



**HAL**  
open science

## Représentations lisses modulo 1 de $GL(m,D)$

Alberto Minguez, Vincent Sécherre

► **To cite this version:**

Alberto Minguez, Vincent Sécherre. Représentations lisses modulo 1 de  $GL(m,D)$ . 2011. hal-00630047v1

**HAL Id: hal-00630047**

**<https://hal.science/hal-00630047v1>**

Preprint submitted on 7 Oct 2011 (v1), last revised 2 Apr 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# REPRÉSENTATIONS LISSES MODULO $\ell$ DE $GL_m(\mathbb{D})$

*par*

Alberto Mínguez & Vincent Sécherre

---

**Abstract.** — Let  $F$  be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic  $p$ , let  $\mathbb{D}$  be a finite dimensional central division  $F$ -algebra and let  $R$  be an algebraically closed field of characteristic different from  $p$ . We classify all smooth irreducible representations of  $GL_m(\mathbb{D})$  for  $m \geq 1$ , with coefficients in  $R$ , in terms of multisegments, generalizing works by Zelevinski, Tadić and Vignéras. We prove that any irreducible  $R$ -representation of  $GL_m(\mathbb{D})$  has a unique supercuspidal support, and thus get two classifications : one by supercuspidal multisegments, classifying representations with a given supercuspidal support, and one by aperiodic multisegments, classifying representations with a given cuspidal support. These constructions are made in a purely local way, with a substantial use of type theory.

## Table des matières

Introduction.....	3
Remerciements.....	11
1. Préliminaires.....	12
1.1. Notations et conventions.....	12
1.2. Induction et restriction paraboliques.....	13
1.3. Représentations entières.....	15
1.4. Formes intérieures de $GL_n$ sur $F$ .....	16
2. Compléments sur l'induction parabolique.....	17
2.1. Support cuspidal et équivalence inertielle.....	17
2.2. Sous-quotients irréductibles d'une induite parabolique.....	19
2.3. Deux lemmes sur l'irréductibilité d'une induite parabolique.....	21
2.4. Le cas de $GL_m(\mathbb{D})$ .....	22
3. Types simples et semi-simples pour $GL_m(\mathbb{D})$ .....	24

---

Ce travail a bénéficié de financements de l'EPSRC (GR/T21714/01, EP/G001480/1) et de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-08-BLAN-0259-01, ANR-10-BLANC-0114). Le premier auteur est financé en partie par MTM2010-19298 et FEDER.

3.1. Strates simples.....	24
3.2. Caractères simples.....	26
3.3. $\beta$ -extensions.....	26
3.4. Types semi-simples de niveau 0.....	31
3.5. Types simples.....	32
3.6. Paires couvrantes.....	37
3.7. Types semi-simples.....	39
3.8. Réduction des types simples et semi-simples.....	43
4. Représentations cuspidales de $GL_m(\mathbb{D})$ .....	44
4.1. Types simples maximaux.....	45
4.2. Représentations cuspidales de niveau 0.....	46
4.3. Représentations cuspidales de niveau non nul.....	47
4.4. Invariants associés à une représentation cuspidale.....	49
4.5. Réduction d'une représentation cuspidale entière.....	51
4.6. Relèvement d'une représentation cuspidale.....	54
5. Compléments de théorie des types.....	56
5.1. Représentations quasi-projectives.....	56
5.2. Paires couvrantes et induction parabolique.....	60
5.3. Compatibilité du foncteur des $\tau$ -invariants à l'induction parabolique.....	64
5.4. Changement de groupe.....	68
6. Le foncteur $\mathbf{K}$ .....	71
6.1. Définition.....	71
6.2. Conditions d'annulation.....	72
6.3. Compatibilité à l'induction parabolique.....	75
6.4. Unicité du support supercuspidal à inertie près.....	78
6.5. Compatibilité à la restriction parabolique.....	79
6.6. L'homomorphisme $\mathbf{S}$ .....	83
7. La théorie des segments.....	83
7.1. Le caractère $\nu_\rho$ associé à une représentation cuspidale.....	83
7.2. Classification des représentations cuspidales par les supercuspidales.....	85
7.3. Segments.....	89
7.4. Représentations associées à un segment.....	91
7.5. Critère d'irréductibilité pour un produit de segments non liés.....	97
8. Représentations résiduellement non dégénérées de $GL_m(\mathbb{D})$ .....	103
8.1. Représentations résiduellement non dégénérées.....	104
8.2. Conditions d'apparition d'un facteur cuspidal dans une induite.....	107
8.3. Unicité du support supercuspidal.....	109
9. Classification des représentations irréductibles de $GL_m(\mathbb{D})$ .....	110
9.1. Multisegments.....	111
9.2. Multisegments supercuspidaux et apériodiques.....	113
9.3. Classification des représentations résiduellement non dégénérées.....	114
9.4. La partition $\mu_{\mathfrak{m}}$ et la représentation $St_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ .....	116

9.5. La représentation $Z(\mathfrak{m})$ .....	119
9.6. Classification des représentations irréductibles.....	121
9.7. Réduction modulo $\ell$ .....	125
Appendice A. Représentations modulaires de $GL_n$ sur un corps fini.....	127
A.1. Préliminaires.....	127
A.2. Classification de James.....	129
A.3. Réduction modulo $\ell$ .....	131
Appendice B. Représentations des algèbres de Hecke affines.....	133
B.1. L'algèbre de Hecke affine.....	133
B.2. L'algèbre de Hecke-Iwahori.....	135
B.3. Multisegments apériodiques.....	136
B.4. Classification des modules irréductibles.....	137
Références.....	139

## Introduction

**1.** Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle  $p$  et soit  $D$  une algèbre à division centrale de dimension finie sur  $F$  dont le degré réduit est noté  $d$ . Pour tout entier  $m \geq 1$ , on pose  $G_m = GL_m(D)$ , qui est une forme intérieure de  $GL_{md}(F)$ . Les représentations lisses irréductibles complexes de  $GL_{md}(F)$  ont été classées par Zelevinski [56] en termes de paramètres appelés *multisegments*. Dans le cas où  $F$  est de caractéristique nulle, Tadić [51] a donné une classification des représentations lisses irréductibles complexes de  $G_m$  en termes de multisegments. La méthode qu'il utilise repose sur les résultats de [24] (eux-mêmes reposant sur la formule des traces) et en particulier sur la correspondance de Jacquet-Langlands locale et la classification des représentations tempérées en fonction de la série discrète (*ibid.*, théorème B.2.d). Dans [4], Badulescu étend ces deux résultats au cas où  $F$  est de caractéristique  $p$ , et on trouve dans [3] la classification des représentations lisses irréductibles complexes de  $G_m$  sans restriction sur la caractéristique de  $F$ .

Dans cet article, on s'intéresse au problème de la classification des représentations lisses irréductibles de  $G_m$  à coefficients dans un corps  $R$  algébriquement clos de caractéristique différente de  $p$ , appelées aussi représentations (lisses irréductibles) modulaires dans le cas où cette caractéristique est non nulle. L'intérêt de comprendre et classifier les représentations modulaires provient de l'étude des congruences de formes automorphes.

**2.** La théorie des représentations modulaires des groupes réductifs  $p$ -adiques a été développée par Vignéras dans [52, 53]. En particulier, les représentations modulaires du groupe  $GL_n(F)$  y sont étudiées en détail. Comparée à la théorie complexe, la théorie modulaire

présente de grandes similarités, mais également des différences importantes, à la fois dans les résultats et dans les méthodes. D’abord, les représentations modulaires d’un sous-groupe ouvert compact ne sont pas semi-simples en général. Le fait que la caractéristique de  $R$  soit différent de  $p$  implique (et équivaut à) l’existence d’une mesure de Haar sur  $G_m$  à valeurs dans  $R$ , mais la mesure d’un sous-groupe ouvert compact peut être nulle. Ensuite, il faut distinguer dans le cas modulaire entre les deux notions de représentation irréductible *cuspidale* (c’est-à-dire dont tous les modules de Jacquet relativement à un sous-groupe parabolique propre sont nuls) et *supercuspidale* (c’est-à-dire qui n’est sous-quotient d’aucune induite parabolique d’une représentation d’un sous-groupe de Levi propre).

**3.** Si l’on essaie d’étendre aux représentations modulaires du groupe non déployé  $G_m$  les techniques employées par Zelevinski [56], Tadić [51] et Vignéras [52, 53], on est confronté aux problèmes suivants : d’abord, il n’y a pas de version modulaire de la formule des traces et du théorème de Paley-Wiener (qui servent à prouver que l’induite normalisée d’une représentation de carré intégrable d’un sous-groupe de Levi est irréductible et à établir la correspondance de Jacquet-Langlands). Il n’y a pas non plus de version modulaire du théorème du quotient de Langlands, qui permet dans [51] de décrire les représentations irréductibles en fonction des tempérées. Ensuite, les foncteurs de Jacquet ne suffisent pas à déterminer les représentations, c’est-à-dire qu’il y a des représentations irréductibles non isomorphes d’un même groupe  $G_m$  dont tous les modules de Jacquet propres sont isomorphes. La différence entre représentations cuspidales et supercuspidales joue également un rôle important. On a naturellement une notion de support supercuspidal (voir le paragraphe 2.1.2) mais on ignore en général si une représentation irréductible modulaire d’un groupe réductif  $p$ -adique possède un unique support supercuspidal (contrairement à ce qui se passe pour le support cuspidal : voir le théorème 2.1). L’un des principaux résultats de cet article est la preuve de l’unicité du support supercuspidal pour les représentations irréductibles de  $G_m$  (pour plus de détails, voir plus bas dans cette introduction et le théorème 8.17 ; voir aussi [53, V.4] dans le cas où  $D = F$ ).

**Théorème A.** — *Toute représentation irréductible de  $G_m$  possède un unique support supercuspidal.*

À ces problèmes s’ajoutent les suivants, spécifiques au cas où  $D$  est non commutative : les représentations cuspidales de  $G_m$  n’ont pas de modèle de Whittaker et il n’y a pas de théorie des dérivées pour les représentations irréductibles de  $G_m$ , dont l’usage est crucial dans [53] ; la réduction modulo  $\ell$  d’une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de

$G_m$  n'est pas toujours irréductible et il y a des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales non supercuspidales qui ne se relèvent pas en des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations.

4. L'un des principaux outils employés dans cet article est la théorie des types de Bushnell et Kutzko, qui permet de comparer la théorie des représentations lisses de  $G_m$  à celle de certaines algèbres de Hecke affines. Cette comparaison n'est pas aussi parfaite que dans le cas complexe (on n'a plus en général d'équivalences de catégories décrivant les blocs de la catégorie des représentations lisses de  $G_m$  comme dans [18, 49]) mais elle reste efficace dans l'étude des représentations irréductibles, grâce à une propriété de quasi-projectivité introduite par Dipper [25] et développée par Vignéras et Arabia [53, 54].

À ce titre, notre première tâche est de généraliser au cas d'un corps de caractéristique différente de  $p$  la théorie des types de  $GL_n(F)$  et de ses formes intérieures, développée dans le cas où  $R = \mathbb{C}$  par plusieurs auteurs (voir [16, 18, 52, 53, 9, 44, 45, 46, 48, 11, 49]). Deux solutions s'offrent à nous : soit déduire la théorie des types modulaires de sa version complexe (ou plutôt  $\ell$ -adique) par des arguments de réduction modulo  $\ell$ , soit reprendre les arguments de la théorie complexe en expliquant, quand c'est nécessaire, comment les adapter au cas modulaire. Nous avons choisi la seconde solution pour deux raisons : d'abord pour des raisons techniques, parce que le calcul de l'algèbre de Hecke d'un type semi-simple et la construction de paires couvrantes se font difficilement par réduction modulo  $\ell$ . Ensuite pour des raisons d'homogénéité dans les arguments : nous n'avons pas trouvé de moyen d'obtenir la description des représentations irréductibles cuspidales par induction compacte (qui fait l'objet de la section 4) par réduction modulo  $\ell$ , à partir des résultats connus pour les  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales.

5. Il s'agit donc, dans un premier temps, de produire pour chaque  $m \geq 1$  une famille de paires  $(J, \lambda)$ , composées d'un sous-groupe ouvert compact de  $G_m$  et d'une représentation lisse irréductible  $\lambda$  de  $J$  et possédant les propriétés suivantes :

(5.1) pour toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G_m$ , il existe une paire  $(J, \lambda)$ , unique à conjugaison près, telle que la restriction de  $\rho$  à  $J$  admette une sous-représentation isomorphe à  $\lambda$  ;

(5.2) deux représentations irréductibles cuspidales de  $G_m$  contiennent une même paire  $(J, \lambda)$  si et seulement si elles sont inertiuellement équivalentes.

De tels objets sont appelés des types simples maximaux pour  $G_m$ . Ils permettent de décrire les représentations irréductibles cuspidales comme induites compactes de représentations irréductibles de sous-groupes ouverts compacts modulo le centre. Cette description permet une étude relativement aisée de la réduction modulo  $\ell$  des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles

cuspidales entières (effectuée dans les paragraphes 4.5 et 4.6) et fournit les premiers résultats qui diffèrent du cas déployé (voir le théorème 4.15 et la proposition 4.23, que l'on comparera aux théorèmes [52, III.1.1 et III.5.10]).

**Théorème B.** — (1) *Il existe des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières dont la réduction modulo  $\ell$  n'est pas irréductible.*

(2) *Il existe des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales n'admettant pas de relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ .*

On a toutefois le résultat important suivant (voir le théorème 4.24).

**Théorème C.** — *Toute  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale se relève à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ .*

Il s'agit ensuite, étant donné pour chaque entier  $i = 1, \dots, r$  un type simple maximal  $(J_i, \lambda_i)$  de  $G_{m_i}$ , de produire une paire couvrante de la représentation :

$$\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r$$

de  $J_1 \times \cdots \times J_r$ , c'est-à-dire une paire composée d'un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G_m$ , avec  $m = m_1 + \cdots + m_r$ , et d'une représentation lisse irréductible  $\tau$  de  $K$  gouvernant les représentations irréductibles de  $G_m$  dont le support cuspidal est de la forme :

$$\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$$

où chaque  $\rho_i$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G_{m_i}$  contenant  $(J_i, \lambda_i)$ . De telles paires couvrantes sont appelées des types semi-simples pour  $G_m$ .

**6.** La théorie des types permet d'associer à toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G_m$  un caractère non ramifié de ce groupe, noté  $\nu_\rho$  et possédant la propriété suivante : si  $\rho'$  est une autre représentation irréductible cuspidale, alors l'induite normalisée  $\rho \times \rho'$  est réductible si et seulement si  $\rho' \in \{\rho\nu_\rho, \rho\nu_\rho^{-1}\}$ . Ceci est le point de départ de la classification, puisque, une fois défini ce caractère, on peut définir la notion de segment (voir la définition 7.17).

**Définition.** — *Un segment est une suite finie de la forme :*

$$[a, b]_\rho = (\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b),$$

où  $a, b \in \mathbb{Z}$  sont des entiers tels que  $a \leq b$  et  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ .

Grâce aux types semi-simples et à leur propriété de quasi-projectivité prouvée au paragraphe 5.9, il existe une bijection explicite entre les représentations irréductibles dont le support cuspidal est inertiuellement équivalent à  $\rho \otimes \cdots \otimes \rho$  (où  $\rho$  apparaît  $n$  fois) et les modules simples sur une certaine algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$ , où  $q(\rho)$  est une puissance de  $p$  associée à  $\rho$ . Par ce biais, on est en mesure d'associer à un segment  $\Delta = [a, b]_\rho$  de longueur  $n = b - a + 1$  deux représentations irréductibles :

$$Z(\Delta) \text{ et } L(\Delta)$$

de  $G_{mn}$ , respectivement sous-représentation et quotient de l'induite  $\rho\nu_\rho^a \times \rho\nu_\rho^{a+1} \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b$  et correspondant respectivement au caractère trivial et au caractère signe de  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$ . Tant que  $q(\rho)$  n'est pas congru à 1 modulo  $\ell$ , il est possible de définir les représentations  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$  sans passer par la théorie des types et les algèbres de Hecke affines (voir la proposition 7.29), mais cette approche est nécessaire si l'on veut inclure le cas où  $q(\rho)$  est congru à 1 modulo  $\ell$ . Dans le cas où  $R$  est le corps des nombres complexes,  $Z(\Delta)$  est une représentation de Speh généralisée et  $L(\Delta)$  une représentation de Steinberg généralisée, c'est à dire une représentation essentiellement de carré intégrable. Ces représentations jouissent d'un certain nombre de propriétés qui sont étudiées dans la section 7. Elles permettent de prouver le résultat suivant, qui prouve le bien-fondé de notre définition des segments liés (voir la définition 7.19, ainsi que le théorème 7.36).

**Théorème D.** — *Soit un entier  $r \geq 1$  et soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  sont non liés.*
- (2) *L'induite  $Z(\Delta_1) \times \cdots \times Z(\Delta_r)$  est irréductible.*
- (3) *L'induite  $L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_r)$  est irréductible.*

Ce théorème est une version algébrique, et valable pour des représentations modulaires, du résultat selon lequel l'induite parabolique normalisée d'une représentation complexe de carré intégrable est irréductible.

**7.** On introduit ensuite (voir la section 6) un outil technique important, qui va permettre de faire un lien entre représentations de  $G_m$  et représentations des groupes linéaires  $GL$  sur un corps fini de caractéristique  $p$ . Le point de départ est un processus :

$$\rho \mapsto \Theta(\rho)$$

associant à toute représentation irréductible cuspidale de  $G_m$  un objet appelé endo-classe. Il est décrit dans [11] pour les représentations complexes et fonctionne de façon similaire



pour les représentations modulaires. On en trouve dans [15] une interprétation arithmétique dans le cas où  $R$  est le corps des nombres complexes et où  $D = F$  est de caractéristique nulle. Si  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ , on peut lui attacher un entier  $f \geq 1$ , une extension finie  $k$  du corps résiduel de  $D$  et un foncteur  $\mathbf{K}$  de la catégorie des représentations lisses de  $G_m$  dans la catégorie des représentations du groupe fini  $GL_f(k)$  possédant les propriétés suivantes :

(7.1) il est exact ;

(7.2) il envoie représentations admissibles sur représentations de dimension finie et représentations cuspidales sur représentations cuspidales (ou nulles) ;

(7.3) il annule les représentations irréductibles de  $G_m$  – et *uniquement celles-là* – dont le support cuspidal est de la forme  $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$  avec  $\Theta(\rho_i) \neq \Theta(\rho)$  pour au moins un  $i$ .

Par exemple, si  $\rho$  est de niveau 0, on a  $f = m$  et  $k$  est le corps résiduel de  $D$ , et le foncteur  $\mathbf{K}$  attaché à  $\rho$  associe à toute représentation de  $G_m$  la représentation de  $GL_m(k)$  sur l'espace de ses invariants sous le radical pro-unipotent du sous-groupe compact maximal  $GL_m(\mathcal{O}_D)$ .

La propriété de non-annulation (7.3) joue un rôle essentiel. On renvoie au paragraphe 6.2 et notamment à la proposition 6.11 et au lemme 6.7. On notera que la preuve de ce lemme repose sur un résultat profond de théorie des types établi dans [49].

8. Les représentations irréductibles modulaires de  $GL_f(k)$  ont été étudiées et classées par Dipper et James [35, 28], et une théorie des dérivées a été développée par Vignéras dans [52]. On notera en particulier les résultats suivants (voir l'appendice A) :

(8.1) toute représentation irréductible de  $GL_f(k)$  possède un unique support supercuspidal ;

(8.2) on a une classification des représentations irréductibles cuspidales de  $GL_f(k)$  en fonction des représentations irréductibles supercuspidales de  $GL_{f'}(k)$  pour  $f'$  divisant  $f$  ;

(8.3) on a une notion de représentation irréductible non dégénérée de  $GL_f(k)$ , c'est-à-dire admettant un modèle de Whittaker.

Grâce aux foncteurs introduits plus haut, ces trois assertions (8.1) à (8.3) vont permettre de prouver plusieurs résultats importants qui aboutissent à l'unicité du support supercuspidal (voir le théorème A ci-dessus). D'abord (8.1) permet de prouver l'unicité du support supercuspidal à inertie près (voir la proposition 6.16). Ensuite (8.3) permet d'associer à tout  $n \geq 1$  et à toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  une représentation irréductible :

$$\text{St}(\rho, n)$$

définie comme l'unique sous-quotient irréductible de l'induite  $\rho \times \rho\nu_\rho \times \cdots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$  dont l'image par le foncteur  $\mathbf{K}$  attaché à  $\rho$  contienne un certain sous-quotient irréductible non dégénéré. Enfin (8.2) permet de prouver le résultat suivant, qui fournit une classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des représentations supercuspidales, dans le cas où le corps  $R$  est de caractéristique non nulle  $\ell$  (voir le théorème 7.14).

**Théorème E.** — (1) *Étant donnée une représentation irréductible cuspidale  $\rho$ , il y a un entier  $m(\rho)$  tel que  $\text{St}(\rho, n)$  soit cuspidale si et seulement si  $n = 1$  ou  $n = m(\rho)\ell^r$  avec  $r \geq 0$ .*

(2) *Pour toute représentation irréductible cuspidale non supercuspidale  $\pi$ , il existe une représentation irréductible supercuspidale  $\rho$  et un unique  $r \geq 0$  tels que  $\pi$  soit isomorphe à  $\text{St}_r(\rho) = \text{St}(\rho, m(\rho)\ell^r)$ .*

(3) *Si  $\rho'$  est une représentation irréductible supercuspidale telle que les représentations  $\text{St}_r(\rho')$  et  $\text{St}_r(\rho)$  soient isomorphes, alors il existe  $i \in \mathbb{Z}$  tel que  $\rho'$  soit isomorphe à  $\rho\nu_\rho^i$ .*

La dernière étape de la preuve de l'unicité du support supercuspidal est la proposition cruciale 8.11, qui contrôle l'apparition de facteurs cuspidaux dans des induites paraboliques. On est alors en mesure de prouver le théorème 8.17.

**9.** On arrive maintenant au problème de la classification des représentations irréductibles de  $G_m$ . On a une notion naturelle d'équivalence entre segments (voir la définition 7.18), ce qui permet d'introduire la définition suivante.

**Définition.** — *Un multisegment est une application  $\mathbf{m}$  à support fini de l'ensemble des classes d'équivalence de segments à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , qu'on représente sous la forme d'une somme finie :*

$$\mathbf{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r = [a_1, b_1]_{\rho_1} + \cdots + [a_r, b_r]_{\rho_r}$$

où  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  sont des segments.

Si  $\rho_i$  est une représentation irréductible cuspidale irréductible de  $G_{m_i}$ , alors la somme des  $(b_i - a_i + 1)m_i$  est appelée le *degré* de  $\mathbf{m}$  et la somme formelle des classe d'équivalence des  $\rho_i\nu_{\rho_i}^j$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $j \in \{a_i, \dots, b_i\}$  est appelée le *support* de  $\mathbf{m}$ .

Un multisegment est dit *supercuspidal* si toutes les représentations  $\rho_1, \dots, \rho_r$  sont supercuspidales et *apériodique* si, pour tout entier  $n \geq 0$  et toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$ , il existe  $a \in \mathbb{Z}$  tel que la classe d'équivalence du segment  $[a, a+n]_\rho$  n'apparaisse pas dans  $\mathbf{m}$ . Ces deux sortes de multisegments vont permettre une classification des représentations irréductibles en fonction de leurs supports supercuspidal et cuspidal respectivement. Ces deux sortes de multisegments se correspondent bijectivement : grâce à

la classification des représentations cuspidales en fonction des supercuspidales, on définit une application :

$$\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}_{\text{sc}}$$

associant à un multisegment un multisegment supercuspidal. On vérifie alors (lemme 9.8) qu'il existe un unique multisegment a périodique  $\mathfrak{a}$  tel que  $\mathfrak{a}_{\text{sc}} = \mathfrak{m}_{\text{sc}}$  ; on le note  $\mathfrak{m}_{\text{ap}}$ .

**10.** La définition de  $\text{St}(\rho, n)$  et la preuve de la proposition 8.11 reposent toutes deux sur une idée commune donnant lieu à la notion de représentation irréductible *résiduellement non dégénérée* (voir le paragraphe 8.1). Dans le cas où  $D$  est égale à  $F$ , cette notion coïncide avec celle de représentation irréductible non dégénérée de  $\text{GL}_n(F)$  définie par Vignéras (voir le corollaire 9.12). Grossièrement, il s'agit, par l'intermédiaire des foncteurs  $\mathbf{K}$  introduits au paragraphe 7 ci-dessus, de transporter aux représentations de  $G_m$  la notion de représentation non dégénérée qui existe pour les représentations de  $\text{GL}$  sur un corps fini de caractéristique  $p$ . Cette idée culmine dans la définition suivante : à tout multisegment  $\mathfrak{m}$  on fait correspondre un sous-groupe de Levi standard  $M_{\mathfrak{m}}$  de  $G$  (dont les tailles des blocs sont données par les degrés des segments apparaissant dans  $\mathfrak{m}$ ) puis une représentation irréductible :

$$\Sigma(\mathfrak{m})$$

de  $M_{\mathfrak{m}}$  (notée  $\text{St}_{\overline{P}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$  au paragraphe 9.4) définie comme l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré du module de Jacquet de  $Z(\Delta_1) \times \cdots \times Z(\Delta_r)$  relativement au sous-groupe parabolique standard  $P_{\mathfrak{m}}$  de facteur de Levi  $M_{\mathfrak{m}}$ . Cette induite possède un unique sous-quotient irréductible noté :

$$Z(\mathfrak{m})$$

dont le module de Jacquet relativement à  $P_{\mathfrak{m}}$  possède un sous-quotient isomorphe à  $\Sigma(\mathfrak{m})$ . L'intérêt d'introduire  $\Sigma(\mathfrak{m})$  est qu'il n'est pas difficile de montrer que la représentation  $\Sigma(\mathfrak{m})$  ne dépend que de  $\mathfrak{m}_{\text{sc}}$  et que l'application  $\mathfrak{m} \mapsto \Sigma(\mathfrak{m})$  est injective sur l'ensemble des multisegments supercuspidaux (voir le paragraphe 9.4.2). Il s'ensuit que la restriction de l'application  $\mathfrak{m} \mapsto Z(\mathfrak{m})$  à l'ensemble des multisegments supercuspidaux, notée  $Z_{\text{sc}}$ , est injective (voir le théorème 9.27).

**11.** La preuve de la surjectivité de  $Z_{\text{sc}}$  et le calcul des supports cuspidal et supercuspidal de  $Z(\mathfrak{m})$  pour un multisegment  $\mathfrak{m}$  quelconque sont plus délicats. Nous traitons tous ces problèmes en même temps dans un raisonnement par récurrence sur le degré de  $\mathfrak{m}$  (voir les propositions 9.29 et 9.30). C'est là que nous utilisons de façon cruciale un argument de comptage (voir le corollaire B.12) reposant sur la classification des modules irréductibles sur une algèbre de Hecke affine en une racine de l'unité (Ariki [1, 2] et Chriss-Ginzburg

[19]). De façon précise, cet argument (développé dans l'appendice B) permet de conclure que l'application injective (9.17) est bijective. Nous obtenons finalement le théorème de classification suivant (voir le théorème 9.32).

**Théorème F.** — (1) *L'application  $\mathfrak{m} \mapsto Z(\mathfrak{m})$  induit une surjection de l'ensemble des multisegments de degré  $m$  sur l'ensemble des représentations irréductibles de  $G_m$ .*

(2) *Étant donnés deux multisegments  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ , les représentations  $Z(\mathfrak{m}), Z(\mathfrak{m}')$  sont isomorphes si et seulement si  $\mathfrak{m}_{\text{sc}} = \mathfrak{m}'_{\text{sc}}$ .*

(3) *Pour tout multisegment  $\mathfrak{m}$ , le support cuspidal de  $Z(\mathfrak{m})$  est égal au support de  $\mathfrak{m}_{\text{ap}}$  et son support supercuspidal est égal au support de  $\mathfrak{m}_{\text{sc}}$ .*

**12.** Finalement, dans le paragraphe 9.7, nous étudions le problème de la réduction modulo  $\ell$  des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles entières de  $G_m$ . Nous prouvons en particulier (voir le théorème 9.34) que l'homomorphisme de réduction modulo  $\ell$  est surjectif, c'est-à-dire que toute  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible de  $G_m$  est la réduction modulo  $\ell$  d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation virtuelle entière de longueur finie.

**13.** Nous insistons sur le fait que ce travail fournit une classification des représentations irréductibles de  $G_m$  ne reposant pas sur les résultats antérieurs de Zelevinski, Tadić et Vignéras. Par contre, il s'appuie sur la classifications des représentations irréductibles modulaires de  $GL_n$  sur un corps fini de caractéristique  $p$  (Dipper-James) et sur la classification des modules irréductibles sur une algèbre de Hecke affine en une racine de l'unité (Ariki, Chriss-Ginzburg). Ces classifications sont présentées dans les appendices A et B.

### Remerciements

Nous remercions Jean-François Dat, Guy Henniart, Vanessa Miemietz, Shaun Stevens et Marie-France Vignéras pour de nombreuses discussions à propos de ce travail.

Une partie de ce travail a été réalisée lors du séjour des auteurs à l'Erwin Schrödinger Institute en janvier-février 2009 et du second auteur à l'Institut Henri Poincaré de janvier à mars 2010 ; que ces deux institutions soient remerciées pour leur accueil et leur soutien financier. Une autre partie en a été réalisée lors de plusieurs séjours à l'University of East Anglia : nous remercions celle-ci pour son accueil et Shaun Stevens pour ses nombreuses invitations.

Alberto Mínguez remercie le Centre National de la Recherche Scientifique pour les six mois de délégation dont il a bénéficié en 2011.

Vincent Sécherre remercie l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille 2 et l'Institut de Mathématiques de Luminy, où il était en poste durant la majeure partie de ce travail.

## 1. Préliminaires

### 1.1. Notations et conventions

**1.1.1.** On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers relatifs et  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes. Étant donné un nombre premier  $\ell$ , on note  $\mathbb{Q}_\ell$  le corps des nombres  $\ell$ -adiques,  $\mathbb{Z}_\ell$  son anneau d'entiers et  $\mathbb{F}_\ell$  le corps résiduel de  $\mathbb{Z}_\ell$ .

On fixe une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  de  $\mathbb{Q}_\ell$ . On note  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$  son anneau d'entiers et  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  le corps résiduel de  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ .

**1.1.2.** Étant donné un ensemble  $X$  quelconque, on note  $\mathbb{Z}(X)$  le groupe abélien libre de base  $X$  constitué des applications de  $X$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini et  $\mathbb{N}(X)$  le sous-monoïde constitué des applications à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Étant donnés  $f, g \in \mathbb{Z}(X)$ , on note  $f \leq g$  si  $g - f \in \mathbb{N}(X)$ , ce qui définit une relation d'ordre partiel sur  $\mathbb{Z}(X)$ .

**1.1.3.** Dans tout cet article,  $F$  est un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle notée  $p$ , et  $R$  est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de  $p$ .

Toutes les  $F$ -algèbres sont supposées unitaires et de dimension finie. Par  $F$ -algèbre à division on entend  $F$ -algèbre centrale dont l'anneau sous-jacent est un corps, pas nécessairement commutatif. Si  $K$  est une extension finie de  $F$ , ou plus généralement une algèbre à division sur une extension finie de  $F$ , on note  $\mathcal{O}_K$  son anneau d'entiers,  $\mathfrak{p}_K$  son idéal maximal,  $k_K$  son corps résiduel et  $q_K$  le cardinal de  $k_K$ . En particulier, on pose :

$$(1.1) \quad q = q_F.$$

une fois pour toutes.

**1.1.4.** Soit  $G$  un groupe topologique localement profini. Par  $R$ -représentation lisse de  $G$  on entend un couple  $(\pi, V)$  formé d'un  $R$ -espace vectoriel  $V$  et d'un homomorphisme de groupes  $\pi$  de  $G$  dans  $\text{Aut}_R(V)$  tel que le stabilisateur dans  $G$  de tout vecteur de  $V$  soit ouvert. Dans cet article, toutes les représentations sont supposées lisses.

Une représentation de  $G$  sur un  $R$ -espace vectoriel  $V$  est *admissible* si, pour tout sous-groupe ouvert  $H$  de  $G$ , l'espace  $V^H$  de ses vecteurs  $H$ -invariants est de dimension finie.

Un  $R$ -caractère de  $G$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $R^\times$  de noyau ouvert.

Si  $\pi$  est une  $R$ -représentation de  $G$ , on désigne par  $\pi^\vee$  sa contragrédiente. Si en outre  $\chi$  est un  $R$ -caractère de  $G$ , on note  $\chi\pi$  ou  $\pi\chi$  la représentation tordue  $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$ .

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que R-caractère et R-représentation.

**1.1.5.** Soient  $H$  un sous-groupe ouvert de  $G$  et  $(\sigma, V)$  une R-représentation de  $H$ . On note  $\text{ind}_H^G(\sigma)$  l'induite compacte de  $\sigma$  à  $G$ , constituée des fonctions  $f : G \rightarrow V$  localement constantes à support compact modulo  $H$  telles que  $f(hg) = \sigma(h)f(g)$  pour  $h \in H, g \in G$ .

On note  $\mathcal{H}(G, \sigma)$  la R-*algèbre de Hecke* de  $G$  relativement à  $\sigma$ , c'est-à-dire l'algèbre des G-endomorphismes de  $\text{ind}_H^G(\sigma)$ . Par réciprocity de Frobenius et par décomposition de Mackey, elle s'identifie à l'algèbre de convolution des fonctions  $f : G \rightarrow \text{End}_R(V)$  telles que  $f(hgh') = \sigma(h) \circ f(g) \circ \sigma(h')$  pour  $h, h' \in H$  et  $g \in G$  et dont le support est une union finie de H-doubles classes.

Si  $\sigma$  est le caractère trivial du groupe  $H$ , on note simplement  $\mathcal{H}(G, H)$  l'algèbre de Hecke qui lui correspond.

## 1.2. Induction et restriction paraboliques

On suppose dans tout ce paragraphe que  $G$  est le groupe des points sur  $F$  d'un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . On renvoie à [52, II.2] pour plus de précisions.

**1.2.1.** On désigne par  $\mathcal{R}_R(G)$  la catégorie abélienne des R-représentations (lisses) de  $G$ , par  $\text{Irr}_R(G)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de ses R-représentations irréductibles et par  $\mathcal{G}_R(G)$  le groupe de Grothendieck de ses R-représentations de longueur finie. Ce dernier est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}_R(G)$ . Toute R-représentation irréductible de  $G$  est admissible et admet un caractère central d'après [52, II.2.8].

Si  $\sigma$  est une R-représentation de longueur finie de  $G$ , on note  $[\sigma]$  son image dans  $\mathcal{G}_R(G)$ . En particulier, si  $\sigma$  est irréductible,  $[\sigma]$  désigne sa classe d'isomorphisme. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'identifier une R-représentation avec sa classe d'isomorphisme.

Avec les notations du paragraphe 1.1.2, on a  $\mathcal{G}_R(G) = \mathbb{Z}(\text{Irr}_R(G))$ , qui est un  $\mathbb{Z}$ -module muni d'une relation d'ordre, tandis que  $\mathbb{N}(\text{Irr}_R(G))$  est l'ensemble des  $[\sigma]$  où  $\sigma$  décrit les R-représentations de longueur finie de  $G$ .

**1.2.2.** On fixe une fois pour toutes une racine carrée de  $q$  dans  $R$ . Si  $M$  est un sous-groupe de Levi de  $G$  et  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  dont  $M$  est un facteur de Levi, ce choix définit un caractère non ramifié :

$$(1.2) \quad \delta_{P,R}^{1/2} : M \rightarrow R^\times$$

dont le carré est le module de  $P$  à valeurs dans  $R$ . On note  $r_P^G$  le foncteur de restriction parabolique normalisé (relativement à (1.2)) de  $\mathcal{R}_R(G)$  dans  $\mathcal{R}_R(M)$  et  $i_P^G$  son adjoint à

droite, c'est-à-dire le foncteur d'induction parabolique normalisé lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts, et préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie.

**Remarque 1.1.** — Lorsque  $p$  est impair, remplacer la racine carrée choisie plus haut par la racine carrée opposée a pour effet de tordre les foncteurs  $\mathbf{i}_P^G$  et  $\mathbf{r}_P^G$  par un caractère non ramifié d'ordre 2.

On sait dans certains cas que  $\mathbf{r}_P^G$  possède aussi un adjoint à gauche, qui est le foncteur d'induction parabolique  $\mathbf{i}_{P^-}^G$  correspondant au sous-groupe parabolique  $P^-$  opposé à  $P$  relativement à  $M$ . Cette propriété est connue sous le nom de seconde adjonction : on a un isomorphisme de  $R$ -espaces vectoriels :

$$(1.3) \quad \mathrm{Hom}_G(\mathbf{i}_{P^-}^G(\sigma), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_G(\sigma, \mathbf{r}_P^G(\pi))$$

pour toutes  $R$ -représentations  $\pi$  de  $G$  et  $\sigma$  de  $M$ . Ceci est dû à Bernstein (voir Bushnell [12]) si  $R$  est le corps des nombres complexes et à Dat [22] pour certains groupes classiques. Pour les formes intérieures de  $GL_n(\mathbb{F})$ , nous n'utiliserons la seconde adjonction que dans le cas admissible [52, II.3.8].

**1.2.3.** On fixe un tore déployé maximal  $A$  de  $G$  et un sous-groupe parabolique minimal  $P$  de  $G$  contenant  $A$ . On note respectivement  $W = W(G, A)$  et  $\Phi = \Phi(G, A)$  le groupe de Weyl et l'ensemble des racines réduites de  $G$  relativement à  $A$ . Le choix de  $P$  détermine une base  $S$  de  $\Phi$  ainsi qu'un ensemble  $\Phi^+$  de racine positives dans  $\Phi$ . Pour toute partie  $I \subseteq S$ , on note  $P_I$  le sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $P$  déterminé par  $I$  et  $M_I$  le sous-groupe de Levi contenant  $A$  lui correspondant. Pour  $I, J \subseteq S$ , on pose :

$$(1.4) \quad \mathcal{D}(I, J) = \mathcal{D}(M_I, M_J) = \{w \in W \mid w^{-1}(I) \subseteq \Phi^+ \text{ et } w(J) \subseteq \Phi^+\}.$$

Étant donnée une  $R$ -représentation  $\sigma$  de  $M_J$ , on a le lemme géométrique de Bernstein et Zelevinski :

$$(1.5) \quad [\mathbf{r}_{P_I}^G(\mathbf{i}_{P_J}^G(\sigma))] = \sum_{w \in \mathcal{D}(I, J)} [\mathbf{i}_{M_I \cap P_J^{w^{-1}}}^{M_I}(w \cdot \mathbf{r}_{M_J \cap P_I^w}^{M_J}(\sigma))],$$

qui est une égalité dans le groupe de Grothendieck  $\mathcal{G}_R(M_I)$ , et où  $w \cdot$  désigne la conjugaison par  $w$ . On renvoie à [21, 2.8] pour plus de précisions.

**1.2.4.** Une  $R$ -représentation irréductible de  $G$  est dite *cuspidale* si son image par  $\mathbf{r}_P^G$  est nulle pour tout sous-groupe parabolique strict  $P$  de  $G$ , c'est-à-dire si elle n'est isomorphe à aucun quotient (ou, de façon équivalente, à aucune sous-représentation) d'une induite parabolique stricte. Elle est dite *supercuspidale* si elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une induite parabolique stricte.



On note  $\mathcal{C}_R(G)$  et  $\mathcal{S}_R(G)$  les sous-ensembles de  $\text{Irr}_R(G)$  formés respectivement des classes d'isomorphisme de  $R$ -représentations irréductibles cuspidales et supercuspidales de  $G$ . On donne dans le théorème 7.14 une classification de  $\mathcal{C}_R(G)$  en fonction de  $\mathcal{S}_R(G)$ .

### 1.3. Représentations entières

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . On suppose, à l'exception du paragraphe 1.3.1 où  $G$  est un groupe localement profini quelconque, que  $G$  est le groupe des points sur  $F$  d'un groupe réductif connexe défini sur  $F$ .

**1.3.1.** Soit  $G$  un groupe topologique localement profini. Une représentation de  $G$  sur un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel  $V$  est dite *entière* si elle est admissible et si elle admet une *structure entière*, c'est-à-dire un sous- $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ -module de  $V$  stable par  $G$  et engendré par une base de  $V$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  (voir [52, 55]).

**1.3.2.** On suppose que  $G$  est le groupe des points sur  $F$  d'un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . Si  $\tilde{\pi}$  est une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible entière de  $G$ , elle possède une structure entière  $\mathfrak{v}$  de type fini comme  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G$ -module. La représentation de  $G$  sur  $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est de longueur finie et sa semi-simplifiée ne dépend pas du choix de  $\mathfrak{v}$  d'après [52, II.5.11]. On note  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi})$  cette semi-simplifiée, qu'on appelle la *réduction* de  $\tilde{\pi}$  et qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme  $[\tilde{\pi}]$ . Par linéarité, on en déduit un homomorphisme :

$$(1.6) \quad \mathbf{r}_\ell : \mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)^{\text{ent}} \rightarrow \mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G),$$

où  $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)^{\text{ent}}$  désigne le sous-groupe de  $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$  engendré par l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles entières de  $G$ .

**Remarque 1.2.** — Si  $G$  est un groupe profini, toute  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation de dimension finie de  $G$  est entière (Serre [50], théorème 32), et on a un homomorphisme de réduction  $\mathbf{r}_\ell$  analogue à (1.6).

**1.3.3.** Soient  $H$  un sous-groupe ouvert de  $G$  et  $\tilde{\sigma}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière de  $H$ . Si  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $\tilde{\sigma}$ , alors le sous-module  $\text{ind}_H^G(\mathfrak{v})$  des fonctions à valeurs dans  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $\text{ind}_H^G(\tilde{\sigma})$  et  $\text{ind}_H^G(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est isomorphe à  $\text{ind}_H^G(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ . Si en outre  $\text{ind}_H^G(\tilde{\sigma})$  est de longueur finie, ceci implique que  $\mathbf{r}_\ell([\text{ind}_H^G(\tilde{\sigma})]) = [\text{ind}_H^G(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}))]$ .

**1.3.4.** On suppose que les choix de racines carrées de  $q$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  et dans  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  (§1.2.2) sont compatibles, c'est-à-dire que la seconde est la réduction modulo  $\ell$  de la première. Si  $\tilde{\sigma}$  est une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière de  $M$ , et si  $\mathfrak{v}$  en est une structure entière, le sous-espace  $\mathfrak{i}(\mathfrak{v})$  des fonctions à valeurs dans  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $\mathfrak{i}_p^G(\tilde{\sigma})$  et la représentation



$\mathbf{i}(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est isomorphe à  $\mathbf{i}_P^G(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ . Si en outre  $\tilde{\sigma}$  est de longueur finie, ceci implique que  $\mathbf{r}_\ell([\mathbf{i}_P^G(\tilde{\sigma})]) = [\mathbf{i}_P^G(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}))]$ .

**1.3.5.** Le cas du foncteur  $\mathbf{r}_P^G$  est un peu plus délicat. *On suppose dans ce paragraphe que  $G$  est un groupe symplectique, orthogonal, unitaire ou une forme intérieure d'un groupe linéaire général  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ ,  $n \geq 1$ . Soit  $\tilde{\sigma}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière de longueur finie de  $G$  et soit  $\mathfrak{v}$  une structure entière de  $\tilde{\sigma}$ . D'après [21, Proposition 6.7], l'image de  $\mathfrak{v}$  par la projection de  $\tilde{\sigma}$  sur  $\mathbf{r}_P^G(\tilde{\sigma})$  est une structure entière de  $\mathbf{r}_P^G(\tilde{\sigma})$  et  $\mathbf{r}_\ell([\mathbf{r}_P^G(\tilde{\sigma})]) = [\mathbf{r}_P^G(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}))]$ .*

#### 1.4. Formes intérieures de $\mathrm{GL}_n$ sur $F$

Dans tout cet article, on fixe une  $F$ -algèbre à division  $D$  de dimension finie, et de degré résiduel noté  $d$ . Pour tout entier  $m \geq 1$ , on désigne par  $\mathcal{M}_m(D)$  la  $F$ -algèbre des matrices de taille  $m \times m$  à coefficients dans  $D$  et par  $G_m = \mathrm{GL}_m(D)$  le groupe de ses éléments inversibles. Il est commode de convenir que  $G_0$  est le groupe trivial.

**1.4.1.** Soit  $N_m$  la norme réduite de  $\mathcal{M}_m(D)$  sur  $F$ . On note  $|\cdot|_F$  la valeur absolue normalisée de  $F$ , c'est-à-dire celle donnant à une uniformisante de  $F$  la valeur  $q^{-1}$ . Puisque l'image de  $q$  dans  $R$  est inversible, elle définit un  $R$ -caractère de  $F^\times$  noté  $|\cdot|_{F,R}$ . L'application  $g \mapsto |N_m(g)|_{F,R}$  est un  $R$ -caractère de  $G_m$ , qu'on notera  $\nu_{m,R}$  ou simplement  $\nu$  si le contexte le permet.

**1.4.2.** On désigne par  $\mathrm{Irr}_R$  la réunion disjointe des ensembles  $\mathrm{Irr}_R(G_m)$  pour  $m \geq 0$ , et par  $\mathcal{G}_R$  la somme directe des  $\mathcal{G}_R(G_m)$  pour  $m \geq 0$ , qui est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\mathrm{Irr}_R$ . Si  $\pi$  est une  $R$ -représentation de longueur finie de  $G_m$ , on pose  $\deg(\pi) = m$ , qu'on appelle le *degré* de  $\pi$ , et l'application  $\deg$  fait de  $\mathcal{G}_R$  un  $\mathbb{Z}$ -module gradué.

**1.4.3.** Si  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  est une famille d'entiers  $\geq 0$  de somme  $m$ , il lui correspond le sous-groupe de Levi standard  $M_\alpha$  de  $G_m$  constitué des matrices diagonales par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, que l'on identifie naturellement à  $G_{m_1} \times \dots \times G_{m_r}$ . On note  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique de  $G_m$  de facteur de Levi  $M_\alpha$  formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, et on note  $U_\alpha$  son radical unipotent. Les foncteurs d'induction et de restriction paraboliques normalisés  $\mathbf{i}_{P_\alpha}^{G_m}$  et  $\mathbf{r}_{P_\alpha}^{G_m}$  sont simplement notés respectivement  $\mathbf{i}_\alpha$  et  $\mathbf{r}_\alpha$ . Si, pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on a une  $R$ -représentation  $\pi_i$  de  $G_{m_i}$ , on note :

$$(1.7) \quad \pi_1 \times \dots \times \pi_r = \mathbf{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r).$$

Si les  $\pi_i$  sont de longueur finie, la quantité  $[\pi_1 \times \cdots \times \pi_r]$  ne dépend que de  $[\pi_1], \dots, [\pi_r]$ . L'application :

$$(1.8) \quad ([\pi_1], \dots, [\pi_r]) \mapsto [\pi_1 \times \cdots \times \pi_r]$$

induit par linéarité une application linéaire de  $\mathcal{G}_R(G_{m_1}) \times \cdots \times \mathcal{G}_R(G_{m_r})$  dans  $\mathcal{G}_R(G_m)$ . Ceci munit  $\mathcal{G}_R$  d'une structure de  $\mathbb{Z}$ -algèbre associative graduée, dont on verra à la proposition 2.6 qu'elle est commutative.

Les foncteurs de restriction parabolique définissent une comultiplication faisant de  $\mathcal{G}_R$  une  $\mathbb{Z}$ -bigèbre. On utilisera cette structure au paragraphe 6.6.

On note également  $r_{\alpha}^-$  le foncteur de restriction parabolique relativement au sous-groupe parabolique opposé à  $P_{\alpha}$  relativement à  $M_{\alpha}$ , c'est-à-dire formé des matrices triangulaires inférieures par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement.

## 2. Compléments sur l'induction parabolique

Dans toute cette section, on suppose que  $G$  est le groupe des points sur  $F$  d'un groupe réductif connexe défini sur  $F$ . Au paragraphe 2.2, on suppose que  $G$  admet des sous-groupes discrets cocompacts. Au paragraphe 2.4, on suppose que  $G = G_m$  avec  $m \geq 1$ .

### 2.1. Support cuspidal et équivalence inertielle

**2.1.1.** Une *paire cuspidale* de  $G$  est un couple  $(M, \varrho)$  formé d'un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$  et d'une représentation irréductible cuspidale  $\varrho$  de  $M$ . Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G$ , on note :

$$\text{cusp}(\pi)$$

son support cuspidal, c'est-à-dire la classe de  $G$ -conjugaison d'une paire cuspidale  $(M, \varrho)$  de  $G$  telle que  $\pi$  soit isomorphe à une sous-représentation (ou de façon équivalente, un quotient) de  $i_P^G(\varrho)$  pour au moins un sous-groupe parabolique  $P$  de facteur de Levi  $M$ . Pour la commodité du lecteur, on fournit ici une preuve de l'unicité du support cuspidal (comparer avec [52, II.2.20]).

**Théorème 2.1.** — *Soit  $\pi$  une  $R$ -représentation irréductible de  $G$ . Il existe une paire cuspidale  $(M, \varrho)$  de  $G$ , unique à  $G$ -conjugaison près, telle que  $\pi$  soit une sous-représentation de  $i_P^G(\varrho)$  pour au moins un sous-groupe parabolique  $P$  de facteur de Levi  $M$ .*

*Démonstration.* — Soient  $(M, \varrho)$  et  $(M', \varrho')$  deux paires cuspidales de  $G$  et  $P$  et  $P'$  deux sous-groupes paraboliques de  $G$  de facteurs de Levi respectifs  $M$  et  $M'$  tels que  $\pi$  soit

isomorphe à une sous-représentation de  $\mathbf{i}_P^G(\varrho)$  et de  $\mathbf{i}_{P'}^G(\varrho')$ . Par adjonction,  $\varrho$  est un quotient de  $\mathbf{r}_P^G(\pi)$  et, par exactitude du foncteur de Jacquet,  $\varrho$  est un facteur de composition irréductible de  $\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\varrho'))$ . On déduit du lemme géométrique (1.5) que  $M'$  est conjugué à un sous-groupe de  $M$ . De même, on montre que  $M$  est conjugué à un sous-groupe de  $M'$  et donc que  $M$  et  $M'$  appartiennent à la même classe de  $G$ -conjugaison, et on peut les supposer tous les deux standards (relativement au choix d'un tore déployé maximal de  $G$ ). Dans ce cas, d'après le lemme géométrique à nouveau,  $\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\varrho'))$  est filtrée par les  $w \cdot \varrho'$  où  $w$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{D}(M, M')$ . La représentation  $\varrho$  étant un sous-quotient irréductible de  $\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\varrho'))$ , elle est donc isomorphe à un  $w \cdot \varrho'$ , ce qui montre que  $(M, \varrho)$  et  $(M', \varrho')$  sont deux paires cuspidales conjuguées.  $\square$

On a ainsi une application :

$$(2.1) \quad \text{cusp} : \text{Irr}_R(G) \rightarrow \{\text{classes de } G\text{-conjugaison de paires cuspidales de } G\}$$

surjective et à fibres finies.

**2.1.2.** Une *paire supercuspidale* de  $G$  est un couple  $(M, \varrho)$  constitué d'un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$  et d'une représentation irréductible supercuspidale  $\varrho$  de  $M$ . Si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G$ , on conjecture [52, II.2.6] qu'il existe une unique classe de  $G$ -conjugaison de paire supercuspidale  $(M, \varrho)$  de  $G$  telle que  $\pi$  soit un sous-quotient de  $\mathbf{i}_P^G(\varrho)$  pour un sous-groupe parabolique  $P$  de facteur de Levi  $M$ . Pour le cas du groupe  $G = \text{GL}_n(\mathbb{F})$ , on renvoie à [53, V.4].

Dans la section 8, nous prouvons cette conjecture lorsque  $G$  est une forme intérieure de  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$  (voir le théorème 8.17).

**2.1.3.** Soit  $(M, \varrho)$  une paire cuspidale de  $G$ . Une paire cuspidale  $(M', \varrho')$  de  $G$  est dite *inertiellement équivalente* à  $(M, \varrho)$  s'il existe un caractère non ramifié  $\chi$  de  $M$  tel que  $(M', \varrho')$  soit conjuguée à  $(M, \varrho\chi)$  sous  $G$ . On note  $[M, \varrho]_G$  la classe d'inertie (c'est-à-dire la classe d'équivalence inertielle) de  $(M, \varrho)$ . Si  $\Omega$  est la classe d'inertie d'une paire cuspidale de  $G$ , on note :

$$(2.2) \quad \text{Irr}_R(\Omega)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $G$  qui sont des sous-quotients d'une induite parabolique d'un élément de  $\Omega$ . On note aussi :

$$(2.3) \quad \text{Irr}_R(\Omega)^* = \text{cusp}^{-1}(\Omega)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $G$  dont le support cuspidal appartient à  $\Omega$ , c'est-à-dire qui sont des quotients d'une induite parabolique d'un élément de  $\Omega$ .

**2.1.4.** Un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère de  $G$  est entier si et seulement s'il est à valeurs dans  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ . Une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$  est entière si et seulement si son caractère central l'est. Si le groupe  $G$  est comme au paragraphe 1.3.5, une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible de  $G$  est entière si et seulement si son support cuspidal l'est (c'est une conséquence des paragraphes 1.3.4 et 1.3.5).

## 2.2. Sous-quotients irréductibles d'une induite parabolique

L'objet de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant, dont on trouvera une preuve un peu différente chez Dat [22] (voir *ibid.*, lemme 4.13). Les deux preuves s'appuient sur la propriété d'irréductibilité générique obtenue dans [21] (voir plus bas) pour un groupe  $G$  admettant des sous-groupes discrets cocompacts.

**Proposition 2.2.** — *On suppose que  $G$  possède des sous-groupes discrets cocompacts. Soit  $\sigma$  une  $R$ -représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$  et soient  $P$  et  $P'$  deux sous-groupes paraboliques de  $G$  de facteur de Levi  $M$ . Alors  $[i_P^G(\sigma)] = [i_{P'}^G(\sigma)]$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de prouver le résultat lorsque  $P$  et  $P'$  sont deux sous-groupes paraboliques maximaux opposés par rapport à  $M$ . On note  $\Psi_R(M)$  le groupe des caractères non ramifiés de  $M$ , et on va prouver que, pour tout caractère  $\chi \in \Psi_R(M)$ , les semi-simplifiées  $[i_P^G(\chi\sigma)]$  et  $[i_{P'}^G(\chi\sigma)]$  sont égales.

D'après [21, Theorem 5.1], il existe un ouvert de Zariski non vide  $\mathcal{U} \subseteq \Psi_R(M)$  tel que  $i_P^G(\chi\sigma)$  et  $i_{P'}^G(\chi\sigma)$  soient irréductibles pour tout  $\chi \in \mathcal{U}$ . La représentation  $\chi\sigma$  est un sous-quotient de  $\mathbf{r}_{P'}^G(i_P^G(\chi\sigma))$  et, d'après le lemme géométrique (1.5), les autres sous-quotients irréductibles apparaissent dans les :

$$[i_{M \cap P^{w^{-1}}}^M(w \cdot \mathbf{r}_{M \cap P'^w}^M(\chi\sigma))], \quad w \in \mathcal{D}(P', P), \quad w \neq 1.$$

Les caractères centraux de ces autres sous-quotients irréductibles sont donc de la forme :

$$w \cdot (\chi|_{Z_M} \omega_\pi)$$

où  $\pi$  est un sous-quotient irréductible de  $\mathbf{r}_{M \cap P'^w}^M(\sigma)$  de caractère central  $\omega_\pi$  et où  $Z_M$  est le centre de  $M$ . Ainsi, pour  $\chi$  dans un ouvert de Zariski non vide de  $\Psi_R(M)$  qu'on peut supposer égal à  $\mathcal{U}$ , les sous-quotient irréductibles de  $\mathbf{r}_{P'}^G(i_P^G(\chi\sigma))$  distincts de  $\chi\sigma$  ont un caractère central différent de celui de  $\chi\sigma$ . Pour un tel  $\chi$ , la représentation  $\chi\sigma$  est un facteur direct de  $\mathbf{r}_{P'}^G(i_P^G(\chi\sigma))$  (sa restriction au centre  $Z_G$  est bien un facteur direct,

qui est stable sous l'action de  $G$ ). Par réciprocity de Frobenius, on a un homomorphisme non trivial de  $\mathbf{i}_P^G(\chi\sigma)$  dans  $\mathbf{i}_{P'}^G(\chi\sigma)$ . Ces deux dernières représentations étant irréductibles pour  $\chi \in \mathcal{U}$ , on a :

$$(2.4) \quad \mathbf{i}_P^G(\chi\sigma) \simeq \mathbf{i}_{P'}^G(\chi\sigma)$$

pour tout  $\chi \in \mathcal{U}$ .

On fixe une famille décroissante  $(K_i)_{i \geq 1}$  de pro- $p$ -sous-groupes ouverts compacts de  $G$  formant une base de voisinages de l'élément neutre. Pour  $i \geq 1$ , on pose  $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}(G, K_i)$ . Pour tout caractère non ramifié  $\chi \in \Psi_R(M)$ , on note  $V_i(\chi)$  et  $W_i(\chi)$  les sous-espaces des vecteurs  $K_i$ -invariants de  $\mathbf{i}_P^G(\chi\sigma)$  et  $\mathbf{i}_{P'}^G(\chi\sigma)$  respectivement. Ce sont des  $\mathcal{H}_i$ -modules de dimension finie sur  $R$ . On va montrer que, pour tout  $\chi \in \Psi_R(M)$ , les  $\mathcal{H}_i$ -modules  $V_i(\chi)$  et  $W_i(\chi)$  ont les mêmes facteurs de composition.

D'après (2.4), pour tous  $\chi \in \mathcal{U}$  et  $i \geq 1$ , les  $\mathcal{H}_i$ -modules  $V_i(\chi)$  et  $W_i(\chi)$  sont isomorphes. Pour tout  $\chi \in \mathcal{U}$ , tout  $i \geq 1$  et tout  $f \in \mathcal{H}_i$ , on a donc une égalité des polynômes caractéristiques de  $f$  sur  $V_i(\chi)$  et  $W_i(\chi)$  :

$$(2.5) \quad \text{Pcar}_{V_i(\chi)}(f) = \text{Pcar}_{W_i(\chi)}(f).$$

Les fonctions qui, à chaque caractère  $\chi \in \Psi_R(M)$ , associent les coefficients des polynômes caractéristiques d'un élément  $f \in \mathcal{H}_i$  dans  $V_i(\chi)$  et  $W_i(\chi)$  respectivement sont des fonctions régulières de la variété  $\Psi_R(M)$ , car ces coefficients dépendent polynômialement des coefficients de la matrice de  $f$ . L'identité (2.5), vraie pour  $\chi \in \mathcal{U}$ , est donc vraie pour tout  $\chi \in \Psi_R(M)$ , tout  $i \geq 1$  et tout  $f \in \mathcal{H}_i$ .

**Lemme 2.3.** — *Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathcal{H}_i$ -modules de dimension finie tels que, pour tout  $f \in \mathcal{H}_i$ , on ait une égalité des polynômes caractéristiques de  $f$  sur  $V$  et  $W$  :*

$$(2.6) \quad \text{Pcar}_V(f) = \text{Pcar}_W(f).$$

*Alors  $V$  et  $W$  ont les mêmes facteurs de composition en tant que  $\mathcal{H}_i$ -modules.*

*Démonstration.* — Pour chaque  $\mathcal{H}_i$ -module simple  $\mathfrak{m}$ , on note  $v(\mathfrak{m})$  et  $w(\mathfrak{m})$  les multiplicités de  $\mathfrak{m}$  dans  $V$  et  $W$  respectivement, et on suppose qu'il existe un module simple  $\mathfrak{m}$  tel que ces multiplicités diffèrent. D'après [8, §2.2] (voir le corollaire 2 au théorème 1), il existe un élément  $f \in \mathcal{H}_i$  tel que  $f|_{\mathfrak{m}} = \text{id}_{\mathfrak{m}}$ , et tel que  $f|_{\mathfrak{m}'} = 0$  pour tout module simple  $\mathfrak{m}'$  non isomorphe à  $\mathfrak{m}$ . D'après (2.6), le scalaire 1 a des multiplicités égales dans les deux polynômes caractéristiques, c'est-à-dire que  $v(\mathfrak{m}) = w(\mathfrak{m})$ .  $\square$

Ainsi, pour tout entier  $i \geq 1$  et tout  $\chi \in \Psi_R(M)$ , les  $\mathcal{H}_i$ -modules  $V_i(\chi)$  et  $W_i(\chi)$  ont les mêmes facteurs de composition. Étant donné un caractère  $\chi \in \Psi_R(M)$ , on fixe un entier

$i \geq 1$  tel que tous les sous-quotients des représentations  $\mathbf{i}_P^G(\chi\sigma)$  et  $\mathbf{i}_{P'}^G(\chi\sigma)$  possèdent des vecteurs  $K_i$ -invariants non nuls. Le foncteur :

$$\pi \mapsto \pi^{K_i}$$

des  $K_i$ -invariants est exact et induit une bijection entre l'ensemble des classes de représentations irréductibles de  $G$  possédant des vecteurs  $K_i$ -invariants non nuls et celui des classes de  $\mathcal{H}_i$ -modules simples (voir [52, I.6.3]). Il définit donc un isomorphisme de groupes entre le sous-groupe  $\mathcal{G}_i$  de  $\mathcal{G}_R(G)$  engendré par les classes des représentations irréductibles de  $G$  possédant des vecteurs  $K_i$ -invariants non nuls et le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules de longueur finie de  $\mathcal{H}_i$ .

D'après ce qui précède, on a  $[V_i(\chi)] = [W_i(\chi)]$ , puis  $[\mathbf{i}_P^G(\chi\sigma)] = [\mathbf{i}_{P'}^G(\chi\sigma)]$  dans  $\mathcal{G}_i$ . On en déduit que les représentations  $\mathbf{i}_P^G(\chi\sigma)$  et  $\mathbf{i}_{P'}^G(\chi\sigma)$  ont les mêmes facteurs de composition, c'est-à-dire la même semi-simplification dans  $\mathcal{G}_R(G)$ .  $\square$

### 2.3. Deux lemmes sur l'irréductibilité d'une induite parabolique

On suppose encore que  $G$  est le groupe des points sur  $F$  d'un groupe réductif connexe quelconque défini sur  $F$ .

**Lemme 2.4.** — *Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$ , soit  $\sigma$  une  $R$ -représentation irréductible de  $M$  et soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$ . On note  $P^-$  le sous-groupe parabolique de  $G$  opposé à  $P$  relativement à  $M$ .*

(1) *Supposons que  $\sigma$  apparaisse avec multiplicité 1 dans  $[\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\sigma))]$ . Alors  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  admet une seule sous-représentation irréductible ; sa multiplicité dans  $[\mathbf{i}_P^G(\sigma)]$  est égale à 1.*

(2) *Supposons que  $\sigma$  apparaisse avec multiplicité 1 dans  $[\mathbf{r}_{P^-}^G(\mathbf{i}_P^G(\sigma))]$ . Alors  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  a un seul quotient irréductible ; sa multiplicité dans  $[\mathbf{i}_P^G(\sigma)]$  est égale à 1.*

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe deux sous-représentations irréductibles  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$ , et notons  $\pi$  leur somme directe. Par réciprocity de Frobenius, on trouve que :

$$\dim_R(\mathrm{Hom}_M(\mathbf{r}_P^G(\pi), \sigma)) = \dim_R(\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathbf{i}_P^G(\sigma))) \geq 2.$$

Par exactitude du foncteur de Jacquet  $\mathbf{r}_P^G$ , on a aussi  $[\mathbf{r}_P^G(\pi)] \leq [\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\sigma))]$ . On trouve donc que  $\sigma$  apparaît avec multiplicité au moins 2 dans la quantité  $[\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\sigma))]$ , ce qui est absurde. La deuxième assertion se prouve de façon analogue en utilisant la seconde adjonction.  $\square$

**Lemme 2.5.** — *On suppose que  $G$  possède des sous-groupes discrets cocompacts. Soit  $\pi$  une  $R$ -représentation de longueur finie de  $G$ . On suppose qu'il y a un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  de facteur de Levi  $M$  et une  $R$ -représentation irréductible  $\sigma$  de  $M$  satisfaisant aux conditions suivantes :*

- (1)  $\pi$  est une sous-représentation de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  et un quotient de  $\mathbf{i}_{P^-}^G(\sigma)$  ;
- (2) la multiplicité de  $\sigma$  dans  $[\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\sigma))]$  est égale à 1.

Alors  $\pi$  est irréductible.

*Démonstration.* — D'après la condition (2) et le lemme 2.4, l'induite  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  admet une unique sous-représentation irréductible, notée  $\pi_1$ . D'après la proposition 2.2, la multiplicité de  $\sigma$  dans  $[\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\sigma))]$  est égale à 1. L'induite  $\mathbf{i}_{P^-}^G(\sigma)$  admet donc un unique quotient irréductible, noté  $\pi_2$ . Aussi  $\pi_1$  est-elle l'unique sous-représentation irréductible de  $\pi$  et  $\pi_2$  son unique quotient irréductible. Or, d'après les deux propriétés d'adjonction du paragraphe 1.2.2, le facteur  $\sigma$  apparaît à la fois dans  $\mathbf{r}_P^G(\pi_1)$  et dans  $\mathbf{r}_{P^-}^G(\pi_2)$ . Puisque la multiplicité de  $\sigma$  dans  $[\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_P^G(\sigma))]$  est égale à 1, sa multiplicité dans  $[\mathbf{r}_P^G(\pi)]$  doit être égale à 1. On a donc  $\pi_1 = \pi_2$ , de sorte que  $\pi$  est irréductible.  $\square$

On utilisera ce lemme dans le cas particulier où  $\pi$  est isomorphe à  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  et à  $\mathbf{i}_{P^-}^G(\sigma)$  pour prouver l'irréductibilité d'une induite parabolique.

## 2.4. Le cas de $GL_m(D)$

On se place maintenant dans le cas où  $G = GL_m(D)$ , qui a des sous-groupes discrets cocompacts pour tout  $m \geq 1$  (voir Borel-Harder [7]).

**2.4.1.** On désigne par  $\mathcal{C}_R$  la réunion disjointe des  $\mathcal{C}_R(G_m)$  pour  $m \geq 0$  (voir les paragraphes 1.2.4 et 2.1.1). Étant donné une classe de conjugaison  $\mathfrak{c}$  d'une paire cuspidale de  $G_m$ , pour  $m \geq 1$ , il existe une famille  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  d'entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ , et, pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , il existe une représentation cuspidale  $\rho_i \in \mathcal{C}_R(G_{m_i})$ , de telle sorte que  $\mathfrak{c}$  soit la classe de conjugaison de la paire :

$$(M_\alpha, \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_r).$$

Si aucune confusion n'en résulte, on identifiera librement  $\mathfrak{c}$  à la somme  $[\rho_1] + \dots + [\rho_r]$  dans  $\mathbb{N}(\mathcal{C}_R)$  (voir le paragraphe 1.1.2). On identifiera ainsi l'ensemble des supports cuspidaux (resp. supercuspidaux) des  $G_m$ ,  $m \geq 1$ , à  $\mathbb{N}(\mathcal{C}_R)$  (resp. à  $\mathbb{N}(\mathcal{S}_R)$ ).

**2.4.2.** D'après la proposition 2.2, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.6.** — *La  $\mathbb{Z}$ -algèbre  $\mathcal{G}_R$  est commutative.*



Ceci étend les résultats de Zelevinski [56] pour les représentations complexes de  $GL_n(F)$ , de Tadić [51] pour les représentations complexes de  $GL_m(D)$  (voir aussi la propriété (P1) de [3, §2.2]) et de Vignéras [52] pour les  $R$ -représentations de  $GL_n(F)$  quand la caractéristique de  $R$  est différente de 2.

**Remarque 2.7.** — La preuve de Vignéras [52] utilise le fait que, pour toute représentation irréductible  $\pi$  de  $GL_n(F)$ , la représentation  $g \mapsto \pi({}^t g^{-1})$  est isomorphe à la contragrédiente de  $\pi$ , où  ${}^t g$  désigne la transposée de  $g \in GL_n(F)$ . Ceci est un résultat de Gelfand et Kazhdan quand  $R$  est le corps des nombres complexes. La preuve, écrite en détail dans [5, Theorem 7.3], utilise le théorème 6.10 de *ibid.* avec  $n = 2$ , dont la preuve n'est pas valable *a priori* si la caractéristique de  $R$  vaut 2. Remarquons que cette preuve ne peut s'étendre telle quelle au cas où  $D$  est différente de  $F$  car la transposée d'une matrice inversible de  $\mathcal{M}_m(D)$  n'est pas toujours inversible.

**2.4.3.** Dans ce paragraphe, on donne une version combinatoire du lemme géométrique de Bernstein-Zelevinski du paragraphe 1.2.3 dans le cas particulier où  $G = G_m$ .

Soient  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  et  $\beta = (n_1, \dots, n_s)$  deux familles d'entiers de sommes toutes deux égales à  $m \geq 1$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de  $G_{m_i}$  et notons  $\pi$  le produit tensoriel  $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r \in \text{Irr}_R(M_\alpha)$ . On note  $\mathcal{M}^{\alpha, \beta}$  l'ensemble des matrices  $B = (b_{i,j})$  composées d'entiers positifs tels que :

$$\sum_{j=1}^s b_{i,j} = m_i, \quad \sum_{i=1}^r b_{i,j} = n_j, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \quad j \in \{1, \dots, s\}.$$

Fixons  $B \in \mathcal{M}^{\alpha, \beta}$  et notons  $\alpha_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,s})$  et  $\beta_j = (b_{1,j}, \dots, b_{r,j})$ , qui sont des familles de somme  $m_i$  et de  $n_j$  respectivement. Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on écrit :

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \dots \otimes \sigma_{i,s}^{(k)}, \quad \sigma_{i,j}^{(k)} \in \text{Irr}_R(G_{b_{i,j}}), \quad k \in \{1, \dots, r_i\},$$

les différents facteurs de composition de  $\mathbf{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, s\}$  et toute famille d'entiers  $(k_1, \dots, k_r)$  tels que  $1 \leq k_i \leq r_i$ , on définit une représentation  $\sigma_j$  de  $G_{n_j}$  par :

$$\sigma_j = \mathbf{i}_{\beta_j} \left( \sigma_{1,j}^{(k_1)} \otimes \dots \otimes \sigma_{r,j}^{(k_r)} \right).$$

Alors les représentations :

$$\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_s, \quad B \in \mathcal{M}^{\alpha, \beta}, \quad 1 \leq k_i \leq r_i,$$

forment une suite de composition de  $\mathbf{r}_\beta(\mathbf{i}_\alpha(\pi))$ . Voir Zelevinski [56, §1.6], la preuve étant valable pour un corps algébriquement clos  $R$  de caractéristique différente de  $p$  et pour  $D$  quelconque.



La proposition suivante est la combinaison du lemme 2.4 et de [39, Corollaire 2.2] dont la preuve est valable pour un corps algébriquement clos de caractéristique différente de  $p$ . On reprend les notations ci-dessus avec  $s = 2$ .

**Proposition 2.8.** — *On suppose que, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , toute famille d'entiers  $\alpha_i$  de somme  $m_i$  et tout sous-quotient  $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \sigma_{i,2}^{(k)}$  de  $\mathbf{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$ , on a :*

$$\text{cusp}(\sigma_{i,2}^{(k)}) \not\subseteq \sum_{i < j \leq r} \text{cusp}(\pi_j).$$

Alors  $\pi$  apparaît avec multiplicité 1 dans  $[\mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{i}_{\alpha}(\pi))]$ . Par conséquent,  $\mathbf{i}_{\alpha}(\pi)$  a une unique sous-représentation irréductible, dont la multiplicité dans  $[\mathbf{i}_{\alpha}(\pi)]$  est égale à 1.

### 3. Types simples et semi-simples pour $\text{GL}_m(\mathbb{D})$

Dans cette section, on définit des représentations irréductibles de certains sous-groupes ouverts compacts de  $\text{GL}_m(\mathbb{D})$  appelées R-types simples (§3.5) et semi-simples (§3.7). Cette construction est due à Bushnell-Kutzko [16, 18] dans le cas des représentations complexes de  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ . Elle a ensuite été adaptée par Vignéras [52, 53] aux représentations modulaires de  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$  et généralisée aux représentations complexes de  $\text{GL}_m(\mathbb{D})$  par Broussous [9], Sécherre [44, 45, 46] puis Sécherre et Stevens [49].

Les paragraphes 3.1 à 3.5 établissent la construction progressive des R-types simples à partir des strates et des caractères simples. On introduit au paragraphe 3.6 la notion de paire couvrante, qui sera beaucoup utilisée dans la suite, puis on définit au paragraphe 3.7 les R-types semi-simples de  $\text{GL}_m(\mathbb{D})$  comme des paires couvrantes de R-types simples maximaux de sous-groupes de Levi de  $\text{GL}_m(\mathbb{D})$ . On calcule les R-algèbres de Hecke associées à ces R-types simples et semi-simples.

Dans le paragraphe 3.8, on étudie la réduction modulo  $\ell$  des types simples, ce qui fournit en particulier une autre preuve de l'existence des  $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$ -types simples.

#### 3.1. Strates simples

Dans ce paragraphe, on rappelle le langage des strates simples. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [16, 18, 44].

**3.1.1.** Soit  $A$  une  $\mathbb{F}$ -algèbre centrale simple, et soit  $V_A$  un  $A$ -module à gauche simple. L'algèbre  $\text{End}_A(V_A)$  est une  $\mathbb{F}$ -algèbre à division dont l'algèbre opposée est notée  $D$ . Aussi  $V_A$  est-il un  $D$ -espace vectoriel à droite, et on a un isomorphisme canonique de  $\mathbb{F}$ -algèbres entre  $A$  et  $\text{End}_D(V_A)$ .

Si  $A$  est une algèbre centrale simple sur une extension finie  $K$  de  $F$ , on note  $N_{A/K}$  et  $\text{tr}_{A/K}$  respectivement la norme et la trace réduites de  $A$  sur  $K$ .

**3.1.2.** Une  $\mathcal{O}_D$ -chaîne de réseaux de  $V_A$  est une suite  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{O}_D$ -réseaux de  $V_A$  qui est strictement décroissante et pour laquelle il existe un entier  $e \geq 1$  (appelé la *période* de  $\Lambda$  sur  $\mathcal{O}_D$ ) tel qu'on ait  $\mathcal{L}_{k+e} = \mathcal{L}_k \mathfrak{p}_D$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire de  $A$  est une sous- $\mathcal{O}_F$ -algèbre  $\mathfrak{A}$  de  $A$  telle qu'il existe une  $\mathcal{O}_D$ -chaîne de réseaux  $\mathcal{L}$  de  $V_A$  pour laquelle on ait :

$$(3.1) \quad \mathfrak{A} = \{a \in A \mid a\mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{L}_k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Deux  $\mathcal{O}_D$ -chaînes de réseaux translatées l'une de l'autre définissent le même  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire, et l'application  $\mathcal{L} \mapsto \mathfrak{A}$  définie par (3.1) induit une bijection entre classes de translation de  $\mathcal{O}_D$ -chaînes de réseaux de  $V_A$  et  $\mathcal{O}_F$ -ordres héréditaires de  $A$ . Si  $\mathfrak{A}$  est un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire de  $A$  défini par une  $\mathcal{O}_D$ -chaîne de réseaux  $\mathcal{L}$ , le sous- $\mathcal{O}_F$ -module :

$$(3.2) \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \{a \in A \mid a\mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{L}_{k+1}, k \in \mathbb{Z}\}$$

est le radical de Jacobson de  $\mathfrak{A}$ . On note :

$$(3.3) \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) = \{g \in A^\times \mid g\mathfrak{A}g^{-1} = \mathfrak{A}\}$$

le normalisateur de  $\mathfrak{A}$  dans  $A^\times$ . Pour  $g \in \mathfrak{K}$ , on désigne par  $v_{\mathfrak{A}}(g)$  l'entier  $n \in \mathbb{Z}$  défini par  $g\mathfrak{A} = \mathfrak{P}^n$ . L'application  $v_{\mathfrak{A}}$  est un morphisme de groupes de  $\mathfrak{K}$  dans  $\mathbb{Z}$ , dont le noyau, noté  $U(\mathfrak{A})$ , est le groupe des éléments inversibles de  $\mathfrak{A}$ . On pose  $U^0(\mathfrak{A}) = U(\mathfrak{A})$  et, pour  $k \geq 1$ , on pose  $U^k(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}^k$ .

**3.1.3.** Une *strate* de  $A$  est un quadruplet  $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$  composé d'un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire  $\mathfrak{A}$  de  $A$ , de deux entiers  $r, n$  vérifiant  $0 \leq r \leq n - 1$  et d'un élément  $\beta \in \mathfrak{P}^{-n}$ . Deux strates  $[\mathfrak{A}, n, r, \beta_i]$ , avec  $i \in \{1, 2\}$ , sont dites *équivalentes* si  $\beta_2 - \beta_1 \in \mathfrak{P}^{-r}$ .

Étant donnée une strate  $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$  de  $A$ , on note  $E$  la  $F$ -algèbre engendrée par  $\beta$ . Cette strate est dite *pure* si  $E$  est un corps, si l'ordre  $\mathfrak{A}$  est normalisé par  $E^\times$  et si  $v_{\mathfrak{A}}(\beta) = -n$ . Dans ce cas, on note  $B$  le commutant de  $E$  dans  $A$  : c'est une  $E$ -algèbre centrale simple, et  $\mathfrak{A} \cap B$  est un  $\mathcal{O}_E$ -ordre héréditaire de  $B$ . Le plus petit entier  $k \geq v_{\mathfrak{A}}(\beta)$  pour lequel tout élément  $x \in \mathfrak{A}$  tel que  $\beta x - x\beta \in \mathfrak{P}^k$  soit contenu dans  $\mathfrak{A} \cap B + \mathfrak{P}$  est noté  $k_0(\beta, \mathfrak{A})$  et porte le nom d'*exposant critique* de la strate pure  $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$ .

**Définition 3.1.** — Une strate  $[\mathfrak{A}, n, r, \beta]$  de  $A$  est dite *simple* si elle est pure et si on a  $r \leq -k_0(\beta, \mathfrak{A}) - 1$ .

**3.1.4.** À une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$  on associe dans [44, 3.3] deux sous-groupes ouverts compacts  $H(\beta, \mathfrak{A})$ ,  $J(\beta, \mathfrak{A})$  de  $U(\mathfrak{A})$ . Chacun d'eux est filtré par une suite décroissante de pro- $p$ -sous-groupes ouverts compacts :

$$(3.4) \quad H^k(\beta, \mathfrak{A}) = H(\beta, \mathfrak{A}) \cap U^k(\mathfrak{A}), \quad J^k(\beta, \mathfrak{A}) = J(\beta, \mathfrak{A}) \cap U^k(\mathfrak{A}), \quad k \geq 1.$$

On renvoie à [44, 48] pour une étude détaillée des propriétés de ces groupes.

### 3.2. Caractères simples

On choisit un homomorphisme injectif  $\iota_{p,R}$  du groupe  $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$  des racines complexes de l'unité d'ordre une puissance de  $p$  vers le groupe multiplicatif  $R^\times$ , ainsi qu'un caractère complexe additif  $\psi_{F,\mathbb{C}} : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  trivial sur  $\mathfrak{p}_F$  mais pas sur  $\mathcal{O}_F$ .

**3.2.1.** Soit  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  et soit  $q_0 = -k_0(\beta, \mathfrak{A})$ . Dans [44, 3.3], on associe à une telle strate et à tout entier  $0 \leq m \leq q_0 - 1$  un ensemble fini  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}, m, \beta)$  (qui dépend de  $\psi_{F,\mathbb{C}}$ ) de caractères complexes de  $H^{m+1}(\beta, \mathfrak{A})$  appelés caractères simples complexes de niveau  $m$ .

**3.2.2.** Puisque les  $H^{m+1}(\beta, \mathfrak{A})$ , pour  $0 \leq m \leq q_0 - 1$ , sont des pro- $p$ -groupes, l'application  $\theta \mapsto \iota_{p,R} \circ \theta$  est bien définie pour  $\theta \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}, m, \beta)$ , et son image, notée  $\mathcal{C}_R(\mathfrak{A}, m, \beta)$ , est un ensemble de  $R$ -caractères de  $H^{m+1}(\beta, \mathfrak{A})$  appelés  $R$ -caractères simples de niveau  $m$ . Toutes les propriétés des caractères simples complexes se transportent aux caractères simples à valeurs dans  $R^\times$ . On renvoie le lecteur à [16, 18, 14, 44, 48, 11] pour une étude détaillée de ces propriétés.

**3.2.3.** Soit  $[\mathfrak{A}', n', 0, \beta']$  une strate simple d'une  $F$ -algèbre centrale simple  $A'$ , et supposons qu'il existe un isomorphisme de  $F$ -algèbres  $\varphi$  de  $F(\beta)$  vers  $F(\beta')$  tel que  $\varphi(\beta) = \beta'$ . Il existe alors une bijection :

$$(3.5) \quad \mathcal{C}_R(\mathfrak{A}, 0, \beta) \rightarrow \mathcal{C}_R(\mathfrak{A}', 0, \beta')$$

canoniquement associée à  $\varphi$ , appelée application de transfert (voir [44, 3.3.3]).

On utilisera également, dans la section 5 notamment, une relation d'équivalence entre caractères simples appelée endo-équivalence. On renvoie à [14, 11] pour une définition de cette relation.

### 3.3. $\beta$ -extensions

Dorénavant, si le contexte le permet, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que  $R$ -caractère et  $R$ -représentation, et on omettra  $R$  dans les notations.

**3.3.1.** Soit  $H$  un sous-groupe ouvert de  $G = A^\times$  et soit  $\sigma$  une représentation de  $H$ . Si  $y \in G$ , on note  $I_y(\sigma)$  le  $R$ -espace  $\text{Hom}_{H \cap H^y}(\sigma, \sigma^y)$ , et on note  $I_G(\sigma)$  l'ensemble des  $y \in A^\times$  pour lesquels  $I_y(\sigma)$  n'est pas nul, qu'on appelle *ensemble d'entrelacement* de  $\sigma$  dans  $G$ .

**3.3.2.** Soient  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  et  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$  le  $\mathcal{O}_E$ -ordre héréditaire de  $B$  défini par  $\mathfrak{A}$ . L'égalité  $J(\beta, \mathfrak{A}) = U(\mathfrak{B})J^1(\beta, \mathfrak{A})$  induit un isomorphisme de groupes :

$$(3.6) \quad J(\beta, \mathfrak{A})/J^1(\beta, \mathfrak{A}) \simeq U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B})$$

permettant d'associer canoniquement et bijectivement une représentation de  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  triviale sur  $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$  à une représentation de  $U(\mathfrak{B})$  triviale sur  $U^1(\mathfrak{B})$ .

Soit  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ . D'après [44, 3.3.2], le normalisateur de  $\theta$  dans  $G$  contient le groupe  $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J(\beta, \mathfrak{A})$  et son ensemble d'entrelacement dans  $G$  est  $J^1(\beta, \mathfrak{A})B^\times J^1(\beta, \mathfrak{A})$ .

**Proposition 3.2.** — *Il existe une représentation irréductible  $\eta$  de  $J^1$ , unique à isomorphisme près, dont la restriction à  $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contient  $\theta$ . Elle possède les propriétés suivantes :*

- (1) *sa dimension sur  $R$  est égale à  $(J^1 : H^1)^{1/2}$ , sa restriction à  $H^1$  est un multiple de  $\theta$ , et l'induite de  $\theta$  à  $J^1$  est un multiple de  $\eta$  ;*
- (2) *elle est normalisée par  $(\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) \cap B^\times)J$ , son ensemble d'entrelacement dans  $G$  est égal à  $J^1B^\times J^1$  et, pour tout  $y \in B^\times$ , le  $R$ -espace d'entrelacement  $I_y(\eta)$  est de dimension 1 ;*
- (3) *la représentation induite de  $\eta$  au groupe  $U^1(\mathfrak{A})$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Puisque  $R$  est algébriquement clos de caractéristique différente de  $p$ , et puisque  $J^1$  est un pro- $p$ -groupe, toutes ses représentations sont semi-simples, et la preuve existant dans le cas complexe (voir [13, 8.3] et [45, Proposition 2.10]) s'applique.  $\square$

On appelle cette représentation  $\eta$  la *représentation de Heisenberg* associée à  $\theta$ .

**3.3.3.** Une  $\beta$ -extension de  $\eta$  (ou de  $\theta$ ) est une représentation irréductible de  $J$  prolongeant  $\eta$  dont l'entrelacement dans  $G$  est égal à  $JB^\times J$ . On note  $\mathcal{B}(\theta) = \mathcal{B}_R(\theta)$  l'ensemble des  $\beta$ -extensions de  $\theta$ .

Si  $R$  est le corps des nombres complexes, on sait d'après [45] (voir *ibid.*, théorème 2.28) que tout caractère simple admet une  $\beta$ -extension. On va voir que la méthode utilisée dans [45] est encore valable dans le cas où  $R$  est quelconque, et par conséquent que tout  $R$ -caractère simple admet une  $\beta$ -extension. Dans le cas où  $R = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ , on verra au paragraphe 3.8 comment prouver ce résultat (voir le corollaire 3.7) par réduction modulo  $\ell$ .

**Lemme 3.3.** — *La représentation  $\eta$  se prolonge à  $J$  et, pour toute représentation  $\kappa$  de  $J$  prolongeant  $\eta$ , l'induite de  $\kappa$  à  $U(\mathfrak{B})U^1(\mathfrak{A})$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Pour prouver l'existence d'une représentation de  $J$  prolongeant  $\eta$ , on reprend la preuve de [45, Théorème 2.13] qui est encore valable lorsque  $R$  est de caractéristique non nulle. Si  $\kappa$  est un tel prolongement, on note  $\rho$  l'induite de  $\kappa$  à  $U(\mathfrak{B})U^1(\mathfrak{A})$ . Le fait que l'ensemble d'entrelacement de  $\kappa$  dans  $U(\mathfrak{B})U^1(\mathfrak{A})$  soit égal à  $J$  implique que l'algèbre des endomorphismes de  $\rho$  est de dimension 1, mais ceci ne suffit pas, lorsque  $R$  est de caractéristique non nulle, pour en déduire que  $\rho$  est irréductible. Pour appliquer le critère d'irréductibilité [54, 4.2], il s'agit de montrer que, pour tout quotient irréductible  $\pi$  de  $\rho$ , la représentation  $\kappa$  est un facteur direct de la restriction de  $\pi$  à  $J$ . Soit  $\pi$  un tel quotient irréductible. Puisque  $J^1$  est un pro- $p$ -groupe, la restriction de  $\pi$  à  $J^1$  se décompose sous la forme :

$$V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

où  $V_1, \dots, V_r$  sont des copies de  $\eta$  et où aucun facteur irréductible de  $V_0$  n'est isomorphe à  $\eta$ . Ces sous-espaces sont stables par  $J$ , et la représentation de  $J$  sur  $V_i$ ,  $i \geq 1$ , est de la forme  $\kappa\chi_i$  où  $\chi_i$  est un caractère de  $J$  trivial sur  $J^1$ . Comme  $\kappa$  est une sous-représentation de la restriction de  $\pi$  à  $J$ , l'un des  $\chi_i$  est trivial, et ainsi le critère [54, 4.2] est vérifié.  $\square$

Si  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta$  et si  $\chi$  est un caractère de  $k_E^\times$ , on note  $\kappa^\chi$  la représentation  $\kappa$  tordue par  $\chi \circ N_{B/E}$  vu comme un caractère de  $J$  trivial sur  $J^1$ .

**Lemme 3.4.** — *On suppose qu'il existe une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . Le groupe des caractères de  $k_E^\times$  opère librement et transitivement sur  $\mathcal{B}(\theta)$  par  $(\kappa, \chi) \mapsto \kappa^\chi$ .*

*Démonstration.* — L'argument de [45, Théorème 2.28] est encore valable ici.  $\square$

**3.3.4.** Soit  $\mathfrak{A}'$  un ordre héréditaire  $E$ -pur de  $A$ , soit  $\theta'$  le transfert de  $\theta$  dans  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta)$  et soit  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap B$ .

**Lemme 3.5.** — *On suppose que  $\mathfrak{A}'$  est inclus dans  $\mathfrak{A}$ .*

(1) *Pour toute  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$ , il existe une unique  $\beta$ -extension  $\kappa' \in \mathcal{B}(\theta')$  tel que  $\kappa'$  et la restriction de  $\kappa$  à  $U(\mathfrak{B}')J^1$  induisent à  $U(\mathfrak{B}')U^1(\mathfrak{A}')$  des représentations isomorphes.*

(2) *L'application :*

$$\kappa \mapsto \kappa'$$

*ainsi définie de  $\mathcal{B}(\theta)$  dans  $\mathcal{B}(\theta')$  est bijective.*

*Démonstration.* — On suppose qu'il existe une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$ . En reprenant l'argument de [16, (5.2.5)], on montre qu'il existe une unique représentation irréductible  $\kappa'$  de  $J(\beta, \mathfrak{A}')$  prolongeant la représentation de Heisenberg de  $\theta'$  et telle que :

$$(3.7) \quad \text{ind}_{J(\beta, \mathfrak{A}')}^{U(\mathfrak{B}')U^1(\mathfrak{A}')}(\kappa') \simeq \text{ind}_{U(\mathfrak{B}')J^1}^{U(\mathfrak{B}')U^1(\mathfrak{A}')}(\kappa).$$

On vérifie comme dans la preuve de [45, Proposition 2.9] que  $\kappa'$  est une  $\beta$ -extension.

On suppose maintenant qu'il existe une  $\beta$ -extension  $\kappa'$  de  $\theta'$ . En reprenant l'argument de *ibid.*, lemme 2.27 et théorème 2.28, on obtient une représentation irréductible  $\kappa$  de  $J$  prolongeant  $\eta$ , vérifiant (3.7) et dont la restriction à  $U(\mathfrak{B}')J^1$  est entrelacée par  $B^\times$ . Pour montrer que  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension, on reprend la preuve de *ibid.*, proposition 2.25, qui repose sur une propriété géométrique du groupe  $G$  (*ibid.*, lemme 2.26). On obtient ainsi une application surjective  $\kappa \mapsto \kappa'$  entre deux ensembles de même cardinal (lemme 3.4) : elle est donc bijective.  $\square$

En traçant dans l'immeuble de Bruhat-Tits de  $G$  le segment reliant les points correspondant à  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}'$ , on forme une suite finie  $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r$  d'ordres héréditaires E-purs de  $A$  tels que  $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}'$  et tels que, pour chaque  $i \geq 1$ , l'ordre  $\mathfrak{A}_i$  contienne ou soit contenu dans  $\mathfrak{A}_{i-1}$  (voir [46, 4.2]). En composant les bijections associées par le lemme 3.5 à chaque couple  $(\mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_i)$ , on obtient une application bijective :

$$(3.8) \quad \mathcal{B}_R(\theta) \rightarrow \mathcal{B}_R(\theta')$$

compatible à l'action du groupe des caractères de  $k_E^\times$  (lemme 3.4), appelée application de transfert.

**3.3.5.** Dans ce paragraphe, on suppose que  $A = \mathcal{M}_m(D)$ . Un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire  $\mathfrak{A}$  de  $\mathcal{M}_m(D)$  est dit *standard* si  $U(\mathfrak{A})$  est un sous-groupe de  $GL_m(\mathcal{O}_D)$  dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}_D$  est formée de matrices triangulaires supérieures par blocs. Si ces blocs sont de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, on pose  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  et on note  $\mathfrak{A}_\alpha$  l'ordre standard correspondant. On a un isomorphisme canonique de groupes :

$$(3.9) \quad U(\mathfrak{A}_\alpha)/U^1(\mathfrak{A}_\alpha) \rightarrow GL_{m_1}(k_D) \times \cdots \times GL_{m_r}(k_D),$$

de sorte qu'on identifiera, par inflation, une représentation de  $GL_{m_1}(k_D) \times \cdots \times GL_{m_r}(k_D)$  à une représentation de  $U(\mathfrak{A}_\alpha)$  triviale sur  $U^1(\mathfrak{A}_\alpha)$ .

**3.3.6.** Dans ce paragraphe, on suppose que  $A = \mathcal{M}_m(D)$  et que  $\mathfrak{A}$  est un ordre standard. Étant donné un entier  $n \geq 1$ , on pose  $M = G_m \times \cdots \times G_m$ , qui est un sous-groupe de Levi standard de  $G_{mn}$ , on note  $P$  le sous-groupe parabolique standard correspondant,  $U$  son radical unipotent et  $U^-$  le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à  $P$  par rapport à  $M$ . On pose :

$$(3.10) \quad J_M = J \times \cdots \times J.$$

On note  $\mathfrak{A}_n$  l'ordre principal standard de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{D})$  dont la période est égale à  $n$  fois celle de  $\mathfrak{A}$ , on note  $\theta_n \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_n, 0, \beta)$  le transfert de  $\theta$  et on pose  $J_n = J(\beta, \mathfrak{A}_n)$ . Alors :

$$(3.11) \quad K = H^1(\beta, \mathfrak{A}_n) (J_n \cap P)$$

est un sous-groupe d'indice fini de  $J_n$  admettant une décomposition d'Iwahori relativement à tout sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$ , et  $K \cap M$  est égal à  $J_n \cap M$ , qui s'identifie naturellement à  $J_M$ .

**Proposition 3.6.** — *On suppose qu'il existe une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$  et on note  $\kappa_M$  la représentation  $\kappa \otimes \cdots \otimes \kappa$  de  $J_M$ .*

(1) *Il existe une unique représentation irréductible  $\varkappa$  de  $K$  qui prolonge  $\kappa_M$  et qui soit triviale sur  $K \cap U$  et  $K \cap U^-$ .*

(2) *L'application :*

$$(3.12) \quad \kappa \mapsto \kappa_n = \text{ind}_K^{J_n}(\varkappa)$$

*induit une bijection de  $\mathcal{B}(\theta)$  dans  $\mathcal{B}(\theta_n)$ .*

*Démonstration.* — L'unicité de  $\varkappa$  est une conséquence de la décomposition d'Iwahori :

$$K = (K \cap U^-) \cdot (K \cap M) \cdot (K \cap U).$$

Pour l'existence, on vérifie comme dans [45, 2.3] que l'application  $\varkappa$  définie sur  $K$  par :

$$\varkappa(uxu') = \kappa_M(x), \quad u \in K \cap U^-, \quad x \in K \cap M, \quad u' \in K \cap U,$$

est une représentation de  $K$  qui prolonge  $\kappa_M$ , puis on vérifie comme dans *ibid.*, théorèmes 2.18 et 2.19, que  $\kappa_n$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta_n$ . Pour prouver que l'application définie par (3.12) est bijective, on vérifie que l'on obtient l'application réciproque en calculant, pour tout  $\rho \in \mathcal{B}(\theta_n)$ , la représentation de  $J_M$  sur l'espace des vecteurs  $K \cap U$ -invariants de  $\rho$ , qui est de la forme  $\kappa \otimes \cdots \otimes \kappa$  pour un certain  $\kappa \in \mathcal{B}(\theta)$ .  $\square$

**3.3.7.** On en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 3.7.** — *Pour tout  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ , il existe une  $\beta$ -extension de  $\theta$ .*

*Démonstration.* — On reprend l'argument de [45], dont on rappelle les principales étapes. On prouve d'abord le résultat dans le cas où  $B$  est une algèbre à division, ce qui se fait en suivant la preuve de [45, Lemme 2.21]. Ensuite, la proposition 3.6 implique que le résultat est vrai quand  $\mathfrak{B}$  est un ordre minimal de  $B$ , puis la propriété de transfert (3.8) implique le résultat dans le cas général.  $\square$



### 3.4. Types semi-simples de niveau 0

Soit  $A$  une  $F$ -algèbre centrale simple et soit  $G = A^\times$ . Soit  $(U, \sigma)$  un couple constitué d'un sous-groupe ouvert compact  $U$  de  $G$  et d'une représentation irréductible  $\sigma$  de  $U$ .

**Définition 3.8.** — On dit que  $(U, \sigma)$  est un *type semi-simple de niveau 0* de  $G$  s'il y a un ordre héréditaire  $\mathfrak{A}$  de  $A$ , une famille d'entiers  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  de somme  $m$  et, pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , une représentation irréductible cuspidale  $\sigma_i$  de  $GL_{m_i}(k_{\mathbb{D}})$  tels que :

- (1) on a  $U = U(\mathfrak{A})$  ;
- (2) il existe un isomorphisme de  $F$ -algèbres de  $A$  sur  $\mathcal{M}_m(\mathbb{D})$  identifiant d'une part  $\mathfrak{A}$  à  $\mathfrak{A}_\alpha$ , d'autre part  $\sigma$  à  $\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_r$ , celle-ci étant vue par l'intermédiaire de (3.9) comme une représentation de  $U(\mathfrak{A}_\alpha)$  triviale sur  $U^1(\mathfrak{A}_\alpha)$ .

**Remarque 3.9.** — La définition ci-dessus est plus générale que celle de Grabitz, Silberger et Zink [29], qui ne concerne que le cas où  $A$  est  $\mathcal{M}_m(\mathbb{D})$  et où  $\mathfrak{A}$  est un ordre standard.

Si  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  sont toutes isomorphes à une même représentation irréductible cuspidale  $\sigma_0$ , on dit que  $(U, \sigma)$  est un *type simple de niveau 0* de  $G$ .

Un type simple  $(U, \sigma)$  de niveau 0 de  $G$  est dit *maximal* si  $U$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ .

**Exemple 3.10.** — Soit  $I = U(\mathfrak{A}_{(1, \dots, 1)})$  le sous-groupe d'Iwahori standard de  $GL_m(\mathbb{D})$  et soit  $1_I$  son caractère trivial. Alors  $(I, 1_I)$  est un type simple de niveau 0 de  $GL_m(\mathbb{D})$ .

Soit  $(U, \sigma)$  un type semi-simple de niveau 0 de  $G$ . On fixe un isomorphisme entre  $A$  et  $\mathcal{M}_m(\mathbb{D})$  comme dans la définition 3.8 et on identifie  $U$  à  $U(\mathfrak{A}_\alpha)$ . On pose  $M = M_\alpha$  et on note  $\mathcal{N}_\sigma$  le normalisateur dans  $G$  de la restriction de  $\sigma$  à  $U \cap M$ .

**Lemme 3.11.** — (1) *L'ensemble d'entrelacement de  $\sigma$  dans  $G$  est égal à  $U \cdot \mathcal{N}_\sigma \cdot U$  et, pour  $y \in I_G(\sigma)$ , on a  $\dim_{\mathbb{R}} I_y(\sigma) = 1$ .*

(2) *Pour tout  $x \in \mathcal{N}_\sigma$ , on a un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Hom}_{U \cap U^x}(\sigma, \sigma^x) \simeq \mathrm{Hom}_{U/U^1}(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^x),$$

où  $\bar{\sigma}$  désigne la représentation de  $U/U^1$  définie par  $\sigma$ .

*Démonstration.* — Les preuves de la proposition 1.2 et du lemme 1.5 de [29] sont encore valables. En particulier, les intégrales apparaissant dans *ibid.*, lemmes 1.3 et 1.4, portent sur des pro- $p$ -groupes et ont un sens relativement à une mesure de Haar à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .



Pour le calcul de la dimension de l'espace d'entrelacement, on peut voir  $\sigma$  comme une représentation irréductible cuspidale de  $U/U^1 \simeq \mathrm{GL}_{m_1}(k_{\mathbb{D}}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(k_{\mathbb{D}})$  et on conclut au moyen de [52, III.2.6].  $\square$

Si  $\mathfrak{A}$  est un ordre héréditaire de  $A$ , on désigne par  $\mathcal{T}(\mathfrak{A}) = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A})$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $U(\mathfrak{A})$  qui sont des types semi-simples de niveau 0 de  $G$ .

### 3.5. Types simples

Soit  $A$  la  $F$ -algèbre centrale simple  $\mathcal{M}_m(D)$  et soit  $G = G_m$ .

**3.5.1.** Soit un couple  $(J, \lambda)$  constitué d'un sous-groupe ouvert compact  $J$  de  $G$  et d'une représentation irréductible  $\lambda$  de  $J$ .

**Définition 3.12.** — On dit que  $(J, \lambda)$  est un *R-type simple de niveau non nul* de  $G$  s'il y a une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$ , un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ , une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$  et une représentation  $\sigma$  de  $U = U(\mathfrak{B})$  tels que :

- (1) on a  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  ;
- (2) le couple  $(U, \sigma)$  est un R-type simple de niveau 0 de  $B^{\times}$  ;
- (3) la représentation  $\lambda$  est isomorphe à  $\kappa \otimes \sigma$ , où  $\sigma$  est considérée comme une représentation de  $J(\beta, \mathfrak{A})$  triviale sur  $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ .

**Remarque 3.13.** — (1) Si  $(J, \lambda)$  est un type simple de niveau non nul, la strate simple définissant le groupe  $J$  n'est en général pas unique (pas même à équivalence près).

(2) Comme  $B$  est une  $E$ -algèbre centrale simple (voir le paragraphe 3.1.3), il existe un entier  $m' \geq 1$ , une  $E$ -algèbre à division centrale  $D'$  et un isomorphisme de  $E$ -algèbres :

$$(3.13) \quad B \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(D').$$

D'après le paragraphe 3.4, il existe un isomorphisme (3.13) identifiant d'une part l'ordre  $\mathfrak{B}$  à un ordre principal standard de période notée  $r$ , d'autre part  $\sigma$  à  $\sigma_0 \otimes \cdots \otimes \sigma_0$ , où  $\sigma_0$  est une représentation irréductible cuspidale du groupe  $\mathrm{GL}_s(k_{\mathbb{D}'})$  avec  $m' = rs$ .

Un type simple  $(J, \lambda)$  de niveau non nul de  $G$  est dit *maximal* si  $(U, \sigma)$  est maximal, ce qui ne dépend pas du choix de la strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  dans la définition 3.12.

**Remarque 3.14.** — Par *type simple* de  $G$  on entendra type simple de niveau nul ou non nul de  $G$ . Pour harmoniser les notations et la terminologie, on introduit la strate nulle :

$$[\mathfrak{A}, 0, 0, 0]$$

parmi les strates simples, où  $\mathfrak{A}$  est un ordre héréditaire de  $A$ . On pose  $E = F$ ,  $B = A$  et :

$$H(0, \mathfrak{A}) = J(0, \mathfrak{A}) = U(\mathfrak{A}).$$

L'unique caractère simple attaché à cette strate est le caractère trivial de  $U^1(\mathfrak{A})$  et l'unique 0-extension de ce caractère simple est le caractère trivial de  $U(\mathfrak{A})$ .

**Proposition 3.15.** — *Un type simple de  $G$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Pour les types simples de niveau 0, c'est une conséquence de la définition 3.8. Pour le niveau non nul, on peut reprendre l'argument de [52, III.4.23].  $\square$

Étant donné un caractère simple  $\theta$  relatif à une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$ , on désigne par  $\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{T}_R(\theta)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $J(\beta, \mathfrak{A})$  qui sont des types simples contenant  $\theta$ .

**3.5.2.** Soit  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ , soit  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  un caractère simple et soit  $\kappa$  une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . On pose  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  et  $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$ .

**Lemme 3.16.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $J$ . Alors la restriction de  $\pi$  à  $H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contient  $\theta$  si et seulement si  $\pi$  est isomorphe à  $\kappa \otimes \xi$ , où  $\xi$  est une représentation irréductible de  $J$  triviale sur  $J^1$ .*

*Démonstration.* — Puisque  $J^1$  est un pro- $p$ -groupe, la restriction de  $\pi$  à  $J^1$  est semi-simple. Elle contient donc la représentation de Heisenberg  $\eta$ , de sorte que, par réciprocity de Frobenius, on a :

$$\mathrm{Hom}_J(\mathrm{ind}_{J^1}^J(\eta), \pi) \neq 0.$$

Puisque  $\kappa$  prolonge  $\eta$  à  $J$ , l'induite de  $\eta$  à  $J$  est isomorphe à  $\kappa \otimes \mathrm{ind}_{J^1}^J(1)$ , où 1 désigne le caractère trivial de  $J^1$ . Soit  $\xi$  un sous-quotient de  $\mathrm{ind}_{J^1}^J(1)$  de dimension minimale parmi ceux vérifiant  $\mathrm{Hom}_J(\kappa \otimes \xi, \pi) \neq 0$ , et soit  $\phi$  un homomorphisme non trivial de  $\kappa \otimes \xi$  dans  $\pi$ . On note  $V$  l'espace de  $\xi$ . Si  $W$  est un sous-espace propre de  $V$  tel que  $\kappa \otimes W$  soit stable par  $J$ , on a une suite exacte :

$$\kappa \otimes W \rightarrow \kappa \otimes V \rightarrow \kappa \otimes (V/W) \rightarrow 0$$

de représentations de  $J$ . La propriété de minimalité de  $V$  entraîne que l'image de  $\kappa \otimes W$  dans  $\kappa \otimes V$  est contenue dans  $\mathrm{Ker}(\phi)$ . On a donc un homomorphisme non nul de  $\kappa \otimes (V/W)$  dans  $\pi$ . Par minimalité encore, on a  $W = 0$ , ce dont on déduit que  $\xi$  est irréductible.  $\square$

**Remarque 3.17.** — Plus généralement, le même argument montre que si  $G'$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $J$  et si  $\pi$  est une représentation de  $G'$ , alors la restriction de  $\pi$  à

$H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contient  $\theta$  si et seulement si la restriction de  $\pi$  à  $J$  a une sous-représentation de la forme  $\kappa \otimes \xi$ , avec  $\xi$  une représentation irréductible de  $J$  triviale sur  $J^1$ .

**3.5.3.** Soit  $\xi$  une représentation irréductible de  $J$  triviale sur  $J^1$ , soit  $\mathfrak{A}'$  un ordre héréditaire  $E$ -pur de  $A$  et soit  $\theta'$  le transfert de  $\theta$  dans  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta)$ . On pose  $J' = J(\beta, \mathfrak{A}')$  et  $J'^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A}')$ .

**Lemme 3.18.** — *On suppose que  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap B$  contient  $\mathfrak{B}$ . On note  $\xi'$  la représentation de  $U(\mathfrak{B})J'^1$  triviale sur  $J'^1$  définie par  $\xi$  et on pose  $\mu = \kappa'|_{U(\mathfrak{B})J'^1} \otimes \xi'$ .*

(1) *L'ensemble  $I_G(\mu)$  est égal à  $U(\mathfrak{B})J'^1 \cdot I_{B^\times}(\xi) \cdot U(\mathfrak{B})J'^1$  et, pour tout élément  $y \in B^\times$ , on a  $I_y(\mu) = I_y(\kappa'|_{U(\mathfrak{B})J'^1}) \otimes I_y(\xi')$ .*

(2) *Les induites compactes  $\text{ind}_J^G(\kappa \otimes \xi)$  et  $\text{ind}_{U(\mathfrak{B})J'^1}^G(\mu)$  sont isomorphes, et on a un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres :*

$$\mathcal{H}(G, \kappa \otimes \xi) \rightarrow \mathcal{H}(G, \mu)$$

*préservant les supports, c'est-à-dire que tout élément de  $\mathcal{H}(G, \kappa \otimes \xi)$  de support  $JyJ$  avec  $y \in I_{B^\times}(\xi)$  a une image dont le support est  $U(\mathfrak{B})J'^1yU(\mathfrak{B})J'^1$ .*

*Démonstration.* — Pour prouver (1), on reprend l'argument de [46, Lemme 4.2] et pour (2), on reprend l'argument de *ibid.*, proposition 4.5.  $\square$

**3.5.4.** Soit  $(J, \lambda)$  un type simple de  $G$ . On reprend les notations de la définition 3.12 et de la remarque 3.13. On note  $M_B$  le sous-groupe de Levi standard de  $B^\times$  constitué des matrices diagonales par blocs de taille  $s$  et  $\mathcal{N}_\lambda$  le normalisateur dans  $B^\times$  de la restriction de  $\sigma$  à  $U \cap M_B$ . On note  $b = b(\sigma)$  le cardinal de l'orbite de  $\sigma$  sous le groupe de Galois :

$$(3.14) \quad \Gamma = \text{Gal}(k_{D'}/k_E),$$

où  $\sigma$  est considérée comme une représentation de  $\text{GL}_s(k_{D'})^r$ . On fixe une uniformisante  $\varpi$  de  $D'$ , et on note  $\mathcal{W}_\lambda$  le sous-groupe de  $\text{GL}_r(D')$  constitué des matrices monomiales dont les coefficients non nuls sont des puissances de :

$$(3.15) \quad \varpi_\lambda = \varpi^b.$$

On voit  $\mathcal{W}_\lambda$  comme un sous-groupe de  $B^\times$  par l'intermédiaire de (3.13) et du plongement diagonal de  $D'$  dans  $\mathcal{M}_s(D')$ . L'action de  $\varpi$  par conjugaison sur  $\mathcal{O}_{D'}$  induit un automorphisme de  $k_{D'}$  engendrant le groupe  $\Gamma$ . Le groupe  $\mathcal{N}_\lambda$  est donc engendré par  $\mathcal{W}_\lambda$  et  $U \cap M_B$  et l'ensemble  $I_G(\lambda)$  est la réunion disjointe des  $JwJ$  pour  $w \in \mathcal{W}_\lambda$ .

**Lemme 3.19.** — *L'ensemble d'entrelacement de  $\lambda$  dans  $G$  est égal à  $J \cdot \mathcal{N}_\lambda \cdot J$  et, pour  $y \in I_G(\lambda)$ , on a  $\dim_{\mathbb{R}} I_y(\lambda) = 1$ .*

*Démonstration.* — Dans le cas où  $(J, \lambda)$  est de niveau 0, c'est le lemme 3.11. Sinon, c'est une conséquence de la proposition 3.2 et des lemmes 3.18 et 3.11.  $\square$

**Remarque 3.20.** — (1) Dans le cas où  $D = F$ , le groupe  $\Gamma$  est trivial et on a  $b = 1$ .

(2) Le groupe  $\mathcal{W}_\lambda$  vu comme sous-groupe de  $G$  dépend des choix de  $\varpi$  et de l'isomorphisme (3.13), mais l'ensemble  $J \cdot \mathcal{W}_\lambda \cdot J = I_G(\lambda)$  n'en dépend pas.

(3) Si  $(J, \lambda)$  est maximal, alors  $I_G(\lambda)$  est égal au normalisateur  $N_G(\lambda)$  de  $\lambda$  dans  $G$ . Celui-ci est engendré par  $J$  et  $\varpi_\lambda$ , c'est-à-dire que  $N_G(\lambda) = N_{B^\times}(\sigma)J$ . En outre, le normalisateur de  $U$  dans  $B^\times$  est engendré par  $U$  et  $\varpi$ , de sorte que  $b$  est égal à l'indice de  $N_G(\lambda)$  dans  $N_{B^\times}(U)J$ .

**3.5.5.** On note  $E_\lambda$  l'extension totalement ramifiée de  $E$  engendrée par  $\varpi_\lambda$  et l'on fixe une extension non ramifiée  $F'$  de  $E_\lambda$  de degré  $sd'$ , où  $d'$  est le degré réduit de  $D'$  sur  $E$ . On note  $I'$  le sous-groupe d'Iwahori standard de  $G' = GL_r(F')$ . On identifiera à loisir  $\mathcal{W}_\lambda$  à un sous-groupe de  $G'$  ou bien de  $G$ .

**Proposition 3.21.** — *On a un isomorphisme de  $R$ -algèbres :*

$$(3.16) \quad \Psi : \mathcal{H}(G', I') \rightarrow \mathcal{H}(G, \lambda)$$

*préservant les supports, c'est-à-dire que, pour toute fonction  $f \in \mathcal{H}(G', I')$  de support  $I'wI'$  avec  $w \in \mathcal{W}_\lambda$ , son image  $\Psi f$  est de support  $JwJ$ .*

*Démonstration.* — On reprend l'argument de [46] en précisant les modifications devant lui être apportées. On fixe un ordre maximal  $\mathfrak{B}_{\max} \supseteq \mathfrak{B}$  de  $B$  et on pose :

$$\bar{G} = U(\mathfrak{B}_{\max})/U^1(\mathfrak{B}_{\max}), \quad \bar{P} = U(\mathfrak{B})U^1(\mathfrak{B}_{\max})/U^1(\mathfrak{B}_{\max}).$$

On note  $\bar{\sigma}$  la représentation  $\sigma$  considérée comme une représentation irréductible cuspidale de  $\bar{M} = U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B})$  et on identifie  $\bar{M}$  à un sous-groupe de Levi de  $\bar{G}$ . D'après Dipper et Fleischmann [26, 27], l'algèbre des endomorphismes de l'induite parabolique  $\text{Ind}_{\bar{P}}^{\bar{G}}(\bar{\sigma})$  est isomorphe à une algèbre de Hecke de type  $A_{r-1}$  et de paramètre  $q'$ , le cardinal du corps résiduel de  $F'$ . En d'autres termes, il existe un isomorphisme de  $R$ -algèbres :

$$(3.17) \quad \mathcal{H}(GL_r(\mathcal{O}_{F'}), I') \rightarrow \mathcal{H}(U(\mathfrak{B}_{\max}), \sigma).$$

En reprenant la preuve de *ibid.*, lemme 4.4 et à l'aide du lemme 3.18(4), on obtient des homomorphismes de  $R$ -algèbres :

$$(3.18) \quad \mathcal{H}(U(\mathfrak{B}_{\max}), \sigma) \rightarrow \mathcal{H}(J_{\max}, \kappa_{\max} \otimes \sigma) \hookrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda),$$

le premier étant un isomorphisme et le second injectif. En composant (3.17) et (3.18), on obtient un homomorphisme injectif  $\Psi$  de  $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{F'}), I)$  dans  $\mathcal{H}(G, \lambda)$ . On pose :

$$(3.19) \quad h = h_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_{r-1} \\ \varpi_\lambda & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathcal{M}_s(D')) = B$$

où  $\mathrm{id}_{r-1}$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_{r-1}(\mathcal{M}_s(D'))$ , et on fixe une fonction  $\varphi \in \mathcal{H}(G, \lambda)$  de support  $JhJ$ . On va montrer qu'il existe un unique isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres (3.16) prolongeant  $\Psi$ , préservant les supports et prenant en la fonction caractéristique de  $IhI$  la valeur  $\varphi$ . Pour cela, on reprend l'argument de *ibid.*, théorème 4.6, à ceci près que la preuve de *ibid.*, lemme 4.14, doit être modifiée.

**Lemme 3.22.** — *L'élément  $\varphi$  est inversible dans  $\mathcal{H}(G, \lambda)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\varphi' \in \mathcal{H}(G, \lambda)$  de support  $Jh^{-1}J$ . Le produit  $\varphi * \varphi'$  est un multiple scalaire de l'élément neutre dans  $\mathcal{H}$ . Il est donc soit nul, soit inversible, et on va montrer que sa valeur en 1 n'est pas nulle. On fixe un ensemble  $X$  de représentants de  $J$  modulo  $J \cap h^{-1}Jh$ , qu'on peut supposer être contenu dans  $J^1$ . On a :

$$\varphi * \varphi'(1) = \sum_{x \in X} \lambda(x) \varphi(h) \varphi'(h^{-1}) \lambda(x)^{-1}.$$

D'après le lemme 3.18(2), l'opérateur d'entrelacement  $\varphi(h) \in I_h(\lambda)$  se décompose sous la forme  $\Phi_\kappa \otimes \Phi_\sigma$  avec  $\Phi_\kappa \in I_h(\kappa)$  et  $\Phi_\sigma \in I_h(\sigma)$  et le point (2) du lemme 3.11 montre que  $\Phi_\sigma$  est inversible. De façon analogue, l'opérateur d'entrelacement  $\varphi'(h^{-1})$  se décompose sous la forme  $\Phi'_\kappa \otimes \Phi'_\sigma$ , où  $\Phi'_\sigma$  est l'inverse de  $\Phi_\sigma$ . On a donc :

$$(3.20) \quad \varphi * \varphi'(1) = \left( \sum_{x \in X} \eta(x) \Phi_\kappa \Phi'_\kappa \eta(x)^{-1} \right) \otimes \mathrm{id}_\sigma,$$

où  $\mathrm{id}_\sigma$  désigne l'identité sur l'espace de  $\sigma$ , et l'on note  $\Pi$  le facteur de gauche de ce produit tensoriel. Puisque  $J^1 \cap h^{-1}J^1h$  est un pro- $p$ -groupe, la restriction de  $\eta$  à ce sous-groupe est semi-simple. Il existe donc un unique facteur irréductible en commun entre les restrictions à  $J^1 \cap h^{-1}J^1h$  de  $\eta$  et de  $\eta^h$ , et l'opérateur  $\Phi_\kappa \Phi'_\kappa$  est un multiple non nul de la projection sur ce facteur. En tant que représentation lisse irréductible d'un pro- $p$ -groupe, ce facteur a pour dimension une puissance de  $p$ , qui est non nulle dans  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la trace de  $\Pi$  est non nulle, ce qui termine la démonstration du lemme 3.22.  $\square$

À partir de là, on termine en reprenant l'argument de *ibid.*, théorème 4.6. Ceci met fin à la preuve de la proposition 3.21.  $\square$

Compte tenu de ce qui précède, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 3.23.** — *Tout élément non nul de  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  supporté par une double classe  $JyJ$ , avec  $y \in I_G(\lambda)$ , est inversible.*

### 3.6. Paires couvrantes

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques faits concernant la théorie des paires couvrantes. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [17, 53]. On fixe un entier  $m \geq 1$  et on pose  $G = G_m$ .

**3.6.1.** Soit  $\tau$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$ . Il lui correspond la  $R$ -algèbre  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \tau)$  définie au paragraphe 1.1.5, et le foncteur :

$$(3.21) \quad \mathbf{M}_\tau : \sigma \mapsto \text{Hom}_K(\tau, \sigma)$$

de  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_R(G)$  vers la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite. Par réciprocity de Frobenius, celui-ci s'identifie au foncteur  $\sigma \mapsto \text{Hom}_G(\text{ind}_K^G(\tau), \sigma)$ .

**3.6.2.** Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$  et soit  $\tau_M$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K_M$  de  $M$ . Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$  et soient  $U$  et  $U^-$  respectivement son radical unipotent et le radical unipotent opposé à  $U$  par rapport à  $M$ .

**Définition 3.24.** — On dit que  $(K, \tau)$  est une paire  $P$ -couvrante de  $(K_M, \tau_M)$  si :

(1) on a l'égalité  $K_M = K \cap M$  et une décomposition d'Iwahori :

$$(3.22) \quad K = (K \cap U^-) \cdot (K \cap M) \cdot (K \cap U) ;$$

(2) la restriction de  $\tau$  à  $K_M$  est égale à  $\tau_M$  et les sous-groupes  $K \cap U^-$  et  $K \cap U$  sont contenus dans le noyau de  $\tau$  ;

(3) il existe dans le centre de  $M$  un élément  $z$  fortement  $P$ -négatif au sens de la définition 6.16 de [17] et tel que  $\mathcal{H}$  contienne un élément inversible de support  $KzK$ .

Si  $(K, \tau)$  est  $P$ -couvrante pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  de facteur de Levi  $M$ , on dit simplement que c'est une paire couvrante.

**Remarque 3.25.** — L'algèbre de Hecke utilisée dans [17] est l'algèbre de Hecke associée à la contragrédiente  $(K, \tau^\vee)$ . Elle est opposée à  $\mathcal{H}$  (voir *ibid.*, 2.3) ce qui explique que  $z$  est supposé négatif (et non pas positif) dans la condition 3.

**Exemple 3.26.** — On reprend les notations de l'exemple 3.10, et on note  $M$  le sous-groupe de Levi de  $GL_m(D)$  constitué des matrices diagonales. Alors le couple  $(I, 1_I)$  est une paire couvrante de  $(I \cap M, 1_{I \cap M})$ .

**3.6.3.** On suppose que  $(K, \tau)$  est une paire couvrante de  $(K_M, \tau_M)$ . On a fixé au paragraphe 1.2.2 une racine carrée de  $q$  dans  $R$ . Il lui correspond un homomorphisme injectif de  $R$ -algèbres :

$$(3.23) \quad j_P : \mathcal{H}(M, \tau_M) \rightarrow \mathcal{H}(G, \tau)$$

faisant de  $\mathcal{H}$  un module à gauche sur  $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}(M, \tau_M)$  (voir [53, II.10] : pour la raison donnée à la remarque 3.25, l'homomorphisme  $j_P$  préserve les supports des fonctions de  $\mathcal{H}_M$  supportées par les éléments  $P$ -négatifs de  $M$ , et non pas  $P$ -positifs comme dans [17]). Cet homomorphisme définit un foncteur de restriction, noté  $j_P^*$ , de la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite vers la catégorie des  $\mathcal{H}_M$ -modules à droite. Pour toute représentation  $\sigma$  de  $G$ , la projection naturelle de  $\sigma$  vers son module de Jacquet  $r_P^G(\sigma)$  induit un isomorphisme :

$$(3.24) \quad j_P^*(\mathbf{M}_\tau(\sigma)) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{M}_{\tau_M}(r_P^G(\sigma))$$

de  $\mathcal{H}_M$ -modules à droite (voir [53, II.10.1]).

**Remarque 3.27.** — On déduit de (3.24) que, si une représentation  $\sigma$  de  $G$  contient une paire couvrante, alors  $r_P^G(\sigma)$  est non nul. En particulier, si une représentation irréductible  $\sigma$  de  $G$  contient une paire couvrante pour  $M \neq G$ , alors  $\sigma$  n'est pas cuspidale.

D'après Blondel [6, II] (voir aussi Dat [20, 2]), on a un isomorphisme :

$$(3.25) \quad \Phi_P : \text{ind}_K^G(\tau) \rightarrow \mathbf{i}_P^G(\text{ind}_{K_M}^M(\tau_M)), \quad \Phi_P(f)(g)(x) = \int_U f(uxg) du,$$

de représentations de  $G$  et de  $\mathcal{H}_M$ -modules à gauche, où  $du$  est la mesure de Haar sur  $U$  normalisée de telle sorte que  $K \cap U$  soit de volume 1, avec  $f \in \text{ind}_K^G(\tau)$ ,  $g \in G$  et  $x \in M$ .

**Proposition 3.28.** — Soit  $\sigma$  une représentation de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_M$ -isotypique. Alors l'induite  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est engendrée par sa composante  $\tau$ -isotypique.

*Démonstration.* — Par hypothèse, la représentation  $\sigma$  est quotient d'une somme directe arbitraire de copies de  $\text{ind}_{K_M}^M(\tau_M)$ , c'est-à-dire qu'il existe un ensemble  $S$  et un homomorphisme surjectif de représentations de  $M$  :

$$\bigoplus_S \text{ind}_{K_M}^M(\tau_M) \rightarrow \sigma.$$

Si l'on applique le foncteur exact  $\mathbf{i}_P^G$  (qui commute aux sommes directes arbitraires) et la formule (3.25), on voit que l'induite parabolique  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est un quotient d'une somme de copies de  $\text{ind}_K^G(\tau)$ , c'est-à-dire qu'elle est engendrée par sa composante  $\tau$ -isotypique.  $\square$

### 3.7. Types semi-simples

Soit  $A$  la  $F$ -algèbre centrale simple  $\mathcal{M}_m(D)$  et soit  $G = G_m$ .

**3.7.1.** Soit  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  une famille d'entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ . On pose  $M = M_\alpha$  et  $P = P_\alpha$ . Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $(J_i, \lambda_i)$  un type simple maximal de  $G_{m_i}$ . On pose :

$$(3.26) \quad J_M = J_1 \times \cdots \times J_r$$

et on note  $\lambda_M$  la représentation  $\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r$  de  $J_M$ .

**Définition 3.29.** — Un couple de la forme  $(J_M, \lambda_M)$  est appelé un *R-type simple maximal* de  $M$ .

Pour chaque  $i$ , on fixe une strate simple  $[\mathfrak{A}_i, n_i, 0, \beta_i]$  de  $\mathcal{M}_{m_i}(D)$  et un caractère simple  $\theta_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_i, 0, \beta_i)$  contenu dans  $\lambda_i$ , et on suppose que l'ordre  $\mathfrak{A}_i$  est standard. De ce fait, on a  $J_i = J(\beta_i, \mathfrak{A}_i)$  et le quotient de ce groupe par  $J_i^1 = J^1(\beta_i, \mathfrak{A}_i)$  est isomorphe à  $GL_{s_i}(k_i)$ , pour un certain entier  $s_i \geq 1$  et une certaine extension  $k_i$  de  $k_F$ . On pose  $J_M^1 = J_1^1 \times \cdots \times J_r^1$ .

On fixe une suite de  $\mathcal{O}_D$ -réseaux  $\mathcal{L}$  de  $D^m$  (voir [49, Définition 1.1]) satisfaisant aux conditions de *ibid.*, §7.2. D'après *loc. cit.*, ces données définissent des sous-groupes ouverts compacts :

$$(3.27) \quad K = K(\mathcal{L}), \quad K^1 = K^1(\mathcal{L}) = K \cap U^1(\mathcal{L}),$$

de  $G$  possédant les propriétés suivantes :

- (1)  $K$  et  $K^1$  admettent une décomposition d'Iwahori par rapport à  $(M, P')$ , pour tout sous-groupe parabolique  $P'$  de  $G$  de facteur de Levi  $M$  ;
- (2) on a  $K \cap M = J_M$  et  $K^1 \cap M = J_M^1$  ;
- (3)  $K^1$  est un pro- $p$ -sous-groupe distingué de  $K$  et :

$$(3.28) \quad K/K^1 \simeq J_M/J_M^1 \simeq GL_{s_1}(k_1) \times \cdots \times GL_{s_r}(k_r).$$

Il existe donc une unique représentation  $\tau$  de  $K$  prolongeant  $\lambda_M$ , définie par la formule :

$$(3.29) \quad \tau(uxu') = \lambda_M(x), \quad u \in K \cap U^-, \quad x \in K \cap M, \quad u' \in K \cap U.$$

**3.7.2.** On suppose que tous les caractères simples  $\theta_1, \dots, \theta_r$  sont endo-équivalents [11]. Il suffira de savoir ici que, sous cette condition, on peut supposer que les  $\beta_i$  sont tous égaux à un même  $\beta$  et que les  $\theta_i$  sont transferts les uns des autres. On note  $\mathfrak{A}$  l'ordre standard de  $\mathcal{M}_m(D)$  dont les blocs diagonaux sont les  $\mathfrak{A}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  et on note  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$



le transfert de  $\theta_i$  (qui ne dépend pas du choix de  $i$ ). On pose  $E = F(\beta)$ . Dans ce cas, on a (voir [49, 7.1]) :

$$(3.30) \quad K = K(\mathfrak{A}) = H^1(\beta, \mathfrak{A})(J(\beta, \mathfrak{A}) \cap P), \quad K^1 = K^1(\mathfrak{A}) = H^1(\beta, \mathfrak{A})(J^1(\beta, \mathfrak{A}) \cap P).$$

On fixe une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$  et on note  $\varkappa$  la représentation de  $K$  sur l'espace des  $K \cap U$ -invariants de  $\kappa$ . Sa restriction à  $J_M$  est de la forme  $\kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_r$ , où  $\kappa_i$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta_i$ . Pour  $i = 1, \dots, r$ , on écrit  $\lambda_i$  sous la forme  $\kappa_i \otimes \sigma_i$ . On réunit les  $\sigma_i$  suivant leur classe de conjugaison sous  $\Gamma = \text{Gal}(k_{D'}/k_E)$ , ce qui définit une partition :

$$\{1, \dots, r\} = I_1 \cup \cdots \cup I_u$$

avec  $u \geq 1$ , puis un sous-groupe de Levi  $L$  de  $G$  contenant  $M$ , qu'on écrit  $L_1 \times \cdots \times L_u$ , où chaque  $L_j$  est isomorphe à  $G_{r_j}$  pour un certain  $r_j \geq 1$ .

**Remarque 3.30.** — Quitte à conjuguer chaque  $(J_i, \lambda_i)$ ,  $i \in I_j$ , par un élément convenable de  $G_{m_i}$ , on peut supposer que les  $\sigma_i$ ,  $i \in I_j$ , sont tous isomorphes, et donc que l'entier  $m_i$ , la strate  $[\mathfrak{A}_i, n_i, 0, \beta_i]$ , le caractère  $\theta_i$  et la  $\beta$ -extension  $\kappa_i$  ne dépendent pas de  $i \in I_j$ . C'est ce qu'on fait dans la suite du paragraphe.

On note  $\sigma$  la représentation  $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$  considérée comme représentation de  $K$  triviale sur  $K^1$ . Remarquons que  $\tau = \varkappa \otimes \sigma$  et que  $K$  est un sous-groupe de  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$ .

**Proposition 3.31.** — *On suppose que tous les  $(J_i, \lambda_i)$  sont égaux à un même type simple maximal  $(J_1, \lambda_1)$ . Alors  $(K, \tau)$  est une paire couvrante de  $(J_M, \lambda_M)$ , et l'application :*

$$(3.31) \quad \lambda_1 \mapsto \text{ind}_K^J(\tau)$$

*induit une bijection de  $\mathcal{T}(\theta_1)$  dans  $\mathcal{T}(\theta)$  (voir les notations du paragraphe 3.5.1).*

*Démonstration.* — L'hypothèse sur les  $(J_i, \lambda_i)$  implique que  $u = 1$ , c'est-à-dire  $L = G$ . On procède comme dans [46, 5.2.3] au moyen de la proposition 3.6 et du corollaire 3.23.  $\square$

**Exemple 3.32.** — On reprend les notations de l'exemple 3.26 et on identifie  $M$  à  $D^{\times m}$ . Si l'on choisit  $(J_1, \lambda_1) = (\mathcal{O}_D^\times, 1_{\mathcal{O}_D^\times})$ , alors  $K = J = I$  et la paire couvrante lui correspondant par la proposition 3.31 est  $(I, 1_I)$ .

Pour  $j = 1, \dots, u$ , on note  $M_j$  le produit des  $G_{m_i}$  pour  $i \in I_j$  (c'est un sous-groupe de Levi de  $L_j$ ) et  $(J_{M_j}, \lambda_{M_j})$  le produit des  $(J_i, \lambda_i)$  pour  $i \in I_j$ . Compte tenu de la remarque 3.30, on peut former la paire couvrante  $(K_j, \tau_j)$  de  $(J_{M_j}, \lambda_{M_j})$  donnée par la proposition 3.31 (relativement à un sous-groupe parabolique  $P_j$  de  $L_j$  de facteur  $M_j$ ). On pose :

$$K_L = K_1 \times \cdots \times K_u, \quad \tau_L = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_u.$$

Par construction,  $(K_L, \tau_L)$  est une paire couvrante de  $(J_M, \lambda_M)$ .

**Proposition 3.33.** — (1) La paire  $(K, \tau)$  est une paire couvrante de  $(K_L, \tau_L)$ , et donc de  $(J_M, \lambda_M)$ .

(2) La restriction à  $L$  définit un isomorphisme de  $R$ -algèbres de  $\mathcal{H}(G, \tau)$  sur  $\mathcal{H}(L, \tau_L)$ .

*Démonstration.* — Dans le cas complexe, le résultat est donné par [49, Proposition 8.1]. On reprend la preuve de [48, Proposition 5.17], dans laquelle  $(K, \tau)$  est notée  $(J_P, \vartheta_P)$ . Pour le calcul de  $I_G(\tau)$ , on remplace [29, Proposition 1.2] par le lemme 3.11. La preuve de [48, Théorème 5.10] (dans laquelle  $\varkappa$  est notée  $\kappa_P$ ) est encore valable, quitte à remplacer [16, Proposition 5.1.8] par [48, Proposition 5.5(ii)], qui est encore vraie dans le cas modulaire puisque  $K^1$  (noté  $J_P^1$ ) est un pro- $p$ -groupe. Aussi a-t-on :

$$I_G(\tau) \subseteq K \cdot (L \cap B^\times) \cdot K,$$

de sorte que la restriction de  $G$  à  $L$  définit un isomorphisme de  $R$ -algèbres de  $\mathcal{H}(G, \tau)$  sur  $\mathcal{H}(L, \tau_L)$  (voir [53, II.8]). Le reste de la preuve se fait comme dans [48, Proposition 5.17]. En particulier, l'argument de [18, Lemma 3.9] est encore valable, la constante  $c$  est égale à l'indice de  $K \cap \zeta^{-1}K\zeta$  dans  $K$  (avec les notations de *loc. cit.*), qui est une puissance de  $p$  grâce à la décomposition d'Iwahori de  $K$ .  $\square$

**3.7.3.** On réunit les caractères simples  $\theta_i$  suivant leur classe d'endo-équivalence (voir [11]), ce qui définit une partition :

$$(3.32) \quad \{1, \dots, r\} = I_1 \cup \dots \cup I_t, \quad t \geq 1,$$

puis un sous-groupe de Levi  $S$  de  $G$  contenant  $M$ , qu'on écrit  $S_1 \times \dots \times S_t$ . D'après le paragraphe 3.7.2, il correspond à chaque  $k = 1, \dots, t$  une partition  $I_{k,1} \cup \dots \cup I_{k,u_k}$  de  $I_k$  et une extension finie  $F'_k$  de  $F$ . On note  $n_{k,j}$  le cardinal de  $I_{k,j}$  et on pose :

$$(3.33) \quad G' = \prod_{k=1}^t \prod_{j=1}^{u_k} GL_{n_{k,j}}(F'_k).$$

Pour  $k \in \{1, \dots, t\}$ , on forme la paire couvrante  $(K_k, \tau_k)$  donnée par la proposition 3.33 à partir des  $(J_i, \lambda_i)$ ,  $i \in I_k$ . On pose :

$$K_S = K_1 \times \dots \times K_t, \quad \tau_S = \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_t.$$

Par construction,  $(K_S, \tau_S)$  est une paire couvrante de  $(J_M, \lambda_M)$ . On note  $I'$  le sous-groupe d'Iwahori standard de  $G'$ , c'est-à-dire le produit des sous-groupes d'Iwahori standards de  $GL_{n_{k,j}}(F'_k)$ .

**Proposition 3.34.** — (1) La paire  $(K, \tau)$  est une paire couvrante de  $(K_S, \tau_S)$ , et donc de  $(J_M, \lambda_M)$ .

(2) La restriction à  $S$  définit un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres de  $\mathcal{H}(G, \tau)$  sur  $\mathcal{H}(S, \tau_S)$ , et on a un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres :

$$\Psi : \mathcal{H}(G', I') \rightarrow \mathcal{H}(G, \tau)$$

préservant les supports.

*Démonstration.* — Dans le cas complexe, le résultat est donné par [49, Theorem 8.2]. On reprend la preuve de [48, Corollaire 4.6], dans laquelle la paire  $(K, \tau)$  est notée  $(\tilde{K}, \varrho)$ . En particulier, l'argument de [18, Corollary 6.6] est encore valable, la constante  $c$  est égale à l'indice de  $\tilde{K} \cap \zeta^{-1} \tilde{K} \zeta$  dans  $\tilde{K}$  (avec les notations de *loc. cit.*), qui est une puissance de  $p$  grâce à la décomposition d'Iwahori de  $\tilde{K}$ .  $\square$

**3.7.4.** On définit maintenant la notion de type semi-simple, qu'on utilisera beaucoup par la suite.

**Définition 3.35.** — Un *type semi-simple* de  $G$  est une paire couvrante  $(K, \tau)$  d'un type simple maximal d'un sous-groupe de Levi de  $G$ , définie par la proposition 3.34.

C'est cohérent avec la définition 3.8, c'est-à-dire qu'un type semi-simple de niveau 0 de  $G$  est un type semi-simple au sens de la définition 3.35.

**Remarque 3.36.** — Un type semi-simple associé par la proposition 3.34 à un type simple maximal d'un sous-groupe de Levi  $M$  (définition 3.29) est simple si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

- (1) On a  $M = G$ , auquel cas ce type semi-simple est simple maximal.
- (2) La paire  $(J_M, \lambda_M)$  dont ce type semi-simple est une paire couvrante est, à conjugaison près par  $M$ , de la forme  $\lambda_M = \lambda_0 \otimes \cdots \otimes \lambda_0$  avec  $\lambda_0$  un type simple maximal de niveau 0, auquel cas on est dans la situation de la proposition 3.31 avec  $J = K$ .

**Proposition 3.37.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $G$ . Si  $\pi$  contient un type semi-simple, alors ce type semi-simple est simple maximal.

*Démonstration.* — D'après la remarque 3.27, ce type semi-simple ne peut pas être une paire couvrante relativement à un sous-groupe de Levi propre de  $G$ . Par conséquent, il est donné par la proposition 3.31 avec  $M = G$ . C'est donc un type simple maximal.  $\square$

### 3.8. Réduction des types simples et semi-simples

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ , et soit  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ . Avec les notations du paragraphe 3.2, on fixe des homomorphismes  $\iota_{p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell}$  et  $\iota_{p, \overline{\mathbb{F}}_\ell}$  tels que, pour tout  $x \in \mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$ , l'image de  $\iota_{p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell}(x)$  dans  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  soit égale à  $\iota_{p, \overline{\mathbb{F}}_\ell}(x)$ .

On pose  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$ ,  $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$  et  $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A})$ .

**Proposition 3.38.** — *Pour tout entier  $0 \leq m \leq -k_0(\beta, \mathfrak{A}) - 1$ , la réduction modulo  $\ell$  définit une bijection de  $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A}, m, \beta)$  vers  $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A}, m, \beta)$ .*

On appellera *relèvement* d'un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A}, m, \beta)$  son image réciproque dans  $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A}, m, \beta)$  par cette bijection.

**Proposition 3.39.** — *Soit  $\theta \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère simple, soit  $\tilde{\theta}$  le relèvement de  $\theta$  à  $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  et soit  $\tilde{\kappa}$  une  $\beta$ -extension de  $\tilde{\theta}$ .*

- (1) *Si  $\mathfrak{k}$  est une structure entière de  $\tilde{\kappa}$ , alors  $\mathfrak{k} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta$ .*
- (2) *L'homomorphisme de réduction  $\mathbf{r}_\ell$  induit une surjection de  $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\theta})$  sur  $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\theta)$ .*

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle donnée dans [52, III.4.18]. On note  $\kappa$  la  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\mathfrak{k} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  de  $J$ . La restriction de  $\tilde{\kappa}$  à  $H^1$  est un multiple de  $\tilde{\theta}$ , donc la restriction de  $\kappa$  à  $H^1$  est un multiple de  $\theta$ . La restriction de  $\kappa$  au pro- $p$ -groupe  $J^1$  contient donc et est de même dimension que la représentation de Heisenberg  $\eta$ . Enfin, d'après [52, Lemme I.9.8], l'entrelacement de  $\kappa$  dans  $G$  est égal à  $JB^\times J$ . C'est donc une  $\beta$ -extension de  $\theta$ .

Soit maintenant  $\kappa'$  une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . D'après le lemme 3.4, il existe un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère  $\chi$  de  $k_{\mathbb{E}}^\times$  tel que  $\kappa$  soit isomorphe à  $\kappa'^\chi$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\kappa})$  est égale à  $\kappa'^\chi$ . Si l'on note  $\alpha$  le relèvement de Teichmüller de  $\chi^{-1}$ , alors l'image de  $\tilde{\kappa}^{\alpha}$  par  $\mathbf{r}_\ell$  est  $\kappa'$ .  $\square$

**Remarque 3.40.** — Deux  $\beta$ -extensions de  $\tilde{\theta}$  ont des réductions modulo  $\ell$  isomorphes si et seulement si elles sont tordues l'une de l'autre par un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère d'ordre une puissance de  $\ell$ .

**Proposition 3.41.** — *Soit  $(U(\mathfrak{A}), \tilde{\sigma})$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple de niveau 0 de  $G$ , où  $\mathfrak{A}$  est un ordre héréditaire de  $G$ .*

- (1) *Si  $\mathfrak{s}$  est une structure entière de  $\tilde{\sigma}$ , alors  $\mathfrak{s} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple de niveau 0 de  $G$ .*
- (2) *L'homomorphisme de réduction  $\mathbf{r}_\ell$  induit une surjection de  $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A})$  sur  $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A})$ .*

*Démonstration.* — En considérant un type simple de niveau 0 comme une représentation du quotient  $U(\mathfrak{A})/U^1(\mathfrak{A})$ , on se ramène au problème de la réduction des représentations

irréductibles cuspidales du groupe fini  $GL_s(k_D)$  avec  $s \geq 1$ . Le résultat se déduit alors du paragraphe A.3.1.  $\square$

**Proposition 3.42.** — *Soit  $\theta \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère simple et soit  $\tilde{\theta}$  le relèvement de  $\theta$  à  $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ .*

(1) *Si  $\mathfrak{l}$  est une structure entière d'un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple contenant  $\tilde{\theta}$ , alors  $\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple contenant  $\theta$ .*

(2) *L'homomorphisme de réduction  $\mathbf{r}_\ell$  induit une surjection de  $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\theta})$  sur  $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\theta)$ .*

*Démonstration.* — On fixe un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple  $\tilde{\lambda}$  contenant  $\tilde{\theta}$ , qu'on écrit  $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma}$ . Si  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{s}$  sont des structures entières de  $\tilde{\kappa}$  et  $\tilde{\sigma}$  respectivement,  $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{s}$  est une structure entière de  $\tilde{\lambda}$ . Le résultat est alors une conséquence des propositions 3.39 et 3.41.  $\square$

En particulier, la proposition 3.42 montre que l'existence des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -types simples se déduit de l'existence des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -types simples prouvée dans [44, 45].

**Proposition 3.43.** — *Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$ , soit  $(J_M, \lambda_M)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple maximal de  $M$  et soit  $(J_M, \tilde{\lambda}_M)$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple maximal de  $M$  relevant  $(J_M, \lambda_M)$ .*

(1) *Si  $\mathfrak{t}$  est une structure entière d'un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type semi-simple de  $G$  associé à  $(J_M, \tilde{\lambda}_M)$ , alors  $\mathfrak{t} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type semi-simple de  $G$  associé à  $(J_M, \lambda_M)$ .*

(2) *Pour tout  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type semi-simple  $(K, \tau)$  de  $G$  associé à  $(J_M, \lambda_M)$ , il existe un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type semi-simple de  $G$  associé à  $(J_M, \tilde{\lambda}_M)$  dont la réduction modulo  $\ell$  soit isomorphe à  $\tau$ .*

#### 4. Représentations cuspidales de $GL_m(D)$

Soit  $m \geq 1$  un entier et soit  $G = GL_m(D)$ . Dans cette section, on effectue la classification des représentations irréductibles cuspidales de  $G$  en termes de types simples maximaux (théorème 4.4). Ceci a été fait par Bushnell-Kutzko [16] et Sécherre-Stevens [48] dans le cas complexe et par Vignéras [52] pour  $GL_n(F)$  dans le cas modulaire. Cette classification permet d'associer certains invariants à une représentation irréductible cuspidale de  $G$  (paragraphe 4.4).

On étudie ensuite les problèmes de la réduction et du relèvement des représentations irréductibles cuspidales de  $G$ . On montre que, contrairement au cas déployé traité dans [52], une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G$  ne se réduit pas toujours en une représentation irréductible (théorème 4.15) et qu'une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$  n'admet pas toujours un relèvement (paragraphe 4.6). Néanmoins, on prouve que toute  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale admet un relèvement (voir le théorème 4.24), et on donne dans le cas où  $D$  est commutative une nouvelle preuve du

théorème de Vignéras selon lequel la réduction modulo  $\ell$  d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière est irréductible (corollaire 4.18 et remarque 4.19).

#### 4.1. Types simples maximaux

Soit  $(J, \lambda)$  un type simple maximal de  $G = G_m$ , et soit  $N = N_G(\lambda)$  le normalisateur de  $\lambda$  dans  $G$ .

**Proposition 4.1.** — *Pour toute représentation  $\Lambda$  prolongeant  $\lambda$  à  $N$ , l'induite compacte  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G$ . En outre, l'application :*

$$(4.1) \quad \Lambda \mapsto \text{ind}_N^G(\Lambda)$$

*induit une bijection entre prolongements de  $\lambda$  à  $N$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G$  contenant  $\lambda$ .*

*Démonstration.* — La preuve s'inspire de [54] mais des modifications doivent être apportées. Soit  $(J, \lambda)$  un type simple de  $G$ , qu'on décompose sous la forme  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ , et soit  $\Lambda$  une représentation de  $N$  prolongeant  $\lambda$ . Puisque l'entrelacement de  $\Lambda$  dans  $G$  est égal à  $N$  (remarque 3.20), la  $R$ -algèbre des endomorphismes de  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$  est isomorphe à  $R$ .

**Lemme 4.2.** — *La représentation de  $N$  sur la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$  est isomorphe à la somme directe des  $\Lambda^n$ , avec  $n \in N_{B^\times}(U)J/N$ .*

**Remarque 4.3.** — Dans le cas où  $D = F$ , les groupes  $N_{B^\times}(U)$  et  $N_{B^\times}(\sigma)$  sont égaux, de sorte que la représentation de  $N$  sur la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$  est irréductible et isomorphe à  $\Lambda$  : voir [54, Corollary 8.4].

*Démonstration.* — Il suffit de reprendre la preuve de [54, Proposition 8.3] en prenant garde à la différence entre le  $B^\times$ -normalisateur de  $U$  et celui de  $\sigma$  : la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$  se décompose en la somme directe des  $\text{Hom}_{J^1 \cap N^g}(\eta, \Lambda^g)$  pour  $g$  décrivant un système de représentants de  $G$  modulo  $(N, J^1)$ . Par cuspidalité de  $\sigma$ , ces espaces sont nuls sauf pour  $g \in N_{B^\times}(U)J^1$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$

On pose maintenant  $N^\circ = N_{B^\times}(U)J$ , et on a le corollaire suivant au lemme 4.2.

**Corollaire 4.4.** — *La représentation de  $N^\circ$  sur la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$ , notée  $\Lambda^\circ$ , est irréductible et isomorphe à l'induite de  $\Lambda$  à  $N^\circ$ .*

Pour appliquer le critère d'irréductibilité [54, 4.2], il s'agit de montrer que, pour tout quotient irréductible  $\pi$  de  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$ , la représentation  $\Lambda^\circ$  est un quotient de la restriction de  $\pi$  à  $N^\circ$ . Soit  $\pi$  un tel quotient irréductible ; puisque l'induite compacte de  $\Lambda^\circ$  à  $G$  est isomorphe à  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$ , la restriction de  $\pi$  à  $N^\circ$  contient  $\Lambda$ . Par ailleurs, puisque  $J^1$  est un

pro- $p$ -groupe, la composante  $\eta$ -isotypique de  $\pi$  est un quotient de celle de  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$  comme représentation de  $N^\circ$ , qui est isomorphe à  $\Lambda^\circ$  d'après le corollaire 4.4. Mais c'est aussi un facteur direct de la restriction de  $\pi$  à  $J^1$  (qui est semi-simple), de sorte que  $\pi$  a la propriété attendue. Enfin, l'induite compacte  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$  est cuspidale, puisque ses coefficients sont à support compact modulo le centre de  $G$  (voir [52, II.2.7]).

Il reste à prouver que l'application (4.1) est bijective. Notons  $Z$  le centre de  $G$  et fixons un caractère  $\omega : Z \rightarrow \mathbb{R}^\times$  dont la restriction à  $J \cap Z$  coïncide avec le caractère par lequel agit  $\lambda|_{J \cap Z}$ . On note  $\lambda_\omega$  l'unique représentation de  $JZ$  prolongeant  $\lambda$  et de caractère central  $\omega$ . On va prouver que (4.1) induit une bijection entre prolongements de  $\lambda_\omega$  à  $N$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G$  contenant  $\lambda_\omega$ . Par un argument similaire à celui de [52, III.4.27], la représentation  $\lambda_\omega$  admet un prolongement  $\Lambda$  à  $N$  et l'application  $\chi \mapsto \Lambda\chi$  est une bijection entre les caractères de  $N$  triviaux sur  $JZ$  et les prolongements de  $\lambda_\omega$  à  $N$ . On en déduit que (4.1) est injective. Si maintenant  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G$  contenant  $\lambda_\omega$ , alors  $\rho$  est un quotient de l'induite  $\text{ind}_N^G(\Lambda \otimes \mathbb{R}[N/JZ])$ . Il existe donc un caractère  $\chi$  de  $N$  trivial sur  $JZ$  tel que  $\rho$  soit un quotient de (et donc soit isomorphe à) l'induite  $\text{ind}_N^G(\Lambda\chi)$ . Ceci met fin à la démonstration de la proposition 4.1.  $\square$

Un couple de la forme  $(N, \Lambda)$  produit à partir d'un type simple maximal  $(J, \lambda)$  de  $G$  est appelé un *type simple maximal étendu* de  $G$ .

## 4.2. Représentations cuspidales de niveau 0

Rappelons qu'une représentation irréductible de  $G$  est de niveau 0 s'il y a un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire  $\mathfrak{A}$  de  $A = \mathcal{M}_m(D)$  tel que cette représentation possède un vecteur non nul invariant par  $U^1(\mathfrak{A})$ .

**Théorème 4.5.** — *Toute représentation irréductible cuspidale de niveau 0 de  $G$  contient un type simple maximal de niveau 0.*

*Démonstration.* — Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de niveau 0 de  $G$ , et soit  $\mathfrak{A}$  un ordre héréditaire minimal parmi ceux pour lesquels  $\rho$  a des vecteurs invariants par  $U^1 = U^1(\mathfrak{A})$ , que l'on peut supposer standard. On pose  $U = U(\mathfrak{A})$ . On a un isomorphisme de groupes :

$$(4.2) \quad U/U^1 \rightarrow \text{GL}_{m_1}(k_D) \times \cdots \times \text{GL}_{m_r}(k_D),$$

où  $r \geq 1$  est la période de  $\mathfrak{A}$  et les  $m_i$  des entiers dont la somme est égale à  $m$ . De cette façon, le groupe de Galois  $\text{Gal}(k_D/k_F)$  opère sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de  $U/U^1$ .



**Lemme 4.6.** — *Il existe une représentation irréductible  $\sigma$  de  $U$  triviale sur  $U^1$  telle que  $\text{Hom}_U(\sigma, \rho) \neq 0$ , et qui est cuspidale en tant que représentation de  $U/U^1$ .*

*Démonstration.* — L'existence d'une représentation irréductible  $\sigma$  de  $U$  triviale sur  $U^1$  telle que  $\text{Hom}_U(\sigma, \rho) \neq 0$  est donnée par le lemme 3.16. Pour prouver que  $\sigma$  est cuspidale en tant que représentation de  $U/U^1$ , on peut reprendre l'argument de [52, III.3.2].  $\square$

Fixons une représentation  $\sigma$  de  $U$  satisfaisant aux conditions du lemme 4.6. Le couple  $(U, \sigma)$  est un type semi-simple. D'après la proposition 3.37, puisque ce type semi-simple apparaît dans une représentation cuspidale, c'est un type simple maximal, ce qui met fin à la démonstration du théorème 4.5.  $\square$

### 4.3. Représentations cuspidales de niveau non nul

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 4.7.** — *Toute représentation irréductible cuspidale de niveau non nul de  $G$  contient un type simple maximal de niveau non nul.*

Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de niveau non nul de  $G$ . Dans un premier temps, il s'agit de montrer que  $\rho$  contient un caractère simple. Comme au paragraphe 3.2, on fixe un homomorphisme injectif  $\iota_{p,R}$  du groupe des racines complexes de l'unité d'ordre une puissance de  $p$  vers  $R^\times$  et un caractère  $\psi_{F,C} : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  trivial sur  $\mathfrak{p}_F$  mais pas sur  $\mathcal{O}_F$ . À une strate  $[\mathfrak{A}, n, n-1, \beta]$  de  $A = \mathcal{M}_m(D)$  correspond le caractère :

$$(4.3) \quad \psi_\beta : x \mapsto \iota_{p,R} \circ \psi_{F,C} \circ \text{tr}_{A/F}(\beta(x-1))$$

du sous-groupe ouvert compact  $U^n(\mathfrak{A})$ .

**Lemme 4.8.** — *Il existe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, n-1, \beta]$  de  $A$  telle que la restriction de  $\rho$  à  $U^n(\mathfrak{A})$  contienne  $\psi_\beta$ .*

*Démonstration.* — La démonstration de Broussous [10] dans le cas complexe, elle-même inspirée de celle de Bushnell et Kutzko [18] concernant  $GL_n(F)$ , s'adapte ici. Rappelons-en les principales étapes.

(1) D'abord, on montre que toute représentation de  $G$  de niveau non nul contient une strate fondamentale au sens de [48, Définition 3.9].

(2) Ensuite, on montre qu'une représentation de  $G$  de niveau non nul contenant une strate fondamentale scindée (au sens de [48, Définition 3.9]) a un module de Jacquet non nul relativement à un sous-groupe parabolique propre de  $G$ .



(3) Enfin, on montre que toute représentation de  $G$  de niveau non nul contenant une strate fondamentale non scindée de  $A$  contient également une strate simple de  $A$ .

L'étape 1 (voir par exemple [32]) repose sur [10, Proposition 1.2.2] qui ne dépend pas du corps  $R$ . L'étape 2 repose principalement sur les propositions 2.3.2 et 2.4.3 de [10] (qui correspondent respectivement au théorème 3.7 et au lemme 3.9 de [18]) ; la première est indépendante du corps  $R$ , et la preuve de la seconde reste valable dans le cas modulaire. L'étape 3 repose sur [10, Théorème 1.2.5], qui ne dépend pas du corps  $R$ .  $\square$

**Lemme 4.9.** — *Il existe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$  et un caractère simple  $\theta$  dans  $\mathcal{C}(\beta, 0, \mathfrak{A})$  tels que la restriction de  $\rho$  à  $H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contienne  $\theta$ .*

*Démonstration.* — La démonstration de [48] dans le cas complexe s'adapte ici. Il s'agit de prouver que, si le résultat n'est pas vrai,  $\rho$  contient ou bien une strate scindée, ou bien un caractère scindé au sens de la définition 3.22 de [48], et que dans chacun de ces deux cas,  $\rho$  a un module de Jacquet non nul relativement à un sous-groupe parabolique propre, ce qui conduit à une contradiction. La première étape repose sur [48, Théorème 3.23], dont la preuve ne dépend pas du corps  $R$ . La seconde étape repose principalement sur le théorème 4.3 et le corollaire 4.6 de [48] (ce dernier correspondant à [18, Corollary 6.6]) ; la preuve du théorème ne dépend pas du corps  $R$  et celle du corollaire reste valable dans le cas modulaire.  $\square$

On fixe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$  et un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\beta, 0, \mathfrak{A})$  satisfaisant à la condition du lemme 4.9, en choisissant  $\mathfrak{A}$  minimal pour cette propriété. On pose  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  et  $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$  et on fixe une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$ . D'après le lemme 3.16, la représentation  $\rho$  contient une sous-représentation de la forme  $\kappa \otimes \sigma$ , avec  $\sigma$  une représentation irréductible de  $J$  triviale sur  $J^1$ .

**Lemme 4.10.** — *En tant que représentation de  $J/J^1 \simeq \mathrm{GL}_s(k_{\mathbb{D}'})^r$ , la représentation  $\sigma$  est cuspidale.*

*Démonstration.* — La preuve de [48, Proposition 5.15] s'adapte ici.  $\square$

La paire  $(J, \kappa \otimes \sigma)$  est induite à partir d'un type semi-simple donné par la proposition 3.33. D'après la proposition 3.37, c'est un type simple maximal, puisqu'il apparaît dans une représentation cuspidale. Ceci met fin à la démonstration du théorème 4.7.

#### 4.4. Invariants associés à une représentation cuspidale

Soit un entier  $m \geq 1$ . Le théorème suivant subsume les théorèmes 4.5 et 4.7, et il les complète en fournissant une classification des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G = G_m$  par la théorie des types simples.

**Théorème 4.11.** — *L'application :*

$$(4.4) \quad \Lambda \mapsto \text{ind}_N^G(\Lambda)$$

*induit une bijection entre classes de  $G$ -conjugaison de types simples maximaux étendus et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 4.1, cette application est bien définie, et elle est surjective d'après les théorèmes 4.5 et 4.7. Pour prouver qu'elle est injective, on reprend l'argument de [49, Theorem 7.2]. Si  $(J, \lambda)$  et  $(J', \lambda')$  sont deux types simples maximaux contenus dans une même représentation irréductible cuspidale de  $G$ , on peut commencer par supposer que  $J' = J = J(\beta, \mathfrak{A})$  et que  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont respectivement de la forme  $\kappa \otimes \sigma$  et  $\kappa \otimes \sigma'$ , où  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension d'un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  et où  $\sigma, \sigma'$  sont des représentations irréductibles cuspidales de  $J(\beta, \mathfrak{A})/J^1(\beta, \mathfrak{A})$ .

Comme  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont contenus dans une même représentation irréductible de  $G$ , il existe  $g \in G$  qui entrelace  $\lambda$  et  $\lambda'$ . En raisonnant comme dans [16, Proposition 5.3.2] (voir aussi [52, 4.22]), on en déduit qu'il existe  $x \in B^\times$  qui entrelace  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Comme ces représentations sont irréductibles et cuspidales, cela entraîne que  $x$  normalise  $U(\mathfrak{B})$ , et donc que  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont conjuguées sous le normalisateur de  $\mathfrak{B}$ . On termine la démonstration en invoquant la bijectivité de l'application (4.1).  $\square$

**Remarque 4.12.** — Le membre droite de (4.4) est supercuspidal si et seulement si, pour une décomposition de  $\Lambda|_J = \lambda$  sous la forme  $\kappa \otimes \sigma$ , la représentation  $\sigma$  est supercuspidale comme représentation irréductible de  $GL_{m'}(k_{D'})$  (voir [53, IV.1]).

Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G$ . Il s'agit d'associer à  $\rho$  un certain nombre d'invariants. On fixe un type simple maximal  $(J, \lambda)$  de  $G$  contenu dans  $\rho$ . On fixe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  le définissant, on pose  $E = F(\beta)$  et on écrit  $\lambda$  sous la forme  $\kappa \otimes \sigma$ . On note  $\Gamma$  le groupe de Galois défini par (3.14).

D'après [47, Proposition 4.1], dont la preuve est encore valable lorsque le corps  $R$  est de caractéristique non nulle, le groupe des caractères non ramifiés  $\chi$  de  $G$  tels que  $\rho\chi$  soit isomorphe à  $\rho$  est un groupe fini cyclique. Son cardinal est noté :

$$(4.5) \quad n(\rho)$$

et est appelé le *nombre de torsion* de  $\rho$ . Si  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle, cet entier est premier à  $\ell$ . On rappelle que  $d$  désigne le degré résiduel de  $D$  sur  $F$  et on note :

$$(4.6) \quad f(\rho)$$

le quotient de  $md$  par l'indice de ramification de  $E$  sur  $F$ . On remarque que, si  $F'$  est une extension finie de  $F$  comme au paragraphe 3.5.4, alors son degré résiduel est égal à  $f(\rho)$  (voir le lemme 4.14). On note ensuite :

$$(4.7) \quad b(\rho), s(\rho),$$

respectivement les cardinaux de l'orbite et du stabilisateur de  $\sigma$  sous  $\Gamma$ . Remarquons que  $s(\rho)$  est égal à l'indice de  $E \times J$  dans  $N_G(\lambda)$ . En raisonnant comme dans [47, 4.1], on vérifie que  $s(\rho)$  divise  $f(\rho)$  et que, si l'on note  $\ell$  la caractéristique de  $R$ , on a :

$$(4.8) \quad n(\rho) = \left\{ \frac{f(\rho)}{s(\rho)} \right\}_\ell,$$

où  $\{a\}_\ell$  désigne le plus grand diviseur premier à  $\ell$  d'un entier  $a \geq 1$ . Si  $\ell = 0$ , on convient que  $\{a\}_0 = a$ .

**Proposition 4.13.** — *Les quantités  $n(\rho)$ ,  $f(\rho)$ ,  $b(\rho)$ ,  $s(\rho)$  ne dépendent que de la classe d'inertie de  $\rho$ , et pas du type simple maximal  $(J, \lambda)$  ni de la strate  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ .*

*Démonstration.* — Par définition,  $n(\rho)$  ne dépend que de la classe d'inertie de  $\rho$ . Ensuite, on fixe un type simple  $(J', \lambda')$  contenu dans  $\rho$ , une strate simple  $[\mathfrak{A}', n', 0, \beta']$  le définissant et on écrit  $\lambda'$  sous la forme  $\kappa' \otimes \sigma'$ . D'après le théorème 4.11, le type simple  $(J', \lambda')$  est conjugué à  $(J, \lambda)$  sous  $G$ . On peut donc supposer que  $(J', \lambda')$  est égal à  $(J, \lambda)$ . D'après [11, Theorem 9.4], l'indice de ramification et le degré résiduel de  $E$  sur  $F$  ne dépendent pas du choix de la strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ , c'est-à-dire qu'ils sont respectivement égaux à l'indice de ramification et au degré résiduel de  $F(\beta')$  sur  $F$ . L'entier  $f(\rho)$  ne dépend donc pas des choix effectués, non plus que le degré réduit de  $D'$  sur  $E$ . Il reste donc à prouver que  $b(\rho)$  ne dépend pas du choix de  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  ni de  $\sigma$ . Si l'on considère  $\sigma$  comme une représentation de  $J/J^1$ , alors  $b(\rho)$  est égal à l'indice de  $N_G(\lambda)$  dans  $N_G(J)$ , donc  $b(\rho)$  et  $s(\rho)$  ne dépendent que de la classe d'inertie de  $\rho$ .  $\square$

On introduit quelques invariants supplémentaires, qui sont définis à partir des invariants précédents. D'abord, il est commode d'introduire la notation :

$$(4.9) \quad q(\rho) = q^{f(\rho)}.$$

Ensuite, si  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle, on note :

$$(4.10) \quad e(\rho)$$

l'ordre de  $q(\rho)$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$  et :

$$(4.11) \quad m(\rho)$$

le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $1 + q(\rho) + \cdots + q(\rho)^{k-1}$  soit congru à 0 modulo  $\ell$ . Cet entier vaut  $\ell$  si  $e(\rho) = 1$ , et il vaut  $e(\rho)$  sinon. Si  $R$  est de caractéristique nulle, on convient que  $e(\rho) = m(\rho) = +\infty$ .

**Lemme 4.14.** — *Soit  $F'$  une extension finie de  $F$  comme au paragraphe 3.5.4, et soit  $m(\sigma)$  comme dans la définition A.5.*

- (1) *Le cardinal du corps résiduel de  $F'$  est égal à  $q(\rho)$ .*
- (2) *On a  $m(\rho) = m(\sigma)$ .*

*Démonstration.* — Ces deux égalités sont des conséquences de la définition de  $F'$  et du fait que :

$$m'd'e(E : F) = f(\rho),$$

où  $d'$  est le degré résiduel de  $D'$  sur  $E$  et  $e(E : F)$  l'ordre de ramification de  $E$  sur  $F$ .  $\square$

Les quantités  $q(\rho)$ ,  $e(\rho)$  et  $m(\rho)$  ne dépendent que de la classe d'inertie de  $\rho$ .

#### 4.5. Réduction d'une représentation cuspidale entière

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . On note  $e$  l'ordre de  $q$  dans  $\overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ .

Soit  $m \geq 1$  et soit  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G = G_m$ . Soit  $(J, \tilde{\lambda})$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple maximal de  $G$  contenu dans  $\tilde{\rho}$  et soit  $\tilde{N}$  son normalisateur dans  $G$ . Soit  $\tilde{\Lambda}$  la  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation de  $\tilde{N}$  prolongeant  $\tilde{\lambda}$  correspondant à  $\tilde{\rho}$  par la proposition 4.1, c'est-à-dire que  $\tilde{\rho}$  est isomorphe à l'induite compacte  $\text{ind}_{\tilde{N}}^G(\tilde{\Lambda})$ . Puisque  $\tilde{\rho}$  est entière, sa restriction à  $\tilde{N}$  l'est également, ainsi que  $\tilde{\Lambda}$  qui en est un facteur direct.

Si  $\mathfrak{I}$  est une structure entière de  $\tilde{\Lambda}$ , c'est aussi une structure entière de  $\tilde{\lambda}$ , et la représentation  $\lambda = \mathfrak{I} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple maximal de  $G$  d'après la proposition 3.42. On note  $N$  le normalisateur de  $\lambda$  dans  $G$ . Le groupe  $\tilde{N}$  est contenu dans  $N$  et, d'après la remarque 3.20(3), il est d'indice fini dans  $N$ . On note :

$$(4.12) \quad a = a(\tilde{\rho}, \ell) = \{(N : \tilde{N})\}_\ell$$

le plus grand diviseur de  $(N : \tilde{N})$  premier à  $\ell$ , c'est-à-dire le nombre de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères du groupe cyclique  $N/\tilde{N}$ . On note  $\nu = \nu_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$  la réduction modulo  $\ell$  du  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère non ramifié  $\tilde{\nu} = \nu_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$  de  $G$ . Ce caractère est d'ordre fini égal à  $e$ .

**Théorème 4.15.** — *Il y a une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$  telle que :*

$$(4.13) \quad \mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = \frac{(N : \tilde{N})}{a} \cdot ([\rho] + [\rho\nu^{e/a}] + \cdots + [\rho\nu^{(a-1)e/a}])$$

dans le groupe de Grothendieck  $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$ .

*Démonstration.* — On note  $\Lambda^b$  la représentation de  $\tilde{N}$  sur  $\mathbb{1} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ . C'est un prolongement de  $\lambda$  à  $\tilde{N}$ , que l'on peut prolonger à  $N$  d'après le lemme suivant.

**Lemme 4.16.** — *Il existe une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\Lambda$  de  $N$  prolongeant  $\Lambda^b$ .*

*Démonstration.* — On choisit une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\Lambda_0$  de  $N$  prolongeant  $\lambda$ . Les  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations de  $N$  prolongeant  $\lambda$  sont toutes de la forme  $\chi\Lambda_0$ , où  $\chi$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère de  $N$  trivial sur  $J$ . Il existe un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère  $\chi'$  de  $\tilde{N}$  trivial sur  $J$  tel que la restriction de  $\Lambda_0$  à  $\tilde{N}$  soit isomorphe à  $\chi'\Lambda^b$ . Puisque le groupe  $N/J$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , il existe un caractère  $\chi$  de  $N$  prolongeant  $\chi'$ . Alors  $\Lambda = \chi\Lambda_0$  est une représentation de  $N$  prolongeant  $\Lambda^b$ .  $\square$

On choisit une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\Lambda$  de  $N$  prolongeant  $\Lambda^b$ , et on note  $\Lambda^\circ$  son induite au groupe  $N^\circ = N_{B^\times}(U)J$  (corollaire 4.4). D'après la proposition 4.1, l'induite compacte :

$$(4.14) \quad \rho = \text{ind}_N^G(\Lambda) = \text{ind}_{N^\circ}^G(\Lambda^\circ)$$

est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$ . On va montrer que :

$$(4.15) \quad \mathbf{r}_\ell(\Lambda^\circ) = \frac{(N : \tilde{N})}{a} \cdot ([\Lambda^\circ] + [\alpha\Lambda^\circ] + \cdots + [\alpha^{a-1}\Lambda^\circ])$$

dans le groupe de Grothendieck des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations de longueur finie de  $N^\circ$ , où  $\alpha$  est un générateur quelconque du groupe cyclique  $\text{Hom}(N/\tilde{N}, \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times)$ . En choisissant le caractère  $\alpha = \nu^{e/a}$  et en appliquant  $\text{ind}_{N^\circ}^G$ , on en déduira (4.13). L'induite :

$$\text{ind}_N^{N^\circ}(\mathbb{1}) = \text{ind}_N^{N^\circ}(\text{ind}_N^N(\mathbb{1}))$$

est une structure entière de  $\Lambda^\circ$ . Puisque le foncteur  $\text{ind}_N^{N^\circ}$  est exact, il suffit pour déterminer  $\mathbf{r}_\ell(\Lambda^\circ)$  de calculer la réduction modulo  $\ell$  de  $\text{ind}_N^N(\Lambda)$ . Écrivons :

$$(4.16) \quad \text{ind}_N^N(\mathbb{1}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell = \Lambda \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell[N/\tilde{N}],$$

où  $\overline{\mathbb{F}}_\ell[N/\tilde{N}]$  désigne la représentation régulière du groupe cyclique  $N/\tilde{N}$ , c'est-à-dire l'induite à  $N$  du  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère trivial de  $\tilde{N}$ . Sa semi-simplification est égale à :

$$\frac{(N : \tilde{N})}{a} \cdot ([1] + [\alpha] + \cdots + [\alpha^{a-1}]),$$

où  $\alpha$  est un générateur du groupe  $\text{Hom}(N/\tilde{N}, \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times)$ . Compte tenu de (4.16), on obtient :

$$(4.17) \quad \mathbf{r}_\ell(\text{ind}_{\tilde{N}}^N(\Lambda)) = \frac{(N : \tilde{N})}{a} \cdot ([\Lambda] + [\alpha\Lambda] + \cdots + [\alpha^{a-1}\Lambda]).$$

On obtient le résultat annoncé en induisant à  $N^\circ$ .  $\square$

**Remarque 4.17.** — La représentation  $\rho$  dépend du choix de  $\Lambda$  (changer  $\Lambda$  a pour effet de tordre  $\rho$  par une puissance de  $\nu^{e/a}$ ) mais  $n(\rho)$ ,  $f(\rho)$ ,  $b(\rho)$ ,  $s(\rho)$  ne dépendent que de (la classe d'inertie de)  $\tilde{\rho}$  et de  $\ell$ . On a les formules :

$$(4.18) \quad \frac{b(\tilde{\rho})}{b(\rho)} = \frac{s(\rho)}{s(\tilde{\rho})} = (N : \tilde{N}), \quad \left\{ \frac{n(\tilde{\rho})}{n(\rho)} \right\}_\ell = a, \quad f(\tilde{\rho}) = f(\rho),$$

la seconde égalité provenant de la relation (4.8).

**Corollaire 4.18.** — Soit  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière. Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (1)  $D$  est égale à  $F$  ;
- (2) l'ordre de  $q^d$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$  est strictement supérieur à  $m$  (cas banal) ;

on a  $\tilde{N} = N$  et  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est irréductible.

*Démonstration.* — Dans le cas où  $D$  est égale à  $F$ , c'est une conséquence de la remarque 3.20(1).  $\square$

**Remarque 4.19.** — Dans le cas où  $D = F$ , on a ainsi une nouvelle preuve du théorème [52, III.1.1] qui n'utilise pas la théorie des dérivées.

Avant de donner un exemple de calcul de réduction modulo  $\ell$ , on signale une propriété de l'entier  $a$  défini en (4.12).

**Proposition 4.20.** — L'entier  $a = a(\tilde{\rho}, \ell)$  divise à la fois  $e$  et  $d$ .

*Démonstration.* — D'après les formules (4.18), l'entier  $a$  divise le degré résiduel de  $D'$  sur  $E$ . Il divise donc  $d$ . Il divise  $e$  d'après le lemme A.12.  $\square$

**Exemple 4.21.** — Soit  $D$  une algèbre quaternionique sur  $F$  (c'est-à-dire que  $d = 2$ ) et soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . Soit  $(U, \tilde{\chi})$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple de niveau 0 de  $D^\times$ , c'est-à-dire que  $U = \mathcal{O}_D^\times$  et que le caractère :

$$\tilde{\chi} : U \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

est trivial sur  $U^1 = 1 + \mathfrak{p}_D$ , de sorte qu'on peut également le voir comme un caractère de  $k_D^\times$ . Soient  $\tilde{b}$  l'indice du normalisateur de  $\tilde{\chi}$  dans  $D^\times$  et  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible entière de  $D^\times$  dont la restriction à  $U$  contient  $\tilde{\chi}$ . Celle-ci est cuspidale de niveau 0 et de dimension finie  $\tilde{b}$ .

Si  $\tilde{b} = 1$ , alors  $\tilde{\rho}$  est un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère entier de  $D^\times$  se réduisant en un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère de  $D^\times$ . On suppose maintenant que  $\tilde{b} = 2$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\chi}^{q-1} \neq 1$ . On suppose que  $\tilde{\chi}$  est entier, on note  $\chi : U \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$  sa réduction et  $b$  l'indice du normalisateur de  $\chi$  dans  $D^\times$ . Si l'ordre de  $\tilde{\chi}^{q-1}$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors  $b = 2$  et  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible. Sinon, on a :

$$(4.19) \quad \chi^{q-1} = 1,$$

c'est-à-dire que  $b = 1$ . Si  $\ell \geq 3$ ,  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est égale à la somme des deux  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères de  $D^\times$  prolongeant  $\chi$ . Si  $\ell = 2$ , alors  $\chi$  se prolonge de façon unique en un  $\overline{\mathbb{F}}_2$ -caractère de  $D^\times$ , que l'on note encore  $\chi$ , et  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est égale à  $\chi + \chi$ .

**Exemple 4.22.** — Si  $q = 8$  et  $\ell = 3$ , la condition (4.19) est vérifiée pour tout caractère entier  $\tilde{\chi}$ . Toute  $\overline{\mathbb{F}}_3$ -représentation cuspidale de niveau 0 de  $D^\times$  est de dimension 1.

#### 4.6. Relèvement d'une représentation cuspidale

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ .

**Proposition 4.23.** — Soit  $\rho$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$ . Il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière  $\tilde{\rho}$  de  $G$  telle que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) \geq [\rho]$ .

*Démonstration.* — Soit  $(J, \lambda)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple maximal de  $G$  contenu dans  $\rho$ . On note  $N$  le normalisateur de  $\lambda$  dans  $G$  et  $\Lambda$  le prolongement de  $\lambda$  à  $N$  tel que  $\rho$  soit isomorphe à  $\text{ind}_N^G(\Lambda)$ . D'après la proposition 3.42, il existe un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple maximal  $(J, \tilde{\lambda})$  relevant  $\lambda$ . On note  $\tilde{N}$  le normalisateur de  $\tilde{\lambda}$  dans  $G$ , et on fixe un prolongement  $\tilde{\Lambda}$  de  $\lambda$  à  $\tilde{N}$  dont la réduction modulo  $\ell$  coïncide avec la restriction de  $\Lambda$  à  $\tilde{N}$ . Alors l'induite compacte de  $\tilde{\Lambda}$  à  $G$  est irréductible cuspidale entière, et sa réduction modulo  $\ell$  contient  $\rho$  d'après le théorème 4.15.  $\square$

Dans la situation de la proposition 4.23, il n'existe pas toujours de  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G$  dont la réduction soit exactement  $[\rho]$  (exemple 4.26). Cependant, si  $\rho$  est supercuspidale, on a le résultat important suivant.

**Théorème 4.24.** — *Soit  $\rho$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale de  $G$ . Il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière  $\tilde{\rho}$  de  $G$  telle que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = [\rho]$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(J, \lambda)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple maximal de  $G$  contenu dans  $\rho$ . D'après la proposition 3.42, il existe un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple maximal  $(J, \tilde{\lambda})$  relevant  $\lambda$  et, d'après la proposition A.13, on peut le choisir de telle sorte que  $\tilde{N} = N$  (avec les notations de la preuve du théorème 4.23). La fin de la preuve est la même que celle du théorème 4.23.  $\square$

**Remarque 4.25.** — Dans le cas banal, c'est-à-dire lorsque l'ordre de  $q^d$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$  est strictement supérieur à  $m$ , toute représentation irréductible cuspidale est supercuspidale, et le théorème 4.24 s'applique.

**Exemple 4.26.** — On va donner un exemple de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale n'admettant aucun relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . D'après le corollaire A.13, il suffit de trouver un exemple où la quantité (A.14) est  $> 1$ . On fixe une algèbre quaternionique  $D$  sur  $F$ . Soit  $(U, \sigma)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple de niveau 0 de  $GL_2(D)$ . On peut supposer que  $U = GL_2(\mathcal{O}_D)$  et considérer  $\sigma$  comme une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $GL_2(k_D)$ . On fixe une extension quadratique  $k$  de  $k_D$ . D'après le paragraphe A.3.1, la représentation  $\sigma$  est paramétrée par un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère  $\chi$  de  $k^\times$  admettant un relèvement :

$$(4.20) \quad \tilde{\chi} : k^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

tel que  $\tilde{\chi}^{q^2} \neq \tilde{\chi}$ . On note  $\tilde{\sigma}$  la  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $GL_2(k_D)$  paramétrée par  $\tilde{\chi}$ . C'est un relèvement de  $\sigma$ . On suppose que :

$$(4.21) \quad \chi^{q^2} = \chi,$$

c'est-à-dire que la représentation  $\sigma$  n'est pas supercuspidale. Soit  $\rho$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible de  $GL_2(D)$  dont la restriction à  $U$  contient  $\sigma$ , et soit  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible dont la restriction à  $U$  contient  $\tilde{\sigma}$ . Ce sont des représentations cuspidales de niveau 0. Si  $b(\rho) = 2$ , alors  $\rho$  se relève en  $\tilde{\rho}$  puisque l'entier  $b(\tilde{\rho})$  divise 2 et est un multiple de  $b(\rho) = 2$ . On suppose maintenant que  $b(\rho) = 1$ , de sorte qu'on a :

$$(4.22) \quad \chi^q = \chi.$$

Pour que  $\rho$  se relève en une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $GL_2(D)$ , il faut et suffit qu'on puisse choisir  $\tilde{\sigma}$  de sorte que son orbite sous l'action de  $\text{Gal}(k_D/k_F)$  soit de



cardinal 1. En d'autres termes, il faut et suffit que  $\chi$  admette un relèvement  $\tilde{\chi}$  tel que :

$$(4.23) \quad \tilde{\chi}^{q^2} = \tilde{\chi}^q \neq \tilde{\chi},$$

ce qui est impossible. En conclusion, une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\rho$  irréductible cuspidale non supercuspidale de niveau 0 de  $\mathrm{GL}_2(D)$  a un relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  si et seulement si  $b(\rho) = 2$ .

**Exemple 4.27.** — Si  $q = 4$  et  $\ell = 17$ , le groupe  $k^\times$  est le produit direct d'un groupe cyclique d'ordre 15 par un groupe d'ordre 17. Un  $\overline{\mathbb{F}}_{17}$ -caractère de  $k^\times$  est trivial sur le facteur d'ordre 17 et vérifie donc la condition (4.21), c'est-à-dire qu'aucune  $\overline{\mathbb{F}}_{17}$ -représentation irréductible cuspidale de  $\mathrm{GL}_2(k_D)$  n'est supercuspidale. Compte tenu de (4.22), on a  $b(\rho) = 1$  si et seulement si  $\chi^3 = 1$ . Si  $\tilde{\chi}$  est un  $\overline{\mathbb{Q}}_{17}$ -caractère de  $k^\times$  d'ordre 17, sa réduction modulo 17 est le caractère trivial, qui paramètre une  $\overline{\mathbb{F}}_{17}$ -représentation irréductible cuspidale non supercuspidale de niveau 0 de  $\mathrm{GL}_2(D)$  n'admettant pas de relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_{17}$ .

## 5. Compléments de théorie des types

Cette section est consacrée à des compléments de théorie des types. Dans le paragraphe 5.1, on introduit la notion de représentation quasi-projective, qui nous permet d'utiliser la théorie des représentations des algèbres de Hecke. Ceci est illustré dès le paragraphe 5.2 où l'on donne plusieurs conditions pour qu'une induite parabolique soit irréductible. Un corollaire est l'important théorème 5.18 qui permet de ramener le problème de la classification de toutes les représentations irréductibles de  $G_m$ ,  $m \geq 1$  à celui des représentations irréductibles ayant un support cuspidal inertiuellement équivalent à  $[\rho] + \dots + [\rho] = n \cdot [\rho]$  où  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale. Ceci est lié à la théorie des représentations des algèbres de Hecke affines de type A, et on explique au paragraphe 5.4 que ce problème de classification ne dépend que de l'entier  $n$  et d'un nombre limité de paramètres attachés à  $\rho$ . Ceci permet de se ramener, pour certaines questions, au problème de la classification des représentations irréductibles unipotentes du groupe déployé  $\mathrm{GL}_n(F')$ , où  $F'$  est une extension finie de  $F$ .

### 5.1. Représentations quasi-projectives

Soit  $m \geq 1$  un entier et soit  $Q$  une représentation de  $G = G_m$ . La définition suivante est due à Arabia [53, A.3].

**Définition 5.1.** — La représentation  $Q$  est dite *quasi-projective* si, pour toute représentation  $V$  de  $G$  et tout homomorphisme surjectif  $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(Q, V)$ , l'homomorphisme de  $\mathrm{End}_G(Q)$  dans  $\mathrm{Hom}_G(Q, V)$  défini par  $\alpha \mapsto \varphi \circ \alpha$  est surjectif.

On dit qu'une représentation de  $G$  est sans  $Q$ -torsion si elle n'admet pas de sous-représentation non nulle  $W$  telle que  $\text{Hom}_G(Q, W) = \{0\}$ . On rappelle que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_R(G)$  est la catégorie des représentations (lisses) de  $G$  sur des  $R$ -espaces vectoriels. On a le théorème important suivant (voir [53, A.5, théorème 10]).

**Théorème 5.2.** — *On suppose que  $Q$  est quasi-projective et de type fini.*

(1) *Le foncteur  $V \mapsto \text{Hom}_G(Q, V)$  définit une équivalence entre la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}$  formée des représentations sans  $Q$ -torsion qui sont quotients d'une somme directe de copies de  $Q$ , et la catégorie des  $\text{End}_G(Q)$ -modules à droite.*

(2) *Cette équivalence induit une bijection entre les classes de représentations irréductibles  $V$  de  $G$  telles que  $\text{Hom}_G(Q, V) \neq \{0\}$  et les classes de  $\text{End}_G(Q)$ -modules irréductibles.*

Soit  $\tau$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$ . On reprend les notations du paragraphe 3.6 et on pose :

$$(5.1) \quad Q = \text{ind}_K^G(\tau).$$

Comme  $\tau$  est irréductible,  $Q$  est de type fini. Elle n'est pas toujours projective, c'est-à-dire que le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  n'est pas toujours exact sur  $\mathcal{R}$ . Cependant, si elle est quasi-projective, on va voir que ce foncteur est exact sur une sous-catégorie suffisamment grande.

**Définition 5.3.** — On note  $\mathcal{E}_\tau$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}$  formée des sous-quotients de représentations engendrées par leur composante  $\tau$ -isotypique.

Cette catégorie est stable par sous-quotients dans  $\mathcal{R}$ . Son intérêt réside dans le résultat suivant. On pose  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \tau)$ , l'algèbre des endomorphismes de  $Q$ .

**Proposition 5.4.** — *On suppose que  $Q = \text{ind}_K^G(\tau)$  est quasi-projective et de type fini.*

(1) *La restriction du foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  à  $\mathcal{E}_\tau$  est un foncteur exact.*

(2) *Pour tout  $\mathcal{H}$ -module à droite  $\mathfrak{m}$ , l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{H}$ -modules :*

$$\mathfrak{m} \rightarrow \mathbf{M}_\tau(\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}} \text{ind}_K^G(\tau))$$

*est un isomorphisme.*

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$  et de radical unipotent  $U$ , et soit  $\tau_M$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K_M$  de  $M$ . On suppose que  $(K, \tau)$  est une paire couvrante de  $(K_M, \tau_M)$  (voir le paragraphe 3.6).

**Proposition 5.5.** — *Soit  $\sigma$  une représentation de longueur finie de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_M$ -isotypique. On suppose que  $Q = \text{ind}_K^G(\tau)$  est quasi-projective de type fini. Le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  induit des bijections :*

- (1) entre les facteurs irréductibles de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  contenant  $\tau$  et les facteurs irréductibles de  $\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$  ;
- (2) entre les facteurs irréductibles du socle de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  contenant  $\tau$  et les facteurs irréductibles du socle de  $\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$  ;
- (3) entre les facteurs irréductibles du cosocle de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  contenant  $\tau$  et les facteurs irréductibles du cosocle de  $\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$ .

**Remarque 5.6.** — En d’autres termes, la multiplicité d’une représentation irréductible  $\pi$  contenant  $\tau$  dans  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  (resp. dans le socle, le cosocle de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$ ) est égale à la multiplicité de  $\mathbf{M}_\tau(\pi)$  dans  $\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$  (resp. le socle, le cosocle de  $\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$ ).

*Démonstration.* — D’après la proposition 3.28, l’induite  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est engendrée par sa composante  $\tau$ -isotypique. On fixe une suite de composition de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  dans  $\mathcal{R}$  dont les quotients sont irréductibles. D’après la proposition 5.4, les termes de cette suite de composition sont dans  $\mathcal{E}_\tau$  et on obtient le résultat voulu en appliquant  $\mathbf{M}_\tau$ .  $\square$

Rappelons (§3.6.3) qu’on a un homomorphisme  $j_P$  de  $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}(M, \tau_M)$  dans  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 5.7.** — Pour tout  $\mathcal{H}_M$ -module à droite  $\mathfrak{m}$  de dimension finie, on a un isomorphisme de représentations de  $G$  :

$$(5.2) \quad \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathrm{ind}_K^G(\tau) \simeq \mathbf{i}_{P^-}^G \left( \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathrm{ind}_{K_M}^M(\tau_M) \right),$$

où  $P^-$  désigne le sous-groupe parabolique de  $G$  opposé à  $P$  relativement à  $M$ .

**Remarque 5.8.** — L’hypothèse de dimension finie sur  $\mathfrak{m}$  provient de ce que notre preuve utilise la propriété de seconde adjonction.

*Démonstration.* — Le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  admet un adjoint à gauche :

$$(5.3) \quad \mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}} \mathrm{ind}_K^G(\tau)$$

de la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite dans  $\mathcal{R}$ . Le foncteur  $\mathbf{j}_P^*$  admet un adjoint à gauche  $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$  de la catégorie des  $\mathcal{H}_M$ -modules à droite vers celle des  $\mathcal{H}$ -modules à droite. À partir de (3.24) et en utilisant la seconde adjonction (1.3), on obtient le résultat.  $\square$

Le cas qui nous intéresse particulièrement est celui d’un type semi-simple (voir le paragraphe 3.7).

**Proposition 5.9.** — Soit  $(K, \tau)$  un type semi-simple de  $G$ . L’induite compacte  $\mathrm{ind}_K^G(\tau)$  est quasi-projective de type fini.

*Démonstration.* — On va utiliser le critère [54, 3.1]. Il s'agit de montrer que la restriction de  $Q = \text{ind}_K^G(\tau)$  à  $K$  se décompose sous la forme  $V \oplus W$ , où  $V$  est une somme directe de copies de  $\tau$  et où aucun sous-quotient irréductible de  $W$  n'est isomorphe à  $\tau$ . On décompose  $\tau$  sous la forme  $\varkappa \otimes \sigma$  et on note  $\varepsilon$  la restriction de  $\varkappa$  à  $K^1$ . Comme  $K^1$  est un pro- $p$ -groupe (voir (3.27)), la restriction de  $Q$  à  $K^1$  est semi-simple et se décompose sous la forme  $V_1 \oplus W_1$ , où  $V_1$  est une somme directe de copies de  $\varepsilon$  et où aucun sous-quotient irréductible de  $W_1$  n'est isomorphe à  $\varepsilon$ . Ces sous-espaces sont stables par  $K$ . En tant que représentations de  $K$ , l'espace  $W_1$  ne contient aucun sous-quotient isomorphe à  $\tau$  et  $V_1$  est de la forme  $\varkappa \otimes \varsigma$ , où :

$$\varsigma = \text{Hom}_{K^1}(\varkappa, Q)$$

est une représentation de  $K$  triviale sur  $K^1$ .

**Lemme 5.10.** — *La représentation  $\varsigma$  est une somme directe de conjugués de  $\sigma$ .*

*Démonstration.* — Compte tenu de la construction des types semi-simples au paragraphe 3.7, il y a un sous-groupe de Levi  $L \subseteq G$  tel que  $(K, \tau)$  soit une paire couvrante de  $(K_L, \tau_L)$  et tel que :

$$K_L = K_1 \times \cdots \times K_u, \quad \tau_L = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_u,$$

avec  $u \geq 1$  et où chaque  $(K_i, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, u$ , est de la forme donnée par la proposition 3.31. (Avec les notations du paragraphe 3.7.3,  $L$  est le sous-groupe de Levi associé à la partition :

$$\{1, \dots, n\} = \prod_{k=1}^t \prod_{i=1}^{u_k} I_{k,j}$$

et  $u$  est la somme des  $u_k$ .) Plus précisément, pour chaque  $i \in \{1, \dots, u\}$ , il existe une strate simple  $[\mathfrak{A}_i, n_i, 0, \beta_i]$  d'une  $F$ -algèbre centrale simple  $A_i$ , un caractère simple  $\theta_i \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_i, 0, \beta_i)$  et un sous-groupe parabolique  $P_i$  de  $A_i^\times$  tels que  $K_i = H^1(\beta_i, \mathfrak{A}_i)(J(\beta_i, \mathfrak{A}_i) \cap P_i)$ , et  $\tau_i$  se décompose sous la forme  $\varkappa_i \otimes \sigma_i$ .

La restriction de  $Q$  à  $K^1$  se décompose en la somme directe des induites  $\text{ind}_{K^1 \cap K^x}^{K^1}(\tau^x)$  pour  $x \in K \backslash G / K^1$ . Aussi l'espace de  $\varsigma$  est-il la somme directe des sous-espaces vectoriels  $\text{Hom}_{K^1 \cap K^x}(\varepsilon, \tau^x)$  pour  $x \in K \backslash G / K^1$ . Si l'on écrit :

$$\text{Hom}_{K^1 \cap K^x}(\varepsilon, \tau^x) \subseteq \text{Hom}_{K^1 \cap (K^1)^x}(\varepsilon, \varepsilon^x) \otimes \mathcal{V}_\sigma,$$

où  $\mathcal{V}_\sigma$  désigne l'espace de  $\sigma$  qui compte ici comme un espace de multiplicité, on voit que seuls les  $x \in G$  qui entrelacent  $\varepsilon$  apportent une contribution non nulle. On peut donc supposer que  $x$  appartient à  $L$ , et plus précisément, si l'on écrit  $x = (x_1, \dots, x_u)$ , on peut

choisir chaque  $x_i$  dans  $B_i^\times$ , où  $B_i$  est le centralisateur de  $F(\beta_i)$  dans  $A_i$ . Compte tenu des décompositions d'Iwahori des groupes  $K$  et  $K^1$  et des isomorphismes :

$$(5.4) \quad K/K^1 \simeq K_L/K_L^1 \simeq \prod_{i=1}^u K_i/K_i^1,$$

l'espace  $\mathrm{Hom}_{K^1 \cap K^x}(\mathcal{X}, \tau^x)$  se décompose sous la forme :

$$\mathrm{Hom}_{K_L^1 \cap K_L^x}(\mathcal{X}_L, \tau_L^x) = \bigotimes_{i=1}^u \mathrm{Hom}_{K_i^1 \cap K_i^{x_i}}(\mathcal{X}_i, \tau_i^{x_i}).$$

On est donc ramené à prouver le lemme dans le cas d'un type semi-simple  $(K_i, \tau_i)$  donné par la proposition 3.31 ou, ce qui revient au même, dans le cas d'un type simple  $(J, \lambda)$  associé à une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ . Dans ce cas, on reprend les arguments de la preuve de Vignéras [54, 8]. D'abord, on peut remplacer  $\lambda$  par une représentation de la forme donnée par le lemme 3.18 avec  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap B$  maximal. Grâce à [45, Lemme 1.7], on peut même supposer que  $\mathfrak{A}$  est inclus dans  $\mathfrak{A}'$ . Ensuite, la fin de la preuve ne diffère pas de celle de [54, Corollary 8.4(1)].  $\square$

Le lemme permet de vérifier que la représentation  $Q$  satisfait au critère [54, 3.1], et le résultat s'ensuit.  $\square$

**Remarque 5.11.** — On suppose que  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle. Soit  $(J, \lambda)$  un type simple et soit  $F'$  une extension de  $F$  comme dans la proposition 3.21. Si  $q_{F'}$  n'est pas congru à 1 modulo  $\ell$ , alors  $\sigma$  est projective comme représentation de  $J/J^1 \simeq \mathrm{GL}_s(k_{D'})^r$  (voir le paragraphe A.2). Puisque le foncteur  $\mathrm{ind}_J^G$  préserve la projectivité, on en déduit que l'induite compacte  $\mathrm{ind}_J^G(\lambda)$  est projective.

## 5.2. Paires couvrantes et induction parabolique

Soit un entier  $m \geq 1$  et soit  $G = G_m$ . On renvoie au paragraphe 2.1 certaines définitions et notations utilisées ci-dessous.

**Proposition 5.12.** — *Soit  $(M, \varrho)$  une paire cuspidale de  $G$ , soit  $\Omega$  sa classe d'inertie, soit  $(J_M, \lambda_M)$  un type simple maximal de  $M$  contenu dans  $\varrho$  et soit  $(K, \tau)$  une paire couvrante de  $(J_M, \lambda_M)$  dans  $G$ . Alors :*

$$\pi \in \mathrm{Irr}(\Omega)^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{cusp}(\pi) \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_J(\tau, \pi) \neq \{0\}.$$

*Démonstration.* — La représentation  $\varrho$  est un quotient irréductible de l'induite compacte  $\mathrm{ind}_{J_M}^M(\lambda_M)$ . En induisant à  $G$  le long de n'importe quel sous-groupe parabolique  $P$  de sous-groupe de Levi  $M$ , et compte tenu de (3.25), on en déduit que tout quotient irréductible

de  $\mathbf{i}_P^G(\varrho)$  est un quotient irréductible de  $\text{ind}_K^G(\tau)$ . Par conséquent, toute représentation irréductible  $\pi$  de  $G$  dont le support cuspidal appartient à  $\Omega$  contient  $\tau$ .

Inversement, soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  contenant  $\tau$ . D'après (3.24), la représentation  $\mathbf{r}_P^G(\pi)$  contient  $\lambda_M$ , c'est-à-dire qu'il existe un sous-quotient irréductible de  $\mathbf{r}_P^G(\pi)$  de la forme  $\varrho\chi$  avec  $\chi$  un caractère non ramifié de  $M$ . Soit  $\varrho'$  une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi  $M'$  et soit  $P'$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M'$  tel que  $\pi$  soit une sous-représentation de  $\mathbf{i}_{P'}^G(\varrho')$ . Ainsi  $\mathbf{r}_P^G(\mathbf{i}_{P'}^G(\varrho'))$  a un sous-quotient de la forme  $\varrho\chi$ . On déduit du lemme géométrique que  $(M, \varrho)$  et  $(M', \varrho')$  sont inertiuellement équivalentes, c'est-à-dire que  $\text{cusp}(\pi)$  appartient à  $\Omega$ .  $\square$

Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$ . On peut supposer que  $M = M_\alpha$  pour une famille d'entiers  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $(K_i, \tau_i)$  un type semi-simple de  $G_{m_i}$ . On pose :

$$K_M = K_1 \times \cdots \times K_r, \quad \tau_M = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r.$$

Soit  $(K, \tau)$  un type semi-simple de  $G$  qui soit une paire couvrante de  $(K_M, \tau_M)$ . Soit enfin  $\sigma$  une représentation irréductible de  $M$  contenant  $\tau_M$ .

**Proposition 5.13.** — *La représentation  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est irréductible si et seulement si :*

$$\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$$

*est un  $\mathcal{H}$ -module irréductible.*

*Démonstration.* — L'une des implications est donnée par le théorème 5.2 joint à la proposition 3.28. Pour l'autre, soit  $\pi$  une sous-représentation irréductible de  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$ . D'après la proposition 5.12, le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathbf{M}_\tau(\pi)$  est non nul : il est donc égal à  $\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$ . Puisque l'induite  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est engendrée par sa composante  $\tau$ -isotypique d'après la proposition 3.28, elle est égale à  $\pi$ , ce qui prouve qu'elle est irréductible.  $\square$

**Proposition 5.14.** — *On suppose que :*

$$(5.5) \quad \mathbf{M}_{\tau_M}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$$

*est un  $\mathcal{H}$ -module irréductible. Alors le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathbf{M}_\tau(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$  est irréductible et isomorphe à  $\mathbf{M}_{\tau_M}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$ , et la représentation  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est irréductible.*

*Démonstration.* — On va commencer par prouver le résultat suivant. On note  $Q$  l'induite compacte de  $\tau$  à  $G$  et  $Q_M$  celle de  $\tau_M$  à  $M$ .

**Lemme 5.15.** — Soit  $\pi$  une représentation admissible de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_M$ -isotypique. Il existe un homomorphisme surjectif :

$$\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{M}_{\tau}(\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\pi))$$

de  $\mathcal{H}$ -modules à droite.

**Remarque 5.16.** — La condition d’admissibilité provient de ce que notre preuve utilise (5.2), qui nécessite la propriété de seconde adjonction.

*Démonstration.* — On part de l’application canonique surjective :

$$(5.6) \quad \mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathbf{Q}_M \rightarrow \pi.$$

En appliquant le foncteur  $\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G$  à (5.6), on obtient une application surjective :

$$(5.7) \quad \mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathbf{Q}_M) \rightarrow \mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\pi)$$

entre représentations engendrées par leur composante  $\tau$ -isotypique d’après la proposition 3.28. D’après (5.2), le membre de gauche de (5.7) est isomorphe à  $\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathbf{Q}$ . D’après la proposition 5.4, en appliquant le foncteur  $\mathbf{M}_{\tau}$  à (5.7), on a une application surjective :

$$(5.8) \quad \mathbf{M}_{\tau}(\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{M}_{\tau}(\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\pi))$$

et le membre de gauche de (5.8) est isomorphe à  $\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$ .  $\square$

Appliquons le lemme 5.15 à la représentation  $\sigma$ . D’après la proposition 3.28, le module  $\mathbf{M}_{\tau}(\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\sigma))$  est non nul. Il est donc irréductible d’après le lemme 5.15 et l’hypothèse sur (5.5). D’après la proposition 5.13, la représentation  $\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\sigma)$  est irréductible et, d’après la proposition 2.2, elle est isomorphe à  $\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\sigma)$ . On en déduit le résultat voulu.  $\square$

**Corollaire 5.17.** — On suppose que  $\mathcal{H}$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{H}_M$ . Alors l’induite  $\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\sigma)$  est irréductible, et le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathbf{M}_{\tau}(\mathbf{i}_{\mathbb{P}^-}^G(\sigma))$  est irréductible et isomorphe à  $\mathbf{M}_{\tau_M}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$ .

*Démonstration.* — Puisque  $\mathbf{Q}_M$  est quasi-projective de type fini, le théorème 5.2 implique que le  $\mathcal{H}_M$ -module  $\mathbf{M}_{\tau_M}(\sigma)$  est irréductible. Puisque  $\mathcal{H}$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{H}_M$ , l’hypothèse de la proposition 5.14 est vérifiée. On en déduit le résultat voulu.  $\square$

On termine ce paragraphe en donnant une application importante du corollaire 5.17. Si  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G$ , on note :

$$(5.9) \quad \Omega_{\rho} = \{[\rho\chi] \mid \chi : G \rightarrow \mathbb{R}^{\times} \text{ non ramifié}\}$$

la classe d’équivalence inertielle de  $\rho$ .

**Théorème 5.18.** — Soit  $r \geq 1$  un entier et soient  $\rho_1, \dots, \rho_r$  des représentations irréductibles cuspidales deux à deux non inertiuellement équivalentes. Pour chaque  $i$ , on fixe un support cuspidal  $\mathfrak{s}_i \in \mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$ .

(1) Pour chaque  $i$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de support cuspidal  $\mathfrak{s}_i$ . Alors  $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$  est irréductible.

(2) Soit  $\pi$  une représentation irréductible de support cuspidal  $\mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_r$ . Il existe des représentations  $\pi_1, \dots, \pi_r$ , uniques à isomorphisme près, telles que  $\pi_i$  soit de support cuspidal  $\mathfrak{s}_i$  pour chaque  $i$  et telles que  $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$  soit isomorphe à  $\pi$ .

**Remarque 5.19.** — Pour  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$ , on note :

$$(5.10) \quad \text{Irr}(\mathfrak{s})^* = \text{cusp}^{-1}(\mathfrak{s})$$

l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal  $\mathfrak{s}$ . Si l'on pose  $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_r$ , l'application :

$$(\pi_1, \dots, \pi_r) \mapsto \pi_1 \times \dots \times \pi_r$$

induit une bijection de  $\text{Irr}(\mathfrak{s}_1)^* \times \dots \times \text{Irr}(\mathfrak{s}_r)^*$  dans  $\text{Irr}(\mathfrak{s})^*$ .

*Démonstration.* — Pour chaque  $i$ , soit  $(J_i, \lambda_i)$  un type simple maximal contenu dans  $\rho_i$ , soit  $n_i$  le nombre termes dans  $\mathfrak{s}_i$  et soit  $m_i$  le degré de  $\rho_i$ . On note aussi  $(K_i, \tau_i)$  le type semi-simple associé à  $(J_i, \lambda_i)$  et  $n_i$  par la proposition 3.31. On pose :

$$\begin{aligned} M &= G_{m_1 n_1} \times \dots \times G_{m_r n_r}, \\ K_M &= K_1 \times \dots \times K_r, \\ \tau_M &= \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_r. \end{aligned}$$

On note  $(K, \tau)$  le type semi-simple associé aux  $(J_i, \lambda_i)$  par la proposition 3.34, qui est une paire couvrante de  $(K_M, \tau_M)$ . L'algèbre  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \tau)$  est libre de rang 1 comme module sur  $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}(M, \tau_M)$ . D'après la proposition 5.9, l'induite compacte  $\text{ind}_K^G(\tau)$  est quasi-projective de type fini. On est donc dans les conditions d'application du corollaire 5.17, dont on déduit que l'induite  $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$  est irréductible.

Pour le point (2), on remarque que (3.24) fournit un isomorphisme de  $\mathcal{H}_M$ -modules :

$$\mathbf{M}_r(\pi) \simeq \mathbf{M}_{\tau_M}(\mathbf{r}_P^G(\pi)),$$

où  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$ . Puisque  $\mathcal{H}$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{H}_M$ , la restriction de  $\mathbf{M}_r(\pi)$  à  $\mathcal{H}_M$  est irréductible. C'est donc un module de la forme  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{m}_r$ , où  $\mathfrak{m}_i$  est un  $\mathcal{H}(G_{m_i n_i}, \tau_i)$ -module irréductible. Puisque l'induite compacte de  $\tau_i$  à  $G_{m_i n_i}$  est quasi-projective de type fini, il existe d'après le théorème 5.2



une représentation irréductible  $\pi_i$  de  $G_{m_i n_i}$  telle que  $\mathbf{M}_{\tau_i}(\pi_i)$  soit isomorphe à  $\mathfrak{m}_i$ . En particulier, le support cuspidal de  $\pi_i$  appartient à  $\mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$ . Posons :

$$\pi' = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r,$$

qui est irréductible d'après le point (1). D'après le théorème 5.2 encore, il suffit de prouver que  $\mathbf{M}_{\tau}(\pi)$  et  $\mathbf{M}_{\tau}(\pi')$  sont des  $\mathcal{H}$ -modules isomorphes pour en déduire que  $\pi$  et  $\pi'$  sont des représentations isomorphes. D'après le corollaire 5.17, on a :

$$\mathbf{M}_{\tau}(\pi') \simeq \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}.$$

La restriction de  $\mathbf{M}_{\tau}(\pi)$  à  $\mathcal{H}_M$  est isomorphe à  $\mathfrak{m}$ , ce dont on déduit par adjonction que  $\mathbf{M}_{\tau}(\pi)$  est isomorphe à  $\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$ , ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

### 5.3. Compatibilité du foncteur des $\tau$ -invariants à l'induction parabolique

Soit un entier  $m \geq 1$ , soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ , soit  $(J, \lambda)$  un type simple maximal contenu dans  $\rho$  et soit  $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$  une famille d'entiers  $\geq 1$  de somme  $n$ . On pose  $M = M_{(mn_1, \dots, mn_r)}$  et  $G = G_{mn}$ . On note :

$$(K_n, \tau_n)$$

la paire couvrante de  $G$  associée à  $(J, \lambda)$  par la proposition 3.31, on note  $\mathcal{H}_n$  son algèbre de Hecke et  $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_{\tau_n}$  le foncteur qu'elle définit de  $\mathcal{R}(G)$  dans la catégorie des  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite. On note  $\tau_{\alpha}$  la restriction de  $\tau_n$  à  $K_n \cap M$ , qui est isomorphe à la représentation  $\tau_{n_1} \otimes \cdots \otimes \tau_{n_r}$  du groupe  $K_{\alpha} = K_{n_1} \times \cdots \times K_{n_r}$ . On note  $\mathcal{H}_{\alpha} = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{n_r}$  son algèbre de Hecke et  $\mathbf{M}_{\alpha}$  le foncteur correspondant de  $\mathcal{R}(M)$  dans la catégorie des  $\mathcal{H}_{\alpha}$ -modules à droite. Soit :

$$(5.11) \quad j_{\alpha} : \mathcal{H}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{H}_n$$

l'homomorphisme (3.23) correspondant à  $(K_n, \tau_n)$  considérée comme une paire couvrante de  $(K_{\alpha}, \tau_{\alpha})$ .

**Proposition 5.20.** — *Soit  $\sigma$  une représentation admissible de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_{\alpha}$ -isotypique. On a un isomorphisme de  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite :*

$$(5.12) \quad \mathbf{M}_n \left( \mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\sigma) \right) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_{\alpha}}(\mathcal{H}_n, \mathbf{M}_{\alpha}(\sigma)).$$

**Remarque 5.21.** — Dans le cas où  $\mathbb{R}$  est le corps des nombres complexes, ce résultat ne nécessite pas d'hypothèse d'admissibilité sur la représentation  $\sigma$ . Il s'agit d'un cas particulier de [17, Corollary 8.4] obtenu à partir de (3.24) par adjonction, en utilisant le fait que  $\mathbf{M}_n$  induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}(G)$  formée

des représentations engendrées par leur composante  $\tau_n$ -isotypique et la catégorie des  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite (et un résultat analogue pour  $\mathbf{M}_\alpha$ ). Quand  $R$  est de caractéristique non nulle, ces foncteurs ne définissent pas en général des équivalences de catégories et il faut trouver une autre approche.

**Remarque 5.22.** — L'hypothèse d'admissibilité provient de ce que notre preuve utilise le lemme 5.15 et une inégalité de la forme (5.15).

*Démonstration.* — On suppose pour le moment que  $\sigma$  est une représentation (lisse) quelconque de  $M$ . On pose  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{(mn_1, \dots, mn_r)}$  et on définit des foncteurs :

$$\mathbf{F} : \sigma \mapsto \mathbf{M}_n(\mathbf{i}(\sigma)), \quad \mathbf{G} : \sigma \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}_n, \mathbf{M}_\alpha(\sigma))$$

de  $\mathcal{R}(M)$  dans la catégorie des  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite. On note respectivement  $Q_n$  et  $Q_\alpha$  les induites compactes de  $\tau_n$  à  $G$  et de  $\tau_\alpha$  à  $M$ . Compte tenu des propriétés d'adjonction de  $\mathbf{i}$  et de  $\mathbf{M}_\alpha$ , on a des isomorphismes fonctoriels de  $R$ -espaces vectoriels :

$$(5.13) \quad \mathbf{F}(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_M(\mathbf{r}(Q_n), \sigma) \quad \text{et} \quad \mathbf{G}(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_M(\mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}_\alpha} Q_\alpha, \sigma)$$

qui sont en fait des isomorphismes de  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite. En appliquant (3.24) à  $Q_n$ , on obtient le résultat suivant.

**Fait 5.23.** — L'isomorphisme (3.24) appliqué à la représentation  $Q_n$  induit un isomorphisme de  $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_\alpha)$ -bimodules de  $\mathcal{H}_n$  vers  $\mathbf{M}_\alpha(\mathbf{r}(Q_n))$ .

Grâce à (5.13) et au fait 5.23, on obtient un homomorphisme de  $\mathcal{H}_n$ -modules :

$$(5.14) \quad \omega_\sigma : \mathbf{F}(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_M(\mathbf{r}(Q_n), \sigma) \xrightarrow{\gamma_\sigma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\mathbf{r}(Q_n)), \mathbf{M}_\alpha(\sigma)) \simeq \mathbf{G}(\sigma)$$

qui est fonctoriel en  $\sigma$ , où  $\gamma_\sigma$  désigne l'homomorphisme fonctoriel de  $R$ -espaces vectoriels obtenu en appliquant le foncteur  $\mathbf{M}_\alpha$ .

On suppose maintenant que  $\sigma$  est engendrée par sa composante  $\tau_\alpha$ -isotypique, c'est-à-dire qu'il y a un homomorphisme surjectif :

$$f : (Q_\alpha)^S \rightarrow \sigma$$

d'une somme directe arbitraire de copies de  $Q_\alpha$  vers  $\sigma$ , où  $S$  désigne un ensemble quelconque qui indexe la somme directe. Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(Q_\alpha)^S & \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} & \mathbf{F}(\sigma) \\ \omega_{(Q_\alpha)^S} \downarrow & & \downarrow \omega_\sigma \\ \mathbf{G}(Q_\alpha)^S & \xrightarrow{\mathbf{G}(f)} & \mathbf{G}(\sigma) \end{array}$$

où les deux flèches horizontales  $\mathbf{F}(f)$  et  $\mathbf{G}(f)$  sont surjectives car les deux foncteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont exacts sur la catégorie  $\mathcal{E}_\alpha$ , d'après les propositions 5.4 et 3.28.

**Lemme 5.24.** — *Si  $\omega_{Q_\alpha}$  est un isomorphisme, alors  $\omega_\sigma$  est un isomorphisme pour toute représentation  $\sigma$  admissible et engendrée par sa composante  $\tau_\alpha$ -isotypique.*

*Démonstration.* — Si  $\omega_{Q_\alpha}$  est un isomorphisme, alors  $\omega_{(Q_\alpha)^s}$  est un isomorphisme et par conséquent  $\omega_\sigma$  est surjective. On en déduit que :

$$(5.15) \quad \dim \mathbf{F}(\sigma) \geq \dim \mathbf{G}(\sigma).$$

On a aussi l'inégalité contraire d'après le lemme 5.15. On en déduit que  $\omega_\sigma$  est bijective pour  $\sigma$  admissible et engendrée par sa composante  $\tau_\alpha$ -isotypique.  $\square$

**Lemme 5.25.** — *L'homomorphisme  $\omega_{Q_\alpha}$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Les  $\mathcal{H}_n$ -modules  $\mathbf{F}(Q_\alpha)$  et  $\mathbf{G}(Q_\alpha)$  sont tous les deux libres de rang 1 d'après (3.25). Il suffit donc de prouver que l'image par  $\omega_{Q_\alpha}$  d'une base de  $\mathbf{F}(Q_\alpha)$  est une base de  $\mathbf{G}(Q_\alpha)$ . La base canonique de  $\text{Hom}_M(\mathbf{r}(Q_n), Q_\alpha)$  est l'élément  $e$  défini par :

$$f \bmod Q_n(U) \mapsto \left( x \mapsto \int_U f(ux) du \right)$$

pour  $f \in Q_n$  et  $x \in M$ , où  $Q_n(U)$  désigne le sous-espace de  $Q_n$  engendré par les vecteurs de la forme  $u \cdot f - f$ , avec  $f \in Q_n$  et  $u \in U = U_{(mn_1, \dots, mn_r)}$ . On va calculer son image par  $\gamma_{Q_\alpha}$  et vérifier que c'est une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\mathbf{r}(Q_n)), \mathbf{M}_\alpha(Q_\alpha))$ . Soit  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\lambda$  le groupe défini au paragraphe 3.5.4, soit  $\mathcal{W}_0$  le sous-groupe de  $\mathcal{W}$  constitué des matrices de permutation dans  $\mathcal{W}$  et soit  $\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{W}_0 \cap M$ . Dans chaque classe de  $\mathcal{W}_0/\mathcal{W}_\alpha$ , il existe un unique élément de longueur minimale ; ces éléments forment un système de représentants de  $\mathcal{W}_0/\mathcal{W}_\alpha$  noté  $\mathcal{D}_\alpha$ .

Pour chaque  $w \in \mathcal{W}$ , on fixe un élément  $\tau_w \in \mathcal{H}_n$  non nul de support  $K_n w K_n$ , qu'on voit comme un élément de  $\mathbf{M}_\alpha(\mathbf{r}(Q_n))$ . D'après le paragraphe B.2, on a le résultat suivant.

**Fait 5.26.** —  *$\mathcal{H}_n$  est un  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à droite libre de base  $\{\tau_w, w \in \mathcal{D}_\alpha\}$ .*

Ceci permet de se restreindre aux  $\tau_w$ ,  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ . Compte tenu de (3.25) et du fait 5.23, l'image de  $e$  par  $\gamma_{Q_\alpha}$  est l'élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\mathbf{r}(Q_n)), \mathbf{M}_\alpha(Q_\alpha))$  qui à  $\tau_w$  associe :

$$(5.16) \quad v \mapsto \left( x \mapsto \int_U \tau_w(v)(ux) du \right)$$

pour  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ ,  $x \in M$  et pour  $v$  dans l'espace de  $\tau$ , noté  $\mathcal{V}$ .

**Lemme 5.27.** — Pour  $w \in \mathcal{W}_0$ , on a  $K_n w K_n \cap P \neq \emptyset$  si et seulement si  $w \in \mathcal{W}_\alpha$ .

*Démonstration.* — Si  $w \in \mathcal{W}_\alpha$ , alors  $K_n w K_n \cap P$  n'est pas vide parce que l'intersection  $(K_n \cap M)w(K_n \cap M) \cap M$  n'est pas vide. Inversement, on suppose que  $K_n w K_n \cap P \neq \emptyset$ . Soit  $\mathfrak{A}_n$  l'ordre héréditaire apparaissant dans la construction du paragraphe 3.3.6, que l'on peut supposer standard. Ainsi  $K_n$  est inclus dans  $U(\mathfrak{A}_n)$  ; on a donc  $U(\mathfrak{A}_n)wU(\mathfrak{A}_n) \cap P \neq \emptyset$ . Soit  $\mathfrak{A}'$  l'ordre héréditaire standard  $\mathfrak{A}_{(m, \dots, m)}$  de  $\mathcal{M}_{mn}(D)$ . Il contient  $\mathfrak{A}_n$ , de sorte qu'on a  $U(\mathfrak{A}')wU(\mathfrak{A}') \cap P \neq \emptyset$ . Soient  $\mathcal{W}_{\max}$  le sous-groupe des permutations de  $GL_{mn}(\mathcal{O}_D)$  et  $\mathcal{X}_{\max}$  un système de représentants des doubles classes de  $\mathcal{W}_{\max}$  modulo  $\mathcal{W}_{\max} \cap U(\mathfrak{A}')$ . On note aussi  $\mathcal{X}_{\max, M}$  un système de représentants des doubles classes de  $\mathcal{W}_{\max} \cap M$  modulo  $\mathcal{W}_{\max} \cap U(\mathfrak{A}') \cap M$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \coprod_{w' \in \mathcal{X}_{\max}} U(\mathfrak{A}')w'U(\mathfrak{A}') \cap P &= GL_{mn}(\mathcal{O}_D) \cap P \\ &= \coprod_{w' \in \mathcal{X}_{\max, M}} U(\mathfrak{A}')w'U(\mathfrak{A}') \cap P. \end{aligned}$$

On en déduit que  $w$  appartient à  $\mathcal{X}_{\max, M}$ , donc  $w \in \mathcal{W}_0 \cap M = \mathcal{W}_\alpha$ .  $\square$

Ce lemme implique que, pour  $w \notin \mathcal{W}_\alpha$ ,  $x \in M$  et  $v \in \mathcal{V}$ , l'intégrale de (5.16) est nulle. Pour tout  $v \in \mathcal{V}$ , on note  $[1, v]_M$  l'élément de  $\mathcal{Q}_\alpha$  de support  $K_n \cap M$  et prenant en 1 la valeur  $v$ . On déduit de ce qui précède que, pour  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ , on a :

$$\gamma_{\mathcal{Q}_\alpha}(e)(\tau_w) = \begin{cases} \text{la fonction } v \mapsto [1, v]_M & \text{si } w = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En conclusion,  $\gamma_{\mathcal{Q}_\alpha}(e)$  est une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(\mathbf{r}(\mathcal{Q}_n)), \mathbf{M}_\alpha(\mathcal{Q}_\alpha))$  comme  $\mathcal{H}$ -module à droite libre de rang 1. Ceci met fin à la preuve du lemme 5.25.  $\square$

La proposition 5.20 se déduit maintenant des lemmes 5.24 et 5.25.  $\square$

**Corollaire 5.28.** — Soit  $\sigma$  une sous-représentation d'une représentation admissible de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_\alpha$ -isotypique. On a un isomorphisme :

$$(5.17) \quad \mathbf{M}_n(\mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\sigma)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}_n, \mathbf{M}_\alpha(\sigma))$$

de  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite.

*Démonstration.* — Par hypothèse, il existe des représentations  $\pi_1, \pi_2$  admissibles engendrées par leurs composantes  $\tau_\alpha$ -isotypiques telles qu'on ait une suite exacte :

$$0 \rightarrow \sigma \xrightarrow{i} \pi_1 \xrightarrow{f} \pi_2 \rightarrow 0$$

dans la catégorie  $\mathcal{E}_\alpha$ . Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{F}(\sigma) & \xrightarrow{\mathbf{F}(i)} & \mathbf{F}(\pi_1) & \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} & \mathbf{F}(\pi_2) \\ \omega_\sigma \downarrow & & \downarrow \omega_{\pi_1} & & \downarrow \omega_{\pi_2} \\ \mathbf{G}(\sigma) & \xrightarrow{\mathbf{G}(i)} & \mathbf{G}(\pi_1) & \xrightarrow{\mathbf{G}(f)} & \mathbf{G}(\pi_2) \end{array}$$

où  $\mathbf{F}(i)$  et  $\mathbf{G}(i)$  sont injectives et  $\mathbf{F}(f)$  et  $\mathbf{G}(f)$  surjectives car les foncteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont exacts sur  $\mathcal{E}_\alpha$ . Comme  $\omega_{\pi_1}$  et  $\omega_{\pi_2}$  sont des isomorphismes d'après la proposition 5.20, le lemme du serpent implique que  $\omega_\sigma$  est un isomorphisme.  $\square$

#### 5.4. Changement de groupe

On reprend les notations du paragraphe précédent. D'après la proposition 5.12, si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G = G_{mn}$ , on a  $\mathbf{M}_n(\pi) \neq 0$  si et seulement si :

$$(5.18) \quad \text{cusp}(\pi) = [\rho\chi_1] + \cdots + [\rho\chi_n], \quad \chi_i : G_m \rightarrow \mathbb{R}^\times \text{ non ramifié, } i \in \{1, \dots, n\},$$

c'est-à-dire si  $\text{cusp}(\pi)$  est inertiuellement équivalent à  $[\rho] + \cdots + [\rho] = n \cdot [\rho]$ , dont la classe d'inertie sera notée  $\Omega_{\rho,n}$ . D'après la proposition 5.9 et le théorème 5.2, le foncteur  $\mathbf{M}_n$  induit une bijection :

$$\xi_n : \text{Irr}(\Omega_{\rho,n})^* \rightarrow \text{Irr}(\mathcal{H}_n)$$

entre l'ensemble  $\text{Irr}(\Omega_{\rho,n})^*$  des représentations irréductibles de  $G$  de support cuspidal de la forme (5.18) et l'ensemble des classes de  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite irréductibles.

On fixe une extension  $F'$  de  $F$  comme dans la proposition 3.21 et on pose  $G' = \text{GL}_n(F')$ . Plus généralement, on ajoutera un  $'$  aux notations du paragraphe 5.3 pour désigner les objets correspondant au cas où  $\rho$  est le caractère trivial de  $F'^\times$ . En particulier, on note  $M'$  et  $P'$  les sous-groupes de Levi et parabolique standards de  $G'$  associés à  $\alpha$ . On note  $I'_n$  le sous-groupe d'Iwahori standard de  $G'$ , on note  $\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}(G', I'_n)$  son algèbre de Hecke et  $\mathbf{M}'_n$  le foncteur  $V \mapsto V^{I'_n}$  de  $\mathcal{R}(G')$  dans la catégorie des  $\mathcal{H}'_n$ -modules à droite. Il induit une bijection :

$$(5.19) \quad \xi'_n : \text{Irr}(\Omega_{1_{F'^\times}, n})^* \rightarrow \text{Irr}(\mathcal{H}'_n)$$

entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles possédant des vecteurs non nuls invariants par  $I'_n$  et celui des classes d'isomorphisme de  $\mathcal{H}'_n$ -modules à droite irréductibles (voir l'exemple 3.32).

Soit  $\Lambda$  le type simple maximal étendu prolongeant  $\lambda$  tel que  $\rho$  soit isomorphe à l'induite compacte de  $\Lambda$  à  $G_m$  (proposition 4.1). Il détermine un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres :

$$(5.20) \quad \Psi : \mathcal{H}(F'^\times, \mathcal{O}_{F'}^\times) \rightarrow \mathcal{H}(G_m, \lambda)$$

(l'image d'une uniformisante de  $F'$  étant égale à  $\Lambda$ ), qui permet d'identifier  $\text{Irr}(\mathcal{H}_1)$  à  $\mathbb{R}^\times$ . On a le lemme suivant, que l'on prouve comme dans [47, 4.2].

**Lemme 5.29.** — *Pour tout caractère non ramifié  $\chi$  de  $G_m$ , on a  $\xi_1(\rho\chi) = \chi(\varpi_\lambda)^{-1}$ , où  $\varpi_\lambda$  est l'élément de  $G_m$  défini par (3.15).*

Ensuite, on montre le résultat suivant en raisonnant comme dans [47, 2.10].

**Proposition 5.30.** — (1) *Il existe un unique isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres  $\Psi_n$  de  $\mathcal{H}'_n$  dans  $\mathcal{H}_n$  tel que :*

$$(5.21) \quad \Psi_n \circ j'_{(1,\dots,1)} = j_{(1,\dots,1)} \circ (\Psi \otimes \cdots \otimes \Psi).$$

(2) *Si l'on pose  $\Psi_\alpha = \Psi_{n_1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{n_r}$ , alors on a  $\Psi_n \circ j'_\alpha = j_\alpha \circ \Psi_\alpha$ .*

Pour chaque entier  $n \geq 1$ , l'isomorphisme  $\Psi_n$  définit une équivalence, notée  $\Psi_n$ , entre la catégorie des  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite et celle des  $\mathcal{H}'_n$ -modules à droite. Elle induit une bijection, encore notée  $\Psi_n$ , entre les  $\mathcal{H}_n$ -modules à droite irréductibles et les  $\mathcal{H}'_n$ -modules à droite irréductibles. On forme alors la bijection :

$$(5.22) \quad \Phi_n = \xi_n'^{-1} \circ \Psi_n \circ \xi_n : \text{Irr}(\Omega_{\rho,n})^* \rightarrow \text{Irr}(\Omega_{1_{F' \times}, n})^*.$$

La proposition suivante est un résultat de compatibilité de  $\Phi_n$  au support cuspidal.

**Proposition 5.31.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible dans  $\text{Irr}(\Omega_{\rho,n})^*$ , dont on écrit le support cuspidal sous la forme (5.18). Alors on a :*

$$\text{cusp}(\Phi_n(\pi)) = \Phi_1(\rho\chi_1) + \cdots + \Phi_1(\rho\chi_n).$$

*Démonstration.* — On peut supposer que  $\pi$  est une sous-représentation de l'induite parabolique  $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$ . D'après la proposition 5.20,  $\xi_n(\pi)$  est un sous-module irréductible de :

$$(5.23) \quad \text{Hom}_{\mathcal{H}_{(1,\dots,1)}}(\mathcal{H}, \xi_1(\rho\chi_1) \otimes \cdots \otimes \xi_1(\rho\chi_n)).$$

Si  $\chi$  est un caractère non ramifié de  $F^\times$ , on note  $\chi'$  le caractère non ramifié de  $F'^\times$  prenant en une uniformisante de  $F'$  la même valeur que  $\chi$  en une uniformisante de  $F$ . Ceci définit une bijection  $\chi \mapsto \chi'$  entre caractères non ramifiés de  $G$  et caractères non ramifiés de  $G'$ . Le lemme suivant (que l'on prouve comme dans [47, 4.2]) décrit la compatibilité de  $\Phi_n$  à la torsion par un caractère non ramifié. Le lemme suivant découle du lemme 5.29.

**Lemme 5.32.** — *Pour toute représentation irréductible  $\pi$  et tout caractère non ramifié  $\chi$  de  $G$ , on a  $\Phi_n(\pi\chi) = \Phi_n(\pi)\chi'$ .*

Compte tenu du lemme 5.32 et de la propriété (5.21), on déduit de (5.23) que le module  $\xi'_n(\pi')$  est un sous-module irréductible de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}'_{(1,\dots,1)}}(\mathcal{H}', \xi'_1(\chi'_1) \otimes \cdots \otimes \xi'_1(\chi'_n)).$$

D'après la proposition 5.5, on en déduit que  $\pi'$  est une sous-représentation de  $\chi'_1 \times \cdots \times \chi'_n$ , ce qui termine la démonstration de la proposition 5.31.  $\square$

**Proposition 5.33.** — *Pour  $i = 1, 2$ , soit  $n_i \geq 1$  un entier et soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de  $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho, n_i})^*$ . On pose  $n = n_1 + n_2$ . Alors  $\pi_1 \times \pi_2$  est irréductible si et seulement si  $\Phi_{n_1}(\pi_1) \times \Phi_{n_2}(\pi_2)$  est irréductible, auquel cas on a :*

$$\Phi_n(\pi_1 \times \pi_2) = \Phi_{n_1}(\pi_1) \times \Phi_{n_2}(\pi_2).$$

*Démonstration.* — Pour  $i = 1, 2$ , on pose  $\pi'_i = \Phi_{n_i}(\pi_i)$ . Si l'induite  $\pi_1 \times \pi_2$  est irréductible, alors elle appartient à  $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho, n})^*$  et, d'après la proposition 5.20, on a un isomorphisme de  $\mathcal{H}_n$ -modules irréductibles :

$$(5.24) \quad \xi_n(\pi_1 \times \pi_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{(n_1, n_2)}}(\mathcal{H}_n, \xi_{n_1}(\pi_1) \otimes \xi_{n_2}(\pi_2)).$$

D'après la proposition 5.20 à nouveau, on a un isomorphisme de  $\mathcal{H}'_n$ -modules :

$$(5.25) \quad \xi'_n(\pi'_1 \times \pi'_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}'_{(n_1, n_2)}}(\mathcal{H}'_n, \xi'_{n_1}(\pi'_1) \otimes \xi'_{n_2}(\pi'_2)).$$

D'après la proposition 5.30, le membre de droite de (5.25) correspond par  $\Psi_n$  au membre de droite de (5.24). On déduit de la proposition 5.13 que  $\pi'_1 \times \pi'_2$  est irréductible, puis qu'on a une égalité entre  $\Psi_n \circ \xi_n(\pi_1 \times \pi_2)$  et  $\xi'_n(\pi'_1 \times \pi'_2)$ .  $\square$

On déduit de la proposition 5.5 le corollaire suivant.

**Corollaire 5.34.** — *On suppose que tous les sous-quotients irréductibles de  $\pi_1 \times \pi_2$  sont dans  $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho, n})^*$ . Alors  $\pi_1 \times \pi_2$  et  $\Phi_{n_1}(\pi_1) \times \Phi_{n_2}(\pi_2)$  ont la même longueur, et l'une de ces représentations est indécomposable si et seulement si l'autre l'est.*

*Démonstration.* — On choisit une suite de composition :

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = \pi_1 \times \pi_2$$

où les  $V_i$  sont des sous-représentations de  $\pi_1 \times \pi_2$  telles que, pour tout  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ , le quotient  $V_{i+1}/V_i$  soit irréductible. Par hypothèse, ces sous-quotients sont dans  $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho, n})^*$ . On déduit de la proposition 5.5(1) que la longueur de  $\mathbf{M}_n(\pi_1 \times \pi_2)$  est égale à la longueur  $r$  de  $\pi_1 \times \pi_2$ . De façon analogue, la longueur de  $\mathbf{M}'_n(\Phi_{n_1}(\pi_1) \times \Phi_{n_2}(\pi_2))$  est égale à la longueur de  $\Phi_{n_1}(\pi_1) \times \Phi_{n_2}(\pi_2)$ . Le résultat se déduit du fait que les modules  $\mathbf{M}_n(\pi_1 \times \pi_2)$

et  $\mathbf{M}'_n(\Phi_{n_1}(\pi_1) \times \Phi_{n_2}(\pi_2))$  ont la même longueur. Pour l'indécomposabilité, on raisonne de façon analogue en utilisant la proposition 5.5(2).  $\square$

## 6. Le foncteur $\mathbf{K}$

Dans cette section, on introduit un outil technique important permettant de faire un lien entre la théorie des représentations de  $GL_m(D)$  et celle d'un groupe linéaire général sur un corps fini de caractéristique  $p$ . Plus précisément, on associe à un caractère simple maximal (6.1) de  $G = GL_m(D)$  un foncteur  $\mathbf{K}$  de  $\mathcal{R}_R(G)$  dans la catégorie des représentations d'un groupe fini  $\bar{G} = GL_{m'}(k)$ , où l'entier  $m' \geq 1$  et le corps fini  $k$  ne dépendent que du caractère simple. Cette section est consacrée à la définition et à l'étude des principales propriétés de ce foncteur. L'un des résultats principaux est la construction d'un homomorphisme de bigèbres :

$$\mathbf{S} : \mathcal{G}_R \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_R$$

où  $\bar{\mathcal{G}}_R$  est la somme directe des  $\mathcal{G}_R(GL_n(k))$ ,  $n \geq 1$ . Cet homomorphisme est crucial dans les constructions des sections ultérieures. Dans le paragraphe 6.4, on prouve l'unicité du support supercuspidal à inertie près.

### 6.1. Définition

Soit un entier  $m \geq 1$  et soit  $G = G_m$ . On fixe un caractère simple *maximal* :

$$(6.1) \quad \theta_{\max} \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_{\max}, 0, \beta)$$

de  $G$ , c'est-à-dire un caractère simple défini relativement à un ordre  $\mathfrak{A}_{\max}$  qui est maximal parmi les ordres héréditaires  $F(\beta)$ -purs de  $A = \mathcal{M}_m(D)$  et qu'on supposera standard. En d'autres termes, si  $B$  est le centralisateur de  $E = F(\beta)$  dans  $A$ , alors  $\mathfrak{B}_{\max} = \mathfrak{A}_{\max} \cap B$  est un ordre maximal de  $B$ .

**Remarque 6.1.** — Un caractère simple est maximal si et seulement son induite compacte à  $G$  possède un quotient irréductible cuspidal.

Ce caractère simple maximal étant fixé, on fixe un isomorphisme de  $E$ -algèbres :

$$(6.2) \quad \Phi : B \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(D')$$

envoyant  $\mathfrak{B}_{\max}$  sur l'ordre maximal standard  $\mathcal{M}_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$  (remarque 3.13). Dans la suite, on identifiera  $B$  à l'algèbre  $\mathcal{M}_{m'}(D')$  par l'intermédiaire de (6.2). On fixe une  $\beta$ -extension  $\kappa_{\max}$  de  $\theta_{\max}$  et on pose :

$$J_{\max} = J(\beta, \mathfrak{A}_{\max}), \quad J_{\max}^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A}_{\max}), \quad \bar{G} = J_{\max}/J_{\max}^1.$$



Le groupe  $\bar{G}$  est canoniquement isomorphe au quotient  $U(\mathfrak{B}_{\max})/U^1(\mathfrak{B}_{\max})$ , qu'on identifie au groupe  $GL_{m'}(k_{D'})$ . Étant donnée une représentation  $(\pi, V)$  de  $G$ , on pose :

$$(6.3) \quad V(\kappa_{\max}) = \text{Hom}_{J_{\max}^1}(\kappa_{\max}, V)$$

que l'on munit de l'action de  $J_{\max}$  définie, pour  $x \in J_{\max}$  et  $f \in \pi(\kappa_{\max})$ , par la formule :

$$(6.4) \quad x \cdot f = \pi(x) \circ f \circ \kappa_{\max}(x)^{-1}.$$

Pour cette action,  $J_{\max}^1$  opère trivialement, de sorte que (6.4) définit une représentation de  $\bar{G}$  sur (6.3), que l'on note  $\pi(\kappa_{\max})$ . On définit ainsi un foncteur exact :

$$(6.5) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{\kappa_{\max}, \Phi} : \pi \mapsto \pi(\kappa_{\max})$$

de  $\mathcal{R}(G)$  dans la catégorie  $\mathcal{R}(\bar{G})$  des représentations de  $\bar{G}$ . Il apparaît dans [52, 53], puis dans [43] dans le cas complexe. Comme toute représentation lisse irréductible de  $G$  est admissible, ce foncteur préserve le fait d'être de longueur finie.

**Remarque 6.2.** — Ce foncteur dépend des choix effectués.

- Choisissons une autre  $\beta$ -extension de  $\theta_{\max}$ , qu'on peut écrire  $(\kappa_{\max})^\chi$  avec  $\chi$  un caractère de  $k_E^\times$  (voir le lemme 3.4). Étant donnée une représentation  $\pi$  de  $G$ , les représentations  $\pi(\kappa_{\max})$  et  $\pi((\kappa_{\max})^\chi)$  sont tordues l'une de l'autre par le caractère  $\chi \circ \mathfrak{n} \circ \det$ , où  $\mathfrak{n}$  est la norme de  $k_{D'}$  sur  $k_E$ .

- Choisissons un autre isomorphisme (6.2). D'après le théorème de Skolem-Noether, il diffère du premier par un automorphisme de conjugaison par un élément du normalisateur de  $\mathcal{M}_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$  dans  $GL_{m'}(D')$ . Cet automorphisme induit sur  $\pi(\kappa_{\max})$  un automorphisme de conjugaison par un élément du produit semi-direct  $\Gamma \rtimes \bar{G}$  avec  $\Gamma = \text{Gal}(k_{D'}/k_E)$ .

## 6.2. Conditions d'annulation

On étudie maintenant des conditions d'annulation du foncteur  $\mathbf{K}$  qui seront importantes par la suite. On commence par le cas simple suivant.

**Lemme 6.3.** — *Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G$ .*

- (1) *Si  $\rho$  ne contient pas  $\theta_{\max}$ , alors  $\mathbf{K}(\rho) = 0$ .*
- (2) *Si non, il existe une représentation irréductible cuspidale  $\sigma$  de  $\bar{G}$  telle que  $\rho$  contienne le type simple maximal  $\kappa_{\max} \otimes \sigma$ , et on a :*

$$(6.6) \quad \mathbf{K}(\rho) = \sigma \oplus \sigma^\phi \oplus \cdots \oplus \sigma^{\phi^{b(\rho)-1}},$$

où  $b(\rho)$  est l'invariant associé à  $\rho$  au §4.4 et  $\phi$  l'automorphisme de Frobenius de  $k_{D'}/k_E$ .

**Remarque 6.4.** — Dans le cas où  $D$  est égale à  $F$ , on a toujours  $b(\rho) = 1$  et  $\mathbf{K}(\rho) = \sigma$  dans le cas de figure (2).

*Démonstration.* — D’après le lemme 4.10, toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$  contenant  $\theta_{\max}$  contient un type simple maximal de la forme  $\kappa_{\max} \otimes \sigma$  où  $\sigma$  est une représentation irréductible cuspidale de  $\bar{G}$ . On fixe un type simple maximal étendu  $\Lambda$  prolongeant  $\kappa_{\max} \otimes \sigma$  tel que  $\rho$  soit isomorphe à l’induite compacte de  $\Lambda$  à  $G$ . La formule (6.6) est alors une conséquence du lemme 4.2.  $\square$

**Corollaire 6.5.** — Soient  $\rho$  et  $\rho'$  des représentations irréductibles cuspidales de  $G$  contenant  $\theta_{\max}$ . Alors  $\rho$  et  $\rho'$  sont inertiellement équivalentes si et seulement si  $\mathbf{K}(\rho)$  et  $\mathbf{K}(\rho')$  sont isomorphes.

La question de savoir si un caractère simple apparaît ou non dans une représentation irréductible cuspidale est liée à la notion d’endo-classe que nous n’avons fait que mentionner au paragraphe 3.2.3. On note :

$$(6.7) \quad \Theta_{\max}$$

la  $F$ -endo-classe associée à  $\theta_{\max}$ , que nous ne définirons pas (voir [11] pour une définition). La définition suivante nous suffira.

**Définition 6.6.** — Une représentation irréductible cuspidale de  $G_{m'}$ ,  $m' \geq 1$ , est dite d’endo-classe  $\Theta_{\max}$  si elle contient un caractère simple qui est un transfert de  $\theta_{\max}$ .

La série de lemmes qui suit a pour objectif le corollaire 6.10 et la proposition 6.11.

**Lemme 6.7.** — Soient  $(J, \lambda)$  un type simple et  $(K', \tau')$  un type semi-simple dans  $G$ . On suppose que  $\lambda$  est un sous-quotient de la restriction de  $\text{ind}_{K'}^G(\tau')$  à  $J$ . Alors :

- (1)  $(K', \tau')$  contient un caractère simple  $\theta' \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}', 0, \beta')$  ;
- (2) le caractère  $\theta'$  et le caractère simple  $\theta$  contenu dans  $\lambda$  sont transferts l’un de l’autre.

*Démonstration.* — Si  $R$  est de caractéristique nulle, l’hypothèse implique qu’il existe un morphisme non nul de  $\text{ind}_J^G(\lambda)$  dans  $\text{ind}_{K'}^G(\tau')$ . Soit  $\pi$  un quotient irréductible de  $\text{ind}_J^G(\lambda)$  contenu dans l’image de ce morphisme. Comme  $(K', \tau')$  est un type pour  $G$  (voir [49]), la catégorie des représentations engendrées par leur composante  $\tau'$ -isotypique est stable par sous-quotients dans  $\mathcal{R}_R(G)$ , donc  $\pi$  contient à la fois  $\lambda$  et  $\tau'$ . Le résultat vient alors de la classification des types semi-simples dans [49].

On suppose maintenant que le corps  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle. Comme toutes les représentations considérées sont lisses sur des sous-groupes ouverts compacts, elles sont définies sur  $\bar{\mathbb{F}}_\ell$  (voir [52, II.4]), de sorte qu’il suffit de prouver le résultat pour  $R = \bar{\mathbb{F}}_\ell$ .

On suppose donc qu'on est dans ce cas, ce qui permet d'utiliser le procédé de réduction modulo  $\ell$ . On fixe un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type semi-simple  $\tilde{\tau}'$  relevant  $\tau'$  (proposition 3.43) et un facteur irréductible  $\tilde{\delta}$  de la restriction de  $\text{ind}_{\mathbb{K}'}^{\mathbb{G}}(\tilde{\tau}')$  à  $J$  dont la réduction modulo  $\ell$  admet  $\lambda$  pour sous-quotient. On note  $\tilde{\theta}$  le relèvement de  $\theta$  et on fixe une  $\beta$ -extension  $\tilde{\kappa}$  de  $\tilde{\theta}$ .

**Lemme 6.8.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible d'un  $p$ -groupe fini  $H$  telle que la réduction  $\mathbf{r}_\ell(\pi)$  possède des vecteurs  $H$ -invariants non nuls. Alors  $\pi$  est le caractère trivial de  $H$ .*

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur le cardinal de  $H$ . Si  $H$  est d'ordre  $p$ , il est cyclique et  $\pi$  est un caractère. Les valeurs prises par  $\pi$  sont des racines  $p$ -ièmes de l'unité, et ce sont aussi des racines de l'unité d'ordre une puissance de  $\ell$  puisque  $\mathbf{r}_\ell(\pi)$  est trivial. On en déduit que  $\pi$  est trivial.

On suppose maintenant que  $H$  est d'ordre  $> p$  et on note  $V$  l'espace de  $\pi$ . Comme  $H$  est résoluble, il possède un sous-groupe  $H'$  distingué et d'indice  $p$ . La restriction de  $V$  à  $H'$  admet un facteur irréductible  $W$  dont la réduction possède des vecteurs  $H$ -invariants non nuls. Par hypothèse de récurrence,  $W$  est de dimension 1 et  $H'$  agit dessus trivialement. Il existe donc un  $H'$ -homomorphisme non trivial du caractère trivial de  $H'$  vers la restriction de  $V$  à  $H'$ . Par réciprocity de Frobenius, il existe un  $H$ -homomorphisme non trivial :

$$\text{ind}_{H'}^H(1) \rightarrow V.$$

Puisque  $V$  est irréductible, cet homomorphisme est surjectif, donc  $V$  est un facteur direct de  $\text{ind}_{H'}^H(1)$ , ce dont on déduit que  $V$  est une représentation irréductible de  $H$  triviale sur  $H'$ . Puisque  $H/H'$  est cyclique,  $V$  est de dimension 1. On termine comme dans le cas où  $H$  est d'ordre  $p$ .  $\square$

**Lemme 6.9.** — *Il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible  $\tilde{\xi}$  de  $J$  triviale sur  $J^1$  tels que  $\tilde{\delta}$  soit isomorphe à  $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\xi}$ .*

*Démonstration.* — On note  $\tilde{\delta}^1$  la restriction de  $\tilde{\delta}$  au pro- $p$ -groupe  $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ . Sa réduction modulo  $\ell$  contient  $\theta$ . En appliquant le lemme 6.8 à  $\tilde{\delta}^1 \tilde{\theta}^{-1}$ , on en déduit que  $\tilde{\delta}^1$  contient  $\tilde{\theta}$ . On conclut en appliquant le lemme 3.16.  $\square$

Soit  $\tilde{\pi}$  un sous-quotient irréductible de  $\text{ind}_{\mathbb{K}'}^{\mathbb{G}}(\tilde{\lambda}')$  contenant  $\tilde{\delta}$ , qui est de la forme donnée par le lemme 6.9. Si  $\tilde{\xi}$  n'est pas cuspidale, une manipulation classique permet de remplacer  $\tilde{\delta}$  par un type semi-simple  $\tilde{\delta}''$  de la forme  $\tilde{\kappa}'' \otimes \tilde{\xi}''$ , où  $\tilde{\xi}''$  est dans le support cuspidal de  $\tilde{\xi}$ , et ce type semi-simple apparaît dans  $\tilde{\pi}$ . En reprenant l'argument utilisé dans le cas où  $R$  est de caractéristique nulle, on trouve que  $\tilde{\pi}$  contient les types semi-simples  $\tilde{\lambda}'$  et  $\tilde{\delta}''$ , ce qui implique que :

- (1)  $(K', \tilde{\lambda}')$  contient un caractère simple  $\tilde{\theta}' \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathfrak{A}', 0, \beta')$  ;  
 (2) le caractère  $\tilde{\theta}'$  et le caractère  $\tilde{\theta}$  sont transferts l'un de l'autre.

À partir de là, on obtient le résultat voulu par réduction modulo  $\ell$ .  $\square$

**Corollaire 6.10.** — Soient  $\rho_1, \dots, \rho_n$  des représentations irréductibles cuspidales. On suppose que l'induite  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  possède un sous-quotient irréductible cuspidal  $\pi$  d'endo-classe  $\Theta_{\max}$ . Alors  $\rho_1, \dots, \rho_n$  et  $\pi$  sont toutes d'endo-classe  $\Theta_{\max}$ .

*Démonstration.* — Pour chaque  $i$ , on note  $m_i$  le degré de  $\rho_i$ . On pose  $\alpha = (m_1, \dots, m_n)$  et on note  $m$  la somme des  $m_i$ . Soit  $(J_\alpha, \lambda_\alpha)$  un type simple maximal de  $M_\alpha$  contenu dans  $\varrho = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$ . Soit  $(K, \tau)$  un type semi-simple de  $G_m$  qui est une paire couvrante de  $(J_\alpha, \lambda_\alpha)$ . Soit  $\pi$  un sous-quotient irréductible cuspidal de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  et soit  $(J, \lambda)$  un type simple maximal contenu dans  $\pi$ . Comme  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  est un quotient de  $\text{ind}_K^{G_m}(\tau)$ , le type simple  $\lambda$  est un sous-quotient de la restriction de  $\text{ind}_K^{G_m}(\tau)$  à  $J$ . D'après le lemme 6.7, les représentations  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont toutes d'endo-classe  $\Theta_{\max}$ .  $\square$

**Proposition 6.11.** — Soient  $\rho_1, \dots, \rho_n$  des représentations irréductibles cuspidales de même endo-classe  $\Theta_{\max}$ . Soit  $\pi$  un sous-quotient irréductible de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  de support cuspidal noté  $[\tau_1] + \dots + [\tau_r]$ . Alors  $\tau_1, \dots, \tau_r$  sont toutes d'endo-classe  $\Theta_{\max}$  et la représentation  $\mathbf{K}(\pi)$  est non nulle.

*Démonstration.* — On pose  $\gamma = (\deg(\tau_1), \dots, \deg(\tau_r))$ . Le module de Jacquet  $r_\gamma(\mathbf{i}_\alpha(\varrho))$  a pour sous-quotient irréductible la représentation cuspidale  $\tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_r$ . En appliquant le corollaire 6.10 à chacun des  $\tau_i$ , on obtient le résultat annoncé.  $\square$

### 6.3. Compatibilité à l'induction parabolique

Avant de prouver l'unicité du support supercuspidal à inertie près (proposition 6.16), il nous faut prouver une propriété de compatibilité du foncteur  $\mathbf{K}$  à l'induction parabolique (proposition 6.12). Soit  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  une famille d'entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ , ce qui définit une décomposition :

$$(6.8) \quad D^m = D^{m_1} \oplus \dots \oplus D^{m_r}$$

en  $D$ -espaces vectoriels à droite. Pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on pose  $A_i = \mathcal{M}_{m_i}(D)$ . On suppose que  $E$  stabilise la décomposition (6.8), c'est-à-dire que  $E$  est contenu dans la sous-algèbre diagonale  $A_1 \times \dots \times A_r \subseteq A$ . Pour chaque  $i$ , on note  $B_i$  le centralisateur de  $E$  dans  $A_i$ . Compte tenu de l'hypothèse faite sur  $E$ , le produit  $B_1 \times \dots \times B_r$  s'identifie à une sous- $E$ -algèbre de  $B$ . On fixe :

**A1** un caractère simple maximal  $\theta_{\max,i} \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_{\max,i}, 0, \beta)$  de  $G_{m_i}$  pour un ordre héréditaire E-pur maximal standard  $\mathfrak{A}_{\max,i}$  de  $A_i$ , d'endo-classe  $\Theta_{\max}$  ;

**A2** une  $\beta$ -extension  $\kappa_{\max,i}$  de  $\theta_{\max,i}$  ;

et on note  $\Phi_i$  l'isomorphisme de E-algèbres de  $B_i$  dans  $\mathcal{M}_{m'_i}(D')$  obtenu par restriction de  $\Phi$  à  $B_i$ . Ces données définissent pour chaque  $i$  un foncteur  $\mathbf{K}_i$  de  $\mathcal{R}(G_{m_i})$  dans  $\mathcal{R}(\bar{G}_i)$  où  $\bar{G}_i$  est isomorphe à  $\mathrm{GL}_{m'_i}(k_{D'})$ . On définit aussi un foncteur :

$$\mathbf{K}_\alpha : \pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_{\max,\alpha}^1}(\kappa_{\max,\alpha}, \pi)$$

de  $\mathcal{R}(M_\alpha)$  dans  $\mathcal{R}(\bar{M}_\alpha)$ , où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\max,\alpha} &= \mathbf{J}_{\max,1} \times \cdots \times \mathbf{J}_{\max,r}, \\ \mathbf{J}_{\max,\alpha}^1 &= \mathbf{J}_{\max,1}^1 \times \cdots \times \mathbf{J}_{\max,r}^1, \\ \kappa_{\max,\alpha} &= \kappa_{\max,1} \otimes \cdots \otimes \kappa_{\max,r} \end{aligned}$$

et où  $\bar{M}_\alpha = \mathbf{J}_{\max,\alpha} / \mathbf{J}_{\max,\alpha}^1$  est canoniquement isomorphe au sous-groupe de Levi standard  $\bar{G}_1 \times \cdots \times \bar{G}_r$  de  $\bar{G}$ . On note  $\mathfrak{A}$  l'ordre principal standard de  $A$  tel que  $\mathfrak{A} \cap A_i = \mathfrak{A}_{\max,i}$ . Soient  $\theta$  le transfert de  $\theta_{\max}$  à  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  et  $\kappa$  le transfert de  $\kappa_{\max}$  en une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . On suppose que :

**A3** la représentation de  $\mathbf{J} \cap M_\alpha$  sur l'espace des vecteurs  $\mathbf{J} \cap U_\alpha$ -invariants de  $\kappa$  est isomorphe à  $\kappa_{\max,\alpha}$ .

On a le résultat suivant.

**Proposition 6.12.** — *Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de  $G_{m_i}$ . Alors on a un isomorphisme de représentations de  $\bar{G}$  :*

$$\mathbf{K}(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r) \simeq \mathbf{K}_1(\pi_1) \times \cdots \times \mathbf{K}_r(\pi_r).$$

*Démonstration.* — Le résultat est vrai dans le cas où  $R$  est de caractéristique 0 : la preuve de Schneider et Zink [43, Proposition 5.7] est encore valable. On peut donc supposer que  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle. On procède par récurrence sur  $\alpha$ .

**Lemme 6.13.** — *Pour toute représentation  $\pi$  de  $M_\alpha$ , il existe un homomorphisme injectif :*

$$(6.9) \quad \kappa_{\max} \otimes \bar{\iota}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi)) \rightarrow \mathbf{i}_\alpha(\pi)$$

de représentations de  $\mathbf{J}_{\max}$ , où  $\bar{\iota}_\alpha$  désigne l'induction parabolique finie (paragraphe A.1.1).

*Démonstration.* — On reprend la première partie de la preuve de [52, III.5.12], en utilisant la proposition 3.18.  $\square$

En appliquant le foncteur exact  $\mathbf{K}$ , on déduit du lemme 6.13, pour toute représentation  $\pi$  de  $M_\alpha$ , un homomorphisme injectif :

$$(6.10) \quad \bar{\iota}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi)) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi))$$

de représentations de  $\bar{G}$ .

Soit  $\pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$  une représentation irréductible de  $M_\alpha$ , et soit  $\varrho'$  une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi  $M_{\alpha'}$  de  $M_\alpha$  dont l'induite à  $M_\alpha$ , notée  $\pi'$ , admet une sous-représentation isomorphe à  $\pi$ . Au moyen du lemme 6.13, on écrit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\iota}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi)) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{\iota}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi')) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi')) \end{array}$$

dans lequel, par hypothèse de récurrence, on peut remplacer la ligne du bas par l'application injective :

$$(6.11) \quad \bar{\iota}_{\alpha'}(\mathbf{K}_{\alpha'}(\varrho')) \longrightarrow \mathbf{K}(\mathbf{i}_{\alpha'}(\varrho')).$$

La surjectivité de (6.11) implique donc celle de (6.10), et l'on voit ainsi que l'on a ramené la preuve de la proposition 6.12 au cas où les  $\pi_i$  sont irréductibles et cuspidales. Supposons donc qu'il en est ainsi. Quitte à tordre  $\pi$  par un caractère non ramifié de  $M_\alpha$ , on peut supposer que son caractère central est à valeurs dans  $\bar{\mathbb{F}}_\ell$ , donc que  $\pi$  est définie sur  $\bar{\mathbb{F}}_\ell$ . Il suffit donc de prouver le résultat dans le cas où  $R = \bar{\mathbb{F}}_\ell$ , ce que l'on suppose désormais.

**Lemme 6.14.** — *Soit  $\tilde{\kappa}_{\max}$  une  $\beta$ -extension relevant  $\kappa_{\max}$ , et soit  $\tilde{\mathbf{K}}$  le foncteur qui lui est associé. Pour toute  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière  $\tilde{\pi}$  de longueur finie de  $G$ , on a :*

$$\mathbf{r}_\ell([\tilde{\mathbf{K}}(\tilde{\pi})]) = [\mathbf{K}(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}))].$$

*Démonstration.* — Il suffit de le prouver pour une représentation  $\tilde{\pi}$  irréductible. On fixe une structure entière  $\mathfrak{k}_{\max}$  de  $\kappa_{\max}$  et une structure entière  $\mathfrak{l}$  de  $\tilde{\pi}$ . Alors  $\mathrm{Hom}_{J_{\max}^1}(\mathfrak{k}_{\max}, \mathfrak{l})$  est une structure entière de  $\mathbf{K}(\tilde{\pi})$ .  $\square$

D'après la proposition 4.23, il existe une  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière  $\tilde{\pi}$  de  $M_\alpha$  telle que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}) \geq [\pi]$ . Comme le résultat est valable en caractéristique nulle, on a un isomorphisme :

$$(6.12) \quad \bar{\iota}_\alpha(\tilde{\mathbf{K}}_\alpha(\tilde{\pi})) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{i}_\alpha(\tilde{\pi}))$$

de  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations de  $\bar{G}$ . Compte tenu du lemme 6.14, ceci implique que (6.10) est un isomorphisme de représentations de  $\bar{G}$ .  $\square$

**Remarque 6.15.** — On a en fait prouvé que, pour toute représentation  $\pi$  de longueur finie de  $M_\alpha$ , l'homomorphisme injectif (6.10) est un isomorphisme de représentations de  $\bar{G}$ . En notant  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbb{R}}$  la somme directe des  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}(\mathrm{GL}_n(k_{D'}))$ ,  $n \geq 1$ , qui est munie d'une structure de  $\mathbb{Z}$ -algèbre graduée, on obtient ainsi un homomorphisme d'algèbres graduées, encore noté  $\mathbf{K}$ , de  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$  dans  $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbb{R}}$ .

#### 6.4. Unicité du support supercuspidal à inertie près

On tire de ce qui précède le résultat suivant.

**Proposition 6.16.** — Soient  $(M, \varrho)$  et  $(M', \varrho')$  des paires supercuspidales de  $G$ , et soient  $P$  et  $P'$  des sous-groupes paraboliques de  $G$  de facteurs de Levi respectifs  $M$  et  $M'$ . On suppose que  $\mathbf{i}_P^G(\varrho)$  et  $\mathbf{i}_{P'}^G(\varrho')$  ont un sous-quotient irréductible en commun. Alors les paires supercuspidales  $(M, \varrho)$  et  $(M', \varrho')$  sont inertiuellement équivalentes.

*Démonstration.* — On peut supposer que les sous-groupes de Levi sont standards, c'est-à-dire que  $M = M_\alpha$  et  $M' = M_{\alpha'}$  où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  et  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n'})$  sont chacune des familles d'entiers de somme  $m$ , et on écrit  $\varrho = \rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$  et  $\varrho' = \rho'_1 \otimes \dots \otimes \rho'_{n'}$ . Soit  $\pi$  un sous-quotient irréductible commun. En fixant une famille d'entiers  $\gamma$  de somme  $m$  telle que  $\mathbf{r}_\gamma(\pi)$  soit cuspidale et en appliquant le lemme géométrique, on peut se ramener au cas où  $\pi$  est cuspidale. Dans ce cas, le corollaire 6.10 implique que les  $\rho_i$  et les  $\rho'_j$  ont toutes la même endo-classe, disons  $\Theta_{\max}$ . Pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on fixe un type simple maximal  $\kappa_i \otimes \sigma_i$  contenu dans  $\rho_i$ , où  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  sont des  $\beta$ -extensions compatibles à  $\kappa_{\max}$  au sens de la condition **A3**. D'après la proposition 6.12, on a :

$$(6.13) \quad [\mathbf{K}(\rho_1 \times \dots \times \rho_n)] = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_r} [\sigma_1^{\phi^{i_1}} \times \dots \times \sigma_r^{\phi^{i_r}}],$$

où chaque  $i_j$  varie entre 1 et  $b(\rho_j)$  (voir (4.7)), et on a une formule analogue pour  $\varrho'$ . On en déduit donc que, quitte à conjuguer les types maximaux initiaux de façon convenable, les quantités :

$$\sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \quad \text{et} \quad \sigma'_1 \times \dots \times \sigma'_{n'}$$

ont un sous-quotient irréductible en commun. De l'unicité du support supercuspidal pour les représentations irréductibles du groupe fini  $\bar{G}$  (voir le paragraphe A.1.2) on déduit que  $n = n'$  et :

$$[\sigma_1] + \dots + [\sigma_n] = [\sigma'_1] + \dots + [\sigma'_{n'}].$$

Quitte à réordonner les  $\rho_i$  (c'est-à-dire, à conjuguer  $\varrho$ ), on peut supposer que  $[\sigma_i] = [\sigma'_i]$  pour tout  $i$ . Comme  $\sigma_i$  et  $\sigma'_i$  ont même degré, et comme les  $\rho_i$  et les  $\rho'_j$  ont toutes la même endo-classe, on a  $\deg(\rho_i) = \deg(\rho'_i)$ . Donc  $\rho_i$  et  $\rho'_i$  ont la même endo-classe, sont

de même degré, et  $[\sigma_i] = [\sigma'_i]$ . On déduit du corollaire 6.5 que  $\rho_i$  et  $\rho'_i$  sont inertiellement équivalentes. Ainsi les paires supercuspidales  $(M, \varrho)$  et  $(M', \varrho')$  sont inertiellement équivalentes.  $\square$

À l'aide de la proposition 6.16, on prouve une variante inertielle du théorème 5.18.

**Théorème 6.17.** — *Soit  $r \geq 1$  un entier et soient  $\rho_1, \dots, \rho_r$  des représentations irréductibles supercuspidales deux à deux non inertiellement équivalentes. Pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit une classe inertielle  $\Omega_i \subseteq \mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$  de  $G_{m_i}$ ,  $m_i \geq 1$ , et soit  $\Omega$  la classe inertielle de  $G_m$ ,  $m = m_1 + \dots + m_r$ , définie par  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ .*

(1) *Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible dans  $\text{Irr}(\Omega_i)$ . Alors  $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$  est irréductible.*

(2) *L'application :*

$$(\pi_1, \dots, \pi_r) \rightarrow \pi_1 \times \dots \times \pi_r$$

*induit une bijection de  $\text{Irr}(\Omega_1) \times \dots \times \text{Irr}(\Omega_r)$  dans  $\text{Irr}(\Omega)$ .*

*Démonstration.* — Décomposons chaque  $\pi_i$  sous la forme  $\pi_i = \pi_{i,1} \times \pi_{i,2} \times \dots$  donnée par le théorème 5.18. Supposons qu'il existe deux couples  $(i, j) \neq (i', j')$  tels qu'un terme  $[\rho_{i,j}]$  de  $\text{cusp}(\pi_{i,j})$  soit inertiellement inéquivalent à un terme  $[\rho_{i',j'}]$  de  $\text{cusp}(\pi_{i',j'})$ . Alors on a  $i \neq i'$ . En appliquant un foncteur de Jacquet convenable, on fait apparaître que  $\rho_{i,j}$  est un sous-quotient irréductible d'une induite d'un élément de  $\mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$  et que  $\rho_{i',j'}$  est un sous-quotient irréductible d'une induite d'un élément de  $\mathbb{N}(\Omega_{\rho_{i'}})$ . D'après la proposition 6.16, cela entraîne que  $\rho_i$  et  $\rho_{i'}$  sont inertiellement équivalentes, ce qui donne une contradiction puisque  $i \neq i'$ . Le point (1) est alors une conséquence du théorème 5.18(1). Le point (2) s'obtient par un appauvrissement du théorème 5.18(2).  $\square$

## 6.5. Compatibilité à la restriction parabolique

On prouve maintenant une propriété de compatibilité de  $\mathbf{K}$  à la restriction parabolique (proposition 6.19). On pose  $G = G_m$ .

**6.5.1.** Soit  $\bar{P} = \bar{M}\bar{U}$  un sous-groupe parabolique standard de  $\bar{G}$ . Il correspond à  $\bar{P}$  un ordre héréditaire standard  $\mathfrak{B}$  de  $B$  tel que :

$$\bar{P} = U(\mathfrak{B})J_{\max}^1/J_{\max}^1 \simeq U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}_{\max}), \quad \bar{U} = U^1(\mathfrak{B})J_{\max}^1/J_{\max}^1 \simeq U^1(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B}_{\max})$$

et on a alors un isomorphisme canonique  $\bar{M} \simeq U(\mathfrak{B})/U^1(\mathfrak{B})$ . Soit  $\mathfrak{A}$  un ordre héréditaire  $E$ -pur de  $A$  tel que  $\mathfrak{A} \cap B = \mathfrak{B}$  et qui soit propre au sens de [46, Définition 4.7]. Soit  $\theta$  le



transfert de  $\theta_{\max}$  dans  $\mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  et soit  $\kappa$  le transfert de  $\kappa_{\max}$  contenant  $\theta$ . Toute représentation de  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  triviale sur  $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$  peut être vue comme une représentation de  $\bar{M}$ . On note  $\mathbf{i}_{\bar{P}}^{\bar{G}}$  le foncteur d'induction parabolique de  $\bar{M}$  à  $\bar{G}$ .

**Proposition 6.18.** — *Soit  $\pi$  une représentation de  $G$ , et soit  $\bar{P} = \bar{M}\bar{U}$  un sous-groupe parabolique standard de  $\bar{G}$ .*

(1) *On a un isomorphisme canonique de représentations de  $\bar{M}$  :*

$$(6.14) \quad \mathbf{K}(\pi)^{\bar{U}} \simeq \mathrm{Hom}_{J^1}(\kappa, \pi).$$

(2) *Pour toute représentation irréductible  $\xi$  de  $J$  triviale sur  $J^1$ , on a un homomorphisme injectif de  $\mathbb{R}$ -algèbres :*

$$(6.15) \quad \mathrm{End}_{\bar{G}}(\mathbf{i}_{\bar{P}}^{\bar{G}}(\xi)) \simeq \mathcal{H}(J_{\max}, \kappa_{\max}|_{U(\mathfrak{B})J_{\max}^1} \otimes \xi) \hookrightarrow \mathcal{H}(G, \kappa \otimes \xi)$$

*et un isomorphisme :*

$$(6.16) \quad \mathrm{Hom}_{\bar{M}}(\xi, \mathbf{K}(\pi)^{\bar{U}}) \simeq \mathrm{Hom}_J(\kappa \otimes \xi, \pi)$$

*de  $\mathrm{End}_{\bar{G}}(\mathbf{i}_{\bar{P}}^{\bar{G}}(\xi))$ -modules.*

*Démonstration.* — On prouve l'assertion (1) comme dans [43, 5] grâce aux propriétés de transfert entre  $\beta$ -extensions, et on obtient (6.15) au moyen du lemme 3.18. Enfin, on a des isomorphismes de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_J(\kappa \otimes \xi, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{M}}(\xi, \mathbf{K}(\pi)^{\bar{U}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{G}}(\mathbf{i}_{\bar{P}}^{\bar{G}}(\xi), \mathbf{K}(\pi))$$

et on vérifie qu'ils sont  $\mathrm{End}_{\bar{G}}(\mathbf{i}_{\bar{P}}^{\bar{G}}(\xi))$ -équivariants.  $\square$

**6.5.2.** Expliquons comment le sous-groupe parabolique standard  $\bar{P} = \bar{M}\bar{U}$  de  $\bar{G}$  définit un sous-groupe parabolique  $P = MU$  de  $G$ . On fixe un  $E \otimes_{\mathbb{F}} D$ -module à gauche simple  $S$  et on forme le  $B$ -module à gauche simple :

$$V_B = \mathrm{Hom}_{E \otimes_{\mathbb{F}} D}(S, D^m).$$

La  $E$ -algèbre opposée à  $\mathrm{End}_B(V_B)$  est isomorphe à  $D'$ . On note  $(e_1, \dots, e_{m'})$  une base de  $V_B$  sur  $D'$  définissant l'isomorphisme (6.2). Un sous-groupe parabolique standard  $\bar{P}$  de  $\bar{G}$  correspond à un drapeau de cette base, qui définit lui-même un drapeau de  $V_B$ , mais aussi un drapeau de  $D^m$  par équivalence de Morita (voir [46]). Ce dernier drapeau définit un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  tel que :

$$(6.17) \quad \bar{P} = (P \cap U(\mathfrak{B}_{\max}))J_{\max}^1/J_{\max}^1.$$

De façon analogue, le facteur de Levi standard  $\bar{M}$  de  $\bar{P}$  définit un facteur de Levi  $M$  de  $P$  tel que :

$$(6.18) \quad \bar{M} = (M \cap U(\mathfrak{B}_{\max}))J_{\max}^1/J_{\max}^1.$$

On note  $\varkappa$  la représentation de  $K = H^1(\beta, \mathfrak{A})(J \cap P)$  définie au paragraphe 3.7.2 et dont l'induite à  $J$  est isomorphe à  $\kappa$ . (L'hypothèse de propreté faite sur  $\mathfrak{A}$  plus haut correspond à la condition sur  $\mathfrak{A}$  au paragraphe 3.7.2.) D'après la proposition 3.33, la paire  $(K, \varkappa \otimes \sigma)$  est un type semi-simple de  $G$ .

Comme au paragraphe 6.3, soit  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  une famille d'entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ . On suppose que  $\bar{P} = \bar{M}\bar{U}$  correspond au sous-groupe parabolique standard  $P_\alpha = M_\alpha U_\alpha$ .

**Proposition 6.19.** — *Soit  $\pi$  une représentation de  $G$ . L'application naturelle :*

$$\mathbf{K}(\pi)^{\bar{U}} \rightarrow \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(\pi))$$

*est un isomorphisme de représentations de  $\bar{M}$ .*

*Démonstration.* — On commence par remarquer qu'on a des isomorphismes :

$$\mathbf{K}(\pi)^{\bar{U}} \simeq \text{Hom}_{J^1}(\kappa, \pi) \simeq \text{Hom}_{K^1}(\varkappa, \pi)$$

de représentations de  $\bar{M}$  d'une part, et que :

$$\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(\pi)) = \text{Hom}_{J_{\max, \alpha}^1}(\kappa_{\max, \alpha}, \mathbf{r}_\alpha(\pi))$$

d'autre part. Pour obtenir le résultat voulu, il suffit d'après (3.24) de prouver le lemme suivant.<sup>(1)</sup>

**Lemme 6.20.** — *La paire  $(K^1, \varepsilon)$  est une paire couvrante de  $(J_{\max, \alpha}^1, \eta_{\max, \alpha})$ .*

*Démonstration.* — D'après [6, page 246], il suffit de prouver que, pour toute représentation  $\pi$  de  $M$ , l'application :

$$(6.19) \quad \text{Hom}_{K^1}(\varkappa, \pi) \rightarrow \text{Hom}_{J_{\max, \alpha}^1}(\kappa_{\max, \alpha}, \mathbf{r}_\alpha(\pi))$$

est injective, ce qu'on va prouver par récurrence sur  $\alpha$ . Soit  $\pi$  une représentation de  $M$ . On considère (6.19) comme un homomorphisme de représentations de  $K/K^1 \simeq \bar{M}$ . On note  $\mathcal{V}$  son noyau, qui est de dimension finie, et on suppose que  $\mathcal{V}$  est non nul. Il existe donc un sous-groupe de Levi  $\bar{M}' \subseteq \bar{M}$  et une représentation irréductible cuspidale  $\sigma'$  de

<sup>(1)</sup>Le second auteur remercie Shaun Stevens pour une discussion sur une version préliminaire de la preuve de ce lemme.

$\bar{M}'$  telle que  $\mathcal{V}$  possède une sous-représentation de support cuspidal  $(\bar{M}', \sigma')$ . Si  $\bar{M}' = \bar{M}$ , on calcule la composante  $\sigma'$ -isotypique, ce qui donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{\sigma'} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{Z} \otimes \sigma', \pi) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{J}_{\max, \alpha}}(\kappa_{\max, \alpha} \otimes \sigma', \mathbf{r}_{\alpha}(\pi))$$

d'espaces vectoriels. Comme  $(\mathbb{K}, \mathcal{Z} \otimes \sigma')$  est une paire couvrante de  $(\mathbb{J}_{\max, \alpha}, \kappa_{\max, \alpha} \otimes \sigma')$  d'après la proposition 3.33, on a  $\mathcal{V}^{\sigma'} = 0$ , ce qui contredit le fait que  $\sigma'$  est une sous-représentation de  $\mathcal{V}$ .

On suppose maintenant que  $\bar{M}'$  est un sous-groupe de Levi propre de  $\bar{M}$  et on note  $\alpha'$  la famille telle que  $\bar{M}'$  corresponde à  $M' = M_{\alpha'}$ . On note aussi  $\bar{P}' = \bar{M}'\bar{U}'$  le sous-groupe parabolique standard de  $\bar{G}$  de facteur de Levi  $\bar{M}'$ . On pose  $U' = U_{\alpha'}$ . On note  $\mathfrak{B}'$  l'ordre héréditaire de  $B$  inclus dans  $\mathfrak{B}$  tel que :

$$U(\mathfrak{B}')J^1(\beta, \mathfrak{A})/U^1(\mathfrak{B}')J^1(\beta, \mathfrak{A}) \simeq \bar{M}'$$

et on choisit un ordre héréditaire E-pur  $\mathfrak{A}'$  propre tel que  $\mathfrak{A}' \cap B = \mathfrak{B}'$ . On lui associe par transfert une  $\beta$ -extension  $(J', \kappa')$  avec  $J' = J(\beta, \mathfrak{A}')$ . On note  $\kappa_{\max, \alpha'}$  la représentation du groupe  $\mathbb{J}_{\max, \alpha'} = J' \cap M'$  sur l'espace des vecteurs  $J' \cap U'$ -invariants de  $\kappa'$ . Soit  $(K', \mathcal{Z}')$  la paire associée à  $(J', \kappa')$  comme au paragraphe 3.7.2, avec la propriété que l'induite de  $\mathcal{Z}'$  à  $J'$  est isomorphe à  $\kappa'$ . On obtient :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}^1}(\mathcal{Z}, \pi)^{\bar{M} \cap \bar{U}'} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{J}^1}(\kappa', \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}^1}(\mathcal{Z}', \pi)$$

et :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{J}_{\max, \alpha}^1}(\kappa_{\max, \alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}(\pi))^{\bar{M} \cap \bar{U}'} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{J}_{\alpha}^1}(\kappa'_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}(\pi)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_{\alpha}^1}(\mathcal{Z}'_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}(\pi)),$$

où  $\mathbb{J}_{\alpha}^1 = \mathbb{J}^1 \cap M$  et où  $\kappa'_{\alpha}$  est la restriction de  $\kappa'$  à  $J'_{\alpha} = J' \cap M$ . De façon analogue, on note  $\mathcal{Z}'_{\alpha}$  la restriction de  $\mathcal{Z}'$  à  $\mathbb{K}_{\alpha}^1 = K' \cap M$  et  $\varepsilon'_{\alpha}$  sa restriction à  $\mathbb{K}_{\alpha}^1 = K^1 \cap M$ . Par hypothèse de récurrence, la paire  $(\mathbb{K}_{\alpha}^1, \varepsilon'_{\alpha})$  est une paire couvrante de  $(\mathbb{J}_{\max, \alpha'}^1, \eta_{\max, \alpha'})$ . On en déduit que l'application :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}_{\alpha}^1}(\mathcal{Z}'_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}(\pi)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{J}_{\max, \alpha'}^1}(\kappa_{\max, \alpha'}, \mathbf{r}_{\alpha'}(\pi))$$

est un isomorphisme. En appliquant le foncteur des  $\bar{M} \cap \bar{U}'$ -invariants à (6.19) et en prenant ensuite la composante  $\sigma'$ -isotypique, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\mathcal{V}^{\bar{M} \cap \bar{U}'})^{\sigma'} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathcal{Z}' \otimes \sigma', \pi) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{J}_{\max, \alpha'}}(\kappa_{\max, \alpha'} \otimes \sigma', \mathbf{r}_{\alpha'}(\pi))$$

de R-espaces vectoriels. Compte tenu du fait que  $(K', \mathcal{Z}' \otimes \sigma')$  est une paire couvrante de  $(\mathbb{J}_{\max, \alpha'}, \kappa_{\max, \alpha'})$  d'après la proposition 3.33, on trouve que  $(\mathcal{V}^{\bar{U}'})^{\sigma'} = 0$ , ce qui donne une contradiction.  $\square$

Ceci met fin à la preuve de la proposition 6.19.  $\square$

## 6.6. L'homomorphisme $\mathbf{S}$

Soit un entier  $m \geq 1$ , soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G = G_m$  et soit  $(J, \lambda)$  un type simple maximal contenu dans  $\rho$ , qu'on écrit  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ . Le caractère simple contenu dans  $\lambda$  est maximal, et définit donc, d'après la remarque 6.15, un homomorphisme d'algèbres graduées  $\mathbf{K}$  de  $\mathcal{G}_R$  dans  $\overline{\mathcal{G}}_R$ . Rappelons que  $\overline{\mathcal{G}}_R$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base l'ensemble  $\overline{\text{Irr}}_R$  des classes de représentations irréductibles de  $GL_n(k_{D'})$  pour  $n \geq 0$ . Il est muni d'une structure de  $\mathbb{Z}$ -algèbre graduée, et même de  $\mathbb{Z}$ -bigèbre (paragraphe A.1.1).

Comme le montrent les formules (6.6) et (6.13), cet homomorphisme fait inévitablement apparaître les conjugués de  $\sigma$  sous l'action du groupe de Galois de  $k_{D'}/k_E$ . En pratique, ces conjugués sont inutiles et gênants, ce qui justifie l'introduction de la définition suivante. On note  $\overline{\text{Irr}}_\sigma$  l'ensemble des classes de représentations irréductibles de  $\overline{\text{Irr}}_R$  isomorphes à un sous-quotient de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$ , où  $\sigma$  apparaît un nombre quelconque de fois.

**Définition 6.21.** — Étant donnée une représentation de longueur finie  $\pi$ , on note  $\mathbf{S}(\pi)$  la projection de  $[\mathbf{K}(\pi)]$  sur le sous- $\mathbb{Z}$ -module de  $\overline{\mathcal{G}}_R$  engendré par  $\overline{\text{Irr}}_\sigma$ .

On a le résultat suivant, conséquence des propositions 6.12 et 6.19.

**Proposition 6.22.** — *L'homomorphisme :*

$$(6.20) \quad \mathbf{S} : \mathcal{G}_R \rightarrow \overline{\mathcal{G}}_R$$

*est un homomorphisme de bigèbres.*

## 7. La théorie des segments

Dans cette section, on associe à toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  un caractère non ramifié noté  $\nu_\rho$ . Ceci permet d'obtenir la classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des supercuspidales (paragraphe 7.2), puis de définir la notion de segment (paragraphe 7.3). Au paragraphe 7.4, on associe à tout segment deux représentations irréductibles, dont on étudie les propriétés. On montre ensuite (théorème 7.36) que la représentation induite à partir de représentations associées à des segments non liés (définition 7.19) est irréductible.

### 7.1. Le caractère $\nu_\rho$ associé à une représentation cuspidale

Soit un entier  $m \geq 1$  et soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G = G_m$ . Au paragraphe 4.4, on a associé à  $\rho$  des invariants numériques  $n(\rho), s(\rho), f(\rho), e(\rho) \geq 1$ .

On rappelle que  $\nu$  désigne le caractère non ramifié défini au paragraphe 1.4.1. On pose :

$$(7.1) \quad \nu_\rho = \nu^{s(\rho)},$$

qui ne dépend que de la classe d'inertie de  $\rho$ , et :

$$(7.2) \quad \mathbb{Z}_\rho = \{[\rho\nu_\rho^i] \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

On prouve le résultat important suivant, qui justifie l'introduction de l'invariant  $\nu_\rho$ .

**Proposition 7.1.** — *Soit  $\rho'$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_{m'}$ ,  $m' \geq 1$ . Alors l'induite  $\rho \times \rho'$  est réductible si et seulement si  $\rho'$  est isomorphe à  $\rho\nu_\rho$  ou  $\rho\nu_\rho^{-1}$ .*

*Démonstration.* — D'après le théorème 5.18, il suffit de traiter le cas où  $\rho$  et  $\rho'$  sont inertiuellement équivalentes, c'est-à-dire que  $\rho$  et  $\rho'$  contiennent un même type simple maximal  $(J, \lambda)$ . On forme la paire  $(J_M, \lambda_M)$  avec  $M = G \times G$  comme au paragraphe 3.7.1 et on note  $(K, \tau)$  le type semi-simple donné par la proposition 3.31. Écrivons  $\rho'$  sous la forme  $\rho\chi$  avec  $\chi$  un caractère non ramifié de  $G$ . D'après la proposition 5.13, l'induite  $\rho \times \rho\chi$  est réductible si et seulement si  $\mathbf{M}_\tau(\rho \times \rho\chi)$  est réductible. D'après la proposition 6.12 et le lemme 5.29, ce  $\mathcal{H}$ -module est induit à partir du caractère  $1 \otimes \chi(\varpi_\lambda)^{-1}$  de  $\mathcal{H}_M$ . En particulier, il est de dimension 2 sur  $R$ . Il est donc réductible si et seulement s'il contient un caractère, ce qui, compte tenu de la description de  $\mathcal{H}$  par générateurs et relations (voir le paragraphe B.2) et des propriétés d'adjonction, est le cas si et seulement si  $\chi(\varpi_\lambda)$  vaut  $q(\rho)$  ou  $q(\rho)^{-1}$ . Un calcul simple montre que la valuation de la norme réduite de  $\varpi_\lambda \in G$  est égale à  $f(\rho)s(\rho)^{-1}$ , ce dont on déduit l'égalité :

$$(7.3) \quad \nu_\rho(\varpi_\lambda)^{-1} = q(\rho).$$

Le résultat se déduit du fait que, pour qu'un caractère non ramifié  $\xi$  de  $G$  vérifie  $\rho\xi \simeq \rho$ , il faut et il suffit que  $\xi(\varpi_\lambda) = 1$ .  $\square$

On a la relation importante suivante, qui sera l'ingrédient final nécessaire à la classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des supercuspidales (voir le théorème 7.14). Plus précisément, c'est elle qui servira à calculer les fibres de l'application (7.4), étape cruciale dans la preuve de l'unicité du support supercuspidal (théorème 8.17).

**Lemme 7.2.** — *On a  $e(\rho) = \text{card } \mathbb{Z}_\rho$ .*

*Démonstration.* — On suppose que  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle. Rappelons que  $e$  désigne l'ordre de  $q$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ . Si  $a, b$  sont des entiers  $\geq 1$ , on note  $(a, b)$  leurs plus grand diviseur commun. Pour alléger les notations, on pose  $n = n(\rho)$ ,  $s = s(\rho)$  et  $f = f(\rho)$ .

**Lemme 7.3.** — *On a  $(e, n(e, s)) = (e, ns)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $u \geq 1$  un entier divisant à la fois  $e$  et  $ns$ . Écrivons  $u_1 = (u, n)$  et  $u_2 = u/(u, n)$ . On a donc  $u = u_1 u_2$  avec  $u_1$  divisant  $n$  et  $u_2$  divisant  $s$ . Comme  $u$  divise  $e$ , l'entier  $u_2$  divise  $(e, s)$ , donc  $u$  divise  $n(e, s)$ , ce qui prouve le résultat attendu.  $\square$

Pour calculer le cardinal de  $\mathbb{Z}_\rho$ , on fait agir sur la classe inertielle  $\Omega_\rho$  le groupe cyclique engendré par  $\nu_\rho$ . Ce groupe cyclique est d'ordre  $e/(e, s)$ . On obtient donc :

$$\text{card } \mathbb{Z}_\rho = \frac{e/(e, s)}{(n, e/(e, s))} = \frac{e}{(e, n(e, s))} = \frac{e}{(e, ns)},$$

la dernière égalité provenant du lemme 7.3. Par définition, l'entier  $e(\rho)$  est égal à  $e/(e, f)$ . Le résultat provient alors de la formule (4.8) et du fait que  $e$  est premier à  $\ell$ .  $\square$

**Remarque 7.4.** — D'après la remarque 5.11, si  $e(\rho) > 1$ , alors  $\text{ind}_J^G(\lambda)$  est projective pour tout type simple maximal  $(J, \lambda)$  contenu dans  $\rho$ .

Le résultat suivant affine le théorème 5.18.

**Proposition 7.5.** — Soient  $\rho$  et  $\rho'$  des représentations irréductibles cuspidales telles que  $\mathbb{Z}_\rho \neq \mathbb{Z}_{\rho'}$ , et soient  $\pi$  et  $\pi'$  des représentations irréductibles telles que  $\text{cusp}(\pi) \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$  et  $\text{cusp}(\pi') \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_{\rho'})$ . Alors l'induite  $\pi \times \pi'$  est irréductible.

*Démonstration.* — D'après le théorème 5.18, il suffit de traiter le cas où les représentations  $\rho$  et  $\rho'$  sont inertiuellement équivalentes. Comme dans la preuve de la proposition 7.1, on forme une paire couvrante  $(K, \tau)$  de façon que  $\pi \times \pi'$  soit irréductible si et seulement si le module  $\mathbf{M}_\tau(\pi \times \pi')$  est irréductible. Grâce à la proposition 6.12, le résultat est alors une conséquence du théorème B.4.  $\square$

## 7.2. Classification des représentations cuspidales par les supercuspidales

Dans ce paragraphe, on suppose que  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle. Soit un entier  $m \geq 1$  et soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ . On fixe un type simple maximal  $(J, \lambda)$  contenu dans  $\rho$ , qu'on écrit  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ , et on forme l'homomorphisme  $\mathbf{S}$  comme au paragraphe 6.6. Soit un entier  $n \geq 1$ . Remarquons qu'on a la formule suivante, plus simple que (6.13).

**Lemme 7.6.** — Soient  $\chi_1, \dots, \chi_n$  des caractères non ramifiés de  $G$ . Dans  $\overline{\mathcal{G}}_R$ , on a :

$$\mathbf{S}(\rho\chi_1 \times \dots \times \rho\chi_n) = \sigma \times \dots \times \sigma.$$

On définit au paragraphe A.2.3 une représentation irréductible  $\text{st}(\sigma, n)$  apparaissant dans  $\sigma \times \dots \times \sigma$  avec multiplicité 1 (c'est l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de cette induite). Ceci justifie la définition suivante.

**Définition 7.7.** — Pour tout entier  $n \geq 1$ , l'induite :

$$\rho \times \rho\nu_\rho \times \cdots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$$

possède un unique sous-quotient irréductible  $\pi$  tel que  $\mathbf{S}(\pi)$  contienne  $\text{st}(\sigma, n)$ . Il est noté  $\text{St}(\rho, n)$  et apparaît dans cette induite avec multiplicité 1.

On renvoie à (4.11) pour la définition de l'entier  $m(\rho)$  associé à  $\rho$ .

**Proposition 7.8.** — *La représentation  $\text{St}(\rho, n)$  est cuspidale si, et seulement si,  $n = 1$  ou s'il existe un entier  $r \geq 0$  tel que  $n = m(\rho)\ell^r$ .*

*Démonstration.* — On suppose dans un premier temps que  $\text{St}(\rho, n)$  est cuspidale. C'est l'unique sous-quotient irréductible de  $\rho \times \rho\nu_\rho \times \cdots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$  tel que :

$$[\text{st}(\sigma, n)] \leq \mathbf{S}(\text{St}(\rho, n)).$$

Par hypothèse de cuspidalité et d'après la proposition 6.3, le membre de droite est égal à une somme de représentations irréductibles cuspidales de  $\text{GL}_{m'n}(k_{D'})$ . On en déduit que  $\text{st}(\sigma, n)$  est cuspidale, ce qui implique, d'après la proposition A.9, que  $n = 1$  ou qu'il existe un entier  $r \geq 0$  tel que  $n = m(\sigma)\ell^r$ . On conclut en remarquant que  $m(\sigma) = m(\rho)$  (voir le lemme 4.14). On en déduit également que  $\mathbf{S}(\text{St}(\rho, n))$  est égal à  $[\text{st}(\sigma, n)]$ .

Inversement, on suppose qu'il existe un entier  $r \geq 0$  tel que  $n = m(\rho)\ell^r$ , et on va montrer que  $\text{St}(\rho, n)$  est cuspidale. En premier lieu, on remarque que  $\text{st}(\sigma, n)$  est cuspidale d'après la proposition A.9 et le fait que  $m(\sigma) = m(\rho)$ . On a la propriété suivante, qui nous sera utile par la suite.

**Lemme 7.9.** — *Étant donnés  $z \in \mathbb{R}^\times$  et  $\pi \in \text{Irr}$ , on note  $\pi_z$  la représentation  $\pi$  tordue par le caractère non ramifié prenant la valeur  $z$  en un élément dont la norme réduite est de valuation 1. Alors, pour tout  $z \in \mathbb{R}^\times$ , on a  $\text{St}(\rho_z, n) = \text{St}(\rho, n)_z$ .*

La suite de la preuve se fait en deux étapes.

(1) Dans un premier temps, on suppose que  $\rho$  est supercuspidale. Quitte à tordre  $\rho$  par un caractère non ramifié, on peut supposer que le caractère central de  $\rho$  est à valeurs dans  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , ce qui est justifié par le lemme 7.9. Dans ce cas,  $\rho$  est définie sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , et il suffit de prouver le résultat lorsque  $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ , ce qu'on suppose. On relève  $\rho$  en une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière  $\tilde{\rho}$  (voir le théorème 4.24) et on forme la  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation  $\text{St}(\tilde{\rho}, n)$ . Soit  $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma}$  un type simple maximal contenu dans  $\tilde{\rho}$  et relevant  $\kappa \otimes \sigma$ . Il correspond au choix de  $\tilde{\kappa}$  une  $\beta$ -extension  $\tilde{\kappa}_{\max}$  relevant  $\kappa_{\max}$  et on forme le foncteur  $\tilde{\mathbf{K}}$  comme dans le lemme 6.14. Alors  $\text{st}(\tilde{\sigma}, n)$  est un sous-quotient de  $\tilde{\mathbf{K}}(\text{St}(\tilde{\rho}, n))$ . Comme il est question

de représentations d'un groupe fini à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, c'en est un facteur direct. On écrit donc :

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n)) = \mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n) \oplus \tilde{\omega},$$

où  $\tilde{\omega}$  est une sous-représentation convenable de  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n))$ . D'après la proposition A.14, il existe une structure entière  $\mathfrak{l}_1$  de  $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$  telle que  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  soit une sous-représentation de  $\mathfrak{l}_1 \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ . On choisit une structure entière quelconque  $\mathfrak{l}_2$  de  $\tilde{\omega}$ , et on pose  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ , qui est une structure entière de  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n))$ . Comme dans [52, III.5.13], on prouve le résultat suivant.

**Lemme 7.10.** — *Soit  $\mathfrak{k}_{\max}$  une structure entière de  $\tilde{\kappa}_{\max}$ . Il existe une structure entière  $\mathfrak{v}$  de  $\mathrm{St}(\tilde{\rho}, n)$  telle que  $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{J}_{\max}^1}(\mathfrak{k}_{\max}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{l}$ .*

Par exactitude, on en déduit l'isomorphisme :

$$\mathbf{K}(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell) \simeq \mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$$

entre  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations dont  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  est une sous-représentation. Il existe donc un sous-quotient irréductible  $\pi$  de  $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  tel que  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  soit une sous-représentation de  $\mathbf{K}(\pi)$ . Ainsi  $\pi$  est cuspidale puisque c'est une représentation irréductible contenant le type simple maximal  $\kappa_{\max} \otimes \mathrm{st}(\sigma, n)$ . Par la propriété d'unicité de  $\mathrm{St}(\rho, n)$ , on déduit de ceci que  $\pi$  est isomorphe à  $\mathrm{St}(\rho, n)$ .

(2) On suppose maintenant que  $\rho$  est cuspidale non supercuspidale. C'est donc aussi le cas de  $\sigma$ . D'après la proposition A.9, il existe  $t \geq 1$  divisant  $m'n$  et une représentation irréductible supercuspidale  $\sigma_0$  de  $GL_{m'n/t}(k_{D'})$  tels que  $\sigma$  soit isomorphe à  $\mathrm{st}(\sigma_0, t)$  et tels qu'on ait  $t = m(\sigma_0)\ell^s$  pour un certain entier  $s \geq 0$ . On note  $\kappa_0$  l'unique  $\beta$ -extension dont l'image par (3.12) soit le transfert de  $\kappa$ . Soit  $\rho_0$  une représentation irréductible supercuspidale du groupe  $G_{mn/t}$  contenant le type simple maximal  $\kappa_0 \otimes \sigma_0$ . D'après l'étape (1), la représentation  $\mathrm{St}(\rho_0, t)$  est irréductible et cuspidale, et contient le type simple maximal  $\kappa \otimes \sigma$ . Quitte à tordre  $\rho_0$  par un caractère non ramifié de  $G_{mn/t}$ , on peut donc supposer que  $\rho$  et  $\mathrm{St}(\rho_0, t)$  sont isomorphes (voir le lemme 7.9).

**Lemme 7.11.** — *Les représentations  $\mathrm{St}(\rho, n)$  et  $\mathrm{St}(\rho_0, tn)$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* — D'abord, ce sont toutes deux des facteurs irréductibles de :

$$\rho_0 \times \rho_0 \nu_{\rho_0} \times \cdots \times \rho_0 \nu_{\rho_0}^{tn-1}.$$

Ensuite la représentation  $\mathrm{st}(\mathrm{st}(\sigma_0, t), n) = \mathrm{st}(\sigma_0, tn)$  est un sous-quotient irréductible de  $\mathbf{S}(\mathrm{St}(\rho, n))$ , ce qui prouve le résultat attendu.  $\square$



Comme  $m(\rho) = \ell$ , on a  $tn = m(\rho_0)\ell^{s+r+1}$  et l'étape (1) implique que la représentation  $\text{St}(\rho, n)$  est cuspidale.

Ceci met fin à la démonstration de la proposition 7.8.  $\square$

Les constructions de types simples maximaux effectuées dans la preuve de la proposition 7.8 permettent d'obtenir le corollaire suivant. On renvoie à (4.10) pour la définition de l'entier  $e(\rho)$ .

**Corollaire 7.12.** — *Soient  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale et  $r \geq 0$  un entier. On pose  $\rho_r = \text{St}(\rho, m(\rho)\ell^r)$ . On a :*

$$n(\rho_r) = n(\rho)e(\rho), \quad b(\rho_r) = b(\rho), \quad s(\rho_r) = s(\rho), \quad f(\rho_r) = f(\rho)m(\rho)\ell^r, \quad e(\rho_r) = 1.$$

*Démonstration.* — D'après le paragraphe A.2.3, la représentation  $\text{st}(\sigma, n)$  est l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$ , dans laquelle il est de multiplicité 1. Ainsi, pour  $\gamma \in \Gamma$ , les représentations  $\text{st}(\sigma, n)$  et  $\text{st}(\sigma^\gamma, n)$  sont isomorphes si et seulement si  $\sigma$  et  $\sigma^\gamma$  sont isomorphes. On en déduit que  $b(\rho_r) = b(\rho)$  puis que  $s(\rho_r) = s(\rho)$ . L'égalité  $f(\rho_r) = f(\rho)m(\rho)\ell^r$  suit de la définition de l'invariant  $f$ , ce dont on déduit  $e(\rho_r) = 1$ . Enfin, l'égalité  $n(\rho_r) = n(\rho)e(\rho)$  suit de la formule (4.8).  $\square$

On en déduit aussi le résultat suivant, qui sera utile dans la section 8.

**Corollaire 7.13.** — *Pour qu'il existe des caractères non ramifiés  $\chi_1, \dots, \chi_n$  de  $G_m$  tels que l'induite  $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$  possède un sous-quotient cuspidal, il faut et il suffit que  $n = 1$  ou qu'il existe un entier  $r \geq 0$  tel que  $n = m(\rho)\ell^r$ .*

*Démonstration.* — On suppose qu'il existe des caractères non ramifiés  $\chi_1, \dots, \chi_n$  de  $G_m$  tels que l'induite  $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$  possède un sous-quotient cuspidal  $\rho'$ . D'après les lemmes 7.6 et 6.3, la représentation  $\mathbf{S}(\rho')$  est une représentation irréductible cuspidale du groupe  $\text{GL}_{m'n}(k_{\mathbb{D}'})$  qui est un sous-quotient de l'induite  $\sigma \times \cdots \times \sigma$ . Il s'agit donc de  $\text{st}(\sigma, n)$ , l'unique sous-quotient non dégénéré de cette induite, et l'entier  $n$  a la forme annoncée par la proposition A.9. La réciproque est une conséquence de la proposition 7.8.  $\square$

On a maintenant le théorème de classification suivant.

**Théorème 7.14.** — (1) *L'application :*

$$(7.4) \quad (\rho, r) \mapsto \text{St}_r(\rho) = \text{St}(\rho, m(\rho)\ell^r)$$

*définit une surjection de  $\mathcal{S} \times \mathbb{N}$  sur l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales non supercuspidales.*

(2) Soient  $(\rho, r)$  et  $(\rho', r')$  deux couples de  $\mathcal{S} \times \mathbb{N}$ . Alors  $\text{St}_r(\rho)$  et  $\text{St}_{r'}(\rho')$  sont isomorphes si et seulement si  $r = r'$  et  $\mathbb{Z}_\rho = \mathbb{Z}_{\rho'}$ .

**Remarque 7.15.** — Avec la proposition 7.8, la partie (1) de ce théorème généralise les assertions 1 et 2 de [52, III.5.14] au cas où  $D$  n'est pas nécessairement commutative. La partie (2) est nouvelle.

*Démonstration.* — Soit  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale non supercuspidale de  $G_m$ , avec  $m \geq 1$ . On fixe un type simple maximal contenu dans  $\pi$  qu'on écrit  $\kappa \otimes \sigma$ . D'après la proposition A.9, la représentation cuspidale  $\sigma$  est de la forme  $\text{st}(\sigma_0, m(\sigma_0)\ell^r)$ , avec  $\sigma_0$  supercuspidale et avec  $r \geq 0$ . On forme le type simple maximal  $\kappa_0 \otimes \sigma_0$  comme dans la preuve de la proposition 7.8 et on fixe une représentation supercuspidale  $\rho$  qui le contient. On remarque que  $m(\sigma_0) = m(\rho)$ . Ainsi les représentations  $\pi$  et  $\text{St}(\rho, m(\sigma_0)\ell^r)$  sont cuspidales et contiennent le même type simple. Quitte à tordre  $\rho$  par un caractère non ramifié, elles sont isomorphes, ce qui prouve la surjectivité (voir le lemme 7.9).

Soient maintenant  $(\rho, r)$  et  $(\rho', r')$  dans  $\mathcal{S} \times \mathbb{N}$  tels que  $\text{St}_r(\rho)$  et  $\text{St}_{r'}(\rho')$  soient isomorphes. D'abord  $\rho$  et  $\rho'$  ont la même endo-classe d'après le corollaire 6.10, ce dont on déduit que  $\rho$  et  $\rho'$  contiennent des types simples maximaux de la forme  $\kappa_0 \otimes \sigma_0$  et  $\kappa_0' \otimes \sigma_0'$  respectivement, où  $\sigma_0$  et  $\sigma_0'$  sont des représentations irréductibles supercuspidales du même groupe fini. En appliquant le foncteur  $\mathbf{K}$ , on en déduit que les représentations  $\text{st}(\sigma_0', r')$  et  $\text{st}(\sigma_0, r)$  sont conjuguées sous l'action du groupe de Galois  $\Gamma$ . On déduit de la proposition A.9 que  $r = r'$  et que  $\sigma_0$  et  $\sigma_0'$  sont  $\Gamma$ -conjuguées, ce qui implique que  $\rho$  et  $\rho'$  sont inertiellement équivalentes.

Considérons maintenant le groupe  $X_\rho$  des caractères non ramifiés  $\chi$  de  $G_m$  tels qu'on ait  $[\rho\chi] \in \mathbb{Z}_\rho$ . C'est un groupe cyclique contenant le sous-groupe des caractères non ramifiés stabilisant la classe d'isomorphisme de  $\rho$ . D'après le lemme 7.2, il décrit dans la classe inertielle de  $\rho$  une orbite de cardinal  $e(\rho)$ . L'ordre de ce sous-groupe  $X_\rho$  est donc égal à  $n(\rho)e(\rho)$ , qui est aussi, d'après le corollaire 7.12, l'ordre du sous-groupe des caractères non ramifiés stabilisant la classe d'isomorphisme de  $\text{St}_r(\rho)$ . Compte tenu du lemme 7.9, un caractère non ramifié  $\chi$  de  $G_m$  vérifie donc  $\text{St}_r(\rho\chi) \simeq \text{St}_r(\rho)$  si et seulement si  $[\rho\chi] \in \mathbb{Z}_\rho$ . Ceci met fin à la démonstration du théorème 7.14.  $\square$

**Remarque 7.16.** — Si  $\rho$  est cuspidale non supercuspidale, alors  $e(\rho) = 1$  et  $m(\rho) = \ell$ .

### 7.3. Segments

Soit un entier  $m \geq 0$ , et soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ .

**Définition 7.17.** — Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$(7.5) \quad [a, b]_\rho = (\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b),$$

où  $a, b \in \mathbb{Z}$  sont des entiers tels que  $a \leq b$ .

Le segment  $[a, b]_\rho$  peut être interprété comme la paire cuspidale :

$$(7.6) \quad (M_{(m, \dots, m)}, \rho\nu_\rho^a \otimes \rho\nu_\rho^{a+1} \otimes \dots \otimes \rho\nu_\rho^b),$$

où  $M_{(m, \dots, m)}$  est le sous-groupe de Levi standard de  $G_{m(b-a+1)}$  correspondant à la famille d'entiers  $(m, \dots, m)$ .

**Définition 7.18.** — Deux segments  $[a, b]_\rho$  et  $[a', b']_{\rho'}$  sont *équivalents* s'ils ont la même longueur  $n$  et si  $[\rho\nu_\rho^{a+i}] = [\rho'\nu_{\rho'}^{a'+i}]$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Si c'est le cas, on voit que  $\rho'$  est inertiuellement équivalent à  $\rho$ , ce qui implique  $\nu_{\rho'} = \nu_\rho$ . Par conséquent, pour que deux segments soient équivalents, il suffit qu'ils aient la même longueur et que leurs extrémités initiales  $\rho\nu_\rho^a$  et  $\rho'\nu_{\rho'}^{a'}$  soient isomorphes.

Si  $\Delta = [a, b]_\rho$  est un segment, on pose :

$$(7.7) \quad n(\Delta) = b - a + 1,$$

$$(7.8) \quad \deg(\Delta) = n(\Delta)m,$$

$$(7.9) \quad \text{supp}(\Delta) = [\rho\nu_\rho^a] + [\rho\nu_\rho^{a+1}] + \dots + [\rho\nu_\rho^b],$$

qu'on appelle respectivement la longueur, le degré et le support de  $\Delta$ . Celui-ci est égal à la classe de  $G_{\deg(\Delta)}$ -conjugaison de la paire cuspidale (7.6) associée à  $\Delta$ . On note aussi :

$$(7.10) \quad a(\Delta) = \rho\nu_\rho^a,$$

$$(7.11) \quad b(\Delta) = \rho\nu_\rho^b,$$

les extrémités initiale et finale de  $\Delta$ , et on note :

$$(7.12) \quad \Delta^\vee = [-b, -a]_{\rho^\vee}$$

le segment contragrédient de  $\Delta$ . Si  $a + 1 \leq b$ , on pose :

$$(7.13) \quad {}^-\Delta = [a + 1, b]_\rho,$$

$$(7.14) \quad \Delta^- = [a, b - 1]_\rho.$$

Les définitions suivantes généralisent celles de Zelevinski [56, 4.1]. Remarquons qu'elles diffèrent de celles de Vignéras [52, V.3].

**Définition 7.19.** — Soient  $\Delta = [a, b]_\rho$  et  $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$  des segments.

(1) On dit que  $\Delta$  précède  $\Delta'$  si l'on peut extraire de la suite :

$$(\rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'})$$

une sous-suite qui soit un segment de longueur strictement supérieure à  $n(\Delta)$  et  $n(\Delta')$ .

(2) On dit que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont *liés* si  $\Delta$  précède  $\Delta'$  ou si  $\Delta'$  précède  $\Delta$ .

**Remarque 7.20.** — Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  des segments. Les propriétés suivantes découlent directement des définitions :

(1) On suppose que  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas liés, que  $n(\Delta) \geq n(\Delta')$  et que  $b(\Delta)$  et  $b(\Delta')$  ne sont pas isomorphes. Alors  $b(\Delta)$  n'apparaît pas dans  $\Delta'$ . Cette propriété sera utilisée dans la preuve du théorème 7.36.

(2) Signalons aussi la propriété suivante, qui sera utilisée dans la preuve de la proposition 7.39. On suppose que  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas liés et que  $n(\Delta) \geq n(\Delta')$ . Alors les segments  $\Delta$  et  ${}^-\Delta'$  ne sont pas liés.

#### 7.4. Représentations associées à un segment

Soit  $\rho$  une représentation cuspidale de  $G_m$ , et soit  $\Delta = [a, b]_\rho$  un segment. On pose :

$$(7.15) \quad \Pi(\Delta) = \rho\nu_\rho^a \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b$$

et  $n = b - a + 1$ . On pose  $G = G_{mn}$  et on note  $P$  et  $M$  le sous-groupe parabolique et le sous-groupe de Levi standards de  $G$  correspondant à  $(m, \dots, m)$ . On fixe un type simple maximal  $(J, \lambda)$  contenu dans  $\rho$  et une extension finie  $F'$  de  $F$  comme au paragraphe 3.5.4. On rappelle que le cardinal du corps résiduel de  $F'$  est égal à  $q(\rho)$ . On pose  $G' = GL_n(F')$  et on note  $I'$  son sous-groupe d'Iwahori standard. On note  $(K, \tau)$  la paire couvrante de  $G$  définie par la proposition 3.31 à partir de  $(J, \lambda)$ . On note aussi  $\mathcal{H}$  son algèbre de Hecke et  $\mathbf{M}$  le foncteur correspondant. On identifie  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}(G', I')$  au moyen de l'isomorphisme de  $R$ -algèbres donné par la proposition 5.21. On utilisera librement les notations de la section 6.

On renvoie au paragraphe B.1 pour les définitions du  $\mathcal{H}$ -module induit  $\mathcal{I}(a, b)$  et des caractères  $\mathcal{Z}(a, b)$  et  $\mathcal{L}(a, b)$ . À partir des lemmes 5.29 et 7.3 et de la proposition 5.20, on obtient le résultat suivant.

**Lemme 7.21.** — *On a un isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules  $\mathbf{M}(\Pi(\Delta)) \simeq \mathcal{I}(a, b)$ .*

La proposition 5.5, associée à l'exemple B.2, permet de justifier la définition suivante, qui associe au segment  $\Delta$  deux représentations irréductibles  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$  de  $G$ .

**Définition 7.22.** — (1) La représentation  $\Pi(\Delta)$  possède une unique sous-représentation irréductible, notée  $Z(\Delta)$ , telle que  $\mathbf{M}(Z(\Delta))$  soit le caractère  $\mathcal{Z}(a, b)$ .

(2) La représentation  $\Pi(\Delta)$  possède un unique quotient irréductible, noté  $L(\Delta)$ , tel que  $\mathbf{M}(L(\Delta))$  soit le caractère  $\mathcal{L}(a, b)$ .

**Remarque 7.23.** — (1) Ces définitions ne dépendent pas du choix du type simple maximal  $(J, \lambda)$ , puisque tout autre type simple maximal dans  $\rho$  est  $G_m$ -conjugué à  $(J, \lambda)$ .

(2) Les représentations  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$  peuvent être de multiplicité  $\geq 2$  comme sous-quotients de  $\Pi(\Delta)$ .

(3) Les représentations  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$  sont cuspidales si et seulement si  $n(\Delta) = 1$ .

(4) La proposition 7.29 donne, dans le cas où  $e(\rho) \neq 1$ , une définition de  $Z(\Delta)$  et de  $L(\Delta)$  n'utilisant pas la théorie des types.

**Remarque 7.24.** — On suppose que  $\mathbb{R}$  est le corps des nombres complexes.

(1) La représentation  $Z(\Delta)$  est la représentation notée de la même façon dans [51]. Si en outre  $D = F$ , c'est la représentation notée  $\langle \Delta \rangle$  dans [56] et [52].

(2) La représentation  $L(\Delta)$  est la représentation notée de la même façon dans [51]. Si en outre  $D = F$ , c'est la représentation notée  $\langle \Delta \rangle^t$  dans [56].

Le résultat suivant sera utile au paragraphe 7.5.

**Proposition 7.25.** — *Les représentations  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$  sont isomorphes si et seulement si  $q(\rho)$  est congru à  $-1$  modulo  $\ell$  et  $n$  est impair.*

*Démonstration.* — Ces deux représentations sont isomorphes si et seulement si les caractères  $\mathcal{Z}(a, b)$  et  $\mathcal{L}(a, b)$  sont égaux, ce qui arrive exactement lorsque  $q(\rho)$  est congru à  $-1$  modulo  $\ell$  et  $n$  est impair. À noter que, dans ce cas, les représentations  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$  sont isomorphes mais pas forcément égales comme sous-quotients de  $\Pi(\Delta)$ .  $\square$

On va maintenant calculer les modules de Jacquet des représentations  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$ . Pour ça, on utilise les notations des paragraphes A.1 et A.2, auxquels on renvoie le lecteur. On commence par traiter le cas d'un sous-groupe parabolique minimal.

**Lemme 7.26.** — *On a :*

$$(7.16) \quad \mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Z([a, b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b,$$

$$(7.17) \quad \mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(L([a, b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^b \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^a,$$

$$(7.18) \quad \mathbf{r}_{(m, \dots, m)}^-(Z([a, b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^b \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^a,$$

$$(7.19) \quad \mathbf{r}_{(m, \dots, m)}^-(L([a, b]_\rho)) = \rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b.$$

*Démonstration.* — Nous prouvons la première assertion ; la seconde se prouve de façon analogue et les deux dernières se déduisent des deux premières par conjugaison. On va utiliser le foncteur  $\mathbf{K}$  et l'homomorphisme  $\mathbf{S}$  définis dans la section 6, dont on utilisera les notations. On pose  $Z = Z([a, b]_\rho)$ . Par réciprocity de Frobenius, on a un homomorphisme surjectif :

$$\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Z) \rightarrow \rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b.$$

D'après le lemme géométrique, aucun sous-quotient irréductible du membre de gauche n'est annulé par le foncteur  $\mathbf{K}_{(m, \dots, m)}$  (lemme 6.3). D'après la proposition 6.19, on a :

$$(7.20) \quad \mathbf{K}_{(m, \dots, m)}(\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Z)) \simeq \mathbf{K}(Z)^{\bar{U}},$$

où  $\bar{U}$  est le radical unipotent maximal standard de  $\bar{G} = GL_{m'n}(k_{D'})$ . D'après les propositions 6.3 et 6.12,  $\mathbf{K}(Z)$  est une sous-représentation de :

$$(7.21) \quad \mathbf{K}(\Pi([a, b]_\rho)) = \bigoplus_{(i_1, \dots, i_n)} \sigma^{\phi^{i_1}} \times \cdots \times \sigma^{\phi^{i_n}},$$

où  $i_1, \dots, i_n$  varient entre 1 et  $b(\rho)$ . Le membre de droite de (7.20) est donc une sous-représentation de la somme directe finie :

$$n! \cdot \bigoplus_{(i_1, \dots, i_n)} \sigma^{\phi^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \sigma^{\phi^{i_n}},$$

où  $n!$  est une multiplicité. On en déduit que :

$$(7.22) \quad \mathbf{S}_{(m, \dots, m)}(\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Z)) \simeq \mathbf{S}(Z)^{\bar{U}}$$

est une somme directe finie de copies de  $\sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$  (l'homomorphisme  $\mathbf{S}_{(m, \dots, m)}$  étant au foncteur  $\mathbf{K}_{(m, \dots, m)}$  ce que  $\mathbf{S}$  est à  $\mathbf{K}$ ). On utilise maintenant la  $R$ -algèbre  $\mathcal{H}(\sigma, n)$  définie au paragraphe A.2.1. D'après la proposition 6.18, le  $\mathcal{H}(\sigma, n)$ -module :

$$\mathrm{Hom}_{\bar{G}}(\sigma \times \cdots \times \sigma, \mathbf{K}(Z)) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{M}}(\sigma \otimes \cdots \otimes \sigma, \mathbf{K}(Z)^{\bar{U}}),$$

est de dimension 1, où  $\bar{M}$  désigne le sous-groupe de Levi minimal standard de  $\bar{G}$ . On en déduit que (7.22) est isomorphe à  $\sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$ . Comme (7.22) et  $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Z)$  ont la même longueur, cette dernière est irréductible, donc isomorphe à  $\rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b$ .  $\square$

**Remarque 7.27.** — On en déduit que  $Z(\Delta)$  est aussi un quotient de  $\rho\nu_\rho^b \times \cdots \times \rho\nu_\rho^a$  et que  $L(\Delta)$  est aussi une sous-représentation de  $\rho\nu_\rho^b \times \cdots \times \rho\nu_\rho^a$ .

**Proposition 7.28.** — *On a les propriétés suivantes.*

(1) Si  $k$  est un entier tel que  $a < k \leq b$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{((k-a)m, (b-k+1)m)}(Z([a, b]_\rho)) &= Z([a, k-1]_\rho) \otimes Z([k, b]_\rho), \\ \mathbf{r}_{((b-k+1)m, (k-a)m)}(L([a, b]_\rho)) &= L([k, b]_\rho) \otimes L([a, k-1]_\rho). \end{aligned}$$

(2) Si  $k$  est un entier tel que  $a < k \leq b$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{((b-k+1)m, (k-a)m)}^-(Z([a, b]_\rho)) &= Z([k, b]_\rho) \otimes Z([a, k-1]_\rho), \\ \mathbf{r}_{((k-a)m, (b-k+1)m)}^-(L([a, b]_\rho)) &= L([a, k-1]_\rho) \otimes L([k, b]_\rho). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — D'après (3.24), on a :

$$\mathbf{M}_{((k-a)m, (b-k+1)m)}(\mathbf{r}_{((k-a)m, (b-k+1)m)}(Z([a, b]_\rho))) \simeq \mathcal{J}_{((k-a)m, (b-k+1)m)}^*(\mathbf{M}_n(Z([a, b]_\rho))),$$

ce dont on déduit que :

$$\mathbf{r}_{((k-a)m, (b-k+1)m)}(Z([a, b]_\rho)) \supseteq Z([a, k-1]_\rho) \otimes Z([k, b]_\rho).$$

Posons  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{((k-a)m, (b-k+1)m)}$  pour alléger les notations et supposons que le membre de gauche ci-dessus ne soit pas irréductible. Il contient un autre sous-quotient irréductible  $Y$ , qu'on peut supposer être une sous-représentation ou un quotient. Supposons que  $Y$  soit un quotient, l'autre cas se traitant de façon analogue. On fixe une paire cuspidale  $(M', \varrho')$  de  $M = M_{((k-a)m, (b-k+1)m)}$  et un sous-groupe parabolique  $P'$  de  $M$  de facteur de Levi  $M'$  tels que  $Y$  soit une sous-représentation de  $\mathbf{i}_{P'}^M(\varrho')$ . On suppose que  $M'$  est standard. Alors :

$$\mathrm{Hom}_M(\mathbf{r}(Z[a, b]_\rho), \mathbf{i}_{P'}^M(\varrho')) \neq 0.$$

On en déduit que le support cuspidal de  $Z[a, b]_\rho$  est la classe de  $G$ -conjugaison de  $(M', \varrho')$ . Par conséquent, on a  $M' = M_{(m, \dots, m)}$  et  $\varrho'$  est  $G$ -conjuguée à  $\rho\nu_\rho^a \otimes \cdots \otimes \rho\nu_\rho^b$ , ce qui contredit le fait que, d'après le lemme 7.26, on a  $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Y) = 0$ .  $\square$

Dans le cas où  $e(\rho) \neq 1$ , c'est-à-dire quand  $q(\rho)$  n'est pas congru à 1 modulo  $\ell$ , les représentations  $Z(\Delta)$  et  $L(\Delta)$  peuvent être définies par récurrence sur la longueur de  $\Delta$ .

**Proposition 7.29.** — *On suppose que  $e(\rho) \neq 1$  et que  $b - a \geq 1$ .*

- (1)  $Z([a, b]_\rho)$  est l'unique sous-représentation irréductible de  $Z([a, b-1]_\rho) \times \rho\nu_\rho^b$ .
- (2)  $Z([a, b]_\rho)$  est l'unique quotient irréductible de  $Z([a-1, b]_\rho) \times \rho\nu_\rho^a$ .
- (3)  $L([a, b]_\rho)$  est l'unique quotient irréductible de  $L([a, b-1]_\rho) \times \rho\nu_\rho^b$ .
- (4)  $L([a, b]_\rho)$  est l'unique sous-représentation irréductible de  $L([a-1, b]_\rho) \times \rho\nu_\rho^a$ .

*Démonstration.* — On prouve la première assertion, les autres se prouvant de façon analogue. On pose  $n = b - a + 1$  et on note  $\mathbf{r}$  le foncteur de Jacquet  $\mathbf{r}_{((n-1)m, m)}$ . Compte tenu de la proposition 7.28, on a :

$$[\mathbf{r}(Z([a, b - 1]_\rho) \times \rho\nu_\rho^b)] = [Z([a, b - 1]_\rho) \otimes \rho\nu_\rho^b] + [(Z([a, b - 2]_\rho) \times \rho\nu_\rho^b) \otimes \rho\nu_\rho^{b-1}].$$

Si  $n = 2$ , on interprète  $Z([a, b - 2]_\rho)$  comme la représentation (triviale) du groupe trivial  $G_0$ . Comme  $e(\rho) \neq 1$ , les représentations  $\rho\nu_\rho^b$  et  $\rho\nu_\rho^{b-1}$  ne sont pas isomorphes : le sous-quotient irréductible  $Z([a, b - 1]_\rho) \otimes \rho\nu_\rho^b$  est donc de multiplicité 1 dans le membre de gauche. Le résultat se déduit alors du lemme 2.4.  $\square$

Le résultat suivant décrit le comportement des opérations  $\Delta \mapsto Z(\Delta)$  et  $\Delta \mapsto L(\Delta)$  par passage à la contragrédiente (voir (7.12) pour la définition de la notation  $\Delta^\vee$ ).

**Proposition 7.30.** — *Si  $e(\rho) \neq 1$ , on a  $Z(\Delta^\vee) \simeq Z(\Delta)^\vee$  et  $L(\Delta^\vee) \simeq L(\Delta)^\vee$ .*

**Remarque 7.31.** — On conjecture que le résultat est encore vrai pour  $e(\rho) = 1$ .

*Démonstration.* — On prouve le résultat par récurrence sur la longueur  $n$  de  $\Delta = [a, b]_\rho$ , le cas  $n = 1$  étant immédiat. On suppose que  $n \geq 2$  et on utilise les notations (7.13). D'après la proposition 7.29, l'induite  $Z(\Delta^-) \times \rho\nu_\rho^b$  admet  $Z(\Delta)$  pour sous-représentation irréductible, donc  $Z(\Delta^-)^\vee \times \rho^\vee\nu_\rho^{-b}$  admet  $Z(\Delta)^\vee$  pour quotient irréductible. Par hypothèse de récurrence,  $Z(\Delta^-)^\vee$  et  $Z((\Delta^-)^\vee)$  sont isomorphes. Comme  $(\Delta^-)^\vee$  est égal à  $-(\Delta^\vee)$  et d'après la proposition 7.29(2), le quotient irréductible  $Z(\Delta)^\vee$  est isomorphe à  $Z(\Delta^\vee)$ . Le cas de  $L(\Delta)$  se traite de façon analogue.  $\square$

**Remarque 7.32.** — À noter que  $\Pi(\Delta)^\vee$  n'est pas isomorphe à  $\Pi(\Delta^\vee)$  en général.

Pour finir ce paragraphe, on prouve le résultat suivant. De façon analogue à  $z(\sigma, n)$ , qui désigne l'unique sous-représentation irréductible de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$  correspondant au caractère trivial de  $\mathcal{H}(\sigma, n)$  (voir le paragraphe A.2.1), on va noter :

$$(7.23) \quad l(\sigma, n)$$

l'unique quotient irréductible de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$  correspondant au caractère signe de  $\mathcal{H}(\sigma, n)$ .

**Proposition 7.33.** — *Soit  $\Delta = [a, b]_\rho$  un segment de longueur  $n$ .*

- (1) *On a  $\mathbf{S}(Z([a, b]_\rho)) = z(\sigma, n)$ .*
- (2) *On a  $\mathbf{S}(L([a, b]_\rho)) = l(\sigma, n)$ .*
- (3) *On a  $\mathbf{S}(L([a, b]_\rho)) = \text{st}(\sigma, n)$  si et seulement si  $n \leq m(\rho) - 1$ .*



*Démonstration.* — On procède par récurrence sur  $n$ . On pose  $Z = Z([a, b]_\rho)$ . On sait déjà que  $z(\sigma, n)$  est un sous-quotient de  $\mathbf{S}(Z)$ . Supposons que  $\mathbf{S}(Z)$  n'est pas irréductible : elle contient donc un autre facteur irréductible, noté  $v$ . Soit  $P = MU$  un sous-groupe parabolique standard maximal et soit  $\alpha = (k, n - k)$  tel que  $M = M_\alpha$ . D'après la proposition 7.28, on a :

$$\mathbf{r}_\alpha(Z) = Z([a, c]_\rho) \otimes Z([c + 1, b]),$$

avec  $c = a + k - 1$ . Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathbf{S}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(Z)) = z(\sigma, k) \otimes z(\sigma, n - k),$$

qui est aussi égal à  $\mathbf{S}(Z)^{\bar{U}}$  d'après la proposition 6.19.

**Lemme 7.34.** — On a  $[z(\sigma, n)^{\bar{U}}] \geq [z(\sigma, k) \otimes z(\sigma, n - k)]$ .

*Démonstration.* — Notons  $\sigma^{\times n}$  l'induite  $\sigma \times \cdots \times \sigma$  où  $\sigma$  apparaît  $n$  fois. Par définition de la représentation  $z(\sigma, n)$ , on a :

$$\mathrm{Hom}_{\bar{G}}(\sigma^{\times n}, z(\sigma, n)) \simeq \mathrm{Hom}_{\bar{M}}(\sigma^{\times k} \otimes \sigma^{\times (n-k)}, z(\sigma, n)^{\bar{U}})$$

qui est de dimension 1, isomorphe au caractère trivial de  $\mathcal{H}(\sigma, k) \otimes \mathcal{H}(\sigma, n - k)$  considéré comme sous-algèbre de  $\mathcal{H}(\sigma, n)$ .  $\square$

Comme  $\mathbf{S}(Z)^{\bar{U}}$  contient  $[z(\sigma, n)^{\bar{U}}]$  et  $[v^{\bar{U}}]$ , on déduit du lemme 7.34 d'une part que :

$$z(\sigma, n)^{\bar{U}} = z(\sigma, k) \otimes z(\sigma, n - k)$$

et d'autre part que  $v^{\bar{U}} = 0$ , et ce pour tout  $P$ . On en déduit que  $v$  est cuspidale, et donc de la forme  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  avec  $n = 1$  ou  $n = m(\sigma)\ell^r$ . Par conséquent,  $Z = \mathrm{St}(\rho, n)$  d'après la définition 7.7. Mais pour ces valeurs de  $n$ , la représentation  $\mathrm{St}(\rho, n)$  est cuspidale d'après la proposition 7.8. Comme  $Z$  ne peut pas être cuspidale à moins que  $n = 1$ , on obtient une contradiction.

L'assertion (2) se démontre de façon analogue. Pour obtenir (3), il suffit de prouver que  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  correspond au caractère signe de  $\mathcal{H}(\sigma, n)$  si et seulement si on a  $n \leq m(\sigma) - 1$ . L'une des implications provient du fait que  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  correspond à un module simple si et seulement si la partition  $(1, \dots, 1)$  est  $m(\sigma)$ -régulière, c'est-à-dire si l'on a  $n \leq m(\sigma) - 1$ . Inversement, supposons que  $n \leq m(\sigma) - 1$ . Comme  $\bar{G}$  est un groupe fini, et comme le résultat est connu quand  $R$  est de caractéristique nulle, on peut supposer que  $R = \bar{\mathbb{F}}_\ell$ . D'après la proposition A.14, la représentation  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  est la réduction modulo  $\ell$  de  $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ , où  $\tilde{\sigma}$  est une  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale relevant  $\sigma$ . Le  $\mathcal{H}(\tilde{\sigma}, n)$ -module correspondant à  $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$  est le  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère signe. Par conséquent, le  $\mathcal{H}(\sigma, n)$ -module correspondant à  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  est le  $\bar{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère signe, ce qui met fin à la démonstration.  $\square$

**Remarque 7.35.** — On renvoie à la remarque 8.16 pour une précision supplémentaire.

### 7.5. Critère d'irréductibilité pour un produit de segments non liés

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant.

**Théorème 7.36.** — *Soit un entier  $r \geq 1$  et soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  sont non liés.*
- (2) *La représentation  $Z(\Delta_1) \times \dots \times Z(\Delta_r)$  est irréductible.*
- (3) *La représentation  $L(\Delta_1) \times \dots \times L(\Delta_r)$  est irréductible.*

Ce théorème généralise [56, 4] et [51, Lemmas 2.5, 4.2] au cas modulaire. Il justifie le bien-fondé de notre définition 7.19.

**7.5.1.** Étant donné un segment  $\Delta = [a, b]_\rho$ , on note :

$$(7.24) \quad \langle \Delta \rangle = \langle a, b \rangle_\rho$$

l'une des deux représentations  $Z([a, b]_\rho)$  ou  $L([-b, -a]_\rho)$ , et on pose :

$$(7.25) \quad \mu_\rho = \begin{cases} \nu_\rho & \text{si } \langle \Delta \rangle = Z(\Delta) ; \\ \nu_\rho^{-1} & \text{si } \langle \Delta \rangle = L([-b, -a]_\rho). \end{cases}$$

La proposition suivante, qui synthétise les résultats de la proposition 7.28, montre l'utilité des notations (7.24) et (7.25).

**Proposition 7.37.** — *Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$  et soit un segment  $\Delta = [a, b]_\rho$ .*

- (1) *Si  $k$  est un entier tel que  $a < k \leq b$ , on a :*

$$\mathbf{r}_{(k-a)m, (b-k+1)m}(\langle a, b \rangle_\rho) = \langle a, k-1 \rangle_\rho \otimes \langle k, b \rangle_\rho.$$

- (2) *Si  $k$  est un entier tel que  $a < k \leq b$ , on a :*

$$\mathbf{r}_{(b-k+1)m, (k-a)m}^-(\langle a, b \rangle_\rho) = \langle k, b \rangle_\rho \otimes \langle a, k-1 \rangle_\rho.$$

- (3) *On a :*

$$\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\langle \Delta \rangle) = \rho \mu_\rho^a \otimes \rho \mu_\rho^{a+1} \otimes \dots \otimes \rho \mu_\rho^b$$

et :

$$\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}^-(\langle \Delta \rangle) = \rho \mu_\rho^b \otimes \rho \mu_\rho^{b-1} \otimes \dots \otimes \rho \mu_\rho^a.$$

- (4) *Si  $e(\rho) \neq 1$ , on a  $\langle \Delta^\vee \rangle = \langle \Delta \rangle^\vee$ , c'est-à-dire que  $\langle -b, -a \rangle_{\rho^\vee} = \langle a, b \rangle_\rho^\vee$ .*

Pour montrer le théorème 7.36, il suffira donc de montrer le théorème suivant.

**Théorème 7.38.** — Soit un entier  $r \geq 1$  et soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments. Alors :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$$

est irréductible si et seulement si  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  sont non liés pour tous  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ .

On montre d'abord le résultat suivant.

**Proposition 7.39.** — Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux segments non liés. Alors la représentation induite  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  est irréductible.

**Remarque 7.40.** — D'après la proposition 2.2, cette proposition implique que, si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux segments non liés, alors  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  et  $\langle \Delta' \rangle \times \langle \Delta \rangle$  sont isomorphes.

On écrit  $\Delta$  et  $\Delta'$  respectivement sous la forme  $[a, b]_\rho$  et  $[a', b']_{\rho'}$ , où  $\rho$  et  $\rho'$  sont irréductibles cuspidales. On note  $n = b - a + 1$  et  $n' = b' - a' + 1$ . On fait d'abord quelques réductions : elles ne sont pas nécessaires dans notre preuve mais permettent de simplifier les notations.

**R1** D'après la proposition 2.2, on peut supposer que  $n \leq n'$ .

**R2** D'après la proposition 7.5, et quitte à modifier  $a, b, a'$  et  $b'$ , on peut supposer que  $\rho$  et  $\rho'$  sont isomorphes.

**R3** Quitte à tordre  $\rho$  par un caractère non ramifié, on peut supposer que  $a = 0$ .

**R4** Par la méthode du changement de groupe (voir le paragraphe 5.4), on peut supposer que  $\rho$  est le caractère trivial de  $F^\times$ , que l'on notera  $\langle 0 \rangle$ , et on lui attache le type constitué par le caractère trivial de  $\mathcal{O}_F^\times$ .

Aussi peut-on supposer que  $\Delta = [0, b]$  et  $\Delta' = [a', b']$  avec  $b + a' \leq b'$ .

**Remarque 7.41.** — Si  $R$  est de caractéristique non nulle  $\ell$ , on note  $e$  l'ordre de  $q$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ . Puisque  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas liés et que  $n \leq n'$ , on a  $n \leq e - 1$ , ce qui implique qu'on a  $e \geq 2$ . Si  $R$  est de caractéristique nulle, on convient que  $e$  est infini et une congruence de la forme  $a \equiv a' \pmod{e}$  voudra juste dire que  $a = a'$ .

Nous utilisons la méthode des foncteurs de Jacquet et le lemme 2.5. Malheureusement, nous ne pouvons éviter de traiter plusieurs cas en petite dimension (où les foncteurs de Jacquet ne sont pas de grande aide). On distingue les cas suivants :

1.  $n = n' = 1$ .
2.  $e \geq 3$  et  $n = 1$ .
3.  $e \geq 3$  et  $n, n' \geq 2$ .
4.  $e = 2$  et  $n' = 3$ .
5.  $e = 2$  et  $n' \geq 4$ .

On remarquera que, dans les deux derniers cas, on a nécessairement  $n = 1$ . Dans le cas où  $n = n' = 1$ , la proposition est une conséquence immédiate du théorème 7.1. On passe donc maintenant aux cas suivants.

**7.5.2.** On suppose que  $e \geq 3$  et  $n = 1$ . On procède par récurrence sur  $n'$ , le cas  $n' = 1$  étant déjà prouvé. Remarquons que l'hypothèse sur  $\Delta$  et  $\Delta'$  se traduit par :

$$a' \not\equiv 1 \pmod{e} \quad \text{et} \quad b' \not\equiv -1 \pmod{e}.$$

Il faut encore différencier les sept cas suivants :

- |   |   |
|---|---|
| 2.1. $\Delta' = [0, 1]$ .                               | 2.1'. $\Delta' = [-1, 0]$ .                               |
| 2.2. $b' \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{e}$ .                | 2.2'. $a' \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{e}$ .                 |
| 2.3. $a' = 0, b' \equiv 0, 1 \pmod{e}$ et $n' \geq 3$ . | 2.3'. $b' = 0, a' \equiv 0, -1 \pmod{e}$ et $n' \geq 3$ . |
| 2.4. $a' = -1$ et $b' \equiv 1 \pmod{e}$ .              |   |

Les cas 2.1', 2.2' et 2.3' découlent respectivement des cas 2.1, 2.2 et 2.3 par passage à la contragrédiente (ce que nous pouvons faire puisque  $e \neq 1$ ). Traitons donc les cas 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4.

**Lemme 7.42.** — *L'induite  $\langle 0 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Comme dans Rogawski [42], ce cas est particulier et il faut le traiter à la main. On pose  $M = M_{(1,2)}$ . D'après la proposition 5.13, l'induite est irréductible si et seulement si  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_M}(\mathcal{H}, 1 \otimes \chi)$  est un  $\mathcal{H}$ -module irréductible, où  $\chi = \mathbf{M}(\langle 0, 1 \rangle)$  est le caractère formé des vecteurs de  $\langle 0, 1 \rangle$  invariants par le sous-groupe d'Iwahori. L'irréductibilité de ce module se montre comme dans [42, Lemma 5.1].  $\square$

Traitons le cas 2.2. D'après la proposition 7.37(1), la représentation  $\langle 0 \rangle \times \langle a', b' \rangle$  est une sous-représentation de  $\langle 0 \rangle \times \langle a', b' - 1 \rangle \times \langle b' \rangle$ . Par hypothèse de récurrence (puisque on a  $b' \not\equiv 0 \pmod{e}$ ) et d'après la remarque 7.40, celle-ci est isomorphe à  $\pi_1 \times \pi_2$ , où l'on a posé  $\pi_1 = \langle a', b' - 1 \rangle$  et  $\pi_2 = \langle 0 \rangle \times \langle b' \rangle$  (remarquons que  $\pi_2$  est irréductible par hypothèse de récurrence car  $b' \not\equiv \pm 1 \pmod{e}$ ). De même, par la proposition 7.37(2), c'est un quotient de  $\pi_2 \times \pi_1$ . D'après la proposition 2.8, la représentation  $\pi_1 \otimes \pi_2$ , apparaît avec multiplicité 1 dans  $\mathbf{r}_{(n'-1,2)}(\pi_1 \times \pi_2)$ . On déduit du lemme 2.5 que  $\langle 0 \rangle \times \langle a', b' \rangle$  est irréductible.

Le cas 2.3 se montre comme le cas précédent en utilisant  $\pi_1 = \langle 0 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$  et  $\pi_2 = \langle 2, b \rangle$ .

Traitons enfin le cas 2.4. D'après le lemme 2.4, la représentation  $\langle 0 \rangle \times \langle -1, b' \rangle$  a une unique sous-représentation irréductible  $\pi$  et un unique quotient irréductible  $\pi'$ . De plus,  $\pi$  et  $\pi'$  apparaissent avec multiplicité 1 dans  $\langle 0 \rangle \times \langle -1, b' \rangle$ . Pour prouver que cette induite est

irréductible, il suffit donc de montrer que  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes. On pose  $\alpha = (1, \dots, 1)$ . Le module de Jacquet  $\mathbf{r}_\alpha(\langle 0 \rangle \times \langle -1, b' \rangle)$  contient comme sous-quotient la représentation :

$$\tau = \langle -1 \rangle \otimes \langle 0 \rangle \otimes \langle 0 \rangle \otimes \langle 1 \rangle \otimes \langle 2 \rangle \otimes \dots \otimes \langle b' \rangle$$

avec multiplicité 2. Montrons que, de même,  $\mathbf{r}_\alpha(\pi)$  contient comme sous-quotient  $\tau$  avec multiplicité 2. La représentation  $\pi$  étant une sous-représentation de  $\langle 0 \rangle \times \langle -1, b' \rangle$ , elle est aussi, par la proposition 7.37(1), une sous-représentation de  $\langle 0 \rangle \times \langle -1, 0 \rangle \times \langle 1, b' \rangle$ . Par réciprocity de Frobenius on trouve donc :

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{r}_{(3,b')}(\pi), (\langle 0 \rangle \times \langle -1, 0 \rangle) \otimes \langle 1, b' \rangle) \neq \{0\}.$$

La représentation  $(\langle 0 \rangle \times \langle -1, 0 \rangle) \otimes \langle 1, b' \rangle$ , d'après le cas 2.1' ci-dessus, est irréductible. On a donc :

$$\mathbf{r}_\alpha((\langle 0 \rangle \times \langle -1, 0 \rangle) \otimes \langle 1, b' \rangle) \leq \mathbf{r}_\alpha(\pi).$$

D'après le lemme géométrique,  $\tau$  apparaît dans  $\mathbf{r}_\alpha((\langle 0 \rangle \times \langle -1, 0 \rangle) \otimes \langle 1, b' \rangle)$  avec multiplicité 2. On en déduit donc que  $\tau$  apparaît avec multiplicité 2 dans  $\mathbf{r}_\alpha(\pi)$ . De façon analogue,  $\tau$  apparaît avec multiplicité 2 dans  $\mathbf{r}_\alpha(\pi')$ . Puisque  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux sous-quotients de  $\langle 0 \rangle \times \langle -1, b' \rangle$  et que  $\tau$  apparaît aussi avec multiplicité 2 dans  $\mathbf{r}_\alpha(\langle 0 \rangle \times \langle -1, b' \rangle)$ , on en déduit que  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes.

**7.5.3.** On suppose que  $e \geq 3$  et  $n, n' \geq 2$ . La preuve se fait par récurrence sur  $nn'$ .

On commence par traiter le cas particulier où  $a' \equiv 0 \pmod{e}$ . D'après la proposition 7.37(1), la représentation  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  se plonge dans  $\langle 0 \rangle \times \langle -\Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$ . Par hypothèse de récurrence et d'après les remarques 7.20(2) et 7.40, cette dernière est isomorphe à l'induite  $\langle 0 \rangle \times \langle \Delta' \rangle \times \langle -\Delta \rangle$  qui est, toujours d'après la proposition 7.37(1), une sous représentation de  $\langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle -\Delta' \rangle \times \langle -\Delta \rangle$ . De façon analogue, on montre que  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  est un quotient de  $\langle -\Delta' \rangle \times \langle -\Delta \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle$ . Les représentations  $\langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle$  et  $\langle -\Delta' \rangle \times \langle -\Delta \rangle$  sont irréductibles par hypothèse de récurrence et, d'après le lemme géométrique, le module de Jacquet :

$$\mathbf{r}_{(2, n+n'-2)}(\langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle -\Delta' \rangle \times \langle -\Delta \rangle)$$

contient la représentation  $(\langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle) \otimes (\langle -\Delta' \rangle \times \langle -\Delta \rangle)$  avec multiplicité 1. Donc, d'après le lemme 2.5,  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  est irréductible.

On traite maintenant le cas général. D'après le paragraphe précédent, on peut supposer, quitte à passer à la contragrédiente, que  $a' \not\equiv 0 \pmod{e}$ . Alors  $\langle a', b' \rangle \times \langle 0, b \rangle$  est une sous-représentation de :

$$(7.26) \quad \langle a', b' \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle 1, b \rangle.$$

Comme on a supposé que  $n \leq n'$ , les segments  $[a', b']$  et  $[0]$  ne sont pas liés et donc (7.26) est isomorphe, par hypothèse de récurrence, à :

$$\langle 0 \rangle \times \langle a', b' \rangle \times \langle 1, b \rangle.$$

D'après la remarque 7.20(2), les segments  $[a', b']$  et  $[1, b]$  ne sont pas liés. Par hypothèse de récurrence, la représentation  $\langle a', b' \rangle \times \langle 1, b \rangle$  est donc irréductible. On conclut comme dans le cas 2.2 traité plus haut, avec  $\pi_1 = \langle 0 \rangle$  et  $\pi_2 = \langle a', b' \rangle \times \langle 1, b \rangle$ .

**7.5.4.** On suppose ici que  $e = 2$  (ce qui implique, étant donné que  $n \leq n'$ , que  $n = 1$ ).

**Lemme 7.43.** — *L'induite  $\langle 0 \rangle \times \langle 0, 1, 2 \rangle$  est irréductible.*

*Démonstration.* — La représentation  $\Pi = \langle 0, 1, 2 \rangle \times \langle 0 \rangle$  se plonge dans  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle$ . D'après le lemme géométrique,  $\langle 0, 1 \rangle \otimes (\langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle)$  est irréductible et apparaît avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet  $\mathbf{r}_{(2,2)}(\Pi)$ . D'après le lemme 2.5, on en déduit que  $\Pi$  possède une unique sous-représentation irréductible  $\pi$ . Par conséquent,  $\pi^\vee$  est l'unique quotient irréductible de  $\Pi^\vee \simeq \Pi$ . Si  $\Pi$  n'est pas irréductible, alors  $[\Pi] \geq [\pi] + [\pi^\vee]$ . Remarquons que, d'après la proposition 7.25, les représentations  $Z([0, 1, 2])$  et  $L([0, 1, 2])$  sont isomorphes parce que  $e = 2$  et  $n'$  est impair.

Appliquons le foncteur  $\mathbf{K}$ , qui n'est rien d'autre ici que le foncteur des invariants sous le groupe  $1 + \mathfrak{p}_F \cdot \mathcal{M}_4(\mathcal{O}_F)$ . Plus précisément, on va utiliser l'homomorphisme  $\mathbf{S}$ . On utilise aussi la notation  $z(\sigma, \mu)$  du paragraphe A.2, où  $\sigma$  est ici le caractère trivial de  $k_F^\times$  et où  $\mu$  est une partition. Pour alléger les notations, on omettra  $\sigma$ , de sorte qu'on notera simplement  $z(\mu)$ . D'après les propositions 6.22 et 7.33 et le théorème A.7, on a :

$$\mathbf{S}(\Pi) = z(3) \times z(1) = z(3, 1) + k \cdot z(4), \quad k \geq 0.$$

Si l'on écrit  $[\Pi] = [\pi] + [\pi^\vee] + [\tau]$ , alors  $z(3, 1)$ , qui est de multiplicité 1, ne peut apparaître que dans  $\mathbf{S}(\tau)$ . Comme  $\mathbf{r}_{(2,2)}(\Pi)$  est de longueur 2, on a  $\mathbf{r}_{(2,2)}(\tau) = \{0\}$ , ce qui implique que  $\mathbf{r}_{(2,2)}(\mathbf{S}(\tau)) = \{0\}$ . Mais  $\mathbf{r}_{(2,2)}(z(3, 1)) \neq \{0\}$  puisque  $\mathbf{r}_{(1,1,1)}(z(3, 1)) \neq \{0\}$ , ce qui donne une contradiction.  $\square$

On suppose maintenant que  $a' = 0$  et que  $b'$  est pair et  $\geq 4$ . D'après la proposition 7.37(1), la représentation  $\langle 0 \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  est une sous-représentation de  $\langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle -\Delta' \rangle$ , laquelle, par le lemme 2.4, possède une unique sous-représentation irréductible, notée  $\pi$ , qui apparaît avec multiplicité 1 dans  $\langle 0 \rangle \times \langle 0 \rangle \times \langle -\Delta' \rangle$ . On déduit que  $\pi$  est l'unique sous-représentation irréductible de  $\langle 0 \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  et y apparaît avec multiplicité 1. De même, on montre que  $\langle 0 \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  possède un unique quotient irréductible, notée  $\pi'$ , qui apparaît avec multiplicité 1 dans  $\langle 0 \rangle \times \Delta'$ . Pour prouver que cette induite est irréductible, il suffit

donc de montrer que  $\pi \simeq \pi'$ . Le module de Jacquet associé à la partition  $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$  de  $\langle 0 \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  contient comme sous-quotient la représentation :

$$\tau = \langle 0 \rangle \otimes \langle 1 \rangle \otimes \langle 0 \rangle \otimes \langle 0 \rangle \otimes \langle 1 \rangle \otimes \langle 0 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1 \rangle \otimes \langle 0 \rangle$$

avec multiplicité 2. Montrons que, de même, les modules de Jacquet  $\mathbf{r}_\alpha(\pi)$  et  $\mathbf{r}_\alpha(\pi')$  contiennent  $\tau$  comme sous-quotient avec multiplicité 2, ce qui prouvera que  $\pi \simeq \pi'$ . D'après la proposition 7.37(1), la représentation  $\pi$  est une sous-représentation de l'induite  $\langle 0 \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle \times \langle \Delta'_2 \rangle$ , avec  $\Delta'_1 = [0, 1, 2]$  et  $\Delta'_2 = [3, b']$ , donc par réciprocity de Frobenius on trouve que :

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{r}_{(4, b'-2)}(\pi), (\langle 0 \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle) \otimes \langle \Delta'_2 \rangle) \neq \{0\}.$$

D'après le lemme 7.43, la représentation  $(\langle 0 \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle) \otimes \langle \Delta'_2 \rangle$  est irréductible donc :

$$[\mathbf{r}_\alpha((\langle 0 \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle) \otimes \langle \Delta'_2 \rangle)] \leq [\mathbf{r}_\alpha(\pi)].$$

Comme  $\tau$ , d'après le lemme géométrique, apparaît avec multiplicité 2 dans le module de Jacquet  $\mathbf{r}_\alpha((\langle 0 \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle) \otimes \langle \Delta'_2 \rangle)$ , on trouve que  $\tau$  apparaît avec multiplicité 2 dans  $\mathbf{r}_\alpha(\pi)$ . De la même façon, on prouve que  $\tau$  apparaît avec multiplicité 2 dans  $\mathbf{r}_\alpha(\pi')$ .

Ceci met fin à la démonstration de la proposition 7.39.

**7.5.5.** On en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 7.44.** — Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments. Supposons que, pour tous entiers  $i, j \in \{1, \dots, r\}$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  soient non liés. Alors, la représentation :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$$

est irréductible.

*Démonstration.* — La preuve se fait par récurrence sur  $r$ , le cas  $r = 2$  étant traité par la proposition 7.39. Supposons donc que  $r \geq 3$ . Si  $\rho_i \mu_{\rho_i}^{a_i} \simeq \rho_j \mu_{\rho_j}^{a_j}$  et  $\rho_i \mu_{\rho_i}^{b_i} \simeq \rho_j \mu_{\rho_j}^{b_j}$  pour tous  $1 \leq i, j \leq r$ , alors la preuve est similaire au cas particulier traité dans le paragraphe 7.5.3. Remarquons aussi que, par hypothèse et d'après la remarque 7.40, la représentation  $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$  est isomorphe à la représentation  $\langle \Delta_{\sigma(1)} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{\sigma(r)} \rangle$  pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$ .

On note  $\Delta_i = [a_i, b_i]_{\rho_i}$  et on suppose que  $n(\Delta_1) \geq n(\Delta_i)$  pour chaque  $i$ . Quitte à passer à la contragrediente, on peut donc supposer, d'après la remarque 7.20(1), qu'il existe un entier  $1 \leq r_1 < r$  tel que  $\rho_i \mu_{\rho_i}^{b_i} \simeq \rho_1 \mu_{\rho_1}^{b_1}$  pour tout  $1 \leq i \leq r_1$  et  $\rho_1 \mu_{\rho_1}^{b_1} \notin \mathrm{supp}(\Delta_k)$  pour

tout  $r_1 < k \leq r$ . Ainsi, par le lemme géométrique et par hypothèse de récurrence, les représentations irréductibles :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{r_1} \rangle, \quad \langle \Delta_{r_1+1} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$$

satisfont aux conditions du lemme 2.8 avec :

$$\beta = (\deg(\Delta_1) + \cdots + \deg(\Delta_{r_1}), \deg(\Delta_{r_1+1}) + \cdots + \deg(\Delta_r))$$

et donc :

$$(\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_{r_1} \rangle) \otimes (\langle \Delta_{r_1+1} \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle)$$

apparaît avec multiplicité 1 dans le module de Jacquet  $\mathbf{r}_\beta(\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle)$ . On utilise maintenant le lemme 2.5 pour en déduire que  $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$  est irréductible.  $\square$

Pour compléter la preuve des théorèmes 7.36 et 7.38, il ne reste à montrer que la proposition suivante.

**Proposition 7.45.** — *Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux segments liés. Alors  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  est réductible.*

*Démonstration.* — On écrit  $\Delta = [a, b]_\rho$  et  $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$ , avec  $\rho$  et  $\rho'$  des représentations irréductibles cuspidales. On peut supposer que  $\rho'$  est égale à  $\rho$ , de degré noté  $m$ . Quitte à changer  $\Delta$  en  $\Delta'$ , on peut aussi supposer que  $a' + 1 \leq a \leq b' + 1 \leq b$  et que les segments  $\Delta^\cup = [a', b]_\rho$  et  $\Delta^\cap = [a, b']_\rho$  sont non liés. Alors  $\langle \Delta^\cup \rangle \times \langle \Delta^\cap \rangle$  n'est pas isomorphe au produit  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$ . (Si  $a = b' + 1$ , on interprète  $\langle \Delta^\cap \rangle$  comme la représentation triviale du groupe trivial  $G_0$ .) En effet, si  $\alpha = (m, \dots, m)$ , le lemme géométrique montre que le nombre de sous-quotient irréductibles (comptés avec multiplicités) de  $\mathbf{r}_\alpha(\langle \Delta^\cup \rangle \times \langle \Delta^\cap \rangle)$  est strictement inférieur au nombre des sous-quotient irréductibles (comptés aussi avec multiplicités) de  $\mathbf{r}_\alpha(\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle)$ .

Pour montrer que  $\langle \Delta \rangle \times \langle \Delta' \rangle$  est réductible, il suffit de prouver qu'elle a pour quotient  $\langle \Delta^\cup \rangle \times \langle \Delta^\cap \rangle$ . Supposons d'abord que  $a = b' + 1$ . Alors le résultat découle directement de la proposition 7.37(1). Sinon, la partie (2) de la preuve de [56, Proposition 4.6] est valable, mot à mot, ici.  $\square$

## 8. Représentations résiduellement non dégénérées de $GL_m(D)$

Dans cette section, on introduit la notion de représentation résiduellement non dégénérée de  $GL_m(D)$ , qui généralise celle de représentation non dégénérée de  $GL_n(F)$ . En particulier, toute représentation irréductible cuspidale est résiduellement non dégénérée. Dans le paragraphe 8.2, on donne des conditions nécessaires à l'apparition de sous-quotients cuspidaux dans une induite parabolique. Dans le paragraphe 8.3, on prouve la conjecture



d'unicité du support supercuspidal pour  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{D})$ . Ceci nous permet de classer, dans ce même paragraphe, les représentations résiduellement non dégénérées (proposition 8.21) en fonction de leur support supercuspidal.

### 8.1. Représentations résiduellement non dégénérées

Lorsque  $\mathbb{D}$  est non commutative, on ne peut pas définir la notion de représentation non dégénérée de  $\mathrm{GL}_m(\mathbb{D})$  comme dans [53] parce que la théorie des dérivées de Bernstein et Zelevinski ne fonctionne pas. On va définir la notion de représentation résiduellement non dégénérée en utilisant l'homomorphisme  $\mathbf{S}$  qui permet de se ramener à celle de représentation non dégénérée d'un groupe linéaire général fini. On verra au chapitre 9 (voir le corollaire 9.12) que, dans le cas déployé, les deux notions coïncident.

**8.1.1.** Soient  $m, n \geq 1$  des entiers, soit  $\rho$  une représentation irréductible supercuspidale de  $\mathrm{G}_m$  et soit  $\Omega = \Omega_{\rho, n}$  la classe d'inertie du support cuspidal  $[\rho] + \cdots + [\rho] = n \cdot [\rho]$ . On choisit un type simple maximal  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$  contenu dans  $\rho$  et on forme l'homomorphisme  $\mathbf{S}$  (voir le paragraphe 6.6). On rappelle (voir (2.2)) que  $\mathrm{Irr}(\Omega)$  désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $\mathrm{G}$  qui sont sous-quotients d'une induite parabolique d'un élément de  $\Omega$ .

**Définition 8.1.** — Une représentation  $\pi \in \mathrm{Irr}(\Omega)$  est *résiduellement non dégénérée* si  $\mathbf{S}(\pi)$  possède un sous-quotient irréductible non dégénéré (voir A.1.3).

D'après le lemme 6.3, toute représentation cuspidale dans  $\mathrm{Irr}(\Omega)$  est résiduellement non dégénérée. D'après la proposition 7.6, et puisque l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$  est  $\mathrm{st}(\sigma, n)$  (voir A.2.3), la représentation  $\pi$  est résiduellement non dégénérée si, et seulement si,  $\mathbf{S}(\pi)$  contient  $[\mathrm{st}(\sigma, n)]$ .

**Exemple 8.2.** — Par exemple, la représentation  $\mathrm{St}(\rho, n)$  de la définition 7.7 est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de  $\rho \times \rho\nu_\rho \times \cdots \times \rho\nu_\rho^{n-1}$ .

Cette définition ne dépend ni du choix de  $\lambda$  ni de la décomposition  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ .

**8.1.2.** Soit maintenant  $\pi$  une représentation irréductible quelconque, qu'on décompose sous la forme  $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$  donnée par le théorème 6.17.

**Définition 8.3.** — La représentation  $\pi$  est dite *résiduellement non dégénérée* si les représentations  $\pi_1, \dots, \pi_r$  sont résiduellement non dégénérées au sens de la définition 8.1.

On note  $\mathrm{Rnd}$  le sous-ensemble de  $\mathrm{Irr}$  formé des classes d'équivalence de représentations irréductibles résiduellement non dégénérées.

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes d'apparition d'un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré dans une induite parabolique.

**Proposition 8.4.** — *Soient  $\pi_1, \dots, \pi_r$  des représentations irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'induite :*

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

*possède un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré.*

(2) *Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , la représentation  $\pi_i$  est résiduellement non dégénérée.*

*Si ces conditions sont satisfaites, ce sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré est unique et sa multiplicité dans l'induite est 1. On le note  $\text{St}(\pi_1, \dots, \pi_r)$ .*

*Démonstration.* — D'après la définition 8.3, on peut se ramener au cas où il existe une représentation irréductible supercuspidale  $\rho$  et des entiers  $n_1, \dots, n_r$  tels que  $\pi_i$  appartienne à  $\text{Irr}(\Omega_{\rho, n_i})$  pour tout  $i$ .

On suppose dans un premier temps que  $\pi_1, \dots, \pi_r$  sont résiduellement non dégénérées. Dans ce cas, on écrit :

$$[\mathbf{S}(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r)] = [\mathbf{S}(\pi_1) \times \cdots \times \mathbf{S}(\pi_r)] \geq [\text{st}(\sigma, n_1) \times \cdots \times \text{st}(\sigma, n_r)].$$

Le résultat vient de ce que le membre de droite contient  $\text{st}(\sigma, n)$  avec multiplicité 1.

Inversement, on suppose que  $\pi_1$  n'est pas résiduellement non dégénérée, c'est-à-dire que  $\mathbf{S}(\pi_1)$  ne contient pas de facteur non dégénéré. Le résultat est alors une conséquence de la proposition A.4.  $\square$

**Corollaire 8.5.** — *Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  des segments. La représentation :*

$$\mathbf{Z}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Z}(\Delta_r)$$

*contient un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré si et seulement si tous les  $\Delta_i$  sont de longueur 1.*

*Démonstration.* — D'après la proposition 7.33, pour tout segment  $\Delta$ , on a :

$$\mathbf{S}(\mathbf{Z}(\Delta)) = [z(\sigma, n(\Delta))]$$

qui est non dégénérée si et seulement si  $n(\Delta) = 1$ . On déduit le résultat de la proposition 8.4.  $\square$

**8.1.3.** On rappelle quelques définitions concernant les partitions que nous utiliserons par la suite. On renvoie à Macdonald [37, I.1] pour plus de précisions.

**Définition 8.6.** — (1) Une *partition* de  $m \geq 1$  est une suite décroissante :

$$(8.1) \quad \mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r)$$

d'entiers strictement positifs dont la somme est égale à  $m$ .

(2) La *partition conjuguée* de (8.1) est la partition  $\mu' = (\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_s)$  de  $m$  où  $\mu'_j$  est le nombre d'entiers  $i \in \{1, \dots, r\}$  tels que  $\mu_i \geq j$ .

(3) Si  $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots)$  est une partition d'un entier  $m$  et  $\nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots)$  une partition d'un entier  $n$ , on note  $\mu + \nu$  la partition :

$$(\mu_1 + \nu_1 \geq \mu_2 + \nu_2 \geq \dots)$$

de l'entier  $m + n$ .

**Remarque 8.7.** — On peut penser à une partition comme à un multi-ensemble d'entiers strictement positifs, c'est-à-dire comme à un élément de  $\mathbb{N}(\mathbb{N}^*)$ .

On définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des partitions de  $m$ . Si  $\mu, \nu$  sont des partitions de  $m$ , on écrit  $\mu \leq \nu$  lorsque :

$$\sum_{i \leq k} \mu_i \leq \sum_{i \leq k} \nu_i$$

pour tout entier  $k \geq 1$ . On a  $\mu \leq \nu$  si et seulement si  $\nu' \leq \mu'$ , c'est-à-dire que l'application  $\mu \mapsto \mu'$  est décroissante pour la relation d'ordre  $\leq$ . Pour cette relation, la plus grande partition de  $m$  est  $(m)$ , tandis que la plus petite est  $(1, \dots, 1)$ .

**8.1.4.** On définit maintenant la notion de représentation résiduellement dégénérée par rapport à une partition. Soit  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  une famille d'entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ .

**Définition 8.8.** — (1) Une représentation irréductible  $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r$  du sous-groupe de Levi  $M_\alpha$  de  $G_m$  est dite *résiduellement non dégénérée* si, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , la représentation  $\pi_i$  est résiduellement non dégénérée au sens de la définition 8.3.

(2) Une représentation irréductible  $\pi$  de  $G_m$  est dite *résiduellement  $\alpha$ -dégénérée* si la représentation  $r_\alpha(\pi)$  possède un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré.

La définition 8.8(2) ne dépend pas de l'ordre des entiers  $m_i$ . En d'autres termes, si  $\pi$  est résiduellement  $\alpha$ -dégénérée, alors elle est résiduellement  $\beta$ -dégénérée pour toute permutation  $\beta$  des éléments de  $\alpha$ . Si l'on oublie l'ordre des  $m_i$  et qu'on les range dans l'ordre décroissant, on obtient une partition de  $m$  dite *associée* à la famille  $\alpha$ .

**Définition 8.9.** — Soit  $\mu$  une partition de  $m$ . La représentation  $\pi$  est dite *résiduellement  $\mu$ -dégénérée* si elle est résiduellement  $\alpha$ -dégénérée pour au moins une (donc pour toute) famille  $\alpha$  associée à  $\mu$ .

On remarquera qu'une représentation irréductible est résiduellement non dégénérée si, et seulement si, elle est résiduellement  $(m)$ -dégénérée.

**Proposition 8.10.** — Soient  $\mu, \nu$  des partitions, soit  $\pi$  une représentation résiduellement  $\mu$ -dégénérée et soit  $\sigma$  une représentation résiduellement  $\nu$ -dégénérée. Alors  $\pi \times \sigma$  contient un sous-quotient irréductible résiduellement  $(\mu + \nu)$ -dégénéré.

*Démonstration.* — Le résultat est une conséquence du lemme géométrique et de la proposition 8.4.  $\square$

## 8.2. Conditions d'apparition d'un facteur cuspidal dans une induite

Dans ce paragraphe, on donne des conditions nécessaires d'apparition d'un facteur cuspidal dans une induite parabolique. La proposition 8.11 est l'une des étapes cruciales dans la preuve de l'unicité du support supercuspidal (théorème 8.17).

**Proposition 8.11.** — Soient  $\rho_1, \dots, \rho_n$  des représentations irréductibles cuspidales avec  $n \geq 2$ . On suppose que :

$$(8.2) \quad \mathbb{Z}_{\rho_i} \not\subseteq \{\rho_1, \dots, \rho_n\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors aucun sous-quotient irréductible de l'induite  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  n'est cuspidal.

*Démonstration.* — D'après le théorème 5.18, on peut se ramener au cas où les  $\rho_i$  sont toutes inertiuellement équivalentes à une même représentation cuspidale  $\rho$  de  $G_m$ ,  $m \geq 1$ . La condition (8.2) entraîne d'une part que  $\rho$  est supercuspidale avec  $m(\rho) = e(\rho) \geq 2$  (voir la remarque 7.16), d'autre part qu'il existe des segments  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  satisfaisant aux conditions suivantes :

- on a  $[\rho\chi_1] + \dots + [\rho\chi_n] = \text{supp}(\Delta_1) + \dots + \text{supp}(\Delta_r)$  ;
- pour tous  $i \neq j$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  ne sont pas liés ;
- pour tout  $i$ , la longueur  $n_i$  de  $\Delta_i$  est  $\leq e(\rho) - 1$ .

Ces segments sont uniques à l'ordre près. D'après le théorème 7.36, la représentation :

$$(8.3) \quad \Pi = L(\Delta_1) \times \dots \times L(\Delta_r)$$

est irréductible.

**Lemme 8.12.** — *La représentation  $\Pi$  est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de l'induite  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ , où elle apparaît avec multiplicité 1.*

*Démonstration.* — D'abord,  $\Pi$  est un sous-quotient irréductible de  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$  et, d'après la proposition 8.4, cette induite contient un unique facteur irréductible résiduellement non dégénéré. D'après la proposition 8.4 encore,  $\Pi$  est résiduellement non dégénéré si et seulement si chaque  $L(\Delta_i)$  est résiduellement non dégénéré, ce qui suit de la proposition 7.33.  $\square$

**Lemme 8.13.** — *La représentation  $\Pi$  n'est pas cuspidale.*

*Démonstration.* — Le résultat est immédiat si  $r \geq 2$ . Dans le cas contraire,  $\Pi$  est une représentation associée à un segment, qui ne peut pas être cuspidale puisqu'elle contient, par définition, un type simple non maximal (car  $n \geq 2$ ). Voir la remarque 7.23(4).  $\square$

La conjonction des lemmes 8.12 et 8.13 et du fait que toute représentation irréductible cuspidale est résiduellement non dégénérée entraîne que l'induite ne possède pas de sous-quotient irréductible cuspidal.  $\square$

**Exemple 8.14.** — Si  $R$  est de caractéristique nulle, (8.2) est toujours vérifiée.

Soient  $m, n \geq 1$  et soit  $\rho$  une représentation cuspidale de  $G_m$ . On fixe un type simple maximal  $(J, \lambda)$  contenu dans  $\rho$  et on écrit  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ .

**Proposition 8.15.** — *Soient  $\chi_1, \dots, \chi_n$  des caractères non ramifiés de  $G_m$  tels que :*

$$(8.4) \quad \rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_n$$

*possède un sous-quotient cuspidal. Alors :*

$$[\rho\chi_1] + \cdots + [\rho\chi_n] = [\rho\chi_1] + [\rho\chi_1\nu_\rho] + \cdots + [\rho\chi_1\nu_\rho^{n-1}].$$

*Démonstration.* — Quitte à remplacer  $\rho$  par  $\rho\chi_1$ , on peut supposer que  $\chi_1$  est trivial. On écarte le cas trivial où  $n = 1$ , de sorte que, d'après le corollaire 7.13, il existe  $r \geq 0$  tel que  $n = m(\rho)\ell^r$ . Ensuite, d'après la proposition 7.5, on peut supposer que chaque  $\chi_i$  est de la forme  $\nu_\rho^{k_i}$  avec  $k_i \in \mathbb{Z}$ . Si  $e(\rho) = 1$ , chaque  $\chi_i$  est trivial et le résultat est immédiat. On suppose donc dorénavant que  $e(\rho) \geq 2$ , de sorte que  $m(\rho) = e(\rho)$ . D'après la proposition 8.11, il existe un entier  $t \geq 1$  tel que, quitte à réordonner les  $\chi_i$ , on ait :

- (1) pour tout  $i \leq tm(\rho)$ , on a  $[\rho\chi_i] = [\rho\nu_\rho^{i-1}]$  ;
- (2) la condition (8.2) est vérifiée par les représentations  $\rho\chi_{tm(\rho)+1}, \dots, \rho\chi_n$ .

On écrit  $n = tm(\rho) + k$  et on suppose que  $k \geq 1$ . Soit  $\pi$  un sous-quotient irréductible cuspidal de (8.4). Soit  $\pi_1$  un sous-quotient irréductible de  $\rho\chi_1 \times \cdots \times \rho\chi_{tm(\rho)}$  et  $\pi_2$  un sous-quotient irréductible de  $\rho\chi_{tm(\rho)+1} \times \cdots \times \rho\chi_n$  tels que  $\pi$  soit un sous-quotient irréductible de  $\pi_1 \times \pi_2$ . Comme  $\pi$  est résiduellement non dégénérée, c'est vrai aussi de  $\pi_1$  et de  $\pi_2$ . En particulier,  $\pi_1$  est égal à  $\text{St}(\rho, m(\rho)t)$ .

Si l'on écrit  $t = t'\ell^r$  avec  $t' \geq 1$  premier à  $\ell$  et  $r \geq 0$ , et si l'on pose  $\tau = \text{St}(\rho, m(\rho)\ell^r)$ , alors  $\tau$  est cuspidale non supercuspidale et  $\pi_1$  est égale à  $\text{St}(\tau, t')$  d'après la proposition 7.8 et le lemme 7.11. En particulier, le support cuspidal de  $\pi_1$  est dans  $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_\tau)$ . D'autre part, d'après la proposition 8.11, le support cuspidal de  $\pi_2$  est dans  $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$ . D'après le théorème 5.18, l'induite  $\pi_1 \times \pi_2$  est irréductible, ce qui contredit le fait que  $\pi$  est cuspidale. On en déduit que  $k = 0$ , ce qui met fin à la démonstration.  $\square$

**Remarque 8.16.** — D'après la proposition 7.33, les deux représentations  $L([0, n-1]_\rho)$  et  $\text{St}(\rho, n)$  sont isomorphes si et seulement si  $n \leq m(\rho) - 1$ . Si  $n \geq m(\rho)$ , la représentation  $L([0, n-1]_\rho)$  n'est jamais résiduellement non dégénérée. Par exemple, si  $\rho$  est le caractère trivial de  $F^\times$  et si  $q$  est d'ordre 2 dans  $R^\times$ , alors la représentation  $L([0, 1]_\rho)$  est un caractère de  $GL_2(F)$ .

### 8.3. Unicité du support supercuspidal

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

**Théorème 8.17.** — Soient  $\rho_1, \dots, \rho_n$  et  $\rho'_1, \dots, \rho'_{n'}$  des représentations irréductibles supercuspidales. Alors  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$  et  $\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'}$  ont un sous-quotient irréductible en commun si et seulement si :

$$(8.5) \quad [\rho_1] + \cdots + [\rho_n] = [\rho'_1] + \cdots + [\rho'_{n'}].$$

**Remarque 8.18.** — Voir [53] page 598 dans le cas où  $D = F$ .

*Démonstration.* — Si (8.5) est vérifié, alors  $n = n'$  et, par la proposition 2.2, les représentations  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$  et  $\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'}$  ont les mêmes sous-quotients irréductibles. Pour prouver la réciproque, on fixe un sous-quotient irréductible  $\pi$  commun à  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$  et  $\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'}$ , et on commence par traiter le cas où  $\pi$  est cuspidal. D'après le théorème 5.18, il existe des représentations irréductibles supercuspidales  $\rho$  et  $\rho'$  telle que les  $\rho_i$  (les  $\rho'_i$ ) soient inertiuellement équivalentes à  $\rho$  (à  $\rho'$ ). D'après la proposition 8.15, on peut même supposer que :

$$[\rho_1] + \cdots + [\rho_n] = [\rho] + [\rho\nu_\rho] + \cdots + [\rho\nu_\rho^{n-1}].$$

Comme  $\pi$  est cuspidal, c'est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ . Il est donc isomorphe à  $\text{St}(\rho, n)$ . On a quelque chose d'analogue pour  $\rho'$ , ce dont on déduit que  $\text{St}(\rho, n)$  et  $\text{St}(\rho', n')$  sont tous les deux isomorphes à  $\pi$ . Le résultat est une conséquence de la proposition 7.14.

On traite maintenant le cas général. Soit  $\alpha$  une famille d'entiers de somme  $\deg(\pi)$  telle que  $\mathbf{r}_\alpha(\pi)$  soit cuspidale, et écrivons  $[\tau_1] + \cdots + [\tau_r]$  son support cuspidal. Par exactitude du foncteur de Jacquet, la représentation  $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$  est un sous-quotient irréductible de  $\mathbf{r}_\alpha(\rho_1 \times \cdots \times \rho_n)$  et de  $\mathbf{r}_\alpha(\rho'_1 \times \cdots \times \rho'_{n'})$ , où  $\alpha$  est la famille d'entiers  $(\deg(\tau_1), \dots, \deg(\tau_r))$ . Ces représentations ont chacune une filtration dont les sous-quotients irréductibles sont de la forme (1.5). Le résultat étant vrai pour les représentations  $\tau_i$  on déduit alors (8.5).  $\square$

**Définition 8.19.** — Étant donnée une représentation irréductible  $\pi$ , il existe une unique somme  $[\rho_1] + \cdots + [\rho_n] \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$  telle que  $\pi$  soit un sous-quotient irréductible de  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ . On l'appelle le *support supercuspidal* de  $\pi$ , que l'on note  $\text{scusp}(\pi)$ .

Pour  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$ , on note  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$  l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support supercuspidal  $\mathfrak{s}$ . On en déduit une variante supercuspidale du théorème 5.18.

**Théorème 8.20.** — Soit  $r \geq 1$  un entier et soient  $\rho_1, \dots, \rho_r$  des représentations irréductibles supercuspidales deux à deux non inertiuellement équivalentes. Pour chaque  $i$ , on fixe un support supercuspidal  $\mathfrak{s}_i \in \mathbb{N}(\Omega_{\rho_i})$ .

(1) Pour chaque  $i$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de support supercuspidal  $\mathfrak{s}_i$ . Alors  $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$  est irréductible.

(2) On pose  $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \cdots + \mathfrak{s}_r$ . L'application :

$$(\pi_1, \dots, \pi_r) \rightarrow \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

induit une bijection de  $\text{Irr}(\mathfrak{s}_1) \times \cdots \times \text{Irr}(\mathfrak{s}_r)$  dans  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$ .

La proposition suivante découle de l'unicité du support supercuspidal et de la proposition 8.4.

**Proposition 8.21.** — L'application  $(\rho_1, \dots, \rho_r) \mapsto \text{St}(\rho_1, \dots, \rho_r)$  de  $\mathbb{N}(\mathcal{S})$  dans  $\text{Rnd}$  est une bijection, et sa réciproque est donnée par  $\pi \mapsto \text{scusp}(\pi)$ .

## 9. Classification des représentations irréductibles de $\text{GL}_m(\mathbb{D})$

L'objectif de cette section est le théorème 9.32, qui fournit une classification à la Zelevinski des représentations irréductibles de  $\text{GL}_m(\mathbb{D})$ ,  $m \geq 1$ , en termes de multisegments. Les multisegments sont définis au paragraphe 9.1. Dans le paragraphe 9.2, on définit les

multisegments supercuspidaux et les multisegments apériodiques, et on montre comment passer bijectivement des uns aux autres. On donne au paragraphe 9.3 une classification des représentations résiduellement non dégénérées en fonction de leur support cuspidal. Dans le paragraphe 9.5, on associe à tout multisegment  $\mathbf{m}$  une représentation irréductible  $Z(\mathbf{m})$ . On étudie l'application  $\mathbf{m} \mapsto Z(\mathbf{m})$  au paragraphe 9.6 : on montre qu'elle est surjective et on calcule ses fibres. Finalement, dans le paragraphe 9.7, on étudie la réduction modulo  $\ell$  des représentations irréductibles.

### 9.1. Multisegments

Dans ce paragraphe, on définit la notion de multisegment. On note  $\text{Seg} = \text{Seg}_R$  l'ensemble des classes d'équivalence de segments (définition 7.18). Le degré, la longueur, le support d'un segment  $\Delta$  ne dépendent que de la classe d'équivalence de ce segment, ainsi que les classes de représentations  $[Z(\Delta)]$  et  $[L(\Delta)]$ .

**Définition 9.1.** — Un *multisegment* est un multi-ensemble de classes d'équivalence de segments, c'est-à-dire un élément de  $\mathbb{N}(\text{Seg})$ . On note :

$$(9.1) \quad \text{Mult} = \text{Mult}_R$$

l'ensemble des multisegments.

Un multisegment non nul s'écrit sous la forme :

$$(9.2) \quad \mathbf{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r = [a_1, b_1]_{\rho_1} + \cdots + [a_r, b_r]_{\rho_r},$$

où chaque  $\Delta_i = [a_i, b_i]_{\rho_i}$  est une classe d'équivalence de segments. La longueur, le degré et le support, définis pour les segments en (7.7), sont définis pour les multisegments par additivité, c'est-à-dire qu'on note :

$$n(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^r n(\Delta_i), \quad \deg(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^r \deg(\Delta_i), \quad \text{supp}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^r \text{supp}(\Delta_i)$$

respectivement la longueur, le degré et le support de  $\mathbf{m}$ . On définit aussi par additivité les applications  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}^\vee$  et  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}^-$  de  $\text{Mult}$  dans  $\text{Mult}$  (voir (7.12) et (7.13)). Pour la seconde application, on conviendra que, si  $\Delta$  est un segment de longueur 1, alors  $\Delta^-$  est le multisegment nul.

Voici une série de lemmes qui seront utiles par la suite.

**Lemme 9.2.** — Soient  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  des multisegments tels que  $\mathbf{m}^- = \mathbf{m}'^-$ . Il existe alors des multisegments  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}'$  qui sont sommes de segments de longueur 1 et tels qu'on ait  $\mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{m}' + \mathbf{n}'$ .



*Démonstration.* — Si l'on étend l'opération  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}^-$  en un endomorphisme de groupe de  $\mathbb{Z}(\text{Seg})$ , il suffit de prouver que le noyau de cet endomorphisme est réduit au sous-groupe engendré par les segments de longueur 1, ce qui est immédiat.  $\square$

Soit  $\mathbf{m}$  un multisegment, qu'on écrit sous la forme (9.2). On pose :

$$\mathbf{m}^{(1)} = [\rho_1 \nu_{\rho_1}^{b_1}] + [\rho_2 \nu_{\rho_2}^{b_2}] + \cdots + [\rho_r \nu_{\rho_r}^{b_r}]$$

la somme des extrémités finales des segments composant  $\mathbf{m}$ . Ceci définit une application  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}^{(1)}$  de Mult dans  $\mathbb{N}(\mathcal{C})$ . Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 9.3.** — *On a  $\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{m}$  si et seulement si  $\mathbf{m}^- = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\mathbf{m}$  est une somme de segments de longueur 1.*

On définit maintenant par récurrence des multisegments  $\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \dots$  associés à  $\mathbf{m}$  en posant  $\mathbf{m}^{(i+1)} = (\mathbf{m}^-)^{(i)}$  pour tout  $i \geq 1$ .

**Lemme 9.4.** — *L'application  $\mathbf{m} \mapsto (\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \dots)$  est injective.*

*Démonstration.* — Soient  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  des multisegments tels que  $\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}'^{(i)}$  pour tout  $i \geq 1$ . Alors les multisegments  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  ont la même longueur, notée  $n$ . On remarque aussi qu'ils possèdent le même nombre de segments, noté  $r$ . On procède par récurrence sur  $n$ , le cas où  $n = 1$  étant immédiat. En considérant les égalités  $\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}'^{(i)}$  pour tout  $i \geq 2$ , on obtient  $\mathbf{m}^- = \mathbf{m}'^-$  par hypothèse de récurrence. On déduit du lemme 9.2 qu'il existe  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}'$  des multisegments sommes de segments de longueur 1 tels que  $\mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{m}' + \mathbf{n}'$ . On en déduit que  $\mathbf{m}^{(1)} + \mathbf{n}^{(1)} = \mathbf{m}'^{(1)} + \mathbf{n}'^{(1)}$ . Mais on a aussi  $\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{m}'^{(1)}$ , ce dont on déduit que  $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ , puis que  $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ .  $\square$

On introduit maintenant une relation  $\vdash$  sur Mult. Que le lecteur prenne garde au fait que ce n'est pas une relation d'ordre.

**Définition 9.5.** — Soit  $\mathbf{m}$  un multisegment, qu'on écrit sous la forme (9.2), et soit  $\mathbf{n}$  un autre multisegment. Si  $\mathbf{n}$  est de la forme :

$$[a_1, c_1]_{\rho_1} + \cdots + [a_r, c_r]_{\rho_r}$$

avec  $c_i \in \{b_i - 1, b_i\}$  pour tout  $i$ , on écrit  $\mathbf{m} \vdash \mathbf{n}$  et on pose  $\delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \deg(\mathbf{m}) - \deg(\mathbf{n})$ .

**Remarque 9.6.** — (1) Pour tout  $\mathbf{m} \in \text{Mult}$ , on a  $\mathbf{m} \vdash \mathbf{m}^-$  et  $\delta(\mathbf{m}, \mathbf{m}^-) = \deg(\mathbf{m}^{(1)})$ .

(2) Si  $\mathbf{m} \vdash \mathbf{n}$ , alors on a  $\mathbf{m}^- \vdash \mathbf{n}^-$  et :

$$\delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) - \delta(\mathbf{m}^-, \mathbf{n}^-) = \deg(\mathbf{m}^{(1)}) - \deg(\mathbf{n}^{(1)}).$$

## 9.2. Multisegments supercuspidaux et apériodiques

Dans ce paragraphe on étend au cas non déployé les définitions de [53, V.6]. Un multi-segment  $\mathbf{m}$  est une *période* s'il est de la forme :

$$(9.3) \quad \mathbf{m} = [a, b]_\rho + [a + 1, b + 1]_\rho + \cdots + [a + n - 1, b + n - 1]_\rho,$$

avec  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale,  $a, b \in \mathbb{Z}$  et  $n = m(\rho)\ell^r$  pour  $r \geq 0$ .

**Définition 9.7.** — Un multi-segment est dit *apériodique* s'il ne contient pas de période et *supercuspidal* si son support est formé de représentations supercuspidales.

Soit  $\Delta$  un segment. D'après le théorème 7.14, on peut l'écrire  $\Delta = [a, b]_{\text{St}(\rho, n)}$ , où  $\rho$  est une représentation irréductible supercuspidale et  $n = 1$  ou  $n = m(\rho)\ell^r$  pour  $r \geq 0$ . La représentation  $\rho$  n'est pas unique, mais le multi-segment :

$$\Delta_{\text{sc}} = [a, b]_\rho + [a + 1, b + 1]_\rho + \cdots + [a + n - 1, b + n - 1]_\rho$$

ne dépend pas du choix de  $\rho$ . Ce procédé définit par additivité une application :

$$(9.4) \quad \mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{\text{sc}}$$

de  $\text{Mult}$  vers l'ensemble  $\text{Mult}^{\text{sc}}$  des multi-segments supercuspidaux. Cette application vaut l'identité sur  $\text{Mult}^{\text{sc}}$ . Elle est donc surjective, mais pas injective en général. Cependant, on a le résultat important suivant.

**Lemme 9.8.** — *Soit  $\mathbf{m}$  un multi-segment supercuspidal. Il existe un unique multi-segment apériodique  $\mathbf{a}$  tel que  $\mathbf{a}_{\text{sc}} = \mathbf{m}$ .*

*Démonstration.* — On peut se ramener au cas où  $\text{supp}(\mathbf{m}) \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$  avec  $\rho$  supercuspidale. Pour alléger les notations, on pose  $\text{St}_r(\rho) = \text{St}(\rho, m(\rho)\ell^r)$  pour  $r \geq 0$ . Un multi-segment apériodique s'écrit :

$$\mathbf{a} = \sum_{r \geq 0} \sum_{n \geq 1} u_{r,n} \cdot [1, n]_{\text{St}_r(\rho)} + \mathbf{a}_0$$

où  $\mathbf{a}_0$  est la partie supercuspidale de  $\mathbf{a}$ , c'est-à-dire le plus grand multi-segment  $\leq \mathbf{a}$  dont le support soit supercuspidal, et où  $u_{r,n} \geq 0$  est la multiplicité du segment  $[1, n]_{\text{St}_r(\rho)}$  dans le multi-segment  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$ . (On remarque que pour  $r \geq 0$  la représentation cuspidale  $\text{St}_r(\rho)$  n'est pas cuspidale. Ceci implique que  $e(\text{St}_r(\rho)) = 1$ , donc que tout segment de longueur  $n$  de la forme  $[a, b]_{\text{St}_r(\rho)}$  est équivalent à  $[1, n]_{\text{St}_r(\rho)}$ .) L'hypothèse d'apériodicité implique que, pour chaque  $r \geq 0$  et chaque  $n \geq 1$ , on a  $u_{r,n} \leq \ell - 1$ . On écrit maintenant :

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}_{\text{sc}} = \sum_{r \geq 0} \sum_{n \geq 1} \left( \ell^r u_{r,n} \cdot \sum_{j=0}^{m(\rho)-1} [j, j+n]_\rho \right) + \mathbf{a}_0.$$

On peut retrouver  $\mathbf{a}_0$  à partir de  $\mathbf{m}$  : c'est le plus grand multisegment  $\leq \mathbf{m}$  dont aucun segment n'appartient à une période de  $\mathbf{m}$ . Il reste donc à montrer que les  $u_{r,n}$  peuvent être retrouvés à partir de  $\mathbf{a}_1$ . Étant donné un segment de la forme  $[a, b]_\rho$ , on note  $n = b - a + 1$  sa longueur. Alors la multiplicité de  $[a, b]_\rho$  dans  $\mathbf{a}_1$  est égale à :

$$u_{0,n} + \ell u_{1,n} + \ell^2 u_{2,n} + \dots$$

et on retrouve les  $u_{r,n}$  par unicité du développement  $\ell$ -adique.  $\square$

En d'autres termes, la restriction de l'application (9.4) à l'ensemble  $\text{Mult}^{\text{ap}}$  des multisegments apériodiques induit une bijection de  $\text{Mult}^{\text{ap}}$  vers  $\text{Mult}^{\text{sc}}$ . On note  $\mathbf{m}_{\text{ap}}$  l'apériodisé d'un multisegment  $\mathbf{m}$ , c'est-à-dire l'antécédent de  $\mathbf{m}_{\text{sc}}$  par cette bijection. Les applications  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{\text{sc}}$  et  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{\text{ap}}$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre les ensembles  $\text{Mult}^{\text{ap}}$  et  $\text{Mult}^{\text{sc}}$ .

Étant donné  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$ , on pose :

$$(9.5) \quad \text{Mult}(\mathfrak{s}) = \{\mathbf{m} \in \text{Mult} \mid \text{supp}(\mathbf{m}) = \mathfrak{s}\}$$

et on note  $\text{Mult}(\mathfrak{s})^{\text{ap}}$  l'intersection  $\text{Mult}^{\text{ap}} \cap \text{Mult}(\mathfrak{s})$ . On a le lemme suivant.

**Lemme 9.9.** — *On a les propriétés suivantes.*

- (1) *Pour tout  $\mathbf{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}$ , on a  $\text{supp}(\mathbf{m})_{\text{ap}} = \text{supp}(\mathbf{m}_{\text{ap}})$ .*
- (2) *Pour tout  $\mathbf{m} \in \text{Mult}^{\text{ap}}$ , on a  $\text{supp}(\mathbf{m})_{\text{sc}} = \text{supp}(\mathbf{m}_{\text{sc}})$ .*
- (3) *Pour tout support supercuspidal  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$ , l'application  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{\text{ap}}$  induit une bijection :*

$$(9.6) \quad \text{Mult}(\mathfrak{s}) \rightarrow \prod_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C}) \\ \mathfrak{t}_{\text{sc}} = \mathfrak{s}}} \text{Mult}(\mathfrak{t})^{\text{ap}}.$$

*Démonstration.* — On commence par remarquer qu'on passe de (1) à (2) en appliquant les bijections  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{\text{sc}}$  et  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{\text{ap}}$  entre  $\text{Mult}^{\text{ap}}$  et  $\text{Mult}^{\text{sc}}$ . Il suffit donc de prouver (1). Il suffit de le prouver lorsque  $\mathbf{m}$  est une période, auquel cas le résultat est immédiat. Pour prouver (3), il suffit de prouver que (9.6) est bien définie, ce qui découle de (1).  $\square$

### 9.3. Classification des représentations résiduellement non dégénérées

Dans ce paragraphe, on classe les représentations résiduellement non dégénérées (voir aussi la proposition 8.21) en termes de multisegment apériodiques. Ceci nous permet de donner quelques propriétés de ces représentations, qui seront utiles par la suite.

On note  $\mathbb{N}(\mathcal{C})^{\text{ap}}$  l'image de  $\mathbb{N}(\mathcal{S})$  par la bijection  $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{\text{ap}}$  de  $\text{Mult}^{\text{sc}}$  dans  $\text{Mult}^{\text{ap}}$ , c'est-à-dire l'ensemble des supports cuspidaux apériodiques.

**Théorème 9.10.** — Soit  $\pi$  une représentation résiduellement non dégénérée. Il existe un unique multisegment  $\mathbf{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$  tel que, pour tous  $i \neq j$ , les segments  $\Delta_i, \Delta_j$  ne soient pas liés et tel que  $\pi$  soit isomorphe à :

$$L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_r).$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{s} = [\tau_1] + \cdots + [\tau_n] \in \mathbb{N}(\mathcal{S})$  le support supercuspidal de  $\pi$  et soit  $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}_{\text{ap}}$  le support cuspidal a périodique lui correspondant, qu'on écrit  $[\rho_1] + \cdots + [\rho_r]$ . Grâce à la condition d'a périodicité, il existe des segments  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  de la forme  $\Delta_i = [a_i, b_i]_{\rho_i}$  satisfaisant aux conditions suivantes :

- on a  $\mathfrak{t} = \text{supp}(\Delta_1) + \cdots + \text{supp}(\Delta_r)$  ;
- pour tous  $i \neq j$ , les segments  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  ne sont pas liés ;
- pour tout  $i$ , la longueur de  $\Delta_i$  est  $\leq m(\rho_i) - 1$ .

Ces segments sont uniques à l'ordre près. D'après le théorème 7.36, la représentation :

$$\Pi = L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_r)$$

est irréductible, et elle est résiduellement non dégénérée d'après la proposition 7.33(3). Comme  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$  est un sous-quotient de  $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ , on déduit de la proposition 8.4 que  $\pi$  est isomorphe à  $\Pi$ .  $\square$

On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 9.11.** — L'application  $(\rho_1, \dots, \rho_r) \mapsto \text{St}(\rho_1, \dots, \rho_r)$  induit une bijection de  $\mathbb{N}(\mathcal{C})^{\text{ap}}$  dans  $\text{Rnd}$ , notée  $\mathfrak{t} \mapsto \text{St}(\mathfrak{t})$ , et sa réciproque est donnée par  $\pi \mapsto \text{cusp}(\pi)$ .

*Démonstration.* — Si  $\pi$  est une représentation irréductible résiduellement non dégénérée, on pose  $\mathfrak{t} = \text{scusp}(\pi)_{\text{ap}}$  et on note  $\mathbf{m}$  le multisegment donné par le théorème 9.10, de sorte que  $\mathfrak{t}$  est égal au support de  $\mathbf{m}$ . Par construction,  $\pi$  est égale à  $\text{St}(\mathfrak{t})$ . Par définition, le support cuspidal de  $L(\Delta_i)$  est égal au support de  $\Delta_i$ . Le théorème 9.10 implique donc que le support cuspidal de  $\pi$  est égal à  $\text{supp}(\mathbf{m}) = \mathfrak{t}$ .  $\square$

En comparant [53, Theorem V.7]   la proposition 9.11, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 9.12.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $GL_n(F)$ . Alors :

- (1)  $\pi$  est non dégénérée si et seulement si  $\pi$  est résiduellement non dégénérée.
- (2) Soit  $\mu$  une partition de  $n$ . Alors  $\pi$  est  $\mu$ -dégénérée [53, V.5] si et seulement si elle est résiduellement  $\mu$ -dégénérée.

*Démonstration.* — Compte tenu de [53, V.7] et de la remarque 8.16, il suffit de prouver que, pour toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  et pour tout entier  $n \leq m(\rho) - 1$ , la représentation  $\text{St}(\rho, n)$  est isomorphe à l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de l'induite :

$$\rho \times \rho\nu_\rho \times \cdots \times \rho\nu_\rho^{n-1}.$$

Ceci découle de [52, III.5.13]. □

#### 9.4. La partition $\mu_{\mathbf{m}}$ et la représentation $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$

Dans ce paragraphe, on associe à tout multisegment  $\mathbf{m}$  une famille croissante d'entiers  $\bar{\mu}_{\mathbf{m}}$  de somme  $\text{deg}(\mathbf{m})$  et une représentation irréductible résiduellement non dégénérée du sous-groupe de Levi  $M_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}$ , notée  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$ .

**9.4.1.** Soit  $\mathbf{m}$  un multisegment. On note  $m$  son degré, et on note  $\text{Part}(\mathbf{m})$  l'ensemble des partitions  $\mu$  de  $m$  telles que l'induite :

$$(9.7) \quad \mathbf{I}(\mathbf{m}) = \mathbf{Z}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Z}(\Delta_r)$$

possède un sous-quotient irréductible  $\mu$ -dégénéré (définition 8.9). Il n'est pas vide, parce qu'on peut choisir  $\mu$  de façon que  $\mathbf{r}_\mu(\mathbf{I}(\mathbf{m}))$  contienne un sous-quotient irréductible cuspidal, donc résiduellement non dégénéré d'après le lemme 8.4.

**Définition 9.13.** — On pose :

$$(9.8) \quad \mu_{\mathbf{m}} = (\text{deg}(\mathbf{m}^{(1)}) \geq \text{deg}(\mathbf{m}^{(2)}) \geq \dots),$$

qui est la partition de  $m$  dont la partition conjuguée est la partition associée à la famille  $(\text{deg}(\Delta_1), \text{deg}(\Delta_2), \dots)$  des degrés des segments composant  $\mathbf{m}$ .

On remarque que tous les multisegments  $\mathbf{m}^{(i)}$  sont des sommes de segments de longueur 1, de sorte que, d'après la proposition 8.4, chacune des induites  $\mathbf{I}(\mathbf{m}^{(i)})$  contient le sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré  $\text{St}(\mathbf{m}^{(i)})$ .

**Définition 9.14.** — Soit  $t$  le plus grand entier tel que  $\mathbf{m}^{(t)} \neq 0$ . On note  $\bar{\mu}_{\mathbf{m}}$  la famille croissante d'entiers associée à la partition  $\mu_{\mathbf{m}}$ , c'est-à-dire :

$$(9.9) \quad \bar{\mu}_{\mathbf{m}} = (\text{deg}(\mathbf{m}^{(t)}) \leq \text{deg}(\mathbf{m}^{(t-1)}) \leq \dots \leq \text{deg}(\mathbf{m}^{(1)})),$$

et on note :

$$(9.10) \quad \text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m}) = \text{St}(\mathbf{m}^{(t)}) \otimes \text{St}(\mathbf{m}^{(t-1)}) \otimes \cdots \otimes \text{St}(\mathbf{m}^{(1)}),$$

qui est une représentation irréductible résiduellement non dégénérée de  $M_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}$ .

**Lemme 9.15.** — *La représentation  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$  est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de  $\mathbf{r}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{I}(\mathbf{m}))$ .*

*Démonstration.* — On va le prouver par récurrence sur la longueur  $n$  de  $\mathbf{m}$ . Si  $n = 1$ , le résultat est immédiat puisqu'alors  $\mathbf{I}(\mathbf{m})$  est irréductible cuspidale. On suppose maintenant que  $n \geq 2$  et on pose  $\alpha = (m - \deg(\mathbf{m}^{(1)}), \deg(\mathbf{m}^{(1)}))$ . D'après le lemme géométrique 2.4.3 et la proposition 7.28, le module de Jacquet  $\mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{I}(\mathbf{m}))$  est composé de représentations de la forme :

$$\mathbf{I}(\mathbf{m}_1) \otimes \mathbf{I}(\mathbf{m}_2)$$

avec  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  des multisegments de la forme :

$$\mathbf{m}_1 = \sum_{i=1}^r [a_i, c_i]_{\rho_i}, \quad \mathbf{m}_2 = \sum_{i=1}^r [c_i + 1, b_i]_{\rho_i}, \quad a_i - 1 \leq c_i \leq b_i, \quad \deg(\mathbf{m}_2) = \deg(\mathbf{m}^{(1)}).$$

D'après le corollaire 8.5,  $\mathbf{I}(\mathbf{m}_2)$  contient une représentation résiduellement non dégénérée si et seulement si pour tout  $i$ , on a  $c_i = b_i - 1$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}^-$  et  $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}^{(1)}$ . Par hypothèse de récurrence, la représentation  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}^-}}(\mathbf{m}^-)$  est l'unique sous-quotient résiduellement non dégénéré de  $\mathbf{r}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}^-}}(\mathbf{I}(\mathbf{m}^-))$ . On remarque que :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{\mathbf{m}^-} &= (\deg(\mathbf{m}^{(t)}) \leq \deg(\mathbf{m}^{(t-1)}) \leq \dots \leq \deg(\mathbf{m}^{(2)})), \\ \text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}^-}}(\mathbf{m}^-) &= \text{St}(\mathbf{m}^{(t)}) \otimes \text{St}(\mathbf{m}^{(t-1)}) \otimes \dots \otimes \text{St}(\mathbf{m}^{(2)}). \end{aligned}$$

On déduit le résultat par transitivité des foncteurs de Jacquet.  $\square$

On renvoie à la définition 9.5 et au paragraphe 8.1.3 pour les définitions de  $\vdash$  et de la relations d'ordre  $\leq$  sur l'ensemble des partitions.

**Lemme 9.16.** — *Soient  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  deux multisegments tels que  $\mathbf{m} \vdash \mathbf{n}$ . Alors la partition  $\mu_{\mathbf{m}}$  est plus grande que la partition associée à la famille  $(\delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}), \mu_{\mathbf{n}})$ .*

*Démonstration.* — On veut montrer que, pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$(9.11) \quad \sum_{i=1}^k \deg(\mathbf{n}^{(i)}) \leq \sum_{i=1}^k \deg(\mathbf{m}^{(i)}) \quad \text{si } \delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \leq \deg(\mathbf{n}^{(k)}),$$

$$(9.12) \quad \delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{k-1} \deg(\mathbf{n}^{(i)}) \leq \sum_{i=1}^k \deg(\mathbf{m}^{(i)}) \quad \text{si } \delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) > \deg(\mathbf{n}^{(k)}).$$

La première inégalité découle du fait que, pour tout  $i \geq 1$ , on a  $\deg(\mathbf{m}^{(i)}) \geq \deg(\mathbf{n}^{(i)})$ . Prouvons la seconde inégalité par récurrence sur la longueur  $n$  de  $\mathbf{m}$ . Si  $k = 1$ , on a bien

$\deg(\mathbf{m}^{(1)}) \geq \delta(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ . Si  $k \geq 2$ , d'après la remarque 9.6, l'inégalité (9.11) équivaut à :

$$\sum_{i=2}^k \deg(\mathbf{m}^{(i)}) \geq \delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \sum_{i=2}^{k-1} \deg(\mathbf{n}^{(i)}),$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \deg(\mathbf{m}^{-(i)}) \geq \delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{k-2} \deg(\mathbf{n}^{-(i)}),$$

ce qui est vrai par hypothèse de récurrence.  $\square$

**Proposition 9.17.** — *La partition  $\mu_{\mathbf{m}}$  est le plus grand élément de  $\text{Part}(\mathbf{m})$ , et  $I(\mathbf{m})$  a un unique sous-quotient irréductible résiduellement  $\mu_{\mathbf{m}}$ -dégénéré. Il apparaît avec multiplicité 1 comme sous-quotient dans  $I(\mathbf{m})$ .*

**Remarque 9.18.** — L'ordre  $\trianglelefteq$  sur les partitions n'étant pas total, il n'est pas évident *a priori* que  $\text{Part}(\mathbf{m})$  possède un plus grand élément. Ainsi l'assertion de la proposition 9.17 est triple :

- l'ensemble  $\text{Part}(\mathbf{m})$  admet un plus grand élément (automatiquement unique) ;
- ce plus grand élément est  $\mu_{\mathbf{m}}$  (ce qui implique en particulier que  $\mu_{\mathbf{m}} \in \text{Part}(\mathbf{m})$ ) ;
- le module de Jacquet  $\mathbf{r}_{\mu_{\mathbf{m}}}(I(\mathbf{m}))$  possède un unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré avec multiplicité 1.

*Démonstration.* — La partition  $\mu_{\mathbf{m}}$  appartient à  $\text{Part}(\mathbf{m})$  d'après le lemme 9.15 et la définition 8.9. Ce lemme implique aussi que le module de Jacquet  $\mathbf{r}_{\mu_{\mathbf{m}}}(I(\mathbf{m}))$  a un unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré avec multiplicité 1. Soit maintenant  $\nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots)$  un élément de  $\text{Part}(\mathbf{m})$ . On va montrer, par récurrence sur  $m$ , que l'on a  $\nu \trianglelefteq \mu_{\mathbf{m}}$ .

D'après le lemme géométrique et la proposition 7.28, la représentation  $\mathbf{r}_{(m-\nu_1, \nu_1)}(I(\mathbf{m}))$  est soit nulle, soit composée de représentations de la forme :

$$I(\mathbf{m}_1) \otimes I(\mathbf{m}_2)$$

avec  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  des multisegments de la forme :

$$\mathbf{m}_1 = \sum_{i=1}^r [a_i, c_i]_{\rho_i}, \quad \mathbf{m}_2 = \sum_{i=1}^r [c_i + 1, b_i]_{\rho_i}, \quad a_i - 1 \leq c_i \leq b_i, \quad \deg(\mathbf{m}_2) = \nu_1.$$

D'après le corollaire 8.5, l'induite  $I(\mathbf{m}_2)$  contient une représentation résiduellement non dégénérée si et seulement si pour tout  $i$ , on a  $c_i = b_i$  ou  $c_i = b_i - 1$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{m} \vdash \mathbf{m}_1$ . Puisque  $\nu \in \Pi(\mathbf{m})$ , en écrivant  $\nu^- = (\nu_2 \geq \dots)$ , il existe (par transitivité du foncteur de Jacquet) un sous-quotient irréductible de  $\mathbf{r}_{(m-\nu_1, \nu_1)}(I(\mathbf{m}))$  de la forme  $I(\mathbf{m}_1) \otimes I(\mathbf{m}_2)$

où  $I(\mathfrak{m}_2)$  contient un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré et où  $I(\mathfrak{m}_1)$  contient un sous-quotient irréductible résiduellement  $\nu^-$ -dégénéré. La condition sur  $I(\mathfrak{m}_1)$  entraîne que  $\nu^- \trianglelefteq \mu_{\mathfrak{m}_1}$  par hypothèse de récurrence. Comme  $\nu_1 = \delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$ , on en déduit que  $\nu$  est plus petite que la partition associée à  $(\delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1), \mu_{\mathfrak{m}_1})$ . Finalement, on déduit du lemme 9.16 que  $\nu \trianglelefteq \mu_{\mathfrak{m}}$ .  $\square$

**9.4.2.** Étant donnés deux multisegments  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ , on va donner dans ce paragraphe des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$  et  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$  soient isomorphes.

**Lemme 9.19.** — *Soient  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$  deux multisegments supercuspidaux. Si les représentations  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$  et  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$  sont isomorphes, alors  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ .*

*Démonstration.* — L'hypothèse implique d'une part que  $\bar{\mu}_{\mathfrak{m}} = \bar{\mu}_{\mathfrak{m}'}$ , d'autre part que les représentations  $\text{St}(\mathfrak{m}^{(i)})$  et  $\text{St}(\mathfrak{m}'^{(i)})$  sont isomorphes pour tout  $i \geq 1$ . D'après la proposition 8.21, ceci entraîne que  $\mathfrak{m}^{(i)} = \mathfrak{m}'^{(i)}$  pour tout  $i \geq 1$ . Le lemme 9.4 implique alors que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ .  $\square$

**Lemme 9.20.** — *Pour tout multisegment  $\mathfrak{m}$ , on a  $\mu_{\mathfrak{m}} = \mu_{\mathfrak{m}_{\text{sc}}}$  et  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m}) \simeq \text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}_{\text{sc}}}}(\mathfrak{m}_{\text{sc}})$ .*

*Démonstration.* — Remarquons que, par additivité de l'application  $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m}^{(i)}$ , on a :

$$(9.13) \quad \mu_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = \mu_{\mathfrak{m}} + \mu_{\mathfrak{n}}$$

pour tous multisegments  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$ . D'après la proposition 8.10, il suffit de prouver le lemme lorsque  $\mathfrak{m}$  est une période, auquel cas le résultat est immédiat.  $\square$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 9.21.** — *Soient  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$  deux multisegments. Alors  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$  et  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathfrak{m}'}}(\mathfrak{m}')$  sont isomorphes si et seulement si  $\mathfrak{m}_{\text{sc}} = \mathfrak{m}'_{\text{sc}}$ .*

## 9.5. La représentation $Z(\mathfrak{m})$

Dans cette section, on associe à tout multisegment  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}$  une représentation irréductible  $Z(\mathfrak{m})$ .

**9.5.1.** La proposition 9.17 nous permet de donner la définition suivante.

**Définition 9.22.** — Soit  $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$  un multisegment. Il y a un unique sous-quotient irréductible de :

$$(9.14) \quad I(\mathfrak{m}) = Z(\Delta_1) \times \cdots \times Z(\Delta_r),$$



noté  $Z(\mathfrak{m})$ , qui soit résiduellement  $\mu_{\mathfrak{m}}$ -dégénéré (voir (9.8) et la définition 8.9). Il apparaît avec multiplicité 1 dans l'induite  $I(\mathfrak{m})$  et l'unique sous-quotient résiduellement non dégénéré de  $r_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(Z(\mathfrak{m}))$  est  $\text{St}_{\overline{\mu}_{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{m})$ .

Ceci découle de l'exactitude du foncteur de Jacquet et de la propriété de multiplicité 1 de la proposition 9.17.

**Remarque 9.23.** — D'après le corollaire 9.12, notre définition coïncide avec celle de Vignéras [53, V.9.2] dans le cas où  $D = F$ .

**Exemple 9.24.** — Si  $\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathbb{C})$  est un support cuspidal, alors  $Z(\mathfrak{t}) \simeq \text{St}(\mathfrak{t})$ .

**Proposition 9.25.** — Soient  $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$  des multisegments. Alors la représentation  $Z(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$  est un sous-quotient de  $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{n})$ .

*Démonstration.* — D'après le lemme 8.10 et (9.13), l'induite  $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{n})$  contient un sous-quotient  $\pi$  résiduellement  $\mu_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}$ -dégénéré. Comme  $Z(\mathfrak{m}) \times Z(\mathfrak{n})$  est un sous-quotient de  $I(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$ , la représentation  $\pi$  est aussi sous-quotient de  $I(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$ . Elle est donc isomorphe, par définition, à  $Z(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})$ .  $\square$

**9.5.2.** Soit un entier  $m \geq 1$ , soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$  et soit  $\kappa \otimes \sigma$  un type simple maximal contenu dans  $\rho$ . On forme l'homomorphisme  $\mathbf{S}$  et on rappelle que  $\Omega_\rho$  désigne la classe d'inertie de  $\rho$ . On a la caractérisation suivante de  $Z(\mathfrak{m})$  dans le cas où  $\text{supp}(\mathfrak{m}) \in \mathbb{N}(\Omega_\rho)$ .

**Proposition 9.26.** — Soit  $\mathfrak{m}$  un multisegment dont le support est dans  $\mathbb{N}(\Omega_\rho)$ . Alors  $Z(\mathfrak{m})$  est l'unique sous-quotient irréductible de  $I(\mathfrak{m})$  tel que :

$$\mathbf{S}(Z(\mathfrak{m})) \geq [z(\sigma, m^{-1}\mu'_{\mathfrak{m}})],$$

où  $\mu'_{\mathfrak{m}}$  est la partition conjuguée de  $\mu_{\mathfrak{m}}$ .

*Démonstration.* — On note  $n_i$  la longueur de  $\Delta_i$ , de sorte que la partition des  $n_i$  soit égale à  $m^{-1}\mu'_{\mathfrak{m}}$ . D'après les propositions 7.33 et 6.22, on a :

$$(9.15) \quad \mathbf{S}(I(\mathfrak{m})) = z(\sigma, n_1) \times \cdots \times z(\sigma, n_r).$$

D'après le théorème A.7, la représentation  $z(\sigma, m^{-1}\mu'_{\mathfrak{m}})$  est l'unique sous-quotient irréductible  $\mu_{\mathfrak{m}}$ -dégénéré de (9.15) et il y apparaît avec multiplicité 1.  $\square$

### 9.6. Classification des représentations irréductibles

Dans ce paragraphe, on étudie l'application :

$$Z : \text{Mult} \rightarrow \text{Irr}.$$

On prouve qu'elle est surjective et que sa restriction à  $\text{Mult}^{\text{sc}}$  est injective. Puis on étudie ses fibres et on calcule les supports cuspidal et supercuspidal de  $Z(\mathbf{m})$  en fonction de  $\mathbf{m}$ .

**9.6.1.** On montre d'abord l'injectivité de la restriction de  $Z$  à  $\text{Mult}^{\text{sc}}$ .

**Théorème 9.27.** — *Soient  $\mathbf{m}, \mathbf{m}'$  deux multisegments supercuspidaux. Les représentations  $Z(\mathbf{m})$  et  $Z(\mathbf{m}')$  sont isomorphes si et seulement si  $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ .*

*Démonstration.* — Comme  $\mu_{\mathbf{m}}$  est l'unique plus grande partition pour laquelle  $Z(\mathbf{m})$  soit résiduellement dégénérée et comme  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$  est l'unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré de  $\mathbf{r}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(Z(\mathbf{m}))$ , l'hypothèse implique d'une part que  $\mu_{\mathbf{m}} = \mu_{\mathbf{m}'}$ , et d'autre part que  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$  et  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}'}}(\mathbf{m}')$  sont isomorphes. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 9.19.  $\square$

Si  $\mathbf{m}$  est un multisegment supercuspidal, alors le support supercuspidal de  $Z(\mathbf{m})$  est égal au support de  $\mathbf{m}$ . Quel est alors son support cuspidal ? La réponse à cette question est donnée dans la proposition 9.30.

**Lemme 9.28.** — *Soit  $\mathbf{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}$ . On suppose qu'il existe une représentation irréductible supercuspidale  $\rho$  telle que  $\text{supp}(\mathbf{m}) \in \mathbb{N}(Z_{\rho})$ . S'il existe  $r \geq 0$  et  $k \geq 1$  tels que :*

$$\text{cusp}(Z(\mathbf{m})) = k \cdot \text{St}_r(\rho),$$

*alors  $\mathbf{m}$  n'est pas apériodique.*

*Démonstration.* — Comme  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$  est un sous-quotient irréductible de  $\mathbf{r}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(Z(\mathbf{m}))$ , il y a une partition  $\tau = (k_1 \geq k_2 \geq \dots)$  de  $k$  telle que, pour tout  $i \geq 1$ , on ait :

$$\text{St}(\mathbf{m}^{(i)}) = \text{St}(k_i \cdot \text{St}_r(\rho)).$$

Notons  $\tau' = (k'_1 \geq k'_2 \geq \dots \geq k'_s)$  la partition conjuguée de  $\tau$  et posons :

$$\mathbf{m}' = [1, k'_1]_{\text{St}_r(\rho)} + [1, k'_2]_{\text{St}_r(\rho)} + \dots + [1, k'_s]_{\text{St}_r(\rho)}.$$

Les partitions  $\mu_{\mathbf{m}'}$  et  $\mu_{\mathbf{m}}$  sont égales et les représentations  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}'}}(\mathbf{m}')$  et  $\text{St}_{\bar{\mu}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$  sont isomorphes. On déduit de la proposition 9.21 que  $\mathbf{m} = \mathbf{m}'_{\text{sc}}$ . Comme  $\mathbf{m}'_{\text{sc}} \neq \mathbf{m}'$ , on en déduit que  $\mathbf{m}$  n'est pas apériodique.  $\square$

**9.6.2.** Le résultat suivant donne une classification des représentations irréductibles en termes de multisegments. On note  $\mathbb{Z}_F$  l'ensemble des caractères non ramifiés de  $F^\times$  de la forme  $x \mapsto |x|_F^i$  avec  $i \in \mathbb{Z}$ . Pour tout entier  $m \geq 0$ , on note  $\text{Mult}_m^{\text{ap}}(\mathbb{Z}_F)$  l'ensemble des multisegments aperiodiques de degré  $m$  et de support contenu dans  $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_F)$ , et  $\text{Mult}_m^{\text{sc}}$  l'ensemble des multisegments supercuspidaux de degré  $m$ .

**Proposition 9.29.** — *Soit  $m \geq 0$  un entier.*

(1) *L'image de  $\text{Mult}_m^{\text{ap}}(\mathbb{Z}_F)$  par  $\mathfrak{m} \mapsto Z(\mathfrak{m})$  est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de  $G_m$  dont le support cuspidal est contenu dans  $\mathbb{N}(\mathbb{Z}_F)$ .*

(2) *L'application :*

$$(9.16) \quad \begin{array}{ccc} \text{Mult}_m^{\text{sc}} & \rightarrow & \text{Irr}(G_m) \\ \mathfrak{m} & \mapsto & Z(\mathfrak{m}) \end{array}$$

*est bijective et, pour tout  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}_m^{\text{sc}}$ , on a  $\text{scusp}(Z(\mathfrak{m})) = \text{supp}(\mathfrak{m})$ .*

(3) *Pour tout multisegment  $\mathfrak{m}$  de degré  $m$ , on a  $Z(\mathfrak{m}) \simeq Z(\mathfrak{m}_{\text{sc}}) \simeq Z(\mathfrak{m}_{\text{ap}})$ .*

*Démonstration.* — On va prouver ce résultat par récurrence sur  $m$ , le cas  $m = 1$  étant trivial. Supposons donc que la proposition soit vraie pour tout  $i < m$  et prouvons-la au rang  $m$ .

On prouve d'abord l'assertion (1). Soit  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}_m^{\text{ap}}$ , et supposons que  $Z(\mathfrak{m})$  n'ait pas le support cuspidal attendu, c'est-à-dire qu'il existe des entiers  $1 \leq i \leq m$  et  $r \geq 0$ ,  $t \geq 1$  et des représentations irréductibles  $\pi_1 \in \text{Irr}(G_i)$  et  $\pi_2 \in \text{Irr}(G_{m-i})$  tels que :

$$Z(\mathfrak{m}) \simeq \pi_1 \times \pi_2, \quad \text{cusp}(\pi_1) = t \cdot \text{St}_r(1_{F^\times}).$$

D'après le lemme 9.28, on a  $i < m$ . Le résultat étant vrai pour  $i$  et  $m - i$ , il existe d'après l'assertion (2) des multisegments supercuspidaux  $\mathfrak{m}_1$  et  $\mathfrak{m}_2$  tels qu'on ait  $\pi_1 = Z(\mathfrak{m}_1)$  et  $\pi_2 = Z(\mathfrak{m}_2)$ . D'après la proposition 9.25 et le théorème 9.27, on a  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ . D'après le lemme 9.28, le multisegment  $\mathfrak{m}_1$  n'est pas aperiodique, donc  $\mathfrak{m}$  non plus : contradiction. Soit maintenant  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_F)$  de degré  $m$ . On a une application injective :

$$(9.17) \quad Z : \text{Mult}^{\text{ap}}(\mathfrak{s}) \rightarrow \text{Irr}(\mathfrak{s})^*$$

(rappelons que  $\text{Irr}(\mathfrak{s})^*$  désigne l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal  $\mathfrak{s}$ ) et par le corollaire B.12 ces deux ensembles finis ont même cardinal, ce qui prouve la surjectivité de cette application.

On prouve maintenant l'assertion (2). Il suffit de prouver que, pour tout  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathbb{S})$  de degré  $m$ , l'application (9.16) induit une bijection de  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$  dans  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$ . Soit donc un support supercuspidal  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathbb{S})$ . La restriction de  $Z$  à  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$  est à valeurs dans  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$

d'après la définition 9.22, et cette restriction est injective d'après le théorème 9.27. Il reste donc à montrer donc que les ensembles  $\text{Mult}(\mathfrak{s})$  et  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$  ont le même cardinal. D'après le théorème 8.20 et la proposition 7.5, on peut se ramener au cas où  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$ , avec  $\rho$  une représentation irréductible supercuspidale. Grâce à l'unicité du support supercuspidal (voir le théorème 8.17), on a une égalité :

$$(9.18) \quad \text{Irr}(\mathfrak{s}) = \prod_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C}) \\ \mathfrak{t}_{\text{sc}} = \mathfrak{s}}} \text{Irr}(\mathfrak{t})^*.$$

D'après le lemme 9.9, on a une bijection :

$$\text{Mult}(\mathfrak{s}) \xrightarrow{\simeq} \prod_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C}) \\ \mathfrak{t}_{\text{sc}} = \mathfrak{s}}} \text{Mult}(\mathfrak{t})^{\text{ap}}.$$

Il suffit donc de prouver que, pour tout  $\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$  tel que  $\mathfrak{t}_{\text{sc}} = \mathfrak{s}$ , on a :

$$(9.19) \quad |\text{Mult}(\mathfrak{t})^{\text{ap}}| = |\text{Irr}(\mathfrak{t})^*|,$$

où  $|X|$  désigne le cardinal d'un ensemble fini  $X$ . D'après le théorème 7.14, chaque  $\mathfrak{t} \in \mathbb{N}(\mathcal{C})$  tel que  $\mathfrak{t}_{\text{sc}} = \mathfrak{s}$  se décompose sous la forme :

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{-1} + \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{t}_1 + \cdots + \mathfrak{t}_r, \quad r \geq -1,$$

où  $\mathfrak{t}_{-1} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$  et  $\mathfrak{t}_k \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_{\text{St}_k(\rho)})$  pour chaque  $k \geq 0$ , où  $\text{St}_k(\rho)$  désigne la représentation cuspidale  $\text{St}(\rho, m(\rho)\ell^k)$ . D'après le théorème 5.18, on a une bijection :

$$\text{Irr}(\mathfrak{t})^* \rightarrow \text{Irr}(\mathfrak{t}_{-1})^* \times \text{Irr}(\mathfrak{t}_0)^* \times \cdots \times \text{Irr}(\mathfrak{t}_r)^*,$$

et on a une décomposition analogue :

$$\text{Mult}(\mathfrak{t})^{\text{ap}} = \text{Mult}(\mathfrak{t}_{-1})^{\text{ap}} \times \text{Mult}(\mathfrak{t}_0)^{\text{ap}} \times \cdots \times \text{Mult}(\mathfrak{t}_r)^{\text{ap}},$$

de sorte qu'on peut supposer que  $\mathfrak{t}$  est égal à un seul  $\mathfrak{t}_k$ , disons  $k = -1$  pour simplifier les notations. Il correspond à  $\mathfrak{t}$  un support cuspidal  $\mathfrak{t}' \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_{F'})$  où  $F'$  est une extension finie de  $F$  associée à la représentation cuspidale  $\rho$ , et une bijection :

$$\Phi_{\mathfrak{t}} : \text{Irr}(\mathfrak{t})^* \rightarrow \text{Irr}(\mathfrak{t}')^*$$

en vertu de la proposition 5.31. On a une bijection analogue :

$$\text{Mult}(\mathfrak{t})^{\text{ap}} \rightarrow \text{Mult}(\mathfrak{t}')^{\text{ap}}.$$

On est donc ramené à prouver (9.19) dans le cas où  $\rho$  est le caractère trivial de  $F'^{\times}$ . On conclut grâce à la partie (1).

On prouve finalement l'assertion (3). Soit  $\mathbf{m}$  un multisegment de degré  $m$ . D'après la partie (2), il existe  $\mathbf{m}' \in \text{Mult}_m^{\text{sc}}$  tel que  $Z(\mathbf{m}') \simeq Z(\mathbf{m})$ , ce qui implique que  $\mu_{\mathbf{m}}$  et  $\mu_{\mathbf{m}'}$  sont égales et que  $\text{St}_{\bar{\rho}_{\mathbf{m}}}(\mathbf{m})$  et  $\text{St}_{\bar{\rho}_{\mathbf{m}'}}(\mathbf{m}')$  sont isomorphes. Le résultat découle alors des lemmes 9.19 et 9.20.  $\square$

**9.6.3.** La proposition suivante nous permet de calculer le support cuspidal de  $Z(\mathbf{m})$  en fonction de  $\mathbf{m}$ .

**Proposition 9.30.** — *Pour tout multisegment  $\mathbf{m}$ , on a  $\text{cusp}(Z(\mathbf{m})) = \text{supp}(\mathbf{m}_{\text{ap}})$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 9.29(3), on peut supposer que  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\text{ap}}$ . On va montrer le lemme suivant par récurrence sur la longueur de  $\mathbf{m}$ . On note  $\text{Mult}_{(n)}^{\text{ap}}$  l'ensemble des multisegments apériodiques de longueur  $n$ .

**Lemme 9.31.** — *L'application  $\mathbf{m} \mapsto Z(\mathbf{m})$  induit une bijection entre  $\text{Mult}_{(n)}^{\text{ap}}$  et les classes de représentations irréductibles de support cuspidal de longueur  $n$  et, pour tout multisegment  $\mathbf{m} \in \text{Mult}_{(n)}^{\text{ap}}$ , on a  $\text{cusp}(Z(\mathbf{m})) = \text{supp}(\mathbf{m})$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 9.29 et le paragraphe 9.2, l'application :

$$Z : \text{Mult}^{\text{ap}} \rightarrow \text{Irr}$$

est une bijection. Si  $n = 1$ , le résultat est trivial. Supposons donc que  $n \geq 2$  et notons  $\mathfrak{t} = \text{supp}(\mathbf{m})$ . Soient  $\rho_1, \dots, \rho_r$  des représentations irréductibles cuspidales telles que  $Z(\mathbf{m})$  soit un quotient de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ . Du lemme géométrique on déduit que  $r \leq n$  et, si  $r = n$ , on a :

$$\mathfrak{t} = [\rho_1] + \dots + [\rho_n],$$

c'est-à-dire que  $\text{cusp}(Z(\mathbf{m})) = \text{supp}(\mathbf{m})$ . Supposons donc que  $r \leq n - 1$ . Par hypothèse de récurrence, il existe un multisegment apériodique  $\mathbf{m}'$  de longueur  $r$  tel que  $Z(\mathbf{m}') = Z(\mathbf{m})$ , ce qui donne une contradiction.  $\square$

Ceci met fin à la preuve de la proposition 9.30.  $\square$

On résume ici les résultats obtenus dans cette section.

**Théorème 9.32.** — (1) *L'application  $Z : \text{Mult} \rightarrow \text{Irr}$  est surjective.*

(2) *Étant donnés  $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \text{Mult}$ , on a  $Z(\mathbf{m}) \simeq Z(\mathbf{m}')$  si et seulement si  $\mathbf{m}_{\text{sc}} = \mathbf{m}'_{\text{sc}}$ .*

(3) *Pour tout  $\mathbf{m} \in \text{Mult}$ , on a :*

$$\text{scusp}(Z(\mathbf{m})) = \text{supp}(\mathbf{m}_{\text{sc}}) \quad \text{et} \quad \text{cusp}(Z(\mathbf{m})) = \text{supp}(\mathbf{m}_{\text{ap}}).$$

### 9.7. Réduction modulo $\ell$

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . Dans ce paragraphe, on montre les théorèmes suivants.

**Théorème 9.33.** — Soit  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G_m$ . On suppose que  $\rho = \mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible.

(1) Soient  $a \leq b$  des entiers. Alors la  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation  $Z([a, b]_{\tilde{\rho}})$  est entière et :

$$\mathbf{r}_\ell(Z([a, b]_{\tilde{\rho}})) = Z([a, b]_\rho).$$

(2) Soit un multisegment :

$$\tilde{\mathbf{m}} = [a_1, b_1]_{\tilde{\rho}} + \cdots + [a_r, b_r]_{\tilde{\rho}}$$

et posons :

$$\mathbf{m} = [a_1, b_1]_\rho + \cdots + [a_r, b_r]_\rho.$$

Alors  $Z(\tilde{\mathbf{m}})$  est une représentation entière et  $Z(\mathbf{m})$  est un facteur irréductible de  $\mathbf{r}_\ell(Z(\tilde{\mathbf{m}}))$ .

*Démonstration.* — On montre d'abord (1). On note  $\Delta = [a, b]_\rho$  et  $\tilde{\Delta} = [a, b]_{\tilde{\rho}}$  et on pose  $n = b - a + 1$ . On fixe un type simple maximal  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$  contenu dans  $\rho$ , et on forme l'homomorphisme  $\mathbf{S}$ . Soit  $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma}$  un type simple maximal contenu dans  $\tilde{\rho}$  et relevant  $\kappa \otimes \sigma$ . Il correspond au choix de  $\tilde{\kappa}$  une  $\beta$ -extension  $\tilde{\kappa}_{\max}$  relevant  $\kappa_{\max}$  et on forme le foncteur  $\tilde{\mathbf{K}}$  comme dans le lemme 6.14. Remarquons, dans un premier temps, que  $\mathbf{r}_\ell(Z(\Delta))$  ne contient pas de représentation cuspidale. En effet, la représentation  $\mathbf{S}(\Pi(\tilde{\Delta}))$  contient, par la proposition 7.6 et le paragraphe A.2.3, la représentation  $\text{st}(\tilde{\sigma}, n)$  avec multiplicité 1. Comme  $\mathbf{S}(L(\tilde{\Delta}))$  contient  $\text{st}(\tilde{\sigma}, n)$  (voir la proposition 7.33(3)), la réduction  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{S}(L(\tilde{\Delta})))$  contient  $\text{st}(\tilde{\sigma}, n)$ . Comme  $Z(\tilde{\Delta}) \neq L(\tilde{\Delta})$  dès que  $n \neq 1$ , la réduction  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{S}(Z(\tilde{\Delta})))$  ne contient pas de représentation cuspidale. On déduit que  $\mathbf{r}_\ell(Z(\tilde{\Delta}))$  ne contient pas de représentation cuspidale.

Par récurrence, on peut supposer que pour tout sous-groupe parabolique propre  $P = P_\alpha$ , la réduction  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{r}_\alpha(Z(\tilde{\Delta})))$  est nulle ou irréductible. Si  $\mathbf{r}_\ell(Z(\tilde{\Delta}))$  n'était pas irréductible, comme elle ne contient pas de représentation cuspidale, il existerait un sous-groupe parabolique propre  $P = P_\alpha$  tel que  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{r}_\alpha(Z(\tilde{\Delta})))$  soit de longueur au plus 2, contradiction.

Montrons maintenant (2). Compte tenu de ce qui précède et de 1.3.4, on a l'égalité  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{I}(\tilde{\mathbf{m}})) = [\mathbf{I}(\mathbf{m})]$ . Comme le foncteur de Jacquet commute aussi à la réduction modulo  $\ell$ , et que dans le cas fini la réduction modulo  $\ell$  d'une représentation non dégénérée contient une représentation non dégénérée, le module de Jacquet :

$$\mathbf{r}_{\mu_{\mathbf{m}}}(\mathbf{r}_\ell(Z(\tilde{\mathbf{m}})))$$

contient une représentation non dégénérée, et donc, par définition de  $Z(\mathfrak{m})$ , on a bien le résultat annoncé.  $\square$

**Théorème 9.34.** — *Pour tout  $m \geq 1$ , l'homomorphisme de réduction :*

$$(9.20) \quad \mathbf{r}_\ell : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_m)^{\text{ent}} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{F}_\ell}(G_m)$$

*est surjectif.*

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathcal{S}_{\mathbb{F}_\ell})$  un support supercuspidal et notons  $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_\ell}(G_m, \mathfrak{s})$  le sous- $\mathbb{Z}$ -module de  $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_\ell}(G_m)$  engendré par  $\text{Irr}(\mathfrak{s})$ .

**Lemme 9.35.** — *L'ensemble des représentations de la forme  $[I(\mathfrak{m})]$ , avec  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$ , est une base de  $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_\ell}(G_m, \mathfrak{s})$ .*

*Démonstration.* — D'après le théorème 9.32, l'ensemble des  $[Z(\mathfrak{m})]$  avec  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$  est une base de  $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_\ell}(G_m, \mathfrak{s})$ . Il suffit donc de prouver que l'ensemble fini :

$$\{[I(\mathfrak{m})] : \mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})\}$$

est une partie libre. On peut supposer que  $\text{supp}(\mathfrak{s}) \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_\rho)$  avec  $\rho$  une représentation supercuspidale. Soient  $a_{\mathfrak{m}} \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$  non tous nuls et tels que :

$$\sum_{\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})} a_{\mathfrak{m}} [I(\mathfrak{m})] = 0.$$

Soit  $\mathfrak{m}_0 \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$  un élément tel que  $a_{\mathfrak{m}_0} \neq 0$  et tel que  $\mu_{\mathfrak{m}_0}$  soit maximal. D'après la proposition 9.17, le théorème 9.27 et la maximalité de  $\mu_{\mathfrak{m}_0}$ , la représentation  $Z(\mathfrak{m}_0)$  n'apparaît pas dans  $I(\mathfrak{m})$  pour  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$  avec  $a_{\mathfrak{m}} \neq 0$  et  $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$ . Donc  $a_{\mathfrak{m}_0} = 0$ , contradiction.  $\square$

Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ -représentation irréductible de  $G_m$  et soit  $\mathfrak{s}$  son support supercuspidal. D'après le lemme 9.35, il existe des  $a_{\mathfrak{m}} \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$  tels que :

$$\pi = \sum_{\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})} a_{\mathfrak{m}} [I(\mathfrak{m})].$$

Par le théorème 9.33(1) et le théorème 4.24, pour tout  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$ , il existe  $\tilde{\mathfrak{m}} \in \text{Mult}$  tel que  $\mathbf{r}_\ell [I(\tilde{\mathfrak{m}})] = [I(\mathfrak{m})]$ . On en déduit que :

$$\pi = \mathbf{r}_\ell \left( \sum_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}} [I(\tilde{\mathfrak{m}})] \right),$$

où la somme porte sur les  $\mathfrak{m} \in \text{Mult}^{\text{sc}}(\mathfrak{s})$ , et donc (9.20) est surjectif.  $\square$

**Remarque 9.36.** — (1) En général, la réduction modulo  $\ell$  d'une représentation de la forme  $L(\tilde{\Delta})$  n'est pas irréductible. Par exemple, si  $\tilde{\rho}$  est la représentation triviale de  $F^\times$ , si  $\tilde{\Delta} = [0, 1]_{\tilde{\rho}}$  et si  $q$  est d'ordre 2 dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ , la représentation  $L(\tilde{\Delta})$  contient, d'après [54], un caractère et une représentation cuspidale non supercuspidale.

(2) Si  $n(\Delta) \leq m(\rho) - 1$ , alors  $\mathbf{r}_\ell(L(\tilde{\Delta})) = L(\Delta)$  (voir [40]).

(3) En général, on ne peut pas relever une représentation de la forme  $L(\Delta)$ . Par exemple, si  $\rho$  est la représentation triviale de  $F^\times$ , si  $\Delta = [0, 2]_\rho$  et si  $q$  est d'ordre 3 dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ , la représentation  $L(\Delta)$  ne peut pas être relevée.

(4) Si  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  n'est pas irréductible, alors  $\mathbf{r}_\ell(Z(\tilde{\Delta}))$  n'est pas irréductible. Par exemple, si  $\tilde{\rho}$  est une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation cuspidale entière telle que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = [\rho] + [\rho']$  avec  $\rho$  et  $\rho'$  des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations cuspidales irréductibles non isomorphes, on a :

$$\mathbf{r}_\ell(Z([0, 1]_{\tilde{\rho}})) = Z([0, 1]_\rho) + Z([0, 1]_{\rho'}) + (\rho \times \rho').$$

(5) Si  $\rho$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation cuspidale telle qu'il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation cuspidale irréductible  $\tilde{\rho}$  qui relève  $\rho$ , alors  $Z([a, b]_\rho)$  peut être aussi caractérisé comme la réduction modulo  $\ell$  de  $Z([a, b]_{\tilde{\rho}})$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $\tilde{\rho}$  (voir [23, Proposition 2.2.3]).

## Appendice A

### Représentations modulaires de $GL_n$ sur un corps fini

Sont réunis dans cet appendice les résultats de la théorie des représentations modulaires de  $GL_n$  sur un corps fini dont nous avons besoin. On fixe un corps fini  $k$  de caractéristique  $p$  et de cardinal  $q$ . La référence principale est l'article de James [35] (voir aussi [28, 34]).

#### A.1. Préliminaires

**A.1.1.** Pour tout  $m \geq 1$ , on note  $\bar{G}_m = GL_m(k)$  le groupe des matrices inversibles de taille  $m \times m$  à coefficients dans  $k$ . On convient que  $\bar{G}_0$  désigne le groupe trivial.

Étant donné un entier  $m \geq 0$ , on note  $\text{Irr}_R(\bar{G}_m)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $R$ -représentations irréductibles de  $\bar{G}_m$  et  $\mathcal{G}_R(\bar{G}_m)$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}_R(\bar{G}_m)$ . On note  $\mathcal{C}_R(\bar{G}_m)$  et  $\mathcal{S}_R(\bar{G}_m)$  les sous-ensembles de  $\text{Irr}_R(\bar{G}_m)$  constitués respectivement des classes de  $R$ -représentations irréductibles cuspidales et supercuspidales de  $\bar{G}_m$ .

Si  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  est une famille d'entiers positifs ou nuls dont la somme est égale à  $m$ , il lui correspond le sous-groupe de Levi standard  $\bar{M}_\alpha$  de  $\bar{G}_m$  constitué des matrices diagonales par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, que l'on identifie naturellement



au produit  $\bar{G}_{m_1} \times \cdots \times \bar{G}_{m_r}$ . On note  $\bar{P}_\alpha$  le sous-groupe parabolique de  $\bar{G}_m$  de facteur de Levi  $\bar{M}_\alpha$  formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, et on note  $\bar{U}_\alpha$  son radical unipotent. On note  $\bar{t}_\alpha$  le foncteur d'induction parabolique de  $\bar{M}_\alpha$  dans  $\bar{G}_m$  le long de  $\bar{P}_\alpha$ . Si, pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on a une  $R$ -représentation  $\pi_i$  de  $\bar{G}_{m_i}$ , on notera :

$$(A.1) \quad \pi_1 \times \cdots \times \pi_r = \bar{t}_\alpha(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r).$$

On pose :

$$\bar{\text{Irr}}_R = \coprod_{m \geq 0} \text{Irr}_R(\bar{G}_m), \quad \bar{\mathcal{C}}_R = \coprod_{m \geq 0} \mathcal{C}_R(\bar{G}_m), \quad \bar{\mathcal{S}}_R = \coprod_{m \geq 0} \mathcal{S}_R(\bar{G}_m), \quad \bar{\mathcal{G}}_R = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{G}_R(\bar{G}_m).$$

Si  $\pi$  est une  $R$ -représentation de longueur finie de  $\bar{G}_m$  pour un entier  $m \geq 0$ , on note  $[\pi]$  son image dans  $\bar{\mathcal{G}}_R$  et  $\deg(\pi) = m$  son degré. L'application  $\deg$  et la formule (A.1) font de  $\bar{\mathcal{G}}_R$  une  $\mathbb{Z}$ -algèbre associative commutative graduée.

**Remarque A.1.** — La commutativité de cette algèbre est par exemple une conséquence de [33], où Howlett-Lehrer prouvent que l'induction parabolique ne dépend pas du sous-groupe parabolique quand le facteur de Levi est fixé.

Comme dans le cas  $p$ -adique (paragraphe 1.4.3), les foncteurs de restriction parabolique définissent une comultiplication faisant de  $\bar{\mathcal{G}}_R$  une  $\mathbb{Z}$ -bigèbre.

**A.1.2.** Toute  $R$ -représentation irréductible a un support cuspidal et un support supercuspidal, c'est-à-dire qu'on a une application surjective à fibres finies :

$$(A.2) \quad \text{cusp} : \bar{\text{Irr}}_R \rightarrow \mathbb{N}(\bar{\mathcal{C}}_R)$$

telle que, étant données des représentations irréductibles cuspidales  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , on ait :

$$\text{cusp}^{-1}([\sigma_1] + \cdots + [\sigma_n]) = \{\text{classes de quotients irréductibles de } \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n\}$$

et on a une application surjective à fibres finies :

$$(A.3) \quad \text{scusp} : \bar{\text{Irr}}_R \rightarrow \mathbb{N}(\bar{\mathcal{S}}_R)$$

telle que, étant données des représentations irréductibles supercuspidales  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , on ait :

$$\text{scusp}^{-1}([\sigma_1] + \cdots + [\sigma_n]) = \{\text{classes de sous-quotients irréductibles de } \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n\}.$$

**A.1.3.** Soit un entier  $m \geq 1$  et soit  $\bar{G} = \bar{G}_m$ . On note  $\bar{U} = \bar{U}_{(1, \dots, 1)}$  le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures de  $\bar{G}$ . On fixe un  $R$ -caractère non trivial  $\psi$  de  $k$ . Pour ce paragraphe, on renvoie plus spécifiquement à [52, III.1-2]. On renvoie aussi au paragraphe 8.1.3 pour les définitions concernant les partitions.

Pour toute partition  $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r)$  de  $m$ , on note  $\psi_\mu$  le caractère de  $\bar{U}$  défini par :

$$(A.4) \quad \psi_\mu : u \mapsto \psi \left( \sum_{i \in J_\mu} u_{i, i+1} \right),$$

la somme portant sur l'ensemble  $J_\mu$  de tous les entiers  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  qui ne sont de la forme  $\mu_1 + \dots + \mu_k$  pour aucun  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Étant donnée une représentation de longueur finie  $\pi$  de  $\bar{G}$ , on note  $\mathbf{\Pi}(\pi)$  l'ensemble des partitions  $\mu$  de  $m$  telles que l'espace  $\text{Hom}_{\bar{U}}(\pi, \psi_\mu)$  soit non nul. C'est un ensemble fini non vide.

**Définition A.2.** — On dit que  $\pi$  est  $\mu$ -dégénérée si  $\mu \in \mathbf{\Pi}(\pi)$ .

**Remarque A.3.** — Lorsque  $\mu = (m)$ , le caractère  $\psi_{(m)}$  est non dégénéré et on retrouve la notion classique de modèle de Whittaker. Une représentation irréductible  $\pi$  de  $\bar{G}$  est dite *non dégénérée* si elle est  $(m)$ -dégénérée, c'est-à-dire si  $\text{Hom}_{\bar{U}}(\pi, \psi_{(m)})$  est non nul.

Le résultat suivant est une conséquence de [52, III.1.10].

**Proposition A.4.** — Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  des représentations irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) L'induite :

$$\sigma_1 \times \dots \times \sigma_r$$

possède un sous-quotient irréductible non dégénéré.

(2) Pour tout  $1 \leq i \leq r$ , la représentation  $\sigma_i$  est non dégénérée.

Si ces conditions sont satisfaites, ce sous-quotient irréductible non dégénéré est unique et sa multiplicité dans l'induite est 1.

## A.2. Classification de James

Soient  $m, n \geq 1$  des entiers et soit  $\sigma$  une représentation irréductible cuspidale de  $\bar{G}_m$ . On décrit dans ce paragraphe la classification par James [35] des représentations irréductibles de  $\bar{G} = \bar{G}_{mn}$  isomorphes à un sous-quotient de  $\sigma \times \dots \times \sigma$  en fonction des partitions de  $n$ .

**Définition A.5.** — On note  $m(\sigma)$  le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que :

$$(A.5) \quad 1 + q^m + \dots + q^{m(k-1)} = 0$$

dans  $R$ .

Pour les généralités sur les partitions, on renvoie au paragraphe 8.1.3.

**A.2.1.** On note  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\sigma, n)$  la  $R$ -algèbre des endomorphismes de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$ , qui est une algèbre de Hecke de type  $A_{n-1}$ . Cette représentation induite est quasi-projective de type fini (et même presque-projective au sens de Dipper [25]), de sorte qu'on a une bijection naturelle entre les classes de représentations irréductibles isomorphes à un quotient de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$  et les classes de  $\mathcal{H}$ -modules irréductibles.

**Remarque A.6.** — Si  $q^m$  n'est pas congru à 1 modulo  $\ell$ , alors  $\sigma$  est une représentation projective (voir [52, III.2.9]).

D'après [35, 6], il existe une unique sous-représentation irréductible de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$ , notée :

$$(A.6) \quad z(\sigma, n),$$

dont le  $\mathcal{H}$ -module associé soit le caractère trivial de  $\mathcal{H}$ .

**A.2.2.** Soit  $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r)$  une partition de  $n$ . On forme l'induite :

$$i(\sigma, \mu) = z(\sigma, \mu_1) \times \cdots \times z(\sigma, \mu_r).$$

On a le théorème suivant.

**Théorème A.7.** — (1) La représentation  $i(\sigma, \mu)$  admet un unique sous-quotient irréductible :

$$z(\sigma, \mu)$$

dégénéré relativement à la partition  $m\mu' = (m\mu'_1 \geq m\mu'_2 \geq \dots)$ .

(2) Les sous-quotients irréductibles de  $i(\sigma, \mu)$  sont tous de la forme  $z(\sigma, \nu)$  avec  $\nu \geq \mu$ , et  $z(\sigma, \mu)$  apparaît dans  $i(\sigma, \mu)$  avec multiplicité 1.

(3) L'application :

$$\mu \mapsto z(\sigma, \mu)$$

induit une bijection entre l'ensemble des partitions de  $n$  et celui des classes de représentations irréductibles de  $\bar{G}$  qui sont isomorphes à un sous-quotient de  $\sigma \times \cdots \times \sigma$ .

**Remarque A.8.** — (1) La représentation  $z(\sigma, \mu)$  est isomorphe à un quotient de l'induite  $\sigma \times \cdots \times \sigma$  si et seulement si  $\mu$  est  $m(\sigma)$ -régulière, c'est-à-dire si aucun  $\mu_i$  n'est répété plus de  $m(\sigma)$  fois, ou encore si  $\mu'_j \leq m(\sigma) - 1$  pour tout  $j$ .

(2) Si  $\sigma$  est supercuspidale, alors  $\mu \mapsto [z(\sigma, \mu)]$  est une bijection entre l'ensemble des partitions de  $n$  et l'ensemble  $\overline{\text{Irr}}(n \cdot [\sigma])$  des classes de représentations irréductibles de  $\bar{G}$  de support supercuspidal  $n \cdot [\sigma] = [\sigma] + \cdots + [\sigma]$ .

**A.2.3.** La représentation :

$$(A.7) \quad \text{st}(\sigma, n) = z(\sigma, (1, \dots, 1))$$

est l'unique sous-quotient non dégénéré de l'induite  $\sigma \times \cdots \times \sigma$ , dans laquelle elle est de multiplicité 1. Le résultat suivant fournit une classification de  $\bar{\mathcal{C}}$  en fonction de  $\bar{\mathcal{S}}$ .

**Proposition A.9.** — *On a les propriétés suivantes :*

(1)  $\text{st}(\sigma, n)$  est cuspidale si et seulement si  $n = 1$  ou  $n = m(\sigma)\ell^r$ , avec  $r \geq 0$ .

(2) L'application :

$$(\sigma, r) \mapsto \text{st}_r(\sigma) = \text{st}(\sigma, m(\sigma)\ell^r)$$

définit une bijection entre  $\bar{\mathcal{S}} \times \mathbb{N}$  et l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales non supercuspidales.

### A.3. Réduction modulo $\ell$

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ , et soit  $e$  l'ordre de  $q$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ . On fixe une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$  et, pour  $m \geq 1$ , on note  $k_m$  l'extension de  $k$  de degré  $m$  contenue dans  $\bar{k}$ . Si  $R$  est  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  ou  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , on note  $X_m(R)$  l'ensemble des  $R$ -caractères de  $k_m^\times$  dont l'orbite sous  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  est de cardinal  $m$ .

**A.3.1.** D'après Green [31], on a une correspondance surjective :

$$(A.8) \quad \tilde{\chi} \mapsto \sigma(\tilde{\chi})$$

de  $X_m(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  vers  $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\bar{G}_m)$  et l'ensemble des antécédents de  $\sigma(\tilde{\chi})$  par (A.8) est l'orbite de  $\tilde{\chi}$  sous  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ . D'après James [35], on a le résultat suivant.

**Théorème A.10.** — *Soit un entier  $m \geq 1$ .*

(1) *Pour tout  $\tilde{\chi} \in X_m(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ , la représentation  $\mathbf{r}_\ell(\sigma(\tilde{\chi}))$  est irréductible et cuspidale, et elle ne dépend que de la réduction modulo  $\ell$  de  $\tilde{\chi}$ .*

(2) *On a une correspondance surjective :*

$$(A.9) \quad \chi \mapsto \sigma(\chi) = \mathbf{r}_\ell(\sigma(\tilde{\chi}))$$

de l'ensemble des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères  $\chi$  de  $k_n^\times$  admettant un relèvement  $\tilde{\chi} \in X_m(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  vers l'ensemble  $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\bar{G}_m)$ . L'ensemble des antécédents de  $\sigma(\chi)$  est l'orbite de  $\chi$  sous  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ .

(3) *La représentation  $\sigma(\chi)$  est supercuspidale si et seulement si  $\chi \in X_m(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ .*

**A.3.2.** Si  $a \geq 1$  est un entier, on note  $\{a\}_\ell$  le plus grand diviseur de  $a$  premier à  $\ell$ . Si  $a, b \geq 1$ , on note  $(a, b)$  leur plus grand diviseur commun.

**Lemme A.11.** — Soit  $m \geq 1$ , soit un caractère  $\tilde{\chi} : k_m^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$  et soit  $\chi$  la réduction de  $\tilde{\chi}$  modulo  $\ell$ . On note respectivement  $f(\tilde{\chi})$  et  $f(\chi)$  les cardinaux des orbites de ces caractères sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{k}/k)$ .

(1) Si  $\ell$  ne divise pas l'ordre de  $\tilde{\chi}$ , alors  $f(\chi) = f(\tilde{\chi})$ .

(2) Sinon, on a :

$$(A.10) \quad \left\{ \frac{f(\tilde{\chi})}{f(\chi)} \right\}_\ell = \frac{e}{(e, f(\chi))},$$

où  $e$  désigne l'ordre de  $q$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ .

*Démonstration.* — On note  $a$  l'ordre du caractère  $\tilde{\chi}$ . L'entier  $f(\tilde{\chi})$  est l'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times$ . Si  $\ell$  est premier à  $a$ , alors  $\chi$  est d'ordre  $a$ , donc on a  $f(\chi) = f(\tilde{\chi})$ . Sinon, on écrit  $a$  sous la forme  $a'\ell^n$ , avec  $a'$  premier à  $\ell$  et  $n \geq 1$ . L'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/a'\mathbb{Z})^\times$  est égal à  $f(\chi)$ , tandis que l'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^\times$  est de la forme  $e\ell^{n'}$  avec  $n' \geq 0$ . On obtient la formule annoncée en remarquant que l'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^\times$  est égal au plus petit multiple commun aux ordres de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/a'\mathbb{Z})^\times$  et  $(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^\times$  respectivement.  $\square$

**A.3.3.** Soit  $k'$  un sous-corps de  $k$  et soit  $d$  le degré de  $k$  sur  $k'$ . Si  $\sigma$  est une représentation irréductible cuspidale de  $\overline{G}_m$ , on note  $b(\sigma)$  le cardinal de la  $\text{Gal}(\overline{k}/k')$ -orbite de  $\sigma$ .

Soit  $\sigma$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $\overline{G}_m$ . On cherche à relever  $\sigma$  en une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $\overline{G}_m$  en contrôlant le cardinal de son orbite sous l'action de  $\text{Gal}(k/k')$ .

**Lemme A.12.** — Soit  $\tilde{\sigma}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $\overline{G}_m$  relevant  $\sigma$ , soit un caractère  $\tilde{\chi} \in X_m(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  antécédent de  $\tilde{\sigma}$  par (A.8) et soit  $\chi$  sa réduction modulo  $\ell$ .

(1) Si  $\ell$  ne divise pas l'ordre de  $\tilde{\chi}$ , alors  $b(\tilde{\sigma}) = b(\sigma)$ .

(2) Sinon, on note  $f'(\chi)$  le cardinal de l'orbite de  $\chi$  sous  $\text{Gal}(\overline{k}/k')$ , et on a :

$$(A.11) \quad \left\{ \frac{b(\tilde{\sigma})}{b(\sigma)} \right\}_\ell = \frac{(e', df(\chi))}{(e', f'(\chi))},$$

où  $e'$  désigne l'ordre du cardinal de  $k'$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ .

*Démonstration.* — On note  $f'(\tilde{\chi})$  le cardinal de l'orbite de  $\tilde{\chi}$  sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{k}/k')$ . On a donc :

$$f'(\tilde{\chi}) = b(\tilde{\sigma})f(\tilde{\chi}), \quad f'(\chi) = b(\sigma)f(\chi),$$

ce qui permet d'écrire la relation :

$$(A.12) \quad \left\{ \frac{b(\tilde{\sigma})}{b(\sigma)} \right\}_\ell = \left\{ \frac{f(\tilde{\chi})}{f(\chi)} \right\}_\ell \cdot \left\{ \frac{f'(\chi)}{f'(\tilde{\chi})} \right\}_\ell.$$

Si  $\ell$  ne divise pas l'ordre de  $\chi$ , le résultat est une conséquence immédiate du lemme A.11. Sinon, outre la formule (A.10), on obtient :

$$(A.13) \quad \left\{ \frac{f'(\tilde{\chi})}{f'(\chi)} \right\}_\ell = \frac{e'}{(e', f'(\chi))}$$

en appliquant le lemme A.11 relativement à  $k'$ . On obtient la formule (A.11) en remarquant que  $e = e'/(e', d)$ .  $\square$

On en tire le corollaire suivant.

**Corollaire A.13.** — (1) Si  $\sigma$  est supercuspidale, il existe un relèvement  $\tilde{\sigma}$  de  $\sigma$  tel que  $b(\tilde{\sigma}) = b(\sigma)$ .

(2) Sinon, la quantité :

$$(A.14) \quad \left\{ \frac{b(\tilde{\sigma})}{b(\sigma)} \right\}_\ell$$

est indépendante du relèvement  $\tilde{\sigma}$  de  $\sigma$ .

*Démonstration.* — Le relèvement de Teichmüller  $\tilde{\chi}_0$  de  $\chi$  est son unique relèvement qui soit d'ordre premier à  $\ell$ , et  $\sigma$  est supercuspidale si et seulement si  $f(\tilde{\chi}_0) = m$ .  $\square$

**A.3.4.** Soit  $\sigma$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $\tilde{G}_m$  et soit  $\tilde{\sigma}$  un relèvement de  $\sigma$ . On a le résultat suivant (pour (3), voir [52, III.2.4, Remarque 3]).

**Proposition A.14.** — Pour tout  $n \geq 1$ , on a les propriétés suivantes.

- (1) On a  $\mathbf{r}_\ell(z(\tilde{\sigma}, n)) = z(\sigma, n)$ .
- (2) La représentation  $\mathbf{r}_\ell(\text{st}(\tilde{\sigma}, n))$  est irréductible si et seulement si  $n \leq m(\sigma) - 1$ .
- (3) Il existe une structure entière  $\mathfrak{v}$  de  $\text{st}(\tilde{\sigma}, n)$  telle que  $\text{st}(\sigma, n)$  soit une sous-représentation de  $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ .

## Appendice B

### Représentations des algèbres de Hecke affines

#### B.1. L'algèbre de Hecke affine

Soit  $n \geq 1$  un entier et soit  $\xi \in R^\times$ . On note  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R(n, \xi)$  la  $R$ -algèbre de Hecke affine engendrée par les symboles  $S_1, \dots, S_{n-1}$  et  $X_1, \dots, X_n$  et leurs inverses  $(X_1)^{-1}, \dots, (X_n)^{-1}$ ,

avec les relations :

$$(B.1) \quad (S_i + 1)(S_i - \xi) = 0, \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$(B.2) \quad S_i S_j = S_j S_i, \quad |i - j| \geq 2,$$

$$(B.3) \quad S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1}, \quad i \in \{1, \dots, n-2\},$$

$$(B.4) \quad X_i X_j = X_j X_i, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$(B.5) \quad X_j S_i = S_i X_j, \quad i \notin \{j, j-1\},$$

$$(B.6) \quad S_i X_i S_i = \xi X_{i+1}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

auxquelles s'ajoutent les relations  $X_j(X_j)^{-1} = (X_j)^{-1}X_j = 1$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Compte tenu de ces relations, on peut définir deux familles de caractères de  $\mathcal{H}$ .

**Définition B.1.** — Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $a \leq b$ , et soit  $n = b - a + 1$ .

(1) On note  $\mathcal{Z}(a, b)$  le caractère de  $\mathcal{H}$  défini par :

$$S_i \mapsto \xi, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad X_j \mapsto \xi^{a+j-1}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

(2) On note  $\mathcal{L}(a, b)$  le caractère de  $\mathcal{H}$  défini par :

$$S_i \mapsto -1, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad X_j \mapsto \xi^{b-j+1}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit  $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$  une famille d'entiers  $\geq 0$  de somme  $n$ . On note  $\mathcal{H}_\alpha$  la sous-algèbre de  $\mathcal{H}$  engendrée par les  $X_i$  et leurs inverses et les  $S_i$  avec  $i$  différent de  $n_1 + \dots + n_k$  pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Elle est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{H}_{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{n_r}$ .

**Exemple B.2.** — Dans le cas où  $\alpha = (1, \dots, 1)$ , la sous-algèbre  $\mathcal{H}_{(1, \dots, 1)}$  est commutative et égale à  $\mathbb{R}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ . On note :

$$(B.7) \quad \mathcal{I}(a, b)$$

le  $\mathcal{H}$ -module des  $\mathcal{H}_{(1, \dots, 1)}$ -homomorphismes de  $\mathcal{H}$  dans la restriction de  $\mathcal{Z}(a, b)$  à  $\mathcal{H}_{(1, \dots, 1)}$ . Les caractères  $\mathcal{Z}(a, b)$ ,  $\mathcal{L}(a, b)$  apparaissent respectivement comme sous-module et quotient de  $\mathcal{I}(a, b)$ , tous deux avec multiplicité 1.

On note  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}(n, \xi)$  le centre de  $\mathcal{H}$ . C'est la sous-algèbre de  $\mathbb{R}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$  constituée des éléments invariants sous l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sur les  $X_i$ .

**Définition B.3.** — Le *caractère central* d'un  $\mathcal{H}$ -module irréductible est le caractère de  $\mathcal{Z}$  par lequel celui-ci agit sur ce module.

Le caractère central d'un  $\mathcal{H}$ -module irréductible est caractérisé par  $n$  scalaires non nuls et non ordonnés, c'est-à-dire par un multi-ensemble de longueur  $n$  dans  $\mathbb{N}(\mathbb{R}^\times)$ . On a une application :

$$(B.8) \quad \text{cent} : \text{Irr}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{N}(\mathbb{R}^\times)$$

surjective et à fibres finies, associant à un  $\mathcal{H}$ -module irréductible son caractère central.

Le caractère central joue pour les modules un rôle analogue à celui du support cuspidal pour les représentations. Pour  $\Xi \in \mathbb{N}(\mathbb{R}^\times)$  de longueur  $n$ , on note  $\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules irréductibles de caractère central  $\Xi$ . On comparera le résultat suivant au théorème 5.18.

**Théorème B.4.** — Soit  $r \geq 1$  un entier et soient  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{R}^\times$  tels que  $z_i/z_j \notin \xi^{\mathbb{Z}}$  pour tous  $i \neq j$ . Pour chaque  $i$ , soit  $n_i \geq 1$  un entier et soit  $\Xi_i \in \mathbb{N}(z_i \xi^{\mathbb{Z}})$ . On note  $\Xi$  la somme des  $\Xi_i$ , qu'on suppose de longueur  $n$ , et on pose  $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ .

(1) Pour chaque entier  $i$ , soit  $\mathfrak{m}_i \in \text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi_i)$ . Alors  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}, \mathfrak{m}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{m}_r)$  est un  $\mathcal{H}$ -module irréductible de caractère central  $\Xi$ .

(2) L'application ainsi définie :

$$\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi_1) \times \dots \times \text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi_r) \rightarrow \text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)$$

est bijective.

*Démonstration.* — La méthode de Rogawski [42, 4.1] est encore valable ici.  $\square$

## B.2. L'algèbre de Hecke-Iwahori

On rappelle que  $q$  désigne le cardinal du corps résiduel de  $F$ . Soit  $n \geq 1$  un entier et soit  $I$  le sous-groupe d'Iwahori standard du groupe  $G = GL_n(F)$ . On note  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de la base canonique du  $F$ -espace vectoriel  $F^n$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , on note  $s_i$  la matrice de permutation transposant  $e_i$  et  $e_{i+1}$  et laissant invariants les autres vecteurs de la base, et on note  $S_i$  la fonction caractéristique de  $Is_iI$ .

Pour  $j \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $t_j$  la matrice diagonale de  $G$  agissant par  $e_k \mapsto \varpi e_k$  pour  $k \in \{1, \dots, j\}$  et laissant invariants les autres vecteurs de la base, et on note  $T_j$  la fonction caractéristique de  $It_jI$ , qui est inversible. Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on pose :

$$(B.9) \quad X_j = q^{-j+(n+1)/2} T_{j-1} (T_j)^{-1}.$$

Alors les éléments  $S_1, \dots, S_{n-1}$  et  $X_1, \dots, X_n$  et leurs inverses  $(X_1)^{-1}, \dots, (X_n)^{-1}$  engendrent l'algèbre  $\mathcal{H}(G, I)$  avec les relations (B.1) à (B.6) ci-dessus. En particulier, on a un



isomorphisme :

$$(B.10) \quad \Upsilon : \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(G, I) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(n, q)$$

de  $\mathbb{R}$ -algèbres.

**Remarque B.5.** — La description par générateurs et relations ci-dessus se déduit de celle donnée dans [41] en appliquant l'involution  $\flat$  de  $\mathcal{H}(G, I)$  définie par :

$$S_i^\flat = S_{n-i}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad X_j^\flat = X_{n+1-j}^{-1}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit  $w \in G$  une matrice de permutation et soit  $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$  une écriture réduite de  $w$ . Alors l'élément  $S_w = S_{i_1} \dots S_{i_r} \in \mathcal{H}$  ne dépend pas de l'écriture réduite choisie.

Soit  $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$  une famille d'entiers  $\geq 0$  de somme  $n$ . L'algèbre de Hecke-Iwahori  $\mathcal{H}(M_\alpha, I \cap M_\alpha)$  se plonge dans  $\mathcal{H}(G, I)$  par l'intermédiaire de  $j_\alpha$ , et on a un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres :

$$\Upsilon_\alpha : \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(M_\alpha, I \cap M_\alpha) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(n_1, q) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(n_r, q) = \mathcal{H}_\alpha.$$

L'homomorphisme composé  $\Upsilon \circ j_\alpha$  est égal à  $\Upsilon_\alpha$ .

La famille  $\alpha$  définit un sous-groupe  $\mathcal{W}_\alpha$  du groupe  $\mathcal{W}_0$  des matrices de permutation de  $G$ . En tant que  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à droite,  $\mathcal{H}$  est libre de rang égal à  $n!/\alpha!$ , où  $\alpha! = n_1! \dots n_r!$ , et une base de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}_\alpha$  est fournie par les  $S_w$  où  $w$  décrit un système de représentants de  $\mathcal{W}_0/\mathcal{W}_\alpha$ .

Si l'on considère  $\mathcal{H}$  comme un  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à gauche, le résultat est encore vrai, pour peu qu'on remplace  $\mathcal{W}_0/\mathcal{W}_\alpha$  par  $\mathcal{W}_\alpha \backslash \mathcal{W}_0$ .

### B.3. Multisegments aperiodiques

Soit  $\xi \in \mathbb{R}^\times$ . On lui associe une quantité  $m$  de la façon suivante :

- si  $\xi$  est une racine de l'unité et si  $\mathbb{R}$  est de caractéristique non nulle, on note  $m$  le plus petit entier  $\geq 1$  tel que :

$$(B.11) \quad 1 + \xi + \dots + \xi^{m-1} = 0$$

dans  $\mathbb{R}$ .

- dans tous les autres cas, on pose  $m = +\infty$ .

**Définition B.6.** — (1) Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$(B.12) \quad [a, b] = (\xi^a, \xi^{a+1}, \dots, \xi^b)$$

où  $a, b \in \mathbb{Z}$  sont des entiers tels que  $a \leq b$ .

(2) Un *multisegment* est un multi-ensemble de segments.

**Remarque B.7.** — Si  $\xi = 1$ , un multisegment s'identifie à une partition.

Si  $m$  est fini, un multisegment est dit *apériodique* s'il ne contient aucun multisegment de la forme :

$$(B.13) \quad [a, b] + [a + 1, b + 1] + \cdots + [a + m - 1, b + m - 1].$$

Si  $m = +\infty$ , on convient que tout multisegment est apériodique. On note  $\Psi$  l'ensemble des multisegments apériodiques. Il est muni d'une relation d'ordre partiel (voir [36, 15] : cette relation d'ordre est donnée par l'inclusion entre les adhérences des orbites nilpotentes associées aux multisegments apériodiques). On la note  $\leq$ .

**Remarque B.8.** — On suppose que  $\xi = 1$ . Si  $R$  est de caractéristique nulle,  $\Psi$  s'identifie à l'ensemble des partitions et, si  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle, alors  $\Psi$  s'identifie à l'ensemble des partitions  $\ell$ -régulières.

Soit :

$$(B.14) \quad \psi = [a_1, b_1] + \cdots + [a_r, b_r] \in \Psi$$

un multisegment apériodique. Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on pose  $n_i = b_i - a_i + 1$ , et on note  $\alpha$  la famille  $(n_1, \dots, n_r)$  des longueurs des segments composant  $\psi$ . On note  $\text{supp}(\psi)$  l'élément de  $\mathbb{N}(\xi^{\mathbb{Z}})$  égal à la somme formelle des  $\xi^{a_i+j}$  pour  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ . On note  $\mathcal{Z}_{\psi, \alpha}$  le caractère  $\mathcal{Z}(a_1, b_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{Z}(a_r, b_r)$  de  $\mathcal{H}_{\alpha}$  et on pose :

$$\mathcal{I}_{\psi} = \mathcal{Z}_{\psi, \alpha} \otimes_{\mathcal{H}_{\alpha}} \mathcal{H},$$

qu'on appelle le module standard associé à  $\psi$ .

#### B.4. Classification des modules irréductibles

**B.4.1.** Le résultat suivant fournit une classification des  $\mathcal{H}$ -modules irréductibles quand  $R = \mathbb{C}$  et  $\xi \neq 1$ . On renvoie le lecteur à Ariki [1, 2] et à Chriss-Ginzburg [19].

**Théorème B.9.** — On suppose que  $R = \mathbb{C}$  et  $\xi \neq 1$ .

(1) Pour tout  $\psi \in \Psi$ , il existe un unique  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ -module simple  $\mathcal{Z}_{\psi}$  apparaissant dans  $\mathcal{I}_{\psi}$  avec multiplicité 1 et n'apparaissant dans aucun  $\mathcal{I}_{\psi'}$  pour les  $\psi' \in \Psi$  tels que  $\psi' > \psi$ .

(2) L'application :

$$(B.15) \quad \psi \mapsto \mathcal{Z}_{\psi}$$

induit une bijection entre  $\Psi$  et l'ensemble des classes de  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ -modules irréductibles.

Par construction, le caractère central de  $\mathcal{Z}_{\psi}$  est égal à  $\text{supp}(\psi)$ .

**B.4.2.** On suppose dans ce paragraphe que  $\xi = 1$ . D'après la remarque B.8, l'ensemble  $\Psi$  s'identifie à l'ensemble des partitions  $m$ -régulières. D'après Mathas [38, Theorem 3.7], il y a une bijection entre l'ensemble des partitions  $m$ -régulières de  $n$  et l'ensemble des classes de  $\mathcal{H}$ -modules irréductibles de caractère central égal à  $[1] + \cdots + [1] = n \cdot [1]$ .

**B.4.3.** On suppose que  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle et que  $q$  n'est pas congru à 1 modulo  $\ell$ . On note  $\xi$  l'image de  $q$  dans  $R$ , qui est une racine non triviale de l'unité. Ainsi un segment  $[a, b]$  au sens de la définition B.6 s'identifie au segment  $[a, b]_\rho$  où  $\rho$  est le caractère trivial de  $F^\times$ .

Soit  $\Xi$  un multi-ensemble de longueur  $n$  dans  $\mathbb{N}(\xi^{\mathbb{Z}})$ , qu'on écrit sous la forme :

$$\Xi = [\xi^{i_1}] + \cdots + [\xi^{i_n}], \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}.$$

Comme  $R$  est une extension de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , on peut supposer que  $\xi \in \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ . On note  $\tilde{\xi}$  le relèvement de Teichmüller de  $\xi$  dans  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ . Bien entendu, ce relèvement  $\tilde{\xi}$ , qui est une racine de l'unité, n'est pas égal à  $q$ . On pose  $\tilde{\Xi} = [\tilde{\xi}^{i_1}] + \cdots + [\tilde{\xi}^{i_n}]$  et  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(n, \tilde{\xi})$ .

**Lemme B.10.** — On a  $|\text{Irr}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\Xi})| \leq |\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)|$ .

*Démonstration.* — D'après le théorème B.9, on a  $|\text{Irr}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\Xi})| = |\Psi(\tilde{\Xi})|$ . Ensuite les ensembles  $|\Psi(\tilde{\Xi})|$  et  $|\Psi(\Xi)|$  ont le même cardinal car  $\tilde{\xi}$  et  $\xi$  ont le même ordre. Soit un multiségment  $\psi \in \Psi(\Xi)$ . D'après (9.17), l'application composée :

$$\psi \mapsto Z(\psi) \mapsto Z(\psi)^I$$

associe à  $\psi$  d'abord une représentation irréductible superunipotente (c'est-à-dire admettant des vecteurs non nuls invariants par  $I$ ) de  $\text{GL}_n(F)$ , ensuite le  $\mathcal{H}$ -module irréductible formé des vecteurs  $I$ -invariants de la représentation  $Z(\psi)$ . Cette application est injective, d'après le théorème 9.27 et d'après le fait que l'application  $V \mapsto V^I$  induit une bijection entre représentations irréductibles possédant des vecteurs  $I$ -invariants non nuls et modules irréductibles sur  $\mathcal{H}$ . On en déduit l'inégalité cherchée.  $\square$

**Proposition B.11.** — On a  $|\Psi(\Xi)| = |\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)|$ .

*Démonstration.* — Il suffit de prouver que  $|\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)| \leq |\text{Irr}(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\Xi})|$  d'après le lemme B.10. Comme tout  $\mathcal{H}$ -module simple dans  $\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)$  est défini sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , on peut supposer que  $R$  est égal à  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , ce que nous ferons. On va prouver l'inégalité cherchée au moyen d'un argument de cellularité. On note  $\mathcal{A}_\Xi$  le quotient de  $\mathcal{H}$  par l'idéal bilatère engendré par l'élément :

$$(X_1 - \xi^{i_1}) \cdots (X_1 - \xi^{i_n}).$$

L'algèbre  $\mathcal{A}_\Xi$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -algèbre de Hecke cyclotomique. Tout  $\mathcal{H}$ -modules irréductible de caractère central  $\Xi$  se factorise en un module irréductible sur  $\mathcal{A}_\Xi$ , mais la réciproque n'est pas vraie en général. Toutefois, il existe un facteur direct  $\mathcal{B}_\Xi$  de  $\mathcal{A}_\Xi$  dont les modules irréductibles sont exactement les éléments de  $\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)$ . Comme  $\mathcal{A}_\Xi$  est cellulaire [30, 5], c'est aussi le cas de  $\mathcal{B}_\Xi$ . On en déduit l'inégalité voulue.  $\square$

**B.4.4.** On en déduit finalement le résultat suivant. On utilise les notations du paragraphe 9.6.2. Soit  $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z}_F)$ .

**Corollaire B.12.** — On a  $|\text{Mult}^{\text{ap}}(\mathfrak{s})| = |\text{Irr}(\mathfrak{s})^*|$ .

*Démonstration.* — Soit  $\xi$  l'image de  $q$  dans  $R$  et soit  $\Xi$  l'élément de  $\mathbb{N}(\xi^{\mathbb{Z}})$  correspondant à  $\mathfrak{s}$ . Si  $\xi = 1$ , le résultat est donné par le paragraphe B.4.2. Sinon,  $\text{Mult}^{\text{ap}}(\Xi)$  s'identifie à  $\Psi(\Xi)$  et  $V \mapsto V^1$  définit une bijection de  $\text{Irr}(\mathfrak{s})^*$  vers  $\text{Irr}(\mathcal{H}, \Xi)$ . Le résultat est alors une conséquence de la proposition B.11.  $\square$

## Références

- [1] S. ARIKI – “On the decomposition numbers of the Hecke algebra of  $G(m, 1, n)$ ”, *J. Math. Kyoto Univ.* **36** (1996), no. 4, p. 789–808.
- [2] ———, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, University Lecture Series, vol. 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [3] A. I. BADULESCU, G. HENNIART, B. LEMAIRE & V. SÉCHERRE – “Sur le dual unitaire de  $GL_r(D)$ ”, *Amer. J. Math.* **132** (2010), no. 5, p. 1365–1396.
- [4] A. I. BADULESCU – “Un résultat d'irréductibilité en caractéristique non nulle”, *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), no. 4, p. 583–592.
- [5] J. BERNSTEIN & A. ZELEVINSKI – “Representations of the group  $GL(n, F)$ , where  $F$  is a local non-Archimedean field”, *Uspehi Mat. Nauk* **31** (1976), no. 3(189), p. 5–70.
- [6] C. BLONDEL – “Quelques propriétés des paires couvrantes”, *Math. Ann.* **331** (2005), no. 2, p. 243–257.
- [7] A. BOREL & G. HARDER – “Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields”, *J. Reine Angew. Math.* **298** (1978), p. 53–64.
- [8] N. BOURBAKI – *Livre II: Algèbre. Chapitre 8: Modules et anneaux semi-simples*, Actualités Sci. Ind. no. 1261, Hermann, Paris, 1958.
- [9] P. BROUSSOUS – “Extension du formalisme de Bushnell et Kutzko au cas d'une algèbre à division”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 2, p. 292–326.
- [10] ———, “Minimal strata for  $GL(m, D)$ ”, *J. Reine Angew. Math.* **514** (1999), p. 199–236.
- [11] P. BROUSSOUS, V. SÉCHERRE & S. STEVENS – “Smooth representations of  $GL(m, D)$ , V: endo-classes”, (2010), Prépublication, <http://arxiv.org/abs/1004.5032>.
- [12] C. J. BUSHNELL – “Representations of reductive  $p$ -adic groups: localization of Hecke algebras and applications”, *J. London Math. Soc. (2)* **63** (2001), no. 2, p. 364–386.

- [13] C. J. BUSHNELL & A. FRÖHLICH – *Gauss sums and  $p$ -adic division algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 987, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [14] C. J. BUSHNELL & G. HENNIART – “Local tame lifting for  $GL(N)$ . I: Simple characters”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1996), no. 83, p. 105–233.
- [15] ———, “Local tame lifting for  $GL(n)$  IV: Simple characters and base change”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **87** (2003), no. 2, p. 337–362.
- [16] C. J. BUSHNELL & P. C. KUTZKO – *The admissible dual of  $GL(N)$  via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [17] ———, “Smooth representations of reductive  $p$ -adic groups: structure theory via types”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 3, p. 582–634.
- [18] ———, “Semisimple types in  $GL_n$ ”, *Compositio Math.* **119** (1999), no. 1, p. 53–97.
- [19] N. CHRISS & V. GINZBURG – *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.
- [20] J.-F. DAT – “Types et inductions pour les représentations modulaires des groupes  $p$ -adiques”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 1, p. 1–38. With an appendix by Marie-France Vignéras.
- [21] ———, “ $\nu$ -tempered representations of  $p$ -adic groups, I:  $l$ -adic case”, *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 3, p. 397–469.
- [22] ———, “Finitude pour les représentations lisses de groupes  $p$ -adiques”, *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 2, p. 261–333.
- [23] ———, “Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo  $\ell$ ”, 2010, Prépublication, <http://arxiv.org/abs/1006.5371>. With an appendix by Marie-France Vignéras.
- [24] P. DELIGNE, D. KAZHDAN & M.-F. VIGNÉRAS – “Représentations des algèbres centrales simples  $p$ -adiques”, in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, p. 33–117.
- [25] R. DIPPER – “On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups. I”, *J. Algebra* **130** (1990), no. 1, p. 235–259.
- [26] R. DIPPER & P. FLEISCHMANN – “Modular Harish-Chandra theory. I”, *Math. Z.* **211** (1992), no. 1, p. 49–71.
- [27] ———, “Modular Harish-Chandra theory. II”, *Arch. Math. (Basel)* **62** (1994), no. 1, p. 26–32.
- [28] R. DIPPER & G. JAMES – “Identification of the irreducible modular representations of  $GL_n(q)$ ”, *J. Algebra* **104** (1986), no. 2, p. 266–288.
- [29] M. GRABITZ, A. J. SILBERGER & E.-W. ZINK – “Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras”, *J. Number Theory* **91** (2001), no. 1, p. 92–125.
- [30] J. J. GRAHAM & G. I. LEHRER – “Cellular algebras”, *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, p. 1–34.
- [31] J. A. GREEN – “The characters of the finite general linear groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), p. 402–447.
- [32] R. HOWE & A. MOY – “Minimal  $K$ -types for  $GL_n$  over a  $p$ -adic field”, *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 257–273, Orbites unipotentes et représentations, II.
- [33] R. B. HOWLETT & G. I. LEHRER – “On Harish-Chandra induction and restriction for modules of Levi subgroups”, *J. Algebra* **165** (1994), no. 1, p. 172–183.

- [34] G. JAMES – *Representations of general linear groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [35] ———, “The irreducible representations of the finite general linear groups”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **52** (1986), no. 2, p. 236–268.
- [36] G. LUSZTIG – “Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras”, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), no. 2, p. 365–421.
- [37] I. G. MACDONALD – *Symmetric functions and Hall polynomials*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995.
- [38] A. MATHAS – “Simple modules of Ariki-Koike algebras”, in *Group representations: cohomology, group actions and topology (Seattle, WA, 1996)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 383–396.
- [39] A. MÍNGUEZ – “Sur l’irréductibilité d’une induite parabolique”, *J. Reine Angew. Math.* **629** (2009), p. 107–131.
- [40] A. MÍNGUEZ & V. SÉCHERRE – “Représentations banales de  $GL(m, D)$ ”, Prépublication, 2011.
- [41] C. MØGLIN & J.-L. WALDSPURGER – “Sur l’involution de Zelevinski”, *J. Reine Angew. Math.* **372** (1986), p. 136–177.
- [42] J. D. ROGAWSKI – “Representations of  $GL(n)$  over a  $p$ -adic field with an Iwahori-fixed vector”, *Israel J. Math.* **54** (1986), no. 2, p. 242–256.
- [43] P. SCHNEIDER & E.-W. ZINK – “ $K$ -types for the tempered components of a  $p$ -adic general linear group”, *J. Reine Angew. Math.* **517** (1999), p. 161–208, With an appendix by P. Schneider and U. Stuhler.
- [44] V. SÉCHERRE – “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , I : caractères simples”, *Bull. Soc. math. France* **132** (2004), no. 3, p. 327–396.
- [45] ———, “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , II :  $\beta$ -extensions”, *Compositio Math.* **141** (2005), p. 1531–1550.
- [46] ———, “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , III : types simples”, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **38** (2005), p. 951–977.
- [47] ———, “Proof of the Tadić conjecture (U0) on the unitary dual of  $GL_m(D)$ ”, *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), p. 187–203.
- [48] V. SÉCHERRE & S. STEVENS – “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , IV : représentations supercuspidales”, *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), no. 3, p. 527–574.
- [49] ———, “Smooth representations of  $GL(m, D)$ , VI: semisimple types”, *Int. Math. Res. Not.* (2011).
- [50] J.-P. SERRE – *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.
- [51] M. TADIĆ – “Induced representations of  $GL(n, A)$  for  $p$ -adic division algebras  $A$ ”, *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), p. 48–77.
- [52] M.-F. VIGNÉRAS – *Représentations  $l$ -modulaires d’un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [53] ———, “Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups”, *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 4, p. 549–623. With an appendix by Alberto Arabia.

- [54] ———, “Irreducible modular representations of a reductive  $p$ -adic group and simple modules for Hecke algebras”, in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 117–133.
- [55] ———, “Modular representations of  $p$ -adic groups and of affine Hecke algebras”, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, p. 667–677.
- [56] A. ZELEVINSKI – “Induced representations of reductive  $\mathfrak{p}$ -adic groups. II. On irreducible representations of  $GL(n)$ ”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), no. 2, p. 165–210.

---

ALBERTO MÍNGUEZ, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 175, rue de Chevaleret, 75013 Paris, France. URL: <http://www.institut.math.jussieu.fr/~minguez/>  
*E-mail* : `minguez@math.jussieu.fr`

VINCENT SÉCHERRE, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France  
*E-mail* : `vincent.secherre@math.uvsq.fr`