe de récurrence. \square

Remarque. Les relations d'inclusion suivantes sont évidemment vérifiées :

$$\mathcal{B}^0 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^i \subseteq \dots \subseteq \mathcal{B}^\infty \subseteq \mathcal{B}.$$

Rappelons que \mathcal{B}^0 est la sous-algèbre de \mathcal{B} engendrée par les arbres construits uniquement avec des B^+ . De la même façon, on peut définir une sous-algèbre de \mathcal{B} en considérant la sous-algèbre engendrée par les arbres de \mathcal{B} qui sont construits uniquement avec des B^- . Notons-la \mathcal{B}_l (cette terminologie est justifiée par le théorème 26). Elle est clairement stable par coupe admissible, c'est donc une algèbre de Hopf. Il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre \mathcal{B}_l et \mathcal{H}_{PR} : à chaque arbre de \mathcal{H}_{PR} il y a une seule et unique façon de numéroter les sommets (en numérotant les sommets dans l'ordre croissant pour l'ordre défini dans l'introduction) ; cela définit une bijection entre les arbres de \mathcal{B}_l et les arbres de \mathcal{H}_{PR} qui s'étend en un isomorphisme d'algèbres graduées respectant le coproduit.

Il est possible de calculer la série formelle de l'algèbre \mathcal{B} :

Proposition 14 *La série formelle de l'algèbre de Hopf \mathcal{B} est donnée par la formule :*

$$F_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1 + x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{4x}.$$

Preuve. Notons $f_n^{\mathcal{B}}$ le nombre de forêts de degré n de \mathcal{B} et $f_{1,n}^{\mathcal{B}}$ le nombre d'arbres de degré n . On déduit de la construction de \mathcal{B} les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_1^{\mathcal{B}} &= 1 \\ f_{1,1}^{\mathcal{B}} &= 1 \\ f_{1,n}^{\mathcal{B}} &= 2f_{n-1}^{\mathcal{B}} \text{ si } n \geq 2. \end{aligned}$$

Introduisons la convention suivante : $f_{1,0}^{\mathcal{B}} = 0$ et $f_0^{\mathcal{B}} = 1$. On pose alors $F_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{n \geq 0} f_n^{\mathcal{B}} x^n$ et $T_{\mathcal{B}}(x) = \sum_{n \geq 0} f_{1,n}^{\mathcal{B}} x^n$. L'algèbre étant libre,

$$F_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1}{1 - T_{\mathcal{B}}(x)}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B}}(x) - x &= \sum_{n \geq 2} f_{1,n}^{\mathcal{B}} x^n \\ &= 2x \left(\sum_{n \geq 1} f_n^{\mathcal{B}} x^n \right) \\ &= 2x \left(\frac{1}{1 - T_{\mathcal{B}}(x)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Donc : $T_{\mathcal{B}}^2(x) + (x - 1)T_{\mathcal{B}}(x) + x = 0$. Comme $f_{1,0}^{\mathcal{B}} = 0$,

$$T_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{2} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1 + x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{4x}.$$

□

Voici quelques valeurs numériques :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{1,k}^{\mathcal{B}}$	1	2	6	22	90	394	1806	8558
$f_k^{\mathcal{B}}$	1	3	11	45	197	903	4279	20793

Ce sont les séquences A006318 et A001003 de [10].

2.2 Coliberté de \mathcal{B}

Introduisons une nouvelle opération sur \mathcal{B} :

Étant données deux forêts non vides F et G appartenant à \mathcal{B} , on définit une forêt $F \curvearrowright G$ en greffant à la feuille la plus à droite de F la forêt G et en indexant les sommets comme suit : on laisse les indices de F inférieurs strictement à l'indice de sa feuille la plus à droite invariant ; on numérote ensuite la forêt G en préservant l'ordre d'origine de ses indices ; on finit alors en numérotant le reste des sommets non encore indexés de F en préservant ici encore l'ordre d'origine des indices dans F . Si F est une forêt de \mathcal{B} , on pose $1 \curvearrowright F = F \curvearrowright 1 = F$. Par linéarité, on définit ainsi une nouvelle opération $\curvearrowright : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

Remarque. Dans le cas particulier où $F = \bullet_1, \bullet_1 \curvearrowright G = B^-(G_1, \dots, G_n)$, pour toute forêt $G = G_1 \dots G_n \in \mathcal{B}$.

Exemples. On illustre ci-dessous l'opération \curvearrowright :

$\bullet_1 \bullet_2 \bullet_3 \curvearrowright \mathbf{1}_1^2 = \bullet_1 \bullet_2 \mathbf{1}_3^4$	$\bullet_1 \bullet_2 \bullet_3 \curvearrowright \mathbf{1}_2^1 = \bullet_1 \bullet_2 \mathbf{1}_5^3$	$\bullet_1 \bullet_2 \curvearrowright \bullet_1 \bullet_2 = \bullet_1 \mathbf{2}^3 \mathbf{V}_4^3$
$\mathbf{1}_2^1 \curvearrowright \bullet_1 \bullet_2 = \mathbf{Y}_4^2$	$\mathbf{V}_2^3 \curvearrowright \bullet_1 = \mathbf{V}_2^3$	$\mathbf{2}^3 \mathbf{V}_1^3 \curvearrowright \bullet_1 = \mathbf{2}^3 \mathbf{V}_1^3$
$\bullet_1 \mathbf{1}_2^3 \curvearrowright \mathbf{1}_2^1 = \bullet_1 \mathbf{1}_2^3$	$\mathbf{1}_2^1 \curvearrowright \mathbf{1}_2^1 = \mathbf{1}_4^2$	$\mathbf{1}_1^2 \curvearrowright \bullet_1 \bullet_2 = \mathbf{Y}_1^3$

Il faut montrer que \mathcal{B} est stable par l'opération de greffe \curvearrowright ainsi définie. Par définition de la greffe, il suffit de montrer le résultat lorsque F est un arbre non vide et $G = G_1 \dots G_n$ une forêt non vide de \mathcal{B} . Comme \mathcal{B} est librement engendrée par $\mathcal{T} \cup \{1\}$ en tant qu'algèbre, $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{T}$. Si F est l'arbre constitué d'un unique sommet, alors $F \curvearrowright G = B^-(G_1, \dots, G_n) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$. Supposons maintenant F de degré ≥ 2 . Alors, la branche de F sur laquelle on greffe G comporte au moins deux sommets. Il y a deux cas à distinguer :

1. Si l'indice de la feuille la plus à droite de F (celle où on greffe) est plus grand que l'indice de son père. Dans ce cas, cette feuille a été insérée lors de la construction de F par un $B^+(\dots, 1)$. Pour obtenir l'arbre $F \curvearrowright G$, il suffit alors de reproduire les opérations faites pour construire F à un changement près, en remplaçant $B^+(\dots, 1)$ par $B^+(\dots, G_1, \dots, G_n)$. Ainsi, $F \curvearrowright G$ appartient à $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$.
2. Si l'indice de la feuille la plus à droite de F est plus petit que l'indice de son père. Dans ce cas, cette feuille a été insérée lors de la construction de F par un $B^-(H_1, \dots, H_k, \bullet_1)$ où $H_1, \dots, H_k, \bullet_1$ est la suite des sous-arbres issus du même sommet de F , le père de la feuille la plus à droite de F . Par construction, $H_1, \dots, H_k \in \mathcal{T}$. Pour obtenir l'arbre $F \curvearrowright G$, il suffit alors de reproduire les opérations faites pour construire F à un changement près, en remplaçant $B^-(H_1, \dots, H_k, \bullet_1)$ par $B^-(H_1, \dots, H_k, B^-(G_1, \dots, G_n))$. Donc $F \curvearrowright G$ appartient aussi à $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ dans ce cas.

Le lemme qui suit est évident :

Lemme 15 *Pour toutes forêts $F, G, H \in \mathcal{B}$,*

$$\begin{aligned} (F \curvearrowright G) \curvearrowright H &= F \curvearrowright (G \curvearrowright H), \\ (FG) \curvearrowright H &= F(G \curvearrowright H). \end{aligned}$$

Rappelons la définition suivante (voir par exemple [5, 8]) :

Définition 16 Une algèbre dupliciale est un triplet $(A, *, \lrcorner)$, où A est un espace vectoriel et $*, \lrcorner: A \otimes A \rightarrow A$, avec les axiomes suivants : pour tout $x, y, z \in A$,

$$\begin{cases} (x * y) * z = x * (y * z), \\ (x \lrcorner y) \lrcorner z = x \lrcorner (y \lrcorner z), \\ (x * y) \lrcorner z = x * (y \lrcorner z). \end{cases} \quad (5)$$

Une algèbre dupliciale unitaire A est un espace vectoriel $A = \mathbb{K}1 \oplus \overline{A}$ tel que \overline{A} est une algèbre dupliciale et où on a étendu les deux opérations $*$ et \lrcorner comme suit : Pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} 1 * a &= a * 1 = a, \\ 1 \lrcorner a &= a \lrcorner 1 = a. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{B} munit de la concaténation et de \lrcorner est une algèbre dupliciale unitaire, avec $\overline{\mathcal{B}} = (\mathcal{B})_+$ et 1 l'arbre vide, de tel sorte que $\mathcal{B} = \mathbb{K}1 \oplus \overline{\mathcal{B}}$.

Proposition 17 $(\mathcal{B}_l)_+$ est l'algèbre dupliciale libre générée par l'élément \bullet_1 .

Preuve. Soit A une algèbre dupliciale et soit $a \in A$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbres dupliciales $\phi: (\mathcal{B}_l)_+ \rightarrow A$ tel que $\phi(\bullet_1) = a$. On définit $\phi(F)$ pour toute forêt non vide $F \in (\mathcal{B}_l)_+$ inductivement sur le degré de F :

$$\begin{aligned} \phi(\bullet_1) &= a, \\ \phi(T_1 \dots T_k) &= \phi(T_1) \dots \phi(T_k) \text{ si } k \geq 2, \\ \phi(B^-(T_1, \dots, T_k)) &= a \lrcorner \phi(T_1 \dots T_k) \text{ si } k \geq 1, \end{aligned}$$

avec $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T} \cap \mathcal{B}_l$. Comme le produit dans A est associatif, ϕ est bien définie. ϕ s'étend par linéarité en une application $\phi: (\mathcal{B}_l)_+ \rightarrow A$. Montrons que c'est un morphisme d'algèbres dupliciales. Par le second point, $\phi(FG) = \phi(F)\phi(G)$ pour toutes forêts $F, G \in (\mathcal{B}_l)_+$. Il reste à prouver que $\phi(F \lrcorner G) = \phi(F) \lrcorner \phi(G)$ pour toutes forêts $F, G \in (\mathcal{B}_l)_+$. On pose $F = F_1 \dots F_k$, avec $k \geq 1$ et $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{T} \cap \mathcal{B}_l$. Par récurrence sur le degré n de F_k . Si $n = 1$, alors $F_k = \bullet_1$, et, en notant $G = G_1 \dots G_m$, avec $m \geq 1$ et $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{T} \cap \mathcal{B}_l$:

$$\begin{aligned} \phi(F \lrcorner G) &= \phi((F_1 \dots F_{k-1} \bullet_1) \lrcorner G) \\ &= \phi(F_1 \dots F_{k-1} B^-(G_1, \dots, G_m)) \\ &= \phi(F_1 \dots F_{k-1}) \phi(B^-(G_1, \dots, G_m)) \\ &= \phi(F_1 \dots F_{k-1}) (a \lrcorner \phi(G_1 \dots G_m)) \\ &= \phi(F_1 \dots F_{k-1}) (\phi(F_k) \lrcorner \phi(G)) \\ &= \phi(F) \lrcorner \phi(G). \end{aligned}$$

Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vérifié si le degré de F_k est strictement inférieur à n . $F_k \in \mathcal{T} \cap \mathcal{B}_l$, donc F_k est de la forme $F_k = B^-(H_1, \dots, H_l)$ avec $l \geq 1$ et $H_1, \dots, H_l \in \mathcal{T} \cap \mathcal{B}_l$. Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence sur la forêt $H = H_1 \dots H_l$:

$$\begin{aligned} \phi(F \lrcorner G) &= \phi(F_1 \dots F_{k-1} B^-(H_1, \dots, H_l) \lrcorner G) \\ &= \phi(F_1 \dots F_{k-1}) \phi(B^-(H_1, \dots, H_l) \lrcorner G) \\ &= \phi(F_1 \dots F_{k-1}) (a \lrcorner \phi(H \lrcorner G)) \\ &= \phi(F_1) \dots \phi(F_{k-1}) (a \lrcorner (\phi(H) \lrcorner \phi(G))) \\ &= \phi(F_1) \dots \phi(F_{k-1}) ((a \lrcorner \phi(H)) \lrcorner \phi(G)) \\ &= \phi(F_1) \dots \phi(F_{k-1}) (\phi(F_k) \lrcorner \phi(G)) \\ &= (\phi(F_1) \dots \phi(F_{k-1}) \phi(F_k)) \lrcorner \phi(G) \\ &= \phi(F) \lrcorner \phi(G). \end{aligned}$$

Ainsi ϕ est un morphisme d'algèbres dupliciales.

Soit $\phi' : (\mathcal{B}_l)_+ \rightarrow A$ un deuxième morphisme d'algèbres dupliciales tel que $\phi'(\cdot_1) = a$. Pour tout arbre non vide $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T} \cap \mathcal{B}_l$, $\phi'(T_1 \dots T_k) = \phi'(T_1) \dots \phi'(T_k)$ et $\phi'(B^-(T_1, \dots, T_k)) = \phi'(\cdot_1 \swarrow (T_1 \dots T_k)) = a \swarrow \phi'(T_1 \dots T_k)$. Donc $\phi = \phi'$. \square

Définition 18 Pour toute forêt non vide $F \in (\mathcal{B})_+$, notons r_F la feuille la plus à droite de F . On pose :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{\swarrow}(F) &= \sum_{\mathbf{v} \parallel V(F) \text{ et } r_F \in \text{Lea}_{\mathbf{v}}(F)} \text{Lea}_{\mathbf{v}}(F) \otimes \text{Roo}_{\mathbf{v}}(F), \\ \tilde{\Delta}_{\searrow}(F) &= \sum_{\mathbf{v} \parallel V(F) \text{ et } r_F \in \text{Roo}_{\mathbf{v}}(F)} \text{Lea}_{\mathbf{v}}(F) \otimes \text{Roo}_{\mathbf{v}}(F).\end{aligned}$$

Remarquons que $\tilde{\Delta}_{\swarrow} + \tilde{\Delta}_{\searrow} = \tilde{\Delta}$.

Lemme 19 Pour tout $F \in (\mathcal{B})_+$,

$$\begin{cases} (\tilde{\Delta}_{\swarrow} \otimes \text{Id}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F) = (\text{Id} \otimes \tilde{\Delta}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F), \\ (\tilde{\Delta}_{\searrow} \otimes \text{Id}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F) = (\text{Id} \otimes \tilde{\Delta}_{\searrow}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F), \\ (\tilde{\Delta} \otimes \text{Id}) \circ \tilde{\Delta}_{\searrow}(F) = (\text{Id} \otimes \tilde{\Delta}_{\searrow}) \circ \tilde{\Delta}_{\searrow}(F). \end{cases} \quad (6)$$

En d'autres termes, $(\mathcal{B})_+$ est une coalgèbre dendriforme.

Preuve. Soit F une forêt non vide de \mathcal{B} . Par coassociativité de $\tilde{\Delta}$, on peut poser :

$$(\tilde{\Delta} \otimes \text{Id}) \circ \tilde{\Delta}(F) = (\text{Id} \otimes \tilde{\Delta}) \circ \tilde{\Delta}(F) = \sum F^{(1)} \otimes F^{(2)} \otimes F^{(3)},$$

où $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}$ sont des sous-forêts non vides de F . Alors :

$$\begin{aligned}(\tilde{\Delta}_{\swarrow} \otimes \text{Id}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F) &= (\text{Id} \otimes \tilde{\Delta}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F) = \sum_{r_F \in F^{(1)}} F^{(1)} \otimes F^{(2)} \otimes F^{(3)}, \\ (\tilde{\Delta}_{\searrow} \otimes \text{Id}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F) &= (\text{Id} \otimes \tilde{\Delta}_{\searrow}) \circ \tilde{\Delta}_{\swarrow}(F) = \sum_{r_F \in F^{(2)}} F^{(1)} \otimes F^{(2)} \otimes F^{(3)}, \\ (\tilde{\Delta} \otimes \text{Id}) \circ \tilde{\Delta}_{\searrow}(F) &= (\text{Id} \otimes \tilde{\Delta}_{\searrow}) \circ \tilde{\Delta}_{\searrow}(F) = \sum_{r_F \in F^{(3)}} F^{(1)} \otimes F^{(2)} \otimes F^{(3)}.\end{aligned}$$

\square

Notations. Soit $(A, \tilde{\Delta}_{\swarrow}, \tilde{\Delta}_{\searrow})$ une coalgèbre dendriforme.

1. On notera $\text{Prim}_{\text{tot}}(A) = \text{Ker}(\tilde{\Delta}_{\searrow}) \cap \text{Ker}(\tilde{\Delta}_{\swarrow})$.
2. Nous utiliserons les notations de Sweedler suivantes : pour tout $a \in A$, $\tilde{\Delta}(a) = a' \otimes a''$, $\tilde{\Delta}_{\swarrow}(a) = a'_{\swarrow} \otimes a''_{\swarrow}$ et $\tilde{\Delta}_{\searrow}(a) = a'_{\searrow} \otimes a''_{\searrow}$.

Proposition 20 1. Soit $x, y \in (\mathcal{B})_+$. Alors :

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_{\swarrow}(xy) = y \otimes x + x'_{\swarrow} y \otimes x'' + xy'_{\swarrow} \otimes y''_{\swarrow} + y'_{\swarrow} \otimes xy''_{\swarrow} + x'_{\swarrow} y'_{\swarrow} \otimes x'' y''_{\swarrow}, \\ \tilde{\Delta}_{\searrow}(xy) = x \otimes y + x' \otimes x'' y + xy'_{\searrow} \otimes y''_{\searrow} + y'_{\searrow} \otimes xy''_{\searrow} + x' y'_{\searrow} \otimes x'' y''_{\searrow}. \end{cases} \quad (7)$$

En d'autres termes, $(\mathcal{B})_+$ est une bialgèbre codendriforme.

2. Soit $x, y \in (\mathcal{B})_+$. Alors :

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_{\swarrow}(x \swarrow y) = y \otimes x + y'_{\swarrow} \otimes x \swarrow y''_{\swarrow} + x'_{\swarrow} \swarrow y \otimes x''_{\swarrow} + x'_{\swarrow} y \otimes x_{\swarrow} \\ \quad + x'_{\swarrow} y'_{\swarrow} \otimes x''_{\swarrow} \swarrow y''_{\swarrow}, \\ \tilde{\Delta}_{\searrow}(x \swarrow y) = y'_{\searrow} \otimes x \swarrow y''_{\searrow} + x'_{\searrow} \otimes x''_{\searrow} \swarrow y + x'_{\searrow} y'_{\searrow} \otimes x''_{\searrow} \swarrow y''_{\searrow}. \end{cases} \quad (8)$$

Preuve. Il suffit de prouver ces formules pour $x = F$, $y = G$ des forêts non vides $\in \mathcal{T}$. Commençons par prouver les premières formules, à savoir $\tilde{\Delta}_{\prec}(FG)$ et $\tilde{\Delta}_{\succ}(FG)$. Pour toute coupe admissible $\mathbf{v} \models V(FG)$, soit \mathbf{v}' la restriction de \mathbf{v} à F et \mathbf{v}'' la restriction de \mathbf{v} à G . Alors $\mathbf{v}' \models V(F)$ et $\mathbf{v}'' \models V(G)$. Par ailleurs, \mathbf{v}' et \mathbf{v}'' ne sont pas simultanément totales, ni simultanément vides.

Pour $\tilde{\Delta}_{\prec}(FG)$: soit $\mathbf{v} \models V(FG)$, telle que $r_{FG} = r_G$ appartient à $Lea_{\mathbf{v}}(FG)$. Comme $r_G \in Lea_{\mathbf{v}''}(G)$, \mathbf{v}'' est non vide. On a alors cinq possibilités pour \mathbf{v} :

- \mathbf{v}' est vide et \mathbf{v}'' est totale : cela donne le terme $G \otimes F$.
- \mathbf{v}' est non vide et \mathbf{v}'' est totale : alors $\mathbf{v}' \models V(F)$, et cela donne le terme $F'G \otimes F''$.
- \mathbf{v}' est vide et \mathbf{v}'' est non totale : comme $r_G \in Lea_{\mathbf{v}''}(G)$, cela donne le terme $G'_{\prec} \otimes FG''_{\prec}$.
- \mathbf{v}' est totale et \mathbf{v}'' est non totale : comme $r_G \in Lea_{\mathbf{v}''}(G)$, cela donne le terme $FG'_{\prec} \otimes G''_{\prec}$.
- $\mathbf{v}' \models V(F)$ et \mathbf{v}'' sont non totales : comme $r_G \in Lea_{\mathbf{v}''}(G)$, cela donne le terme $F'G'_{\prec} \otimes F''G''_{\prec}$.

Intéressons nous à présent à $\tilde{\Delta}_{\succ}(FG)$. Soit $\mathbf{v} \models V(FG)$, telle que $r_{FG} = r_G$ appartient à $Roov_{\mathbf{v}}(FG)$. Comme $r_G \in Roov_{\mathbf{v}''}(G)$, \mathbf{v}'' n'est pas totale. Il y a cinq possibilités pour \mathbf{v} :

- \mathbf{v}' est totale et \mathbf{v}'' est vide : cela donne le terme $F \otimes G$.
- \mathbf{v}' est non totale et \mathbf{v}'' est vide : alors $\mathbf{v}' \models V(F)$, et cela donne le terme $F' \otimes F''G$.
- \mathbf{v}' est totale et \mathbf{v}'' est non vide : comme $r_G \in Roov_{\mathbf{v}''}(G)$, cela donne le terme $FG'_{\succ} \otimes G''_{\succ}$.
- \mathbf{v}' est vide et \mathbf{v}'' est non totale : comme $r_G \in Roov_{\mathbf{v}''}(G)$, cela donne le terme $G'_{\succ} \otimes FG''_{\succ}$.
- $\mathbf{v}' \models V(F)$ et \mathbf{v}'' sont non totales : comme $r_G \in Roov_{\mathbf{v}''}(G)$, cela donne le terme $F'G'_{\succ} \otimes F''G''_{\succ}$.

Pour une coupe admissible $\mathbf{v} \models V(F \curvearrowright G)$, soit \mathbf{v}' la restriction à \mathbf{v} de F et soit \mathbf{v}'' l'unique coupe admissible de G telle que $Lea_{\mathbf{v}''}(G)$ est la sous-forêt de $Lea_{\mathbf{v}}(F \curvearrowright G)$ formée par les sommets qui appartiennent à $V(G)$. Remarquons que, \mathbf{v} n'étant pas totale, \mathbf{v}' n'est pas totale.

Calculons $\tilde{\Delta}_{\prec}(F \curvearrowright G)$. Soit $\mathbf{v} \models V(F \curvearrowright G)$, telle que $r_{F \curvearrowright G} = r_G$ appartient à $Lea_{\mathbf{v}}(F \curvearrowright G)$. Comme $r_G \in Lea_{\mathbf{v}''}(G)$, \mathbf{v}'' est non vide. Il y a quatre possibilités pour \mathbf{v} :

- \mathbf{v}' est vide et \mathbf{v}'' est totale : cela donne le terme $G \otimes F$.
- \mathbf{v}' est vide et \mathbf{v}'' est non totale : alors $\mathbf{v}'' \models V(G)$ et $r_G \in Lea_{\mathbf{v}''}(G)$, et cela donne le terme $G'_{\prec} \otimes F \curvearrowright G''_{\prec}$.
- \mathbf{v}' est non vide et \mathbf{v}'' est totale : on a alors deux sous-cas :
 - $Lea_{\mathbf{v}'}(F)$ contient r_F : cela donne le terme $F'_{\prec} \curvearrowright G \otimes F''_{\prec}$.
 - $Roov_{\mathbf{v}'}(F)$ contient r_F : cela donne le terme $F'_{\succ} G \otimes F''_{\succ}$.
- \mathbf{v}' est non vide et \mathbf{v}'' est non totale : alors r_F n'appartient pas à $Lea_{\mathbf{v}'}(F)$, r_G appartient à $Lea_{\mathbf{v}''}(G)$, et cela donne le terme $F'_{\succ} G'_{\prec} \otimes F''_{\succ} \curvearrowright G''_{\prec}$.

Pour terminer, il reste à calculer $\tilde{\Delta}_{\succ}(F \curvearrowright G)$. Soit $\mathbf{v} \models V(F \curvearrowright G)$, telle que $r_{F \curvearrowright G} = r_G$ appartient à $Roov_{\mathbf{v}}(F \curvearrowright G)$. Comme $r_G \in Roov_{\mathbf{v}''}(G)$, \mathbf{v}'' n'est pas totale. Donc \mathbf{v}' ne contient pas r_F . Il y a trois possibilités pour \mathbf{v} :

- \mathbf{v}' est vide : alors $\mathbf{v}'' \models V(G)$ et $Roov_{\mathbf{v}''}(G)$ contient r_G , et cela donne le terme $G'_{\succ} \otimes F \curvearrowright G''_{\succ}$.
- \mathbf{v}' est non vide et \mathbf{v}'' est vide : alors $r_F \in Roov_{\mathbf{v}'}(F)$ et on obtient le terme $F'_{\succ} \otimes F''_{\succ} \curvearrowright G$.
- \mathbf{v}' est non vide et \mathbf{v}'' est non vide : alors $r_F \in Roov_{\mathbf{v}'}(F)$, $r_G \in Roov_{\mathbf{v}''}(G)$ et on obtient le terme $F'_{\succ} G'_{\succ} \otimes F''_{\succ} \curvearrowright G''_{\succ}$.

□

Rappelons la définition suivante suggérée par les résultats précédents :

Définition 21 Une bialgèbre dupliciale dendriforme est une famille $(A, *, \curvearrowright, \tilde{\Delta}_{\prec}, \tilde{\Delta}_{\succ})$, où A est un espace vectoriel, $*, \curvearrowright : A \otimes A \rightarrow A$ et $\tilde{\Delta}_{\prec}, \tilde{\Delta}_{\succ} : A \rightarrow A \otimes A$, avec les propriétés suivantes :

1. $(A, *, \curvearrowright)$ est une algèbre dupliciale (axiomes (5)).
2. $(A, \tilde{\Delta}_{\curvearrowright}, \tilde{\Delta}_{\succ})$ est une coalgèbre dendriforme (axiomes (6)).
3. Les compatibilités de la proposition 20 sont satisfaites (axiomes (7) et (8)).

Nous avons besoin du théorème de rigidité suivant, démontré dans [5],

Théorème 22 *Soit A une bialgèbre dupliciale dendriforme. On suppose que A est graduée et connexe, c'est-à-dire que $A_0 = (0)$. Soit $(p_{\mathcal{D}})_{d \in \mathcal{D}}$ une base de $\text{Prim}_{\text{tot}}(A)$ formée par des éléments homogènes, indexés par un ensemble gradué \mathcal{D} . Il existe un unique isomorphisme de bialgèbres dupliciales dendriformes graduées :*

$$\phi : \begin{cases} (\mathcal{H}_{PR}^{\mathcal{D}})_+ & \longrightarrow A \\ \cdot_d, d \in \mathcal{D} & \longrightarrow p_d. \end{cases}$$

On en déduit alors le résultat suivant :

Théorème 23 *Il existe un ensemble gradué \mathcal{D} tel que $(\mathcal{B})_+$ est isomorphe à $(\mathcal{H}_{PR}^{\mathcal{D}})_+$ comme bialgèbres dupliciales dendriformes graduées.*

La série formelle de \mathcal{D} est donnée par :

$$f_{\mathcal{D}}(x) = \frac{f_{\mathcal{B}}(x) - 1}{f_{\mathcal{B}}(x)^2}.$$

Cela donne :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$ \mathcal{D} $	1	1	2	6	22	90	394	1806

On retrouve les nombres de Schroeder, correspondants à la séquence A006318 de [10].

Remarque. Comme corollaire de ce théorème, \mathcal{B} est libre (ce qu'on savait déjà, librement engendré par \mathcal{T}), colibre et auto-duale.

2.3 Structure d'algèbre bigreffe de \mathcal{B}

2.3.1 Algèbre de greffes à gauche

Définissons à présent une nouvelle loi de composition interne sur $(\mathcal{B})_+$ qui va permettre de munir \mathcal{B} d'une structure d'algèbre de greffes à gauche unitaire.

Étant donnés deux arbres non vides T et G de \mathcal{T} , on définit un arbre $T \succ G$ en greffant par la gauche T sur la racine de G et en indexant les sommets comme suit : on conserve l'indexation des sommets de T et on numérote ensuite les sommets de G dans leurs ordres de départ mais en décalant leurs indices par le nombre de sommets de T . Considérons maintenant une forêt $T_1 \dots T_n$ et un arbre G , avec $n \geq 1$ et $T_1, \dots, T_n, G \in \mathcal{T}$ (tous non vides), on définit l'arbre $(T_1 \dots T_n) \succ G$ en le posant égal à $T_1 \succ (T_2 \succ (\dots (T_n \succ G) \dots))$. Étant données deux forêts non vides $T_1 \dots T_n$ et $G_1 \dots G_m$, avec $n, m \geq 1$ et $T_1, \dots, T_n, G_1, \dots, G_m \in \mathcal{T}$, on pose $(T_1 \dots T_n) \succ (G_1 \dots G_m) = ((T_1 \dots T_n) \succ G_1) G_2 \dots G_m$. En étendant par linéarité \succ , on définit ainsi une nouvelle opération sur $(\mathcal{B})_+$. On utilisera la convention suivante : si $T \in (\mathcal{B})_+$, $1 \succ T = T$ et $T \succ 1 = 0$.

Exemples. Illustrons ci-dessous l'opération \succ :

$\bullet_1 \succ \mathbf{!}_1^2 = \mathbf{!}_2^3$	$\bullet_1 \bullet_2 \succ \bullet_1 = \mathbf{!}_3^2$	$\bullet_1 \succ \bullet_1 \mathbf{!}_2^3 = \mathbf{!}_2^1 \mathbf{!}_3^4$
$\mathbf{!}_2^1 \succ \mathbf{!}_1^2 \bullet_3 = \mathbf{!}_3^4 \bullet_5$	$\bullet_1 \bullet_2 \bullet_3 \succ \bullet_1 = \mathbf{!}_4^3$	$\bullet_1 \succ \mathbf{!}_3^2 \mathbf{!}_1 = \mathbf{!}_2^3 \mathbf{!}_4^4$
$\mathbf{!}_2^3 \succ \bullet_1 = \mathbf{!}_4^3$	$\bullet_1 \mathbf{!}_3^2 \succ \bullet_1 = \mathbf{!}_4^3$	$\bullet_1 \bullet_2 \succ \mathbf{!}_3^2 \mathbf{!}_1 = \mathbf{!}_3^2 \mathbf{!}_5^4$

Montrons que $(\mathcal{B})_+$ est bien stable pour la loi \succ . Il suffit de voir que si T et G sont deux arbres $\in \mathcal{T}$, l'arbre $T \succ G$ défini précédemment est encore un élément de \mathcal{T} . Pour cela, notons G_1, \dots, G_n la suite des sous-arbres issus de la racine de G , et $G_{i,1}, \dots, G_{i,m_i}$ la suite des sous-arbres issus de la racine de G_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Il y a alors deux cas :

1. Si $G = B^+(\dots B^+(\bullet_1, G_{1,1}, \dots, G_{1,m_1}) \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})$, alors par définition de \succ ,

$$T \succ G = B^+(\dots B^+(B^-(T), G_{1,1}, \dots, G_{1,m_1}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})$$

et ceci est bien un élément de \mathcal{T} .

2. Si il existe un $1 \leq i \leq n$ tel que

$$G = \overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(G_1, \dots, G_i), G_{i+1,1}, \dots, G_{i+1,m_{i+1}}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})}^{n-i \text{ fois}},$$

alors par définition de \succ ,

$$T \succ G = \overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(T, G_1, \dots, G_i), G_{i+1,1}, \dots, G_{i+1,m_{i+1}}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})}^{n-i \text{ fois}},$$

et ceci est ici encore un élément de \mathcal{T} .

Ainsi $(\mathcal{B})_+$ est stable pour l'opération \succ .

Remarque. Pour toute forêt non vide $T_1 \dots T_n \in (\mathcal{B})_+$, $(T_1 \dots T_n) \succ \bullet_1 = B^-(T_1, \dots, T_n)$.

La propriété suivante vient directement de la définition de \succ :

Lemme 24 *Étant donné $F, G, H \in (\mathcal{B})_+$,*

$$(FG) \succ H = F \succ (G \succ H), \quad (9)$$

$$(F \succ G)H = F \succ (GH). \quad (10)$$

Remarque. L'opération \succ n'est pas associative. Par exemple,

$$\begin{aligned} \bullet_1 \succ (\bullet_1 \succ \bullet_1) &= \bullet_1 \succ \mathbf{!}_2^1 = \mathbf{!}_3^2, \\ (\bullet_1 \succ \bullet_1) \succ \bullet_1 &= \mathbf{!}_2^1 \succ \bullet_1 = \mathbf{!}_1^3. \end{aligned}$$

Définition 25 *Une algèbre de greffes à gauche est un espace vectoriel A muni de deux opérations $*$ et \succ satisfaisant les deux relations suivantes : $\forall x, y, z \in A$*

$$(x * y) * z = x * (y * z),$$

$$(x * y) \succ z = x \succ (y \succ z),$$

$$(x \succ y) * z = x \succ (y * z).$$

Une algèbre de greffes à gauche unitaire A est un espace vectoriel $A = \mathbb{K}1 \oplus \overline{A}$ tel que \overline{A} est une algèbre de greffes à gauche et où on a étendu les deux opérations $$ et \succ comme suit :*

$$\begin{aligned} 1 * a &= a * 1 = a, \text{ pour tout } a \in A, \\ 1 \succ a &= a, a \succ 1 = 0, \text{ pour tout } a \in \overline{A}. \end{aligned} \quad (11)$$

Remarquons que $1 \succ 1$ n'est pas défini. Si $A = \mathbb{K}1 \oplus \overline{A}$ et $B = \mathbb{K}1 \oplus \overline{B}$ sont deux algèbres de greffes à gauches unitaires, on peut étendre les deux opérations $*$ et \succ à leur produit tensoriel $A \otimes B$ en posant :

$$\begin{cases} (a \otimes b) * (a' \otimes b') & := (a * a') \otimes (b * b'), \\ (a \otimes b) \succ (a' \otimes b') & := (a * a') \otimes (b \succ b'), \text{ si } b \otimes b' \neq 1 \otimes 1, \\ (a \otimes 1) \succ (a' \otimes 1) & := (a \succ a') \otimes 1, \end{cases} \quad (12)$$

pour $a, a' \in A, b, b' \in B$.

On définira dans la section 2.3.2 la notion d'algèbre de greffes à droite.

Grâce au lemme 24, \mathcal{B} muni de la concaténation et de \succ est une algèbre de greffes à gauche unitaire, où $\overline{\mathcal{B}} = (\mathcal{B})_+$ et 1 est l'arbre vide, de telle sorte que $\mathcal{B} = \mathbb{K}1 \oplus \overline{\mathcal{B}}$.

Théorème 26 $(\mathcal{B}_l)_+$ est l'algèbre de greffes à gauche libre engendrée par l'élément \bullet_1 .

Preuve. Soit A une algèbre de greffes à gauche et soit $a \in A$. Il faut montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbres de greffes à gauche $\phi : (\mathcal{B}_l)_+ \rightarrow A$ tel que $\phi(\bullet_1) = a$. On définit $\phi(F)$ pour toute forêt non vide $F \in (\mathcal{B}_l)_+$ inductivement sur le degré de F :

$$\begin{aligned} \phi(\bullet_1) &= a, \\ \phi(T_1 \dots T_k) &= \phi(T_1) \dots \phi(T_k) \text{ si } k \geq 2, \\ \phi(B^-(T_1, \dots, T_k)) &= \phi(T_1 \dots T_k) \succ a \text{ si } k \geq 1. \end{aligned}$$

Comme le produit $*$ dans A est associatif, ϕ est bien définie. ϕ s'étend par linéarité en une application $\phi : (\mathcal{B})_+ \rightarrow A$. Montrons que c'est un morphisme d'algèbres de greffes à gauche. Par le second point, $\phi(FG) = \phi(F)\phi(G)$ pour toutes forêts $F, G \in (\mathcal{B}_l)_+$. Considérons deux forêts non vides F et G . Il faut prouver que $\phi(F \succ G) = \phi(F) \succ \phi(G)$. On travaille par induction sur le degré n de G . Si $n = 1$, $G = \bullet_1$, et :

$$\phi(F \succ G) = \phi(B^-(F)) = \phi(F) \succ a = \phi(F) \succ \phi(G).$$

Supposons le résultat vérifié pour toutes forêts de degré $< n$. Considérons alors $G \in (\mathcal{B}_l)_+$ une forêt de degré $n \geq 2$ et une forêt non vide $F = F_1 \dots F_m \in (\mathcal{B}_l)_+$. Notons k la longueur de G . Il y a deux cas suivant la longueur k de G :

1. Si $k \geq 2$, $G = G_1 \dots G_k$. Alors

$$\begin{aligned} \phi(F \succ G) &= \phi((F_1 \dots F_m) \succ (G_1 \dots G_k)) \\ &= \phi(((F_1 \dots F_m) \succ G_1)G_2 \dots G_k) \\ &= \phi((F_1 \dots F_m) \succ G_1)\phi(G_2) \dots \phi(G_k) \\ &= (\phi(F_1 \dots F_m) \succ \phi(G_1))\phi(G_2) \dots \phi(G_k) \\ &= \phi(F) \succ (\phi(G_1)\phi(G_2) \dots \phi(G_k)) \\ &= \phi(F) \succ \phi(G), \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à la quatrième égalité.

2. Si $k = 1$, G est un arbre de degré $n \geq 2$, donc $G = B^-(G_1, \dots, G_l)$, avec $G_1, \dots, G_l \in (\mathcal{B}_l)_+$ et $l \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \phi(F \succ G) &= \phi((F_1 \dots F_m) \succ B^-(G_1, \dots, G_l)) \\ &= \phi(B^-(F_1, \dots, F_m, G_1, \dots, G_l)) \\ &= \phi(F_1 \dots F_m G_1 \dots G_l) \succ a \\ &= (\phi(F_1 \dots F_m)\phi(G_1 \dots G_l)) \succ a \\ &= \phi(F) \succ (\phi(G_1 \dots G_l) \succ a) \\ &= \phi(F) \succ \phi(B^-(G_1, \dots, G_l)) \\ &= \phi(F) \succ \phi(G). \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, $\phi(F \succ G) = \phi(F) \succ \phi(G)$. Par le principe de récurrence, cette formule est donc démontrée pour toute forêt $F, G \in (\mathcal{B}_l)_+$.

Soit $\phi' : (\mathcal{B}_l)_+ \rightarrow A$ un deuxième morphisme d'algèbres de greffes à gauche tel que $\phi'(\bullet_1) = a$. Soient $k \geq 1$ et $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}_l$. Alors $\phi'(T_1 \dots T_k) = \phi'(T_1) \dots \phi'(T_k)$. De plus,

$$\begin{aligned} \phi'(B^-(T_1, \dots, T_k)) &= \phi'((T_1 \dots T_k) \succ \bullet_1) \\ &= \phi'(T_1 \dots T_k) \succ \phi'(\bullet_1) \\ &= \phi'(T_1 \dots T_k) \succ a. \end{aligned}$$

Donc $\phi' = \phi$ et ceci termine la démonstration. \square

Il existe une relation entre \succ et le coproduit :

Proposition 27 *Rappelons que : $\Delta_l(F) = \sum_{v|=V(F) \text{ et } \text{root}(F) \in \text{Roo}_v(F)} \text{Lea}_v(F) \otimes \text{Roo}_v(F)$ pour toute forêt non vide $F \in (\mathcal{B})_+$, où $\text{root}(F)$ est la racine de l'arbre le plus à gauche de la forêt F . Alors pour tout $F \in \mathcal{B}$ et $G \in (\mathcal{B})_+$,*

$$\Delta_l(F \succ G) = \Delta(F) \succ \Delta_l(G). \quad (13)$$

De plus : $(\Delta \otimes Id) \circ \Delta_l(G) = (Id \otimes \Delta_l) \circ \Delta(G)$.

Preuve. Pour démontrer la première égalité, on utilisera les notations suivantes : si $a \in \mathcal{B}$, $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + a' \otimes a''$, et si $a \in (\mathcal{B})_+$, $\Delta_l(a) = 1 \otimes a + a'_l \otimes a''_l$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{B}$ et $y \in (\mathcal{B})_+$,

$$\begin{aligned} \Delta(x) \succ \Delta_l(y) &= (x \otimes 1 + 1 \otimes x + x' \otimes x'') \succ (1 \otimes y + y'_l \otimes y''_l) \\ &= x \otimes (1 \succ y) + xy'_l \otimes (1 \succ y''_l) + 1 \otimes (x \succ y) + y'_l \otimes (x \succ y''_l) \\ &\quad + x' \otimes (x'' \succ y) + x'y'_l \otimes (x'' \succ y''_l) \\ &= x \otimes y + xy'_l \otimes y''_l + 1 \otimes (x \succ y) + y'_l \otimes (x \succ y''_l) + x' \otimes (x'' \succ y) \\ &\quad + x'y'_l \otimes (x'' \succ y''_l) \\ &= \Delta_l(x \succ y), \end{aligned}$$

en utilisant (12) à la deuxième égalité et (11) à la troisième.

Pour la deuxième égalité, on peut poser, pour toute forêt $x \in (\mathcal{B})_+$, par coassociativité de Δ :

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta(x) = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = \sum x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)},$$

où $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ sont des sous-forets de x . Alors :

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta_l(x) = (Id \otimes \Delta_l) \circ \Delta_l(x) = \sum_{\text{root}(x) \in x^{(3)}} x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}.$$

Le résultat suit par linéarité. \square

2.3.2 Algèbre de greffes à droite

On peut aussi définir une opération $\prec : (\mathcal{B})_+ \times (\mathcal{B})_+ \rightarrow (\mathcal{B})_+$. Cela va permettre de munir \mathcal{B} d'une structure d'algèbre de greffes à droite unitaire.

Étant donnés deux arbres non vides T et G appartenant à \mathcal{T} , on définit un arbre $T \prec G$ en greffant par la droite G sur la racine de T et en indexant les sommets comme suit : on conserve

l'indexation des sommets de T , puis on numérote les sommets de G différents de la racine de G en conservant l'ordre initial, et on termine en numérotant la racine de G (par $|T| + |G|$). Considérons maintenant un arbre T et une forêt $G_1 \dots G_m$, avec $T, G_1, \dots, G_m \in \mathcal{T}$, on définit l'arbre $T \prec (G_1 \dots G_m)$ en le posant égal à $(\dots((T \prec G_1) \prec G_2) \dots \prec G_m)$. Étant données deux forêts non vides $T_1 \dots T_n$ et $G_1 \dots G_m$, avec $n, m \geq 1$ et $T_1, \dots, T_n, G_1, \dots, G_m \in \mathcal{T}$, on pose $(T_1 \dots T_n) \prec (G_1 \dots G_m) = T_1 \dots T_{n-1}(T_n \prec (G_1 \dots G_m))$. En étendant par linéarité \prec , ceci définit une nouvelle opération sur $(\mathcal{B})_+$. Si $T \in (\mathcal{B})_+$, on pose $T \prec 1 = T$ et $1 \prec T = 0$.

Exemples. Nous illustrons ci-dessous l'opération \prec :

$\bullet_1 \bullet_2 \prec \bullet_1 \bullet_2 = \bullet_1 \begin{array}{c} 3 \\ \vee \\ \bullet_2 \bullet_4 \end{array}$	$\bullet_1 \mathbb{1}_3^2 \prec \bullet_1 = \bullet_1 \begin{array}{c} 2 \\ \vee \\ \bullet_3 \bullet_4 \end{array}$	$\bullet_1 \prec \mathbb{1}_1^2 = \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \\ \mathbb{1}_1^2 \end{array}$
$\bullet_1 \bullet_2 \prec \begin{array}{c} 2 \\ \vee \\ \bullet_1 \bullet_3 \end{array} = \bullet_1 \begin{array}{c} 3 \\ \vee \\ \bullet_2 \bullet_5 \end{array}$	$\mathbb{1}_1^2 \prec \mathbb{1}_1^2 = \begin{array}{c} 3 \\ \vee \\ \mathbb{1}_1^4 \end{array}$	$\bullet_1 \prec \bullet_1 \bullet_2 \bullet_3 = \begin{array}{c} 3 \\ \vee \\ \bullet_1 \bullet_4 \end{array}$
$\mathbb{1}_1^2 \prec \bullet_1 \mathbb{1}_2^3 = \begin{array}{c} 3 \\ \vee \\ \mathbb{1}_1^5 \end{array}$	$\mathbb{1}_1^2 \prec \begin{array}{c} 1 \\ \vee \\ \bullet_2 \bullet_3 \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ \vee \\ \mathbb{1}_1^5 \end{array}$	$\mathbb{1}_1^2 \prec \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \mathbb{1}_2^3 \end{array} = \begin{array}{c} 3 \\ \vee \\ \mathbb{1}_1^5 \end{array}$

Vérifions que $(\mathcal{B})_+$ est bien stable par \prec . Il suffit de montrer que si T et G sont deux arbres non vides appartenant à \mathcal{T} , l'arbre $T \prec G$ défini précédemment est encore un élément de \mathcal{T} . Si $G = \bullet_1$, $T \prec G = B^+(T)$ appartient à \mathcal{T} . Supposons maintenant que $|G| \geq 2$. On note G_1, \dots, G_n la suite des sous-arbres issus de la racine de G , et $G_{i,1}, \dots, G_{i,m_i}$ la suite des sous-arbres issus de la racine de G_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (si $G_i = \bullet_1$, alors $m_i = 1$ et $G_{i,m_i} = 1$). Il y a alors plusieurs cas :

1. Si $G = B^+(\dots B^+(\bullet_1, G_{1,1}, \dots, G_{1,m_1}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})$, où $G_{1,1}, \dots, G_{n,m_n} \in \mathcal{T}$ par construction. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $G_i = B^-(G_{i,1}, \dots, G_{i,m_i}) \in \mathcal{T}$, et donc

$$T \prec G = B^+(T, G_1, \dots, G_n)$$

est un élément de $(\mathcal{B})_+$.

2. Si il existe un $1 \leq i \leq n$ tel que

$$G = \overbrace{B^+(\dots B^+(B^-(G_1, \dots, G_i), G_{i+1,1}, \dots, G_{i+1,m_{i+1}}), \dots), G_{n,1}, \dots, G_{n,m_n})}$$

avec par construction $G_1, \dots, G_i, G_{i+1,1}, \dots, G_{n,m_n} \in \mathcal{T}$. Alors, pour tout $i+1 \leq j \leq n$, $G_j = B^-(G_{j,1}, \dots, G_{j,m_j}) \in \mathcal{T}$, et donc

$$T \prec G = B^+(T, G_1, \dots, G_i, G_{i+1}, \dots, G_n)$$

est un élément de $(\mathcal{B})_+$.

Ainsi, dans tout les cas, $(\mathcal{B})_+$ est stable par l'opération \prec .

Remarque. Soient $n \geq 1$ et T_1, \dots, T_n n arbres non vides $\in (\mathcal{B})_+$. Alors

$$T_1 \prec B^-(T_2, \dots, T_n) = B^+(T_1, \dots, T_n).$$

Le lemme suivant est évident :

Lemme 28 *Étant donné $F, G, H \in (\mathcal{B})_+$,*

$$F \prec (GH) = (F \prec G) \prec H, \quad (14)$$

$$F(G \prec H) = (FG) \prec H. \quad (15)$$

Remarque. Comme pour \succ , \prec n'est pas associative. Par exemple,

$$\begin{aligned} \bullet_1 \prec (\bullet_1 \prec \bullet_1) &= \bullet_1 \prec \mathbf{1}_1^2 = \mathbf{1}_1^3, \\ (\bullet_1 \prec \bullet_1) \prec \bullet_1 &= \mathbf{1}_1^2 \prec \bullet_1 = {}^2\mathbf{V}_1^3. \end{aligned}$$

Définition 29 Une algèbre de greffes à droite est un espace vectoriel A muni de deux opérations $*$ et \prec satisfaisant les deux relations suivantes : $\forall x, y, z \in A$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= x * (y * z), \\ x \prec (y * z) &= (x \prec y) \prec z, \\ x * (y \prec z) &= (x * y) \prec z. \end{aligned}$$

Une algèbre de greffes à droite unitaire A est un espace vectoriel $A = \mathbb{K}1 \oplus \overline{A}$ tel que \overline{A} est une algèbre de greffes à droite et où on a étendu les deux opérations $*$ et \prec comme suit :

$$\begin{aligned} 1 * a &= a * 1 = a, \text{ pour tout } a \in A, \\ a \prec 1 &= a, 1 \prec a = 0, \text{ pour tout } a \in \overline{A}. \end{aligned} \tag{16}$$

Remarquons que $1 \prec 1$ n'est pas défini. Si $A = \mathbb{K}1 \oplus \overline{A}$ et $B = \mathbb{K}1 \oplus \overline{B}$ sont deux algèbres de greffes à droite unitaires, on peut étendre, de la même façon que pour les algèbres de greffes à gauche, les deux opérations $*$ et \prec au produit tensoriel $A \otimes B$ en posant :

$$\begin{cases} (a \otimes b) * (a' \otimes b') &:= (a * a') \otimes (b * b'), \\ (a \otimes b) \prec (a' \otimes b') &:= (a * a') \otimes (b \prec b'), \text{ si } b \otimes b' \neq 1 \otimes 1, \\ (a \otimes 1) \prec (a' \otimes 1) &:= (a \prec a') \otimes 1, \end{cases} \tag{17}$$

pour $a, a' \in A, b, b' \in B$.

Ainsi, grâce au lemme 28, \mathcal{B} muni de la concaténation et de \prec est une algèbre de greffes à droite unitaire, où $\overline{\mathcal{B}} = (\mathcal{B})_+$ et 1 est l'arbre vide de tel sorte que $\mathcal{B} = \mathbb{K}1 \oplus \overline{\mathcal{B}}$.

Notons $\overline{\mathcal{B}}_r$ l'algèbre de greffes à droite engendrée par l'élément \bullet_1 , et \mathcal{B}_r l'algèbre de greffes à droite unitaire égale à $\mathbb{K}1 \oplus \overline{\mathcal{B}}_r$ de sorte que $\overline{\mathcal{B}}_r = (\mathcal{B}_r)_+$. Alors :

Théorème 30 $(\mathcal{B}_r)_+$ est libre.

Preuve. Il faut montrer que si $T_1 \dots T_m$ est une forêt non vide appartenant à $(\mathcal{B}_r)_+$ (avec $m \geq 2$) alors $T_1, \dots, T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$. Raisonnons par récurrence sur le degré $n = |T_1| + \dots + |T_m|$ de la forêt $T_1 \dots T_m$, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons $T_1 \dots T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$ de degré $n \geq 2$. Par construction de \mathcal{B}_r , il existe $F_1, F_2 \in (\mathcal{B}_r)_+$ tel que $T_1 \dots T_m = F_1 F_2$ ou $T_1 \dots T_m = F_1 \prec F_2$.

1. Si $T_1 \dots T_m = F_1 F_2$, F_1 et F_2 étant non vides, il existe $i \in \{1, \dots, m-1\}$ tel que $F_1 = T_1 \dots T_i$ et $F_2 = T_{i+1} \dots T_m$. Par hypothèse de récurrence, comme $|F_1| < n$ et $|F_2| < n$, $T_1, \dots, T_i \in (\mathcal{B}_r)_+$ et $T_{i+1}, \dots, T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$ ce qui démontre le résultat dans ce cas.
2. Si $T_1 \dots T_m = F_1 \prec F_2$, en notant $G_1 \dots G_k$ la forêt F_1 , on a l'égalité $T_1 \dots T_{m-1} T_m = G_1 \dots G_{k-1} (G_k \prec F_2)$. Nécessairement, $k = m$, $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}$, $T_i = G_i$ et $T_m = G_m \prec F_2$. Par hypothèse de récurrence, comme $|F_1| < n$, $G_1, \dots, G_m \in (\mathcal{B}_r)_+$. Donc, $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}$, $T_i = G_i \in (\mathcal{B}_r)_+$. De plus, $G_m, F_2 \in (\mathcal{B}_r)_+$, donc $T_m = G_m \prec F_2 \in (\mathcal{B}_r)_+$.

Dans tout les cas, $T_1, \dots, T_m \in (\mathcal{B}_r)_+$. On conclut par le principe de récurrence. \square

Voici par exemple les arbres appartenant à \mathcal{B}_r de degré ≤ 4 :

$$1, \bullet_1, \mathbf{1}_1^2, \mathbf{1}_1^3, {}^2\mathbf{V}_1^3, {}^2\mathbf{V}_1^4, {}^3\mathbf{V}_1^4, {}^2\mathbf{V}_1^4, {}^2\mathbf{Y}_1^3, {}^2\mathbf{V}_1^3, \mathbf{1}_1^3.$$

Remarquons que \mathcal{B}_r n'est ni une algèbre de Hopf ni une sous-algèbre de \mathcal{B}^∞ .

Il y a une relation pour le coproduit comparable à celle de la proposition 27 :

Proposition 31 *Posons $\Delta_r(F) = \sum_{v|=V(F) \text{ et } \text{root}_r(F) \in \text{Roo}_v(F)} \text{Lea}_v(F) \otimes \text{Roo}_v(F)$ pour toute*

forêt non vide F , où $\text{root}_r(F)$ est la racine de l'arbre le plus à droite de la forêt F . Alors, pour tout $F \in (\mathcal{B})_+$ et $G \in \mathcal{B}$,

$$\Delta_r(F \prec G) = \Delta_r(F) \prec \Delta(G). \quad (18)$$

De plus : $(\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta_r(F) = (\text{Id} \otimes \Delta_r) \circ \Delta_r(G)$.

Preuve. Comme dans la preuve de la proposition 27, on utilise les notations suivantes : si $a \in \mathcal{B}$, $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + a' \otimes a''$, et si $a \in (\mathcal{B})_+$, $\Delta_r(a) = 1 \otimes a + a'_r \otimes a''_r$. Alors, pour tout $x \in (\mathcal{B})_+$ et $y \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \Delta_r(x) \prec \Delta(y) &= (1 \otimes x + x'_r \otimes x''_r) \prec (y \otimes 1 + 1 \otimes y + y' \otimes y'') \\ &= y \otimes (x \prec 1) + 1 \otimes (x \prec y) + y' \otimes (x \prec y'') + x'_r y \otimes (x''_r \prec 1) \\ &\quad + x'_r \otimes (x''_r \prec y) + x'_r y' \otimes (x''_r \prec y'') \\ &= y \otimes x + 1 \otimes (x \prec y) + y' \otimes (x \prec y'') + x'_r y \otimes x''_r + x'_r \otimes (x''_r \prec y) \\ &\quad + x'_r y' \otimes (x''_r \prec y'') \\ &= \Delta_r(x \prec y), \end{aligned}$$

en utilisant (17) à la deuxième égalité et (16) à la troisième.

Pour la deuxième égalité, la démonstration est identique à celle de la proposition 27. \square

2.3.3 Algèbre bigreffe

Remarque. Pour toute forêt $F, G, H \in (\mathcal{B})_+$,

$$(F \succ G) \prec H = F \succ (G \prec H). \quad (19)$$

Cette relation est encore vraie si F, G ou H est égal à 1. Et elle n'a pas de sens si au moins deux des trois éléments F, G, H sont égaux à 1, car $1 \succ 1$ et $1 \prec 1$ ne sont pas définis.

Ceci nous amène à introduire la notion d'algèbre bigreffe :

Définition 32 *Une algèbre bigreffe est un espace vectoriel A muni de trois opérations $*$, \succ et \prec telles que $(A, *, \succ)$ est une algèbre de greffes à gauche, $(A, *, \prec)$ est une algèbre de greffes à droite, et pour tout $x, y, z \in A$,*

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z).$$

*Une algèbre bigreffe unitaire A est un espace vectoriel $A = \mathbb{K}1 \oplus \bar{A}$ tel que \bar{A} est une algèbre bigreffe, $(A, *, \succ)$ est une algèbre de greffes à gauche unitaire d'unité 1 et $(A, *, \prec)$ est une algèbre de greffes à droite unitaire d'unité 1.*

Ainsi, avec (19), \mathcal{B} munit de la concaténation, de \succ et de \prec est une algèbre bigreffe unitaire, en prenant $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B})_+$, et pour 1 l'arbre vide.

Théorème 33 $(\mathcal{B})_+$ est engendrée comme algèbre bigreffe par l'élément \bullet_1 .

Preuve. Il suffit de montrer que tout les arbres appartenant à \mathcal{T} peuvent être construit à partir de \bullet_1 avec les opérations m , \succ et \prec . Raisonnons par récurrence sur le degré, le résultat étant évidemment vrai au rang 1. Soit $T \in \mathcal{T}$ de degré $n \geq 2$. Il y a deux cas :

1. Si $T = B^-(T_1, \dots, T_k)$, avec $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T}$ de degré $< n$ et $k \geq 1$. Par hypothèse de récurrence, T_1, \dots, T_k peuvent être construits à partir de \bullet_1 avec les opérations m , \succ et \prec . Alors $T = (T_1 \dots T_k) \succ \bullet_1$ peut aussi être construit dans ce cas à partir de \bullet_1 avec m , \succ et \prec .
2. Si $T = B^+(T_1, \dots, T_k)$, avec $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T}$ de degré $< n$ et $k \geq 1$. Toujours par récurrence, T_1, \dots, T_k peuvent être construits à partir de \bullet_1 avec m , \succ et \prec . Si $k = 1$, $T = B^+(T_1) = T_1 \prec \bullet_1$ et le résultat est démontré. Sinon

$$T = T_1 \prec B^-(T_2, \dots, T_k) = T_1 \prec ((T_2 \dots T_k) \succ \bullet_1)$$

et T peut ici encore être construit à partir de \bullet_1 avec m , \succ et \prec .

Le principe de récurrence permet de conclure. □

Remarque.

1. $(\mathcal{B})_+$ n'est pas librement engendrée comme algèbre bigreffe par l'élément \bullet_1 . Par exemple,

$$\bullet_1 \prec (\bullet_1 \prec \bullet_1) = \mathfrak{I}_1^2 = \bullet_1 \prec (\bullet_1 \succ \bullet_1).$$

2. Une description de l'algèbre bigreffe libre engendrée par un générateur et de l'opérateur bigreffe associée seront faites dans un autre article.

Références

- [1] Connes A. and Kreimer D., *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys **199** (1998), no. 1, 203-242, arXiv :hep-th/98 08042.
- [2] Foissy L., *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés, I*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), no. 3, 193-239, arXiv :math.QA/01 05212.
- [3] Foissy L., *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés, II*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), no. 4, 249-288, arXiv :math/0105212.
- [4] Foissy L., *Bidendriform bialgebras, trees and free quasi-symmetric functions* (2005), arXiv :math/0505207.
- [5] Foissy L., *Ordered forests and parking functions* (2011), arXiv :1007.1547.
- [6] Holtkamp R., *Comparaison of Hopf algebras on trees*, Arch. Math. (Basel) **80** (2003), no. 4, 368-383.
- [7] Loday J.L. and Ronco M., *On the structure of cofree Hopf algebra* (2005), arXiv :math/0405330.
- [8] Loday J.L., *Generalized bialgebras and triples of operads*, Société Mathématique de France, Astérisque no. 320, 2008.
- [9] Menous F., *Random walks on \mathbb{R} and ordered trees : First applications* (2002), Prépublication d'Orsay no. 2002-11, [http ://www.math.u-psud.fr/biblio/ppo/2002/ppo2002-11.html](http://www.math.u-psud.fr/biblio/ppo/2002/ppo2002-11.html).
- [10] Sloane N.J.A., *On-line encyclopedia of integer sequences*, [http ://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html](http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html).
- [11] Stanley R.P., *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.