



**HAL**  
open science

## Modélisation analytique du comportement en compression d'un anneau de tenségrité à base pentagonale

Franck Cevaer, Jérôme Quirant, Jean-François Dubé

► **To cite this version:**

Franck Cevaer, Jérôme Quirant, Jean-François Dubé. Modélisation analytique du comportement en compression d'un anneau de tenségrité à base pentagonale. 2011. hal-00631391

**HAL Id: hal-00631391**

**<https://hal.science/hal-00631391v1>**

Preprint submitted on 12 Oct 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation analytique du comportement en compression d'un anneau de tenségrité à base pentagonale

Cevaër Franck <sup>1</sup>; Quirant Jérôme <sup>2</sup>; Dubé Jean-François <sup>3</sup>

<sup>1</sup>Maître de Conférences, LMGC, Université Montpellier 2/France [franck.cevaer@univ-montp2.fr](mailto:franck.cevaer@univ-montp2.fr)

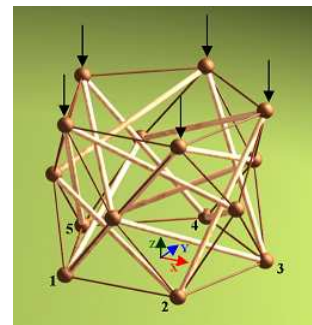
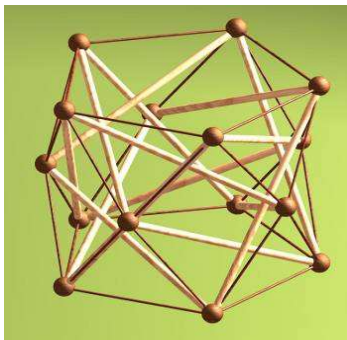
<sup>2</sup>Maître de Conférences, LMGC, Université Montpellier 2/France [jerome.quirant@univ-montp2.fr](mailto:jerome.quirant@univ-montp2.fr)

<sup>3</sup>Professeur, LMGC, Université Montpellier 2/France [jean-francois.dube@univ-montp2.fr](mailto:jean-francois.dube@univ-montp2.fr)

## Résumé :

Ce document propose une étude analytique du comportement d'un anneau de tenségrité à base pentagonale. Il permet d'évaluer l'influence de chacun des éléments sur la rigidité globale du système. C'est une première étape en vue de l'adaptation et le contrôle de ces systèmes, en fonction des actions qui lui sont appliquées.

Mots clefs : anneau de tenségrité, rigidité, éléments, barres, câbles



En position déployée, tous les nœuds sont sur un cylindre de rayon R. On a la relation entre R et la hauteur totale H du module :

$$H = 4R\sqrt{\frac{\cos(2\pi/5)}{3}} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}(\varphi-1)} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$$

Considérons 2 repères : un premier d'origine un nœud de la nappe supérieure S, puis un second d'origine un nœud intermédiaire I, avec pour axes la direction radiale (centripète), une direction ortho-radiale et la direction verticale ascendante.

Au nœud S, arrivent 6 éléments : 2 câbles de nappe (CN), 1 câble intermédiaire coplanaire (CIC), 1 câble intermédiaire non-coplanaire (CIN), 1 barre latérale (BL) et 1 barre intermédiaire (BI). Les directions des éléments sont décrites dans le tableau suivant :

	CN(1)	CN(2)	CIC	CIN	BL	BI
radiale	$\sqrt{\frac{3-\varphi}{4}}$	$\sqrt{\frac{3-\varphi}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{12-7\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{12-7\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{15}{76} \cdot (11\varphi-17)}$	$\sqrt{\frac{3}{76} \cdot (7\varphi+3)}$
Orthoradiale	$-\sqrt{\frac{1+\varphi}{4}}$	$\sqrt{\frac{1+\varphi}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{8-\varphi}{11}}$	$-\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{8-\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{76} \cdot (9\varphi-7)}$	$-\sqrt{\frac{3}{76} \cdot (9\varphi-7)}$
Verticale acs.	0	0	$\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi-2)}$	$\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi-2)}$	$\sqrt{\frac{32}{76} \cdot (11-6\varphi)}$	$\sqrt{\frac{2}{19} \cdot (11-6\varphi)}$

Au nœud I, arrivent également 6 éléments : 2 câbles intermédiaires coplanaires (CIC), 2 câbles intermédiaires non-coplanaires (CIN) et 2 barres intermédiaires (BI). Les directions des éléments sont décrites dans le tableau suivant :

	CIC (sup)	CIC (inf)	CIN (sup)	CIN (inf)	BI (sup)	BI (inf)
radiale	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{12-7\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{12-7\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{12-7\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{12-7\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{76} \cdot (7\varphi+3)}$	$\sqrt{\frac{3}{76} \cdot (7\varphi+3)}$
Orthoradiale	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{8-\varphi}{11}}$	$-\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{8-\varphi}{11}}$	$-\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{8-\varphi}{11}}$	$\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{8-\varphi}{11}}$	$-\sqrt{\frac{3}{76} \cdot (9\varphi-7)}$	$\sqrt{\frac{3}{76} \cdot (9\varphi-7)}$
Verticale acs.	$\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi-2)}$	$-\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi-2)}$	$\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi-2)}$	$-\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi-2)}$	$\sqrt{\frac{2}{19} \cdot (11-6\varphi)}$	$-\sqrt{\frac{2}{19} \cdot (11-6\varphi)}$

Notons les efforts dans les éléments par symboles suivants :

Élément	Câble de nappe	Câble Intermédiaire Coplanaire	Câble Intermédiaire Non- Coplanaire	Barre Latérale	Barre Intermédiaire
Effort	$F_{\text{Nap}}$	$F_{\text{Cop}}$	$F_{\text{NC}}$	$F_{\text{BL}}$	$F_{\text{BI}}$

Considérons le système symétriquement chargé sur les nappes supérieure et inférieure, de telle façon que la nappe intermédiaire reste dans le même plan ; les nœuds intermédiaires se déplacent selon des directions radiales vers l'extérieur sous l'accroissement de charge ; les nœuds de nappe se déplacent aussi radialement, en tournant (autour de l'axe de l'anneau) et selon l'axe de l'anneau.

Ecrire l'équilibre de l'anneau (en état d'autocontrainte) revient à écrire l'équilibre nodal de chaque nœud et se résume donc à 4 équations : les 3 eq. d'équilibre d'un nœud de nappe et l'eq. dans la direction radiale d'un nœud intermédiaire.

Soit à résoudre le système :

$$(F_{\text{Cop}} + F_{\text{NC}}) \sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi-2)} + (2F_{\text{BL}} + F_{\text{BI}}) \sqrt{\frac{2}{19} \cdot (11-6\varphi)} = 0$$

$$(F_{\text{Cop}} + F_{\text{NC}}) \sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (12-7\varphi)} + F_{\text{BI}} \sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (3+7\varphi)} = 0$$

$$(F_{\text{Cop}} + F_{\text{NC}}) \sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (12-7\varphi)} + F_{\text{BI}} \sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (3+7\varphi)} + x \sqrt{3-\varphi} + F_{\text{BL}} \sqrt{\frac{3 \times 5}{4 \times 19} \cdot (11\varphi-17)} = 0$$

$$(F_{\text{Cop}} - F_{\text{NC}}) \sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (8-\varphi)} + (F_{\text{BL}} - F_{\text{BI}}) \sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (9\varphi-7)} = 0$$

Ce système de 4 équations à 5 inconnues possède une infinité de solutions proportionnelles au vecteur suivant qui traduit l'unique état d'autocontrainte :

$F_{Nap}^0$	0,33767
$F_{Cop}^0$	0,87199
$F_{NC}^0$	0,32669
$F_{BL}^0$	-1
$F_{BI}^0$	-0,34164

On a  $F_{BI}^0 = \frac{2}{5} \cdot (3\varphi - 4)$

On charge symétriquement l'anneau, par un effort F aux nœuds de nappes, en partant d'un niveau donné NA de l'état d'autocontrainte. Le système à résoudre s'écrit alors :

$$(F_{Cop} + F_{NC})\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi - 2)} + (2F_{BL} + F_{BI})\sqrt{\frac{2}{19} \cdot (11 - 6\varphi)} = -F$$

$$(F_{Cop} + F_{NC})\sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (12 - 7\varphi)} + F_{BI}\sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (3 + 7\varphi)} = 0$$

$$(F_{Cop} + F_{NC})\sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (12 - 7\varphi)} + F_{BI}\sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (3 + 7\varphi)} + x\sqrt{3 - \varphi} + F_{BL}\sqrt{\frac{3 \times 5}{4 \times 19} \cdot (11\varphi - 17)} = 0$$

$$(F_{Cop} - F_{NC})\sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (8 - \varphi)} + (F_{BL} - F_{BI})\sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (9\varphi - 7)} = 0$$

L'effort dans la barre intermédiaire va varier de la valeur initiale avec F selon une loi linéaire (si on suppose les déplacements infinitésimaux) :  $F_{BI} = NA \cdot F_{BI}^0 + p_{BI} \cdot F$ , dans laquelle le facteur NA est le niveau d'autocontrainte en place.

Bien sûr, on écrit aussi :

$$F_{BL} = NA \cdot F_{BL}^0 + p_{BL} \cdot F$$

$$F_{Nap} = NA \cdot F_{Nap}^0 + p_{Nap} \cdot F$$

$$F_{Cop} = NA \cdot F_{Cop}^0 + p_{Cop} \cdot F$$

$$F_{NC} = NA \cdot F_{NC}^0 + p_{NC} \cdot F$$

Après simplification, les 4 équations d'équilibre deviennent alors :

$$(p_{Cop} + p_{NC})\sqrt{\frac{2}{11} \cdot (3\varphi - 2)} + 2p_{BL}\sqrt{\frac{2}{19} \cdot (11 - 6\varphi)} = -1 - p_{BI}\sqrt{\frac{2}{19} \cdot (11 - 6\varphi)}$$

$$(p_{Cop} + p_{NC})\sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (12 - 7\varphi)} = -p_{BI}\sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (3 + 7\varphi)}$$

$$p_{Nap}\sqrt{3 - \varphi} + (p_{Cop} + p_{NC})\sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (12 - 7\varphi)} + p_{BL}\sqrt{\frac{3 \times 5}{4 \times 19} \cdot (11\varphi - 17)} = -p_{BI}\sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (3 + 7\varphi)}$$

$$(p_{Cop} - p_{NC})\sqrt{\frac{3}{4 \times 11} \cdot (8 - \varphi)} + p_{BL}\sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (9\varphi - 7)} = p_{BI}\sqrt{\frac{3}{4 \times 19} \cdot (9\varphi - 7)}$$

On montre donc que la pente des efforts dans les éléments est indépendante du niveau d'autocontrainte, pour la même géométrie initiale de la structure. Ces pentes peuvent s'exprimer à partir de celle de la barre intermédiaire par exemple et sont représentées sur le graphe (fig.1) ci-dessous.

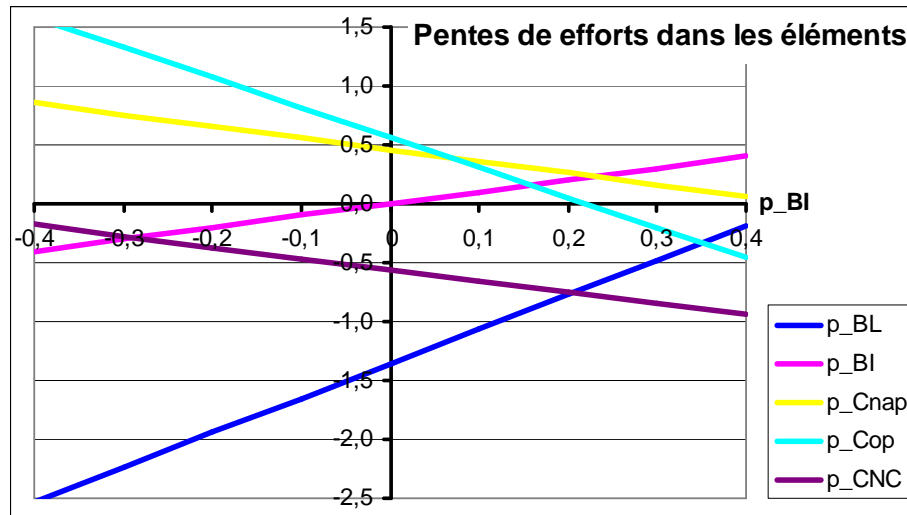


Fig.1 : Valeurs des pentes des efforts dans les éléments

Il semble donc que ce soient les rigidités propres des éléments qui définissent ces valeurs de pentes des efforts dans les éléments.

### Etude de la rigidité des éléments sur la rigidité d'ensemble (en compression axiale axisymétrique)

Chaque élément de l'anneau se définit par une matrice une matrice de rigidité élémentaire  $K_E$  de dimension 6x6 à partir de la position des 2 nœuds i et j d'extrémité, de sa longueur L, de son module d'élasticité E, de sa section droite S, et de sa tension en place T sous la forme suivante au premier ordre :

$$K_E = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} + \frac{T}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} - \frac{T}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T}{L} & 0 & 0 & -\frac{T}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T}{L} & 0 & 0 & -\frac{T}{L} \\ -\frac{ES}{L} - \frac{T}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} + \frac{T}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T}{L} & 0 & 0 & \frac{T}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{T}{L} & 0 & 0 & \frac{T}{L} \end{bmatrix}$$

Toutes ces matrices élémentaires sont alors réécrites dans un repère global et assemblées pour donner une matrice de rigidité globale  $K_G$  de dimension 45x45 (puisque l'anneau comporte 15 nœuds).

Sous compression axiale axisymétrique, l'anneau est sollicité par des efforts verticaux ascendants d'une même intensité F aux nœuds de la nappe inférieure, et des par des efforts verticaux descendants de la même intensité F aux nœuds de la nappe supérieure ; la nappe intermédiaire reste dans son plan on et les nœuds intermédiaires ont pour seul déplacement possible un même déplacement radial.

Chaque nœud de la nappe inférieure subit donc le même déplacement vertical  $uz$ , le même déplacement tangentiel  $u\theta$  et le même déplacement radial  $ur$ . Les nœuds de la nappe supérieure subissent alors le déplacement vertical  $-uz$ , le déplacement tangentiel  $-u\theta$  et le déplacement radial  $ur$ . Les nœuds de la nappe intermédiaire ne subissent qu'un même déplacement radial  $vr$ , les déplacements tangentiels et verticaux étant nuls.

Les déplacements de chaque nœud de l'anneau peuvent donc aisément (et linéairement) s'exprimer en fonction de  $uz$ ,  $u\theta$ ,  $ur$  et  $vr$  par une matrice de passage  $P$  de dimension  $45 \times 4$ .

La construction de la matrice de rigidité réduite  $K_R = P^T \cdot K_G \cdot P$  permet alors d'obtenir une matrice de dimension  $4 \times 4$  définissant la rigidité de l'anneau à partir des rigidités axiales  $k_{Nap}$ ,  $k_{NC}$ ,  $k_{Cop}$ ,  $k_{BI}$  et  $k_{BL}$  de chaque famille d'éléments (que sont les câbles de nappes, les câbles non coplanaires, les câbles coplanaires, les barres intermédiaires et les barres latérales), ainsi que du niveau d'autocontrainte  $NA$  dans l'anneau fixant les tensions dans les éléments.

$$K_R = k_{Nap} \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 13,82 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix} + k_{NC} \begin{bmatrix} 5,19 & -4,75 & -1,54 & -1,54 \\ -4,75 & 4,35 & 1,41 & 1,41 \\ -1,54 & 1,41 & 0,46 & 0,46 \\ -1,54 & 1,41 & 0,46 & 0,46 \end{bmatrix} + k_{Cop} \begin{bmatrix} 5,19 & 4,75 & -1,54 & -1,54 \\ 4,75 & 4,35 & -1,41 & -1,41 \\ -1,54 & -1,41 & 0,46 & 0,46 \\ -1,54 & -1,41 & 0,46 & 0,46 \end{bmatrix} \\ + k_{BL} \begin{bmatrix} 1,36 & -2,01 & -2,77 & -2,77 \\ -2,01 & 2,99 & 4,11 & 4,11 \\ -2,77 & 4,11 & 5,66 & 5,66 \\ -2,77 & 4,11 & 5,66 & 5,66 \end{bmatrix} + k_{BL} \begin{bmatrix} 10,88 & 8,06 & -5,86 & 0,00 \\ 8,06 & 5,97 & -4,34 & 0,00 \\ -5,86 & -4,34 & 3,15 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix} - k_{NA} \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 13,82 & 9,51 & -9,51 \\ 0,00 & 9,51 & 20,0 & -20,0 \\ 0,00 & -9,51 & -20,0 & 20,0 \end{bmatrix}$$

Dans cette expression les facteurs des 6 matrices adimensionnelles  $4 \times 4$  sont définis par :

$$k_{Nap} = \left( \frac{ES}{L} \right)_{Nap} ; k_{NC} = \left( \frac{ES}{L} \right)_{NC} ; k_{Cop} = \left( \frac{ES}{L} \right)_{Cop} ; k_{BI} = \left( \frac{ES}{L} \right)_{BI} ; k_{BL} = \left( \frac{ES}{L} \right)_{BL} ; k_{NA} = \left( \frac{T}{L} \right)_{BL} \text{ avec } T_{BL} < 0$$

Les caractéristiques (dites de base) de l'anneau étudié, pour lequel on cherche à en évaluer les influences sur le comportement en compression axisymétrique, sont les suivantes :

$$k_{Nap} = 2,85 \cdot 10^5 \text{ N/m} ; k_{NC} = k_{Cop} = 3,76 \cdot 10^5 \text{ N/m} ; k_{BI} = k_{BL} = 2,95 \cdot 10^6 \text{ N/m} ; k_{NA} = -500 \text{ N/m}$$

Les barres intermédiaires et latérales sont de mêmes caractéristiques mécaniques et la longueur en place des barres est de 2m. Les câbles sont de mêmes caractéristiques mécaniques, cependant la longueur en place des câbles de nappes est de 1,3507 m tandis que celle des câbles coplanaires et non coplanaires est de 1,0238 m.

La faible valeur de la rigidité  $k_{NA}$  vis-à-vis des rigidités axiales des éléments câbles et barres, laisse soupçonner une faible influence du niveau d'autocontrainte sur le comportement de la structure en compression axiale.

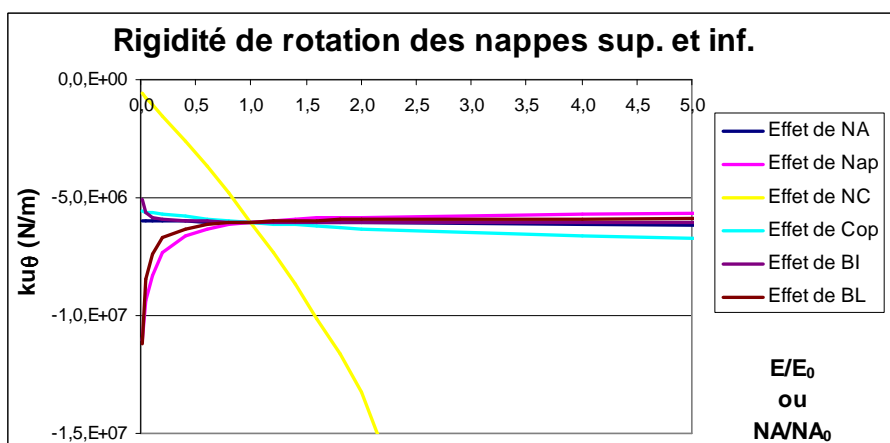
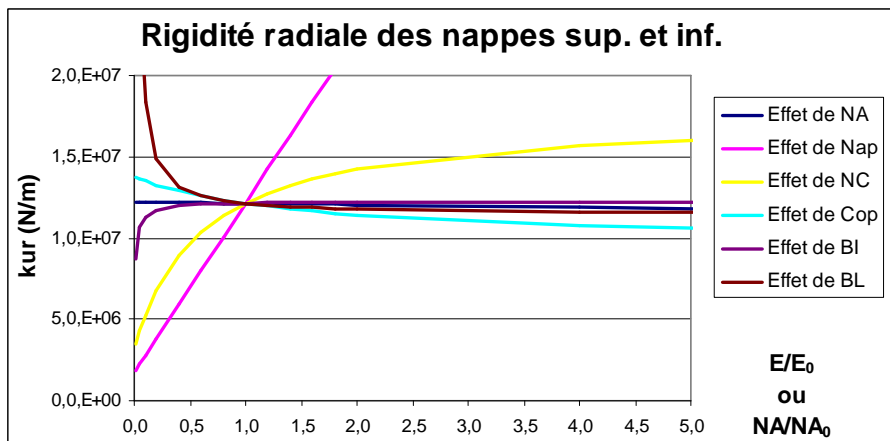
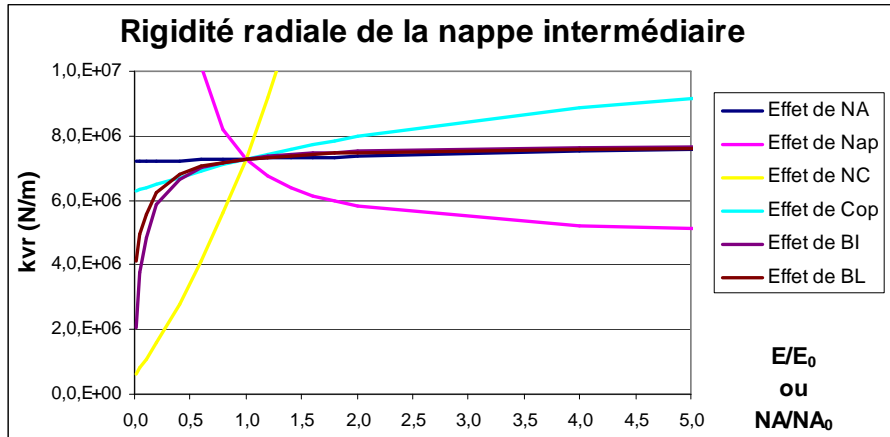
La rigidité de l'anneau, en compression axisymétrique, peut donc être appréciée selon les 4 directions  $uz$ ,  $u\theta$ ,  $ur$  et  $vr$ , c'est-à-dire respectivement la variation de hauteur de l'anneau vis-à-vis de son chargement total, les variations tangentielle et radiale des câbles de nappes, la variation radiale des câbles intermédiaires.

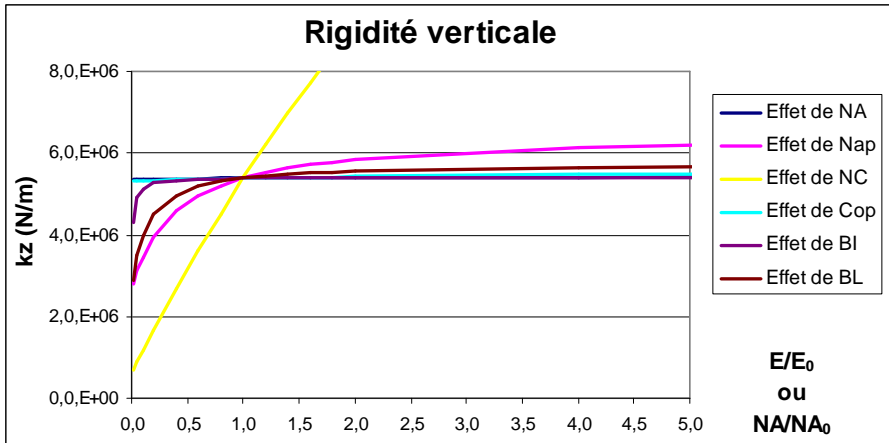
$$\begin{Bmatrix} uz \\ u\theta \\ ur \\ vr \end{Bmatrix} = [S_R] \begin{Bmatrix} 10F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ces rigidités se définissent donc respectivement comme les inverses des termes de la première colonne de la matrice de souplesse  $[S_R] = [K_R]^{-1}$ . Pour les caractéristiques (de base) mécaniques et sthéniques précédemment définies on a :

$$\{k_z \quad k_{u\theta} \quad k_{ur} \quad k_{vr}\} = \{5,38 \quad -6,04 \quad 12,13 \quad 7,28\} 10^6 \text{ en } (N/m)^4$$

On montre ci-dessous l'influence des rigidités des 5 familles d'éléments constitutifs (câbles Nap, NC, Cop et barres BI et BL) de l'anneau ainsi que du niveau d'autocontrainte (NA)

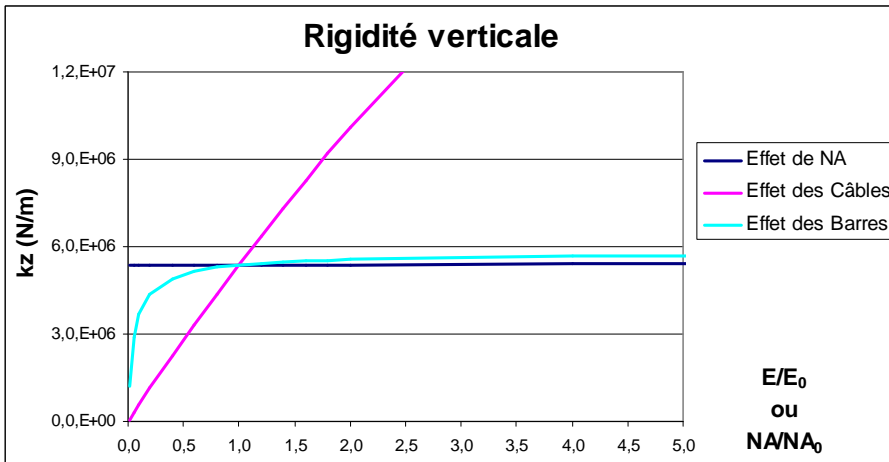
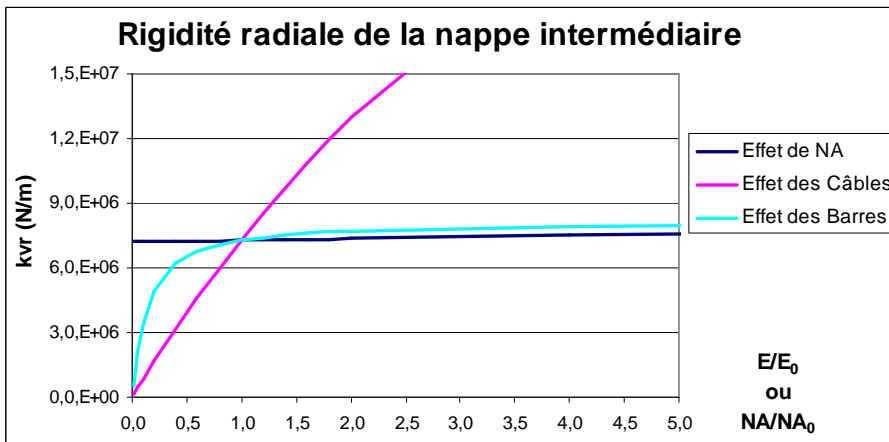




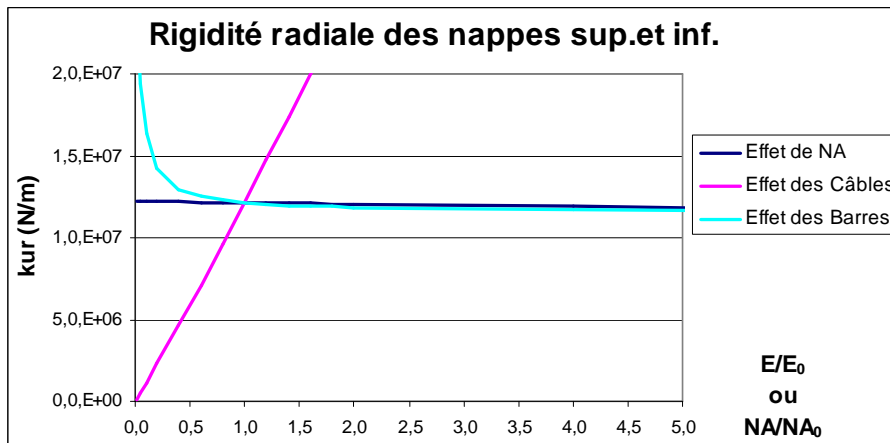
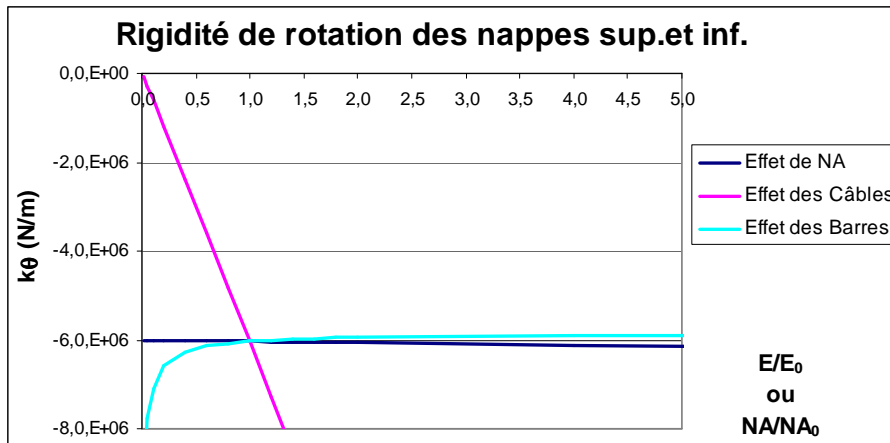
Les valeurs négatives de la rigidité de rotation s'expliquent par le fait que sens positif de rotation (choisi arbitrairement) des nappes est opposé au sens réel de rotation dû aux actions sur les nœuds de nappes supérieure et inférieure.

On observe ce sont les câbles non coplanaires qui pilotent fortement la rigidité verticale et la rigidité de rotation des nappes supérieure et inférieure. La rigidité radiale des nappes supérieure et inférieure est quant à elle régie par les câbles de nappes.

Si on impose aux câbles d'être identiques (en module d'élasticité et section), ainsi que les barres, on peut analyser l'effet de la rigidité des câbles et des barres sur la rigidité de l'anneau.







On observe que le niveau d'autocontrainte est de très faible influence sur la rigidité de l'anneau, et que ce sont les câbles qui pilotent la rigidité de l'anneau. Notons que de faibles rigidités des barres sont à proscrire pour éviter les risques de flambement de ces éléments en compression.

Si pour la réalisation d'un tel anneau, la rigidité en compression axisymétrique peut être calculée, il est cependant nécessaire de prévoir l'évolution des sollicitations dans les éléments, gouvernées par les équilibres nodaux mais aussi par la distribution des rigidités des éléments.

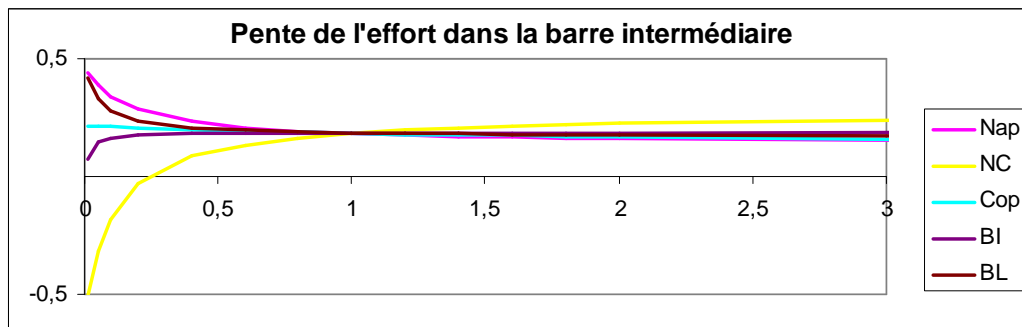
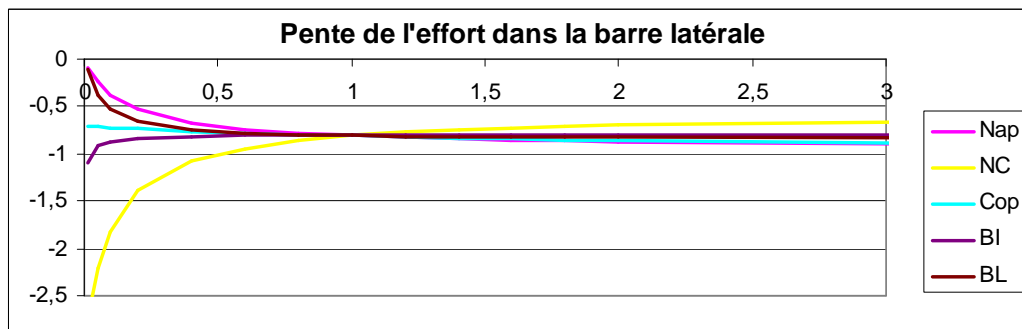
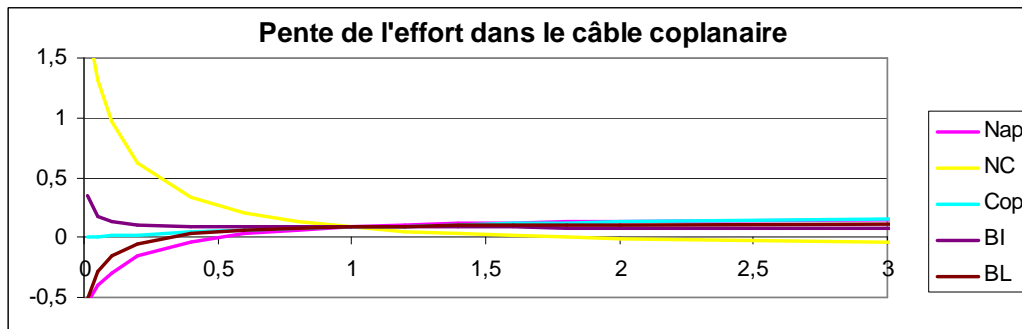
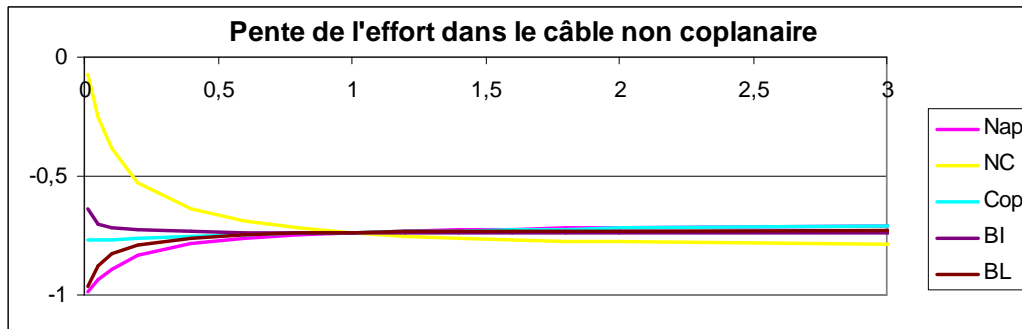
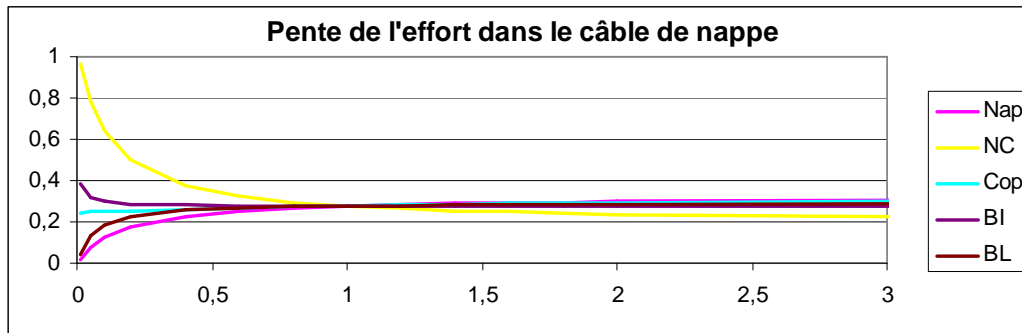
Des caractéristiques mécaniques et sthéniques des éléments, on peut aisément déterminer l'évolution (linéaire au premier ordre) des efforts dans les éléments sous l'action du chargement.

Notons que les pentes des efforts développés dans les éléments (calculées à partir des déplacements issus du chargement aux nœuds de nappes sup. et inf.) vérifient systématiquement la figure 1, validant ainsi les calculs menés.

Ainsi, avec les caractéristiques de base de l'anneau considéré, les pentes de ces évolutions sont données par le vecteur suivant :

$$\{p\_Cnap \quad p\_Ccop \quad p\_Cnc \quad p\_BL \quad p\_BI\} = \{0,276 \quad 0,086 \quad -0,738 \quad -0,807 \quad 0,185\}$$

On représente sur les graphes ci-dessous les évolutions de ces pentes avec les rapports  $E/E_0$  des éléments (pris isolément).

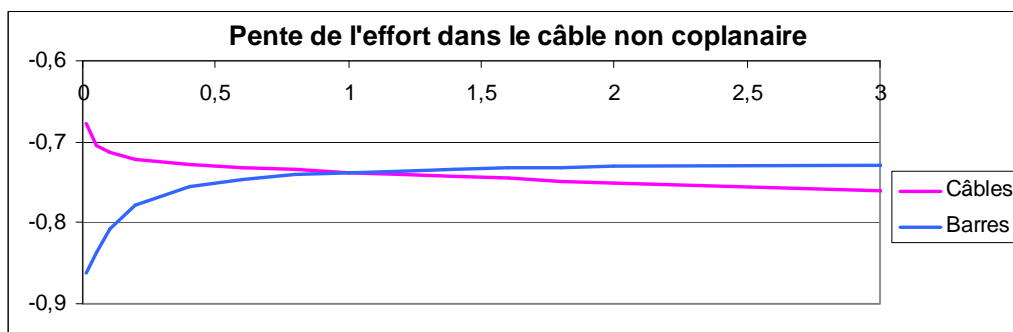
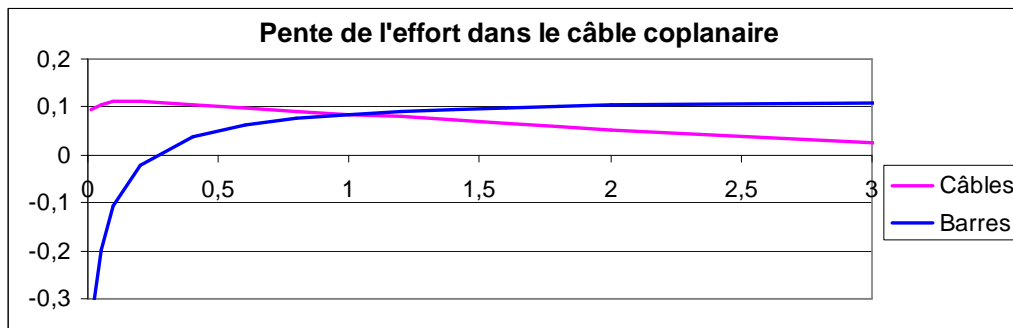
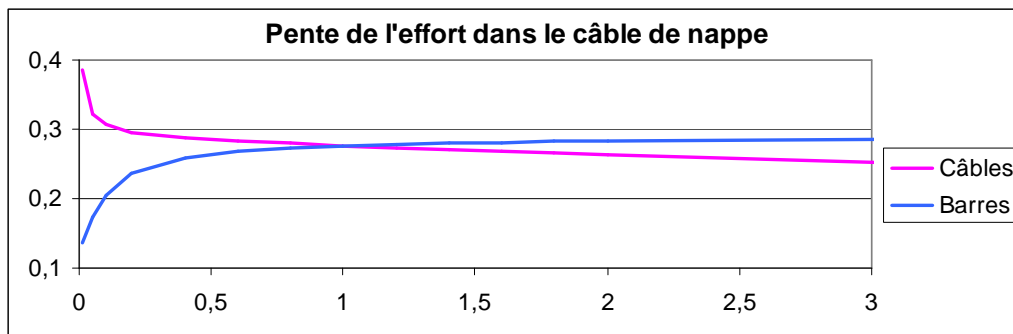


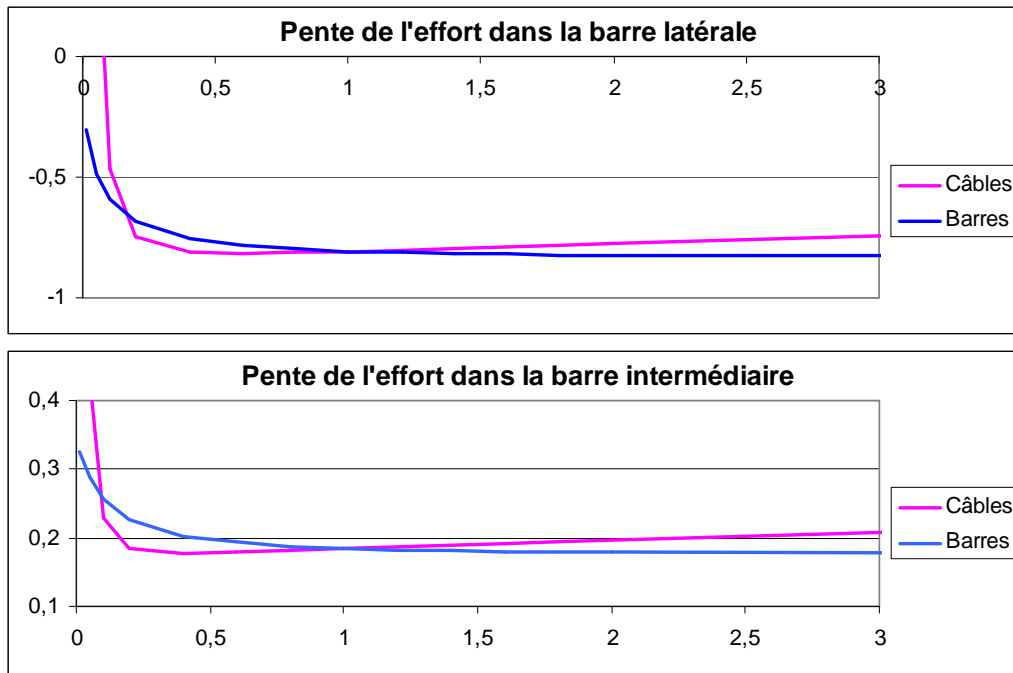
La rigidification d'un élément, barre ou câble, semble ne pas modifier grandement l'évolution des efforts dans les éléments vis-à-vis de l'état de base.

Par contre, l'assouplissement du câble non coplanaire (NC) modifie fortement l'évolution des efforts dans les éléments. En effet une faible rigidité de cet élément se traduira (en compression axiale de l'anneau) par une augmentation de tension des câbles et de compression des barres. La détente des câbles non coplanaires est alors retardée ou même disparaît (ainsi que les mécanismes qui peuvent en découler) ; cependant la compression dans la barre latérale augmente et le risque de flambement aussi (on pourrait en augmenter son module ou inertie).

A noter que l'assouplissement du câble non coplanaire (NC) permet d'obtenir une structure plus souple en compression verticale.

Si on agit simultanément sur l'ensemble des câbles ou des barres, on obtient les évolutions des pentes des efforts dans les éléments en fonction du chargement par les graphes suivants :





La rigidification des tous les câbles permet de réduire les efforts développés dans ces éléments, mais le risque de relâchement des câbles non coplanaires sera plus grand. Un assouplissement des câbles se traduira (sous compression axiale de l’anneau) par une montée en tension élevée ans les câbles de nappe et un risque toujours présent de relâchement du câble non coplanaire. Raidir les barres a peu d’effet, les assouplir réduit les efforts dans les éléments et augmente le risque de relâchement des câbles non coplanaires et de flambement des barres.

NAD présente dans sa thèse des résultats de rigidité verticale pour les données géométriques et mécaniques suivantes :

La rigidité «  $k_h$  » qu’il calcule est définie par le rapport de la variation de l’effort total appliqué sur la nappe supérieure par la variation du déplacement vertical total engendré par cet effort ; la nappe inférieure étant bloquée en z sur un plan horizontal.

$$k_h = \frac{\Delta F_{\text{Tot}}^{\text{Sup}}}{\Delta h}$$

Longueur des barres	200,0 cm
Longueur des câbles de nappes	135,1 cm
Longueur des câbles intermédiaires	102,4 cm
Rayon du cercle circonscrit	114,9 cm
Hauteur du module	147,5 cm

Tableau 3.8. Propriétés géométriques du module

Module d’YOUNG des barres	20 000 MPa
Diamètre interne	35,0 mm
Diamètre externe	40,0 mm

Tableau 3.9. Propriétés mécaniques et géométriques des barre.

Module d’YOUNG des câbles	125 000 MPa
Diamètre	4,0 mm

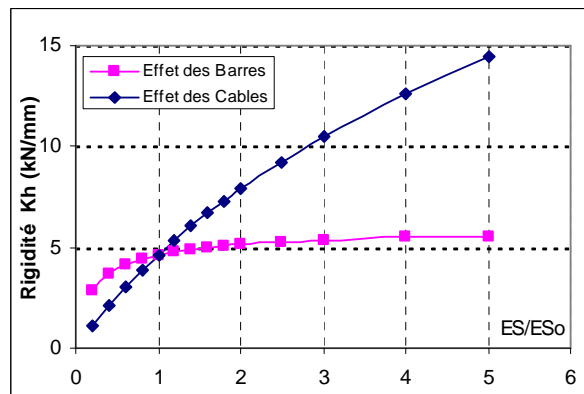
Tableau 3.10. Propriétés mécaniques et géométriques des câbles

$$\text{Or } k_z = \frac{1}{S_{R11}} = \frac{10F}{u_z}$$

$$\text{Et } \Delta F_{\text{Tot}}^{\text{Sup}} = 5F \text{ et } \Delta h = 2u_z$$

$$\text{Donc } k_h = \frac{1}{4} k_v$$

Les graphes suivants (a et b) présentent les rigidités  $k_h$  calculées par NAD avec le code de calcul Ansys (b), et avec la présente méthode analytique simplifiée (a) (pour les mêmes données géométriques et mécaniques)



(a)

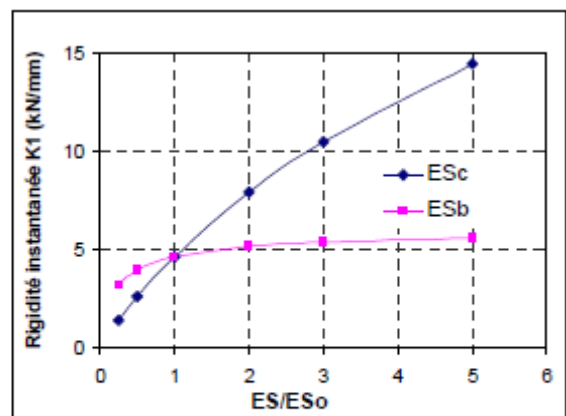


Figure 3.22. Rigidité instantanée  $K_1$  avant le relâchement des câbles non-coplanaires

(b)

La méthode présentée est donc validée par les multiples cas d'étude traités sous Ansys.

ES/ESo	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5
Effet des Barres	2,9	3,7	4,1	4,4	4,6	4,8	4,9	5,0	5,1	5,1	5,3	5,4	5,5	5,6
Effet des Câbles	1,1	2,1	3,0	3,9	4,6	5,4	6,0	6,7	7,3	7,9	9,2	10,5	12,6	14,5