



**HAL**  
open science

## Modèle micromécanique d'endommagement basé sur des approches cohésives : bornes et relations micro-macro

Nawfal Blal, Loïc Daridon, Yann Monerie, Stéphane Pagano

### ► To cite this version:

Nawfal Blal, Loïc Daridon, Yann Monerie, Stéphane Pagano. Modèle micromécanique d'endommagement basé sur des approches cohésives : bornes et relations micro-macro. 20ème Congrès Français de Mécanique, 2011, Besançon, France. pp.Clé USB. hal-00628031

**HAL Id: hal-00628031**

**<https://hal.science/hal-00628031>**

Submitted on 30 Sep 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle micromécanique d'endommagement basé sur des approches cohésives : bornes et relations micro-macro

N. BLAL<sup>a,b,c</sup>, L. DARIDON<sup>a,c</sup>, Y. MONERIE<sup>b,c</sup>, S. PAGANO<sup>a,c</sup>

a. Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université Montpellier 2, CNRS, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex

b. Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire (IRSN), DPAM, CE Cadarache, BP3, F-13115 Saint-Paul-lez-Durance, Cedex

c. Laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures, IRSN, CNRS UMR 5508, Université Montpellier 2

## Résumé :

*On propose dans cette communication de développer un modèle micromécanique d'endommagement basé sur une approche cohésive. Le modèle est obtenu par homogénéisation du comportement d'un milieu élastique isotrope contenant des inclusions cohésives circulaires distribuées et orientées aléatoirement. Le comportement non linéaire de la phase cohésive est linéarisé à l'aide de la méthode variationnelle de Ponte Castañeda (1991) et de l'estimation de Hashin-Shtrikman (1963). Ce modèle lie endommagement global et paramètres cohésifs et permet notamment de calibrer ces derniers en fonction du maillage.*

## Abstract :

*In this work, a micromechanical damage model based on cohesive zone approach is proposed. It corresponds to the overall behaviour of an isotropic and elastic matrix containing randomly distributed and oriented penny-shape cohesive inclusions. The local behaviour of the inclusions is given by an intrinsic cohesive zone model and the macroscopic behaviour is obtained using the variational method of Ponte Castañeda (1991) and a Hashin-Shtrikman (1963) like estimate. This overall behaviour is valid for any macroscopic triaxiality strain rate and gives an explicit relation between the microscopic cohesive properties and the macroscopic fracture properties.*

**Mots clefs : Modèles de Zones Cohésives ; Endommagement ; Homogénéisation**

## 1 Introduction

L'étude de l'endommagement et de la rupture des matériaux par approches cohésives a connu un grand développement depuis les modèles pionniers de zones cohésives (MZC) dus à [1, 2]. Au travers d'une loi surfacique reliant l'effort de résistance à la séparation des lèvres d'une fissure en train de se créer au saut de déplacement (l'ouverture de cette fissure), ces modèles permettent de suivre les mécanismes d'endommagement depuis l'amorçage des microfissures jusqu'à la rupture totale du matériau. Différentes études concernent soit la détermination d'une taille convenable pour la zone cohésive ou la recherche de modèles micromécaniques d'endommagement desquels on pourrait tirer des informations sur les formes locales des modèles cohésifs et sur leurs paramètres ([3, 4] par exemple). Dans cette étude, on propose de développer un nouveau modèle micromécanique d'endommagement de milieux élastiques. Le modèle est une extension des résultats obtenus par [5] où on détermine le comportement équivalent d'une matrice élastique contenant des zones cohésives représentées par des inclusions circulaires. Son intérêt vient du fait que : (i) il permet d'obtenir des résultats sans faire apparaître de longueur interne associée au modèle cohésif, (ii) il est valide à tout taux de triaxialité et (iii) il permet de relier explicitement les lois locale (cohésive) et globale (élasto-endommageable) de la fissuration.

## 2 Principe de l'approche

Le principe de la modélisation proposée est illustré sur Fig. 1 : une discrétisation cohésive-volumique de type éléments finis est considérée comme un milieu continu homogène contenant une distribution d'inclusions ; le milieu continu possède un comportement *durcissant* "volumique" (loi de comportement volumique sans endommagement), les inclusions possèdent un comportement *adoucissant* "cohésif" (partie intégrant tout le processus d'endommagement). Le comportement global équivalent issu de cette décomposition est recherché en s'appuyant sur des méthodes d'homogénéisation. On se limite

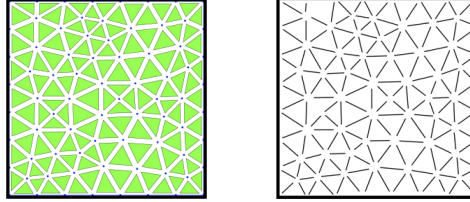


Fig. 1 – Principe de l'approche : une discrétisation cohésive-volumique (gauche) est remplacée par un milieu homogène de même comportement que le comportement "volumique", i.e. des éléments finis, et contenant des inclusions lenticulaires distribuées et orientées aléatoirement de même comportement que le comportement "cohésif", i.e. des modèles de zone cohésive (droite).

dans cette communication au cas d'un milieu élastique isotrope linéaire dont le comportement est régi par le tenseur de rigidité :

$$\mathbb{C}^M = 3k^M \mathbb{J} + 2\mu^M \mathbb{K} \quad (1)$$

où  $k^M$  et  $\mu^M$  sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice, les tenseurs du quatrième ordre  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  sont donnés par :  $\mathbb{J} = (1/3)\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ , où  $\mathbf{i}$  (resp.  $\mathbb{I}$ ) est le tenseur identité du deuxième ordre (resp. du quatrième ordre). L'idée consiste à décrire le comportement "volumique" des inclusions en associant aux zones cohésives une épaisseur *fictive*  $e$  destinée à tendre vers zéro (comportement surfacique asymptotique). La loi de cohésion surfacique est prise sous la forme :

$$\mathbf{R}^{\text{coh}} = \beta \times \left( C_N \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + C_T \frac{\mathbf{u}_T \otimes \mathbf{u}_T}{\mathbf{u}_T \cdot \mathbf{u}_T} \right) \cdot [\mathbf{u}] \quad (2)$$

où  $\mathbf{R}^{\text{coh}}$  est l'effort cohésif,  $C_N$  et  $C_T$  sont les raideurs initiales du modèle cohésif (modèle intrinsèque), et  $[\mathbf{u}] = u_N \mathbf{n} + \mathbf{u}_T$  est le vecteur saut de déplacement de normale  $\mathbf{n}$ . On suppose que le paramètre d'endommagement surfacique évolue en fonction de la norme du saut de déplacement  $\beta(\|[\mathbf{u}]\|)$  : sa valeur décroît de 1 (matériau localement sain) pour atteindre 0 (matériau localement totalement endommagé). Le comportement de l'inclusion cohésive est décrit par un tenseur de rigidité de la forme (voir [5, 6] pour plus de détails) :

$$\mathbb{C}^{\text{coh}} = e\beta(\|[\mathbf{u}]\|) (C_N \mathbb{E}_l + C_T \mathbb{K}_l) \quad (3)$$

où les tenseurs du quatrième ordre  $\mathbb{E}_l$  et  $\mathbb{K}_l$  (voir [7]) constituent deux composantes de la base des tenseurs du quatrième ordre symétriques isotropes transverses. La fraction volumique des inclusions est mise sous la forme :  $f = eZ$  où  $Z$  est un paramètre de densité de maillage inversement proportionnel à la taille de maille  $L_{\text{mesh}}$  (par exemple, pour un maillage régulier constitué de carrés coupés en quatre triangles :  $Z = 2(1 + \sqrt{2})L_{\text{mesh}}^{-1}$ ).

## 3 Cas élastique : quantification des raideurs cohésives initiales en fonction du maillage

L'utilisation d'un modèle cohésif intrinsèque (raideur initiale finie) introduit une souplesse additionnelle au matériau volumique. On doit aux auteurs [5] les premiers résultats rigoureux permettant de calibrer la raideur cohésive en fonction du maillage. En se restreignant au cas purement élastique linéaire (variable d'endommagement  $\beta = 1$ ), ces auteurs ont pu montrer qu'il est possible de borner a priori

la souplesse induite par le modèle cohésif pour le cas d'un maillage régulier. La démarche consiste à calculer la borne inférieure de l'estimation de Hashin-Shtrickman [8] en moyennant sur les orientations équiprobables. Pour le cas linéaire, le module cohésif linéaire de l'inclusion se réduit à :

$$\mathbb{C}_{lin}^{coh} = e(C_N \mathbb{E}_l + C_T \mathbb{K}_l) \quad (4)$$

Le module homogénéisé est estimé par la borne inférieure de l'estimation Hashin-Shtrickman  $\mathbb{C}^{HS^-}$  :

$$\mathbb{C}^{hom} = \lim_{e \rightarrow 0} \mathbb{C}^{HS^-} \left( \mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{lin}^{coh} \right) = \lim_{e \rightarrow 0} \left[ eZ \langle \mathbb{C}_{lin}^{coh} : \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{C}^M \right] : [eZ \langle \mathbb{T} \rangle_{\circ} + (1 - eZ) \mathbb{I}]^{-1} \quad (5)$$

où  $\langle \bullet \rangle_{\circ}$  désigne la moyenne sur toutes les orientations de l'espace (équiprobabilité des orientations des zones cohésives) et le tenseur  $\mathbb{T}$  est donné par :  $\mathbb{T} = \left( \mathbb{C}^* + \mathbb{C}_{lin}^{coh} \right)^{-1} : (\mathbb{C}^* + \mathbb{C}^M)$  avec  $\mathbb{C}^*$  le tenseur d'influence de Hill dépendant de la forme des inclusions et du milieu de référence (inclusions dans ce cas). Le passage à la limite  $e \rightarrow 0$  permet de déterminer le comportement macroscopique équivalent, noté  $\mathbb{C}^{hom}$ . En se proposant d'évaluer la perte de raideur apparente comme le rapport du module de Young apparent  $E^{hom}$  sur celui de la matrice sans zone cohésive  $E^M$ , on a ainsi :

$$R = \frac{E^{hom}}{E^M} = \frac{\xi}{1 + \xi} \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{5}{1 + (4/3)(C_N/C_T)} \frac{C_N}{E^M Z}. \quad (6)$$

L'équation (6) permet de calibrer le choix de la raideur cohésive  $C_N$  en fonction de la densité linéique de maillage  $Z$  et de la perte de raideur  $R$  tolérée : une valeur minimale fixée pour la perte de raideur apparente  $R$  correspond à une valeur minimale pour la quantité  $\xi$ , ce qui borne le ratio  $C_N/(E^M Z)$  selon le rapport choisi entre raideur cohésive normale et tangentielle  $C_N/C_T$ . On note qu'en l'absence de raideur cohésive tangentielle ( $C_T \rightarrow 0$ ), la perte de raideur apparente est totale ( $R \rightarrow 0$ ) quels que soient le maillage et la raideur normale retenue. Une façon de contrôler ce rapport  $C_N/C_T$  est d'imposer une restriction sur le coefficient de Poisson apparent  $\nu^{hom}$ . En supposant ainsi que ce ratio reste inchangé par introduction de zones cohésives pour la phase élastique ( $\nu^M = \nu^{hom}$ ), on obtient :

$$\frac{C_N}{C_T} = \frac{1 + 3\nu^M}{2 - 2\nu^M} \quad (7)$$

Ainsi, en combinant la borne (6) et le critère (7), on peut borner la raideur cohésive initiale par valeur inférieure en fonction des propriétés élastiques de la matrice et de la perte apparente de raideur  $R$  tolérée :

$$\boxed{C_N \geq k^M Z \frac{R}{1 - R}} \quad (8)$$

L'équation (7) implique la même perte de raideur apparente pour les modules de cisaillement et de compressibilité :  $\frac{\mu^{hom}}{\mu^M} = \frac{k^{hom}}{k^M}$ .

## 4 Cas endommageable

### 4.1 Formulation du problème

Dans l'optique de parvenir à un comportement macroscopique décrivant la phase d'endommagement, on suppose que les trajets de chargements sont monotones et radiaux dans l'espace des déformations macroscopiques  $\mathbf{E}$ , et on cherche l'état de contrainte macroscopique associé  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E}$ . Le comportement homogène de la partie non linéaire est obtenu à l'aide de la méthode sécante modifiée de Suquet [9], équivalente à la méthode variationnelle de Ponte Castañeda [10]. Le comportement des inclusions est décrit par son module sécant :

$$\mathbb{C}_{sct}^{coh} = \beta(\|\mathbf{u}\|) \times \mathbb{C}_{lin}^{coh}, \quad (9)$$

où la norme du saut de déplacement  $[\mathbf{u}]$  s'écrit :

$$\|[\mathbf{u}]\|^2 = 2e^2(-\mathbb{J} + 2\mathbb{K}) :: \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\epsilon} = (1/2)\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

D'autre part le résultat général sur les composites [11] permet de relier le second moment de la déformation dans la phase inclusionnelle  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_I$  à l'expression macroscopique de l'énergie élastique :

$$\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_I = \frac{1}{2eZ} \frac{\partial(\mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{sct}^{\text{coh}}) : \mathbf{E})}{\partial \mathbb{C}_{sct}^{\text{coh}}} \quad (11)$$

En combinant les relations (9), (10) et (11), on obtient le module sécant de la phase cohésive comme solution du problème non linéaire :

$$\mathbb{C}_{sct}^{\text{coh}} = \beta \left( \sqrt{\frac{e}{Z}(-\mathbb{J} + 2\mathbb{K}) :: \frac{\partial(\mathbf{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}_{sct}^{\text{coh}}) : \mathbf{E})}{\partial \mathbb{C}_{sct}^{\text{coh}}}} \right) \mathbb{C}_{lin}^{\text{coh}} \quad (12)$$

où le module  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  est donné par la relation (5).

## 4.2 Application : calibration des paramètres cohésifs en fonction du comportement global attendu

Par souci de simplification et sans perte de généralité, on suppose que la loi locale cohésive est normale ( $C_T \rightarrow +\infty$ ) et bilinéaire (voir Fig. 2) et que le coefficient de Poisson du matériau est nul ( $\nu^M = 0$ ). On note que dans cette situation particulière le ratio  $C_N/C_T$  est parfaitement défini et indépendant de  $\nu^M$  : le critère (7) n'est donc plus nécessaire ici.

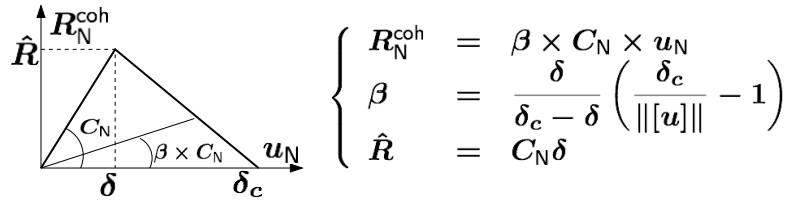


Fig. 2 – Loi cohésive normale et bilinéaire.

La résolution du problème non linéaire (12) permet d'obtenir la variable d'endommagement  $\beta$  en fonction du chargement macroscopique (partie hydrostatique  $E_m = (1/3) \text{tr}(\mathbf{E})$  et partie déviatorique  $E_{eq} = \sqrt{(2/3)\mathbf{E}_d : \mathbf{E}_d}$  où  $\mathbf{E}_d$  la déformation déviatorique :  $\mathbf{E}_d = \mathbf{E} - E_m \mathbf{i}$ ) :

$$\beta = \frac{\hat{R} \left( 3(23E_{eq}^2 + 40E_m^2)^{1/2} - \sqrt{10}Z\delta_c \right)}{\sqrt{10}Z\xi\hat{R}\delta_c + 3(23E_{eq}^2 + 40E_m^2)^{1/2} \left( \hat{R} - C_N\delta_c \right)} \quad (13)$$

où on a noté par  $\delta_c$  l'ouverture maximale de la fissure (atteinte à la rupture du modèle cohésif) et par  $\hat{R}$  la contrainte cohésive maximale supportée par le modèle local. La variable d'endommagement dépend des propriétés élastiques du matériau par l'intermédiaire du réel  $\xi$  donné par la formule (6), ici  $\xi = 5C_N/(ZE^M)$ . En introduisant la déformation équivalente à rupture pour un chargement purement déviatorique  $E_{eq}^0 \simeq 0.2 Z\delta_c$ , on peut décrire les surfaces de chargement à l'amorçage et à la rupture suivant deux critères elliptiques :

$$\begin{cases} \text{amorçage} : \left( \frac{E_{eq}}{E_{eq}^0} \right)^2 + \frac{40}{23} \left( \frac{E_m}{E_{eq}^0} \right)^2 - \left( \frac{\hat{R}}{C_N\delta_c}(\xi + 1) \right)^2 = 0 \\ \text{rupture} : \left( \frac{E_{eq}}{E_{eq}^0} \right)^2 + \frac{40}{23} \left( \frac{E_m}{E_{eq}^0} \right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

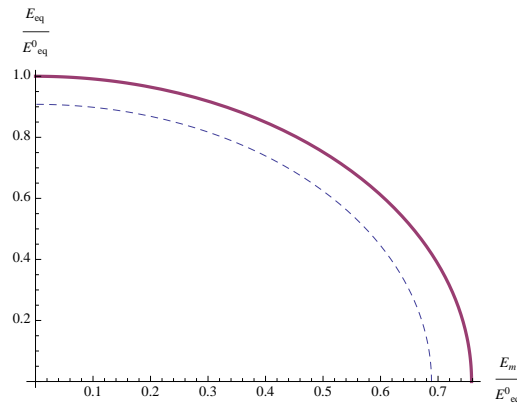


Fig. 3 – Surface de chargement à l’amorçage (pointillées) et à la rupture (gras). En abscisses la déformation hydrostatique  $E_m$  normée par rapport à la déformation à rupture pour un chargement purement déviatorique  $E_{eq}^0$ . En ordonnées la déformation équivalente  $E_{eq}$  normée par rapport à  $E_{eq}^0$ . ( $\hat{R} = 100MPa$ ,  $(\delta_c C_N)/\hat{R} = 5$ ,  $C_N = 4.10^9 MPa.mm^{-1}$ ,  $Z = 9,9.10^3 mm^{-1}$ ,  $E^M = 25.10^2 MPa$ )

Les surfaces de chargement à l’amorçage et à la rupture sont représentées sur Fig. 3. On constate que la triaxialité a un léger effet sur l’amorçage et sur la rupture ; le rapport entre un chargement purement déviatorique et un chargement purement hydrostatique est d’environ 1.3. De plus, on remarque qu’une loi cohésive locale linéaire n’engendre pas nécessairement un adoucissement macroscopique linéaire ( Fig. 4). L’énergie locale de fissuration  $G$  (aire sous la courbe locale) a une influence sur la réponse globale du milieu homogénéisé, plus particulièrement sur la valeur de l’énergie globale de rupture (aire sous la courbe globale). Ces deux quantités sont proportionnelles comme on peut le constater sur Fig.4 : une augmentation du paramètre  $G$  (de la courbe verte vers la courbe rouge) entraîne une augmentation de l’énergie globale de rupture, ce qui conduit à retarder le seuil de rupture. Dans le cas d’un état de chargement macroscopique purement hydrostatique, et sous les hypothèses déjà retenues, la contrainte cohésive maximale  $\hat{R}$  est linéairement liée à la contrainte maximale macroscopique  $\hat{\Sigma}$ . Si l’on souhaite de plus que l’approche volumique cohésive n’introduise pas de perte de raideur ( $R \rightarrow 1$ ), cette relation se réduit à :

$$\hat{R} \simeq \frac{6}{5} \hat{\Sigma} \quad (15)$$

Dans ce cas, le facteur “apparent” de concentration des contraintes du modèle cohésif est d’environ 1.2, ce qui définit une règle d’usage du modèle proposé. Ce modèle ne doit pas prédire une rupture qui intervient avant l’amorçage (la zone cohésive ne peut pas rompre avant d’avoir commencé à s’amorcer). Les critères (14) ne vérifient cette condition que si la restriction suivante sur l’ouverture critique  $\delta_c$  est imposée :

$$\delta_c \geq 5 \frac{\hat{R}}{E^M Z} \quad (16)$$

Or le calcul de l’énergie de fissuration permet d’établir le lien entre l’ouverture maximale  $\delta_c$  et l’énergie de fissuration  $G$ . En supposant que la perte de raideur est négligeable et en utilisant le critère (15), on obtient :

$$G \simeq \frac{45}{8} \frac{\hat{\Sigma}^2}{E^M Z} \quad (17)$$

On constate que  $G$  est inversement proportionnel au paramètre  $Z$ . Par conséquent, quand la taille du maillage tend vers 0 ( $Z \rightarrow \infty$ ), l’énergie locale de fissuration  $G$  doit elle aussi tendre vers 0.

## 5 Conclusion

Un modèle micromécanique d’endommagement a été obtenu sur la base d’une approche cohésive intrinsèque. Ce modèle est valable à tout taux de triaxialité. Il étend, notamment pour le cas des comportements élastiques, les résultats antérieurs partiels de la littérature [12, 13]. Au-delà des comportements

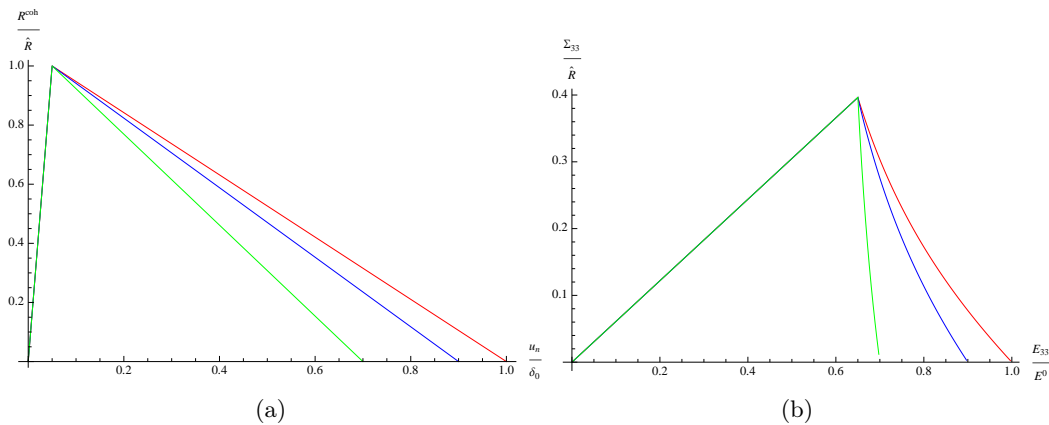


Fig. 4 – Loi globale normée (b) obtenue à partir de la loi locale normée (a) lors d’un chargement de traction hydrostatique. Les résultats sont tracés pour différentes valeurs de l’énergie locale de fissuration  $G$  ( $G$  diminue de la courbe rouge vers la courbe verte).

élastiques, ce modèle lie de manière explicite l’effet des paramètres cohésifs locaux sur la réponse élasto-endommageable macroscopique.

## Références

- [1] G. I. Barenblatt, The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fractures, *Advances In Applied Mechanics* 7 (1962) 55–129.
- [2] D. S. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits, *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960) 100–104.
- [3] S. Li, G. Wang, On damage theory of a cohesive medium, *International Journal of Engineering Science* 42 (2004) 861–885.
- [4] B. Pichler, L. Dormieux, Cohesive size of microcracks in brittle materials, *European Journal of Mechanics A/Solids* 26 (2007) 956–968.
- [5] V. Acary, Y. Monerie, Nonsmooth fracture dynamics using a cohesive zone approach, *Tech. Rep. RR-6032, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique* (2006).
- [6] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie, S. Pagano, Micromechanical damage model based on intrinsic cohesive approach and bounds on cohesive parameters, *Comptes Rendus de Mécanique* (en préparation).
- [7] M. Bornert, T. Berthau, P. Gilormini, Homgénéisation en mécanique des matériaux 1- Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques, Hermès sciences publications, 2001.
- [8] Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963) 127–140.
- [9] P. Suquet, Overall properties of nonlinear composites : Secant moduli theory and its link with pont castaneda’s variational procedure, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 320 (1995) 563–571.
- [10] P. Ponte Castañeda, The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991) 45–71.
- [11] W. Kreher, Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (1990) 115–128.
- [12] H. Espinosa, P. Zavattieri, A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials. part i : Theory and numerical implementation, *Mechanics of Materials* 35 (3-6) (2003) 333 – 364.
- [13] V. Tomar, J. Zhai, M. Zhou, Bounds for element size in a variable stiffness cohesive finite element model, *International journal for numerical methods in engineering* 61 (2004) 1894–1920.